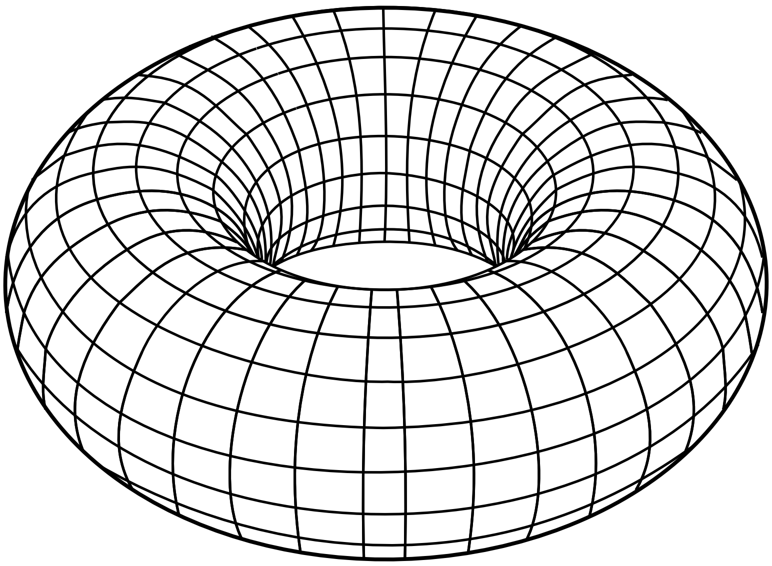
Einführung in die Geometrie und Topologie - Definitionen -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

22. November 2011



Inhaltsverzeichnis

1 Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

2 Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

(1) $d(x,y) = d(y,x)$ "Symmetrie"

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x,y) \geq 0$ "Definitheit"

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ "Dreiecksungleichung"

3 Stetigkeit

Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

4 Homotopie

Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I^1 \to Y, (x,t) \mapsto H(x,t)$$

mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x) \forall x \in X$.

5 Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

6 Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

7 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\Big|_A)$ heißt Teilraum von $(X, \mathcal{O})$.

8 Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \backslash A$ ist offen.

9 Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x.

[1] $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$

10 Basis

Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie :$\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

11 Feiner und gröber

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

12 ϵ-Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ der offene ϵ-Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ-Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)

13 Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

14 Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
:$\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}\colon d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.

15 Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

16 Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \backslash A$ hat.

17 Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

18 Abschluss

Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X \backslash \Big((X \mathring{\backslash} A) \Big)$.

19 Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A} \backslash \mathring{A}$, d.h. Rand $A = \{$ Randpunkte von A $\}$.

20 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

21 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X :\Leftrightarrow \forall$ Umgebungen V von $f(x) \exists$ Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

22 Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y\left(f(x), f(x')\right) = d_X(x, x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

23 Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

24 homöomorph

Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

25 Einbettung

$f\colon X \to Y$ stetig heißt Einbettung $:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y$ Homöomorphismus.

26 Äquivalenz von Einbettungen

Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow \exists$ Homöomorphismen $h_X\colon X \to X, h_Y\colon Y \to Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$, d.h. dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h_y"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

27 Knoten

Eine Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißt Knoten.

28 zusammenhängend

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind $\emptyset$ und X.
Ansonsten heißt X un- oder nicht zusammenhängend.

29 Überdeckung

Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$[2] von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X $:\Leftrightarrow X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

[2] A Indexmenge

$\mathcal{U}$ heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung $\Leftrightarrow$ alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.
Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' $:\Leftrightarrow X' \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

30 Partition

Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte Teilmengen.

31 Zusammenhangskomponente

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X.

32 Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.

33 Wegzusammenhang

X heißt wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Zu je zwei Punkten $x, x' \in X \exists$ Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$.

34 Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

35 T_1-Raum

Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält.
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$

36 T_2-Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom :⇔ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

37 Grenzwert

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \forall n \geq N$.

38 Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

39 Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom :⇔ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom :⇔ X selbst besitzt eine abzählbare Basis.
X heißt separabel :⇔ X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.

40 Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt
:⇔ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\overline{U}$ kompakt ist.

41 Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich :⇔ $\forall x \in X \exists U = U(x)\colon A \cap U = \emptyset \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A.

42 Verfeinerung

Γ, Δ Überdeckungen von X. Δ heißt Verfeinerung von Γ
$:\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma \colon A \subset B$.

43 Parakompaktheit

X heißt parakompakt $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

44 Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie
2. M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{offen} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi \colon U \to V, V \subset_{offen} \mathbb{R}^n$.
   Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p.

45 Atlas

Ein Atlas für eine topologische n-Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$[3] von Karten $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup\limits_{a \in \Lambda} U_\alpha$

46 C^k-Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k-Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k-Abbildung, also k-mal stetig differenzierbar ist. $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega)$

47 Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k-Atlas von M, so heißt eine Karte (φ, U) von M mit $\mathcal{A}$ verträglich, falls

[3] Λ Indexmenge

$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k-Atlas ist. Ein C^k-Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls $\mathcal{A}$ alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.

48 C^k-Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k-Mannigfaltigkeit) ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k-Struktur auf M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.

49 Produkt-Topologie

Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, so bildet

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, und diese heißt Produkt-Topologie auf $X \times Y$.
Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ sebst ein topologischer Raum und für gegebene X, Y denkt man sich $X \times Y$ stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

50 C^l-Abbildung

Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $(M', \mathcal{A}')$ eine n'-dimensionale $C^{k'}$-Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt differenzierbar (von der Klasse C^l) oder kurz: C^l-Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine C^l-Abbildung im üblichen Sinn.

51 Untermannigfaltigkeit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$.

52 Quotienten(raum)topologie

Eine Teilmenge $U \subset X/S$ heißt offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X
Alle im Sinne dieser Definition offenen Teilmengen von X/S definieren dann eine Topologie auf X/S und die Menge X/S zusammen mit dieser Topologie heißt Qotientenraum von X nach S.

53 Quotientenabbildung

Ist S eine Partition von X in nichtleere disjunkte Teilmengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die auf jedem Element von S konstant ist, so existiert eine Abbildung $X/S \to Y$, die jedes Element A von S auf $f(a), a \in A$, abbildet. Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von f nach S, in Zeichen f/S.

54 injektiver Quotient

Jede Abbildung $f\colon X \to Y$ definiert eine Partition $S = S(f)$ von X, und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von Y unter f.
Die induzierte Abbildung $f/_{S(f)}\colon X/_{S(f)} \to Y$ ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von f.