

# **Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -**

**Vorlesung im Wintersemester 2011/2012**

Sarah Lutteropp

25. Oktober 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Homotopie und Fundamentalgruppe</b>	<b>3</b>
<b>2 Grundlagen der allgemeinen Topologie</b>	<b>6</b>

## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

# Kapitel 1

## Homotopie und Fundamentalgruppe

**Definition 1.1** (Topologischer Raum). Ein topologischer Raum  $X$  ist gegeben durch eine Menge  $X$  und ein System  $\sigma$  von Teilmengen von  $X$ , den so genannten offenen Mengen von  $X$ , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und  $X$  und die leere Menge  $\emptyset$  als Elemente enthält.

$X$  Menge,  $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ :

- (1)  $O_1, O_2 \in \sigma \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \sigma$
- (2)  $O_\alpha \in \sigma, \alpha \in A, A \text{ Indexmenge} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \sigma$
- (3)  $X, \emptyset \in \sigma$

**Beispiel 1.1.**  $\sigma = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \sigma)$  ist topologischer Raum!

**Beispiel 1.2.**

$X$  Menge,  $\sigma = \{\{x\} | x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\sigma}$

$\Rightarrow (X, \tilde{\sigma})$  ist topologischer Raum.  $\sigma$  ist "Basis" der Topologie  $\tilde{\sigma}$ .

**Definition 1.2** (Metrischer Raum). Ein metrischer Raum  $X$  ist eine Menge  $X$  mit einer Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , der "Metrik" auf  $X$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1)  $d(x, y) = d(y, x)$  "Symmetrie"
- (2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$  "Definitheit"
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  "Dreiecksungleichung"
- $\forall x, y, z \in X$

**Definition 1.3** (stetig). Eine Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt stetig, falls die  $F$ -Urbilder offener Mengen in  $Y$  offene Teilmengen von  $X$  sind.

**Bemerkung 1.1.** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen  $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} (\epsilon > 0)$ , und  $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit  $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$ .

**Definition 1.4** (Homotopie). Eine Homotopie  $H: f \simeq g$  zwischen zwei (stetigen) Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I^1 \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ .

TODO:BILDER

**Bemerkung 1.2.**  $H$  heißt auch Homotopie von  $f$  nach  $g$ , eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang"  $f$  und "Ende"  $g$ .  $f$  und  $g$  heißen dann homotop, in Zeichen:  $f \simeq g$ .

**Erinnerung** Sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, so ist eine Homotopie  $H = (h_t), t \in [0, 1]$ , eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen  $h_t: X \rightarrow Y$  mit Anfang  $h_0$  und Ende  $h_1$ . (TODO: BILD)

**Definition 1.5** (homotope Abbildungen). Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen:  $f \simeq g$ , falls eine Homotopie mit Anfang  $f$  und Ende  $g$  existiert.

**Bemerkung 1.3.** "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie: Gilt für  $f, g \in C(X, Y) := \{F: X \rightarrow Y \text{ stetig} \}$   $f \simeq g$  vermöge  $H = (h_t), t \in [0, 1]$ , so liefert  $(\tilde{h}_t)$  mit  $\tilde{h}_t := h_{1-t}$  eine Homotopie von  $g$  nach  $f$ , d.h.  $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$ .

Reflexivität:  $f \simeq f$  vermöge  $h_t \equiv f \forall t \in [0, 1]$

Transitivität: Es sei  $f \simeq g$  vermöge  $(h_t)$  und ferner  $g \simeq l$  vermöge  $(k_t)$ . Dann liefert  $M: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $l$ .

Also ist  $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$ . □

---

<sup>1</sup> $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

(TODO:BILD)

**Bemerkung 1.4.** Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von  $C(X, Y)$  in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  wird mit  $[X, Y]$  bezeichnet. (TODO: BILD)

**Bemerkung 1.5.**  $C(X, Y)$  ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als  $[X, Y]$ !

**Beispiel 1.3.** Je zwei stetige Abbildungen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind homotop! Denn  $H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$  liefert eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ : (TODO: BILD)

**Definition 1.6.** Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (TODO:BILD)

**Korollar 1.1.** Jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum  $X$  besteht  $[X, \mathbb{R}^n]$ ,  $n$  beliebig, nur aus einem Punkt!

**Beispiel 1.4.** Jeder geschlossene Weg im  $\mathbb{R}^2$ , d.h. jede stetige Abbildung  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(0) = f(1)$  ist nullhomotop.  $[0, 1], \mathbb{R}^2$  + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve  $t \mapsto (1, 0)$ . (TODO: BILD) Interpretiere einen geschlossenen Weg im  $\mathbb{R}^2$  auch als stetige Abbildung von  $S^1$  in  $\mathbb{R}^2$ , so gilt also  $[S^1, \mathbb{R}^2]$  ist einelementig.  
Aber  $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$  ist nichttrivial! (TODO: BILD)

**Definition 1.7.** Es sei  $(X, \sigma)$  topologischer Raum und  $A \subset X$ . Die auf  $A$  durch

$$\sigma|_A := \{U \cap A \mid U \in \sigma\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum  $(A, \sigma|_A)$  heißt Teilraum von  $(X, \sigma)$ .

**Bemerkung 1.6.**  $B \subset A$  ist also genau dann offen in  $A$ , wenn  $B$  der Schnitt einer in  $X$  offenen Menge mit  $A$  ist.

**Beispiel 1.5.**  $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$   
(TODO: BILD)

Achtung:  $B$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}^2$ !

## Kapitel 2

# Grundlagen der allgemeinen Topologie

- Beispiel 2.1** (Beispiele topologischer Räume). • (1)  $X, \sigma := \{X, \emptyset\}$   
‘triviale Topologie’
- (2)  $X, \sigma := \mathcal{P}(X)$  ‘diskrete Topologie’
  - (3) *Metrische Räume, siehe unten*
  - (4)  $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \sigma := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$  definiert eine Topologie auf  $X$ , aber  $\sigma' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$  nicht!
  - (5)  $X := \mathbb{R}, \sigma := \{O \mid O \text{ ist Vereinigung von Intervallen } (a, b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (X, \sigma) \text{ ist topologischer Raum, und } \sigma \text{ hei\u00dft Standard-Topologie.}$
  - (6)  $X := \mathbb{R}, \tilde{\sigma} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  ist auch eine Topologie auf  $\mathbb{R}$ , die so genannte  $\tau_1$ -Topologie.

**Definition 2.1.**  $A \subset X, X$  topologischer Raum, hei\u00dft abgeschlossen  $:\Leftrightarrow X \setminus A$  ist offen.

**Bemerkung 2.1.** Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso  $X$  und  $\emptyset$ .

**Beispiel 2.2.** In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in  $\mathbb{R}_{\tau_1}$ <sup>1</sup> alle endlichen Teilmengen und  $X, \emptyset$ .

**Definition 2.2.** Ist  $X$  topologischer Raum und  $x \in X$ , so hei\u00dft jede offene Teilmenge  $O \subset X$  mit  $x \in O$  eine Umgebung von  $x$ .

**Bemerkung 2.2.** Umgebungen sind per definitionem offen! (TODO: BILD)

---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}$  mit  $\tau_1$ -Topologie

**Bemerkung 2.3.** Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}_{\text{Standard}}$  ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!

**Beispiel 2.3** (Die Cantor-Menge  $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0, 2\} \right\}$ ).  
(TODO: BILD)

$\Rightarrow \mathcal{C}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , enthält überabzählbar viele Elemente und hat ‘Hausdorff-Dimension’  $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6 \dots$

**Definition 2.3.** Ist  $(X, \sigma)$  topologischer Raum mit  $\mathcal{B} \subset \sigma$ , so heißt  $\mathcal{B}$  Basis der Topologie  $:\Leftrightarrow$  Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ .

**Beispiel 2.4.** • (1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von  $\mathbb{R}$ .

• (2) Sämtliche offenen<sup>2</sup> Kreisscheiben (TODO: BILD) und auch sämtliche offenen Quadrate (TODO: BILD) bilden Basen ein und derselben Topologie auf  $\mathbb{R}^2$ .

(TOSO: BILD)

**Bemerkung 2.4.** •  $\mathcal{B} \subset \sigma$  ist Basis der Topologie von  $X \Leftrightarrow \forall O \in \sigma \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset O$ .

•  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  bildet die Basis einer Topologie auf  $X \Leftrightarrow X$  ist Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  und der Schnitt je zweier Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist eine Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ .

(TODO: BILD)

**Definition 2.4.** Seind  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  Topologien auf  $X$  und  $\sigma_1 \subset \sigma_2$ , so heißt  $\sigma_2$  feiner als  $\sigma_1$  und  $\sigma_1$  gröber als  $\sigma_2$ .

**Beispiel 2.5.** • Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf  $X$ , die diskrete Topologie die feinste.

• Die Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$  ist feiner als die  $\tau_1$ -Topologie.

## Mehr in metrischen Räumen:

**Definition 2.5.** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und  $\epsilon > 0$  sei für  $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$  der offene  $\epsilon$ -Ball um  $p$
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$  der abgeschlossene  $\epsilon$ -Ball um  $p$
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$  die  $\epsilon$ -Sphäre um  $p$  (oder Sphäre vom Radius  $\epsilon$ )

---

<sup>2</sup>bezüglich der euklidischen Metrik

**Definition 2.6.** Ist  $(X, d)$  metrischer Raum und  $A \subset X$ , so heißt der metrische Raum  $(A, d|_{A \times A})$  (metrischer) Unterraum von  $X$ .

**Beispiel 2.6.** Für  $X = \mathbb{R}_{Eukl.}^n$  sind  $B_1(0), D_1(0) =: D^n$  und  $S^{n-1} := S_1(0)$  metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw.  $(n-1)$ -Sphäre.

(TODO: BILD)

**Definition 2.7.**  $A \subset (X, d)$  heißt beschränkt

$:\Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{R}: d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$

(TODO: BILD)

Das Infimum,  $\text{diam } A$ , dieser  $\rho$  heißt dann Durchmesser von  $A$ .

**Bemerkung 2.5.** In einem metrischen Raum  $(X, d)$  bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie  $\sigma = \sigma_d$  von  $X$ , diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

**Bemerkung 2.6.**  $A \subset (X, d)$  ist dann offen  $\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$  ein offener Ball  $B_\epsilon(p)$  um  $p$  mit  $B_\epsilon(p) \subset A$

(TODO: BILD)

**Definition 2.8.**  $(X, d)$  sei metrischer Raum und  $A \subset X, p \in X$ .

$$d(p, A) := \text{dist}(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von  $p$  und  $A$ .