#J

o 3.5 - Autovalores e autovetores p/ o momento angular

Joana Guimarães Santos
2024

oo Relação de comutação

$$J^2 = J_xJ_x + J_yJ_y + J_zJ_z \quad , [J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$\therefore [J^2, J_k] = 0$$

Prova for baby

$$[J_xJ_x + J_yJ_y + J_zJ_z, J_z] = [J_xJ_x, J_z] + [J_yJ_y, J_z] + \overset{0}{[J_z\cancel{J_z}, J_z]}$$

$$= -[J_z, J_xJ_x] - [J_z, J_yJ_y] = -\underbrace{[J_z, J_x]}_{i\hbar J_y}J_x - J_x\underbrace{[J_z, J_x]}_{i\hbar J_y} - \underbrace{[J_z, J_y]}_{-i\hbar J_x}J_y - J_y\underbrace{[J_z, J_y]}_{-i\hbar J_x}$$

$$= -i\hbar(\cancel{J_yJ_x} + \cancel{J_xJ_y}) + i\hbar(\cancel{J_xJ_y} + \cancel{J_yJ_x}) = 0 \;//$$

Prova que vale o mesmo

$$[J_iJ_i, J_j] = -[J_j, J_iJ_i] = -[J_j, J_i]J_i - J_i[J_j, J_i]$$

$$= -i\hbar\varepsilon_{jik}J_kJ_i - J_i i\hbar \varepsilon_{jik}J_k$$

$$= -i\hbar(\varepsilon_{jik}J_kJ_i + \varepsilon_{jik}J_iJ_k)$$

$$= -i\hbar(\varepsilon_{jik}J_iJ_k - \varepsilon_{jki}J_kJ_i)$$

$$= -i\hbar(\varepsilon_{jik}J_iJ_k - \varepsilon_{jik}J_iJ_k) = 0 \;//$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ se } (1,2,3) \text{ ou } (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ -1 \text{ se } (3,2,1) \text{ ou } (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3) \\ 0 \text{ se } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i \end{cases}$$

o símbolo // representar índi. ca que se repete é arbitrário

Como J_x, J_y e J_z não comutam entre si, podemos escolher apenas um dela p/ ser o observável a ser diagonalizado simultâneamente com J^2. Por convenção escolhemos J_z.

$\Downarrow$

isso significa que J^2 e J_z possuem uma base em comum

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} J^2|a,b\rangle &= a|a,b\rangle \\ J_z|a,b\rangle &= b|a,b\rangle \end{aligned}\right\}$$

quanto vale a e b?

$\Downarrow$

definimos $J_\pm = J_x \pm iJ_y$

$\downarrow$

Operadores de escada

James Guimarães Santos
2024

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$$

Prova:

$$[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] = -i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x]$$

$= 0$; $= 0$

$$= +\hbar J_z + \hbar J_z = 2\hbar J_z \; //$$

$$[J_z, J_\pm] = [J_z, J_x \pm iJ_y] = [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y]$$

$$= i\hbar J_y \pm i \cdot i\hbar(-1) J_x$$

$$= i\hbar J_y \pm \hbar J_x$$

$$= \hbar[iJ_y \pm J_x] = \pm\hbar[J_x \pm iJ_y] = \pm\hbar J_\pm \; //$$

$$[J^2, J_\pm] = 0$$

Prova

Já provei

$$[J^2, J_x \pm iJ_y] = [J^2, J_x] \pm [J^2, J_y] = 0$$

Temos um operador que a princípio facilita nossa vida e temos algumas relações de comutação úteis. Mas, qual o significado físico de $J_\pm$? Vamos examinar a atuação de J_z e J^2 em $J_\pm|a,b\rangle$

$$J_z(J_\pm|a,b\rangle) = ([J_z, J_\pm] + J_\pm J_z)|a,b\rangle$$

$$= \pm\hbar J_\pm|a,b\rangle + J_\pm J_z|a,b\rangle = \pm\hbar J_\pm|a,b\rangle + b J_\pm|a,b\rangle$$

$$= (b \pm \hbar)(J_\pm|a,b\rangle)$$

Se aplicamos $J_\pm$ a um autovetor de J_z, o autovetor resultante ainda é um autovetor de J_z, exceto que seu autovalor agora é aumentado ou diminuído em uma unidade de $\hbar$. Então agora vemos porque $J_\pm$, que dá um passo p/ cima ou p/ baixo na "escada" dos autovalores J_z, são conhecidos como operadores de escada.

#

$$J^2(J_\pm|a,b\rangle) = J_\pm J^2|a,b\rangle = a(J_\pm|a,b\rangle)$$ James Guimarães Santos 2019

* $[J^2, J_\pm] = 0$

$\Rightarrow J^2 J_\pm = J_\pm J^2$

$\Downarrow$

$J_\pm$ não altera os autovalores dos autovetores de J^2.

Conclusão

$$J_\pm|a,b\rangle = C_\pm|a,b\pm\hbar\rangle$$

∴ autovalores de J^2 e J_z

$$a \geq b^2.$$

Prova:

$$J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

Note que $J_+J_+^\dagger$ e $J_+^\dagger J_+$ possuem valor esperado positivo porque

$$J_+^\dagger|a,b\rangle \leftrightarrow \langle a,b|J_+ \,,\quad J_+|a,b\rangle \leftrightarrow \langle a,b|J_+^\dagger$$

$$\langle a,b|(J^2 - J_z^2)|a,b\rangle \geq 0$$

$$\langle a,b|J^2|a,b\rangle - \langle a,b|J_zJ_z|a,b\rangle \geq 0$$

$$a - b^2 \geq 0 \Rightarrow a \geq b^2$$

Portanto, deve existir um $b_{máx}$ tal que

$$J_+|a,b_{máx}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow J_-J_+|a,b_{máx}\rangle = 0$$

Note que

$$J_-J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + iJ_xJ_y - iJ_yJ_x$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + i(J_xJ_y - J_yJ_x) = J_x^2 + J_y^2 + i\underbrace{[J_x, J_y]}_{i\hbar J_z}$$

$$= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

Então

$$b^2_{máx}|a,b_{máx}\rangle$$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|a,b_{máx}\rangle = 0$$

$a|a,b_{máx}\rangle$ $\quad \hbar b_{máx}|a,b_{máx}\rangle \rightarrow$ Esse ket não pode ser nulo

$$\Rightarrow a - b^2_{máx} - \hbar b_{máx} = 0 \Rightarrow a = b_{máx}(b_{máx} + \hbar)$$

Jemes Guimarães Santos
2024

Usando um argumento similar

$$J_-|a, b_{min}\rangle = 0$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$\Rightarrow \quad a = b_{min}(b_{min} - \hbar)$$

$$\Rightarrow b_{min}(b_{min} - \hbar) = b_{máx}(b_{máx} + \hbar)$$

$$\Rightarrow b_{min} = -b_{max} \quad \text{ou} \quad b_{max} = -b_{min}$$

↳ é positivo ⇒ $b_{min} < 0$

$$-b_{max} \leq b \leq b_{max}$$

É claro que devemos obter $|a, b_{máx}\rangle$ aplicando J_+ quantas vezes forem necessárias

$$b_{máx} = b_{min} + n\hbar \quad , \ n \in \mathbb{Z}$$

$$b_{máx} = -b_{max} + n\hbar$$

$$2b_{máx} = n\hbar$$

$$b_{máx} = \frac{n\hbar}{2}$$

É melhor definir $j = \frac{b_{máx}}{\hbar}$

$$\Rightarrow j = \frac{n}{2} \rightarrow \text{só pode valer } \left(0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots\right)$$

Lembre que

$$a = b_{max}(b_{max} + \hbar) \doteq \hbar^2 j(j+1)$$

Façamos também $b \doteq m\hbar$

Se j é um inteiro, todos os valores de m são inteiros

Se j é um semi-inteiro, todos os valores de m são semi inteiros

$$m = -j, -j+1, \ldots j-1, j$$

$2j+1$ estados

$$\therefore \ J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle$$

$$J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle$$

James Guimaraes Santos
2024

Elementos matriciais de operadores de momento angular

Assumindo $|j,m\rangle$ normalizado

$$\langle j',m'|J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}$$

and

$$\langle j',m'|J_z|j,m\rangle = m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm}$$

$$J_+|j,m\rangle = C^+_{j,m}|j,m+1\rangle$$

$$\langle j,m|J_+^\dagger J_+|j,m\rangle = \langle j,m|(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|j,m\rangle$$

$$= \hbar^2[j(j+1) + m^2(m+1)] = C^+_{j,m}C^{+\dagger}_{j,m}$$

$$C^+_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1)+m(m+1)}$$

$$\Rightarrow \quad J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)+m(m\pm1)}\,|j,m\pm1\rangle$$

Então

$$\langle j',m'|J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)+m(m\pm1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m\pm1}$$