

Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

31. Oktober 2011



Inhaltsverzeichnis

1 Homotopie und Fundamentalgruppe	2
1.1 Vorwort	2
1.2 Grundlagen der allgemeinen Topologie	6

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel 1

Homotopie und Fundamentalgruppe

1.1 Vorwort

1.1.1 Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System \mathcal{O} von Teilmengen von X , den so genannten offenen Mengen von X , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge \emptyset als Elemente enthält.

X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

- (1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
- (2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A \text{ Indexmenge} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$
- (3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Beispiel 1.1. $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum!

Beispiel 1.2.

X Menge, $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$ ist topologischer Raum. \mathcal{O} ist "Basis" der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$.

1.1.2 Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X , die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"
- (2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"

1.1.3 Stetigkeit

Eine Abbildung $F: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F -Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

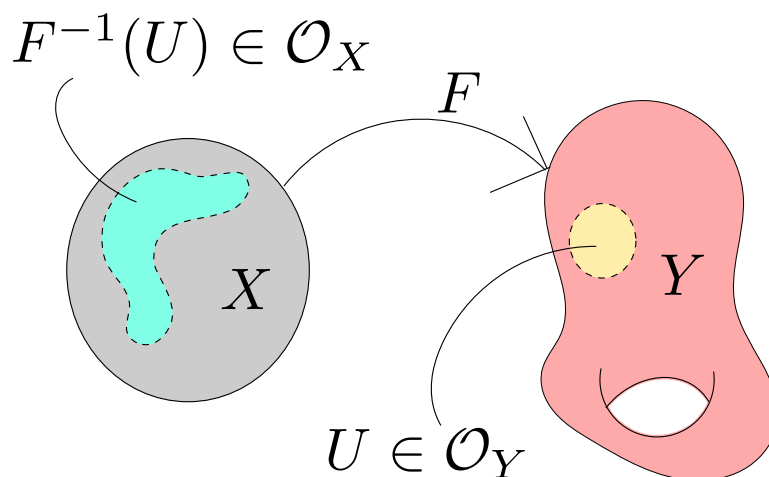


Abbildung 1.1: Stetige Abbildung

Bemerkung 1.1. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen

Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} (\epsilon > 0)$, und $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.

1.1.4 Homotopie

Eine Homotopie $H: f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I^a \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

$$^a I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

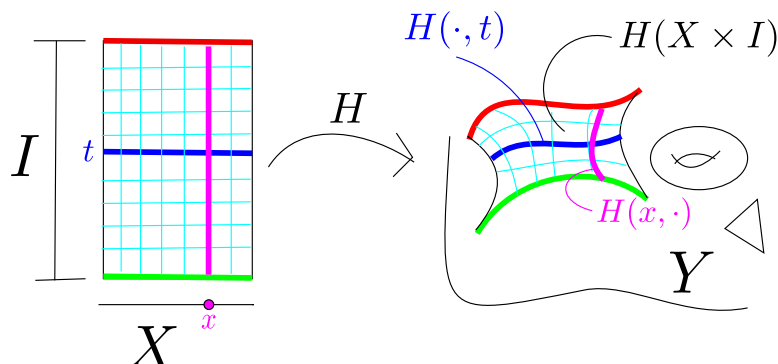


Abbildung 1.2: Homotopie

TODO:BILDER

Bemerkung 1.2. H heißt auch Homotopie von f nach g , eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g . f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0, 1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t: X \rightarrow Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1 . (TODO: BILD)

1.1.5 Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung 1.3. "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X, Y) := \{F: X \rightarrow Y \text{ stetig} \}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0, 1]$, so liefert (\tilde{h}_t) mit $\tilde{h}_t := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f , d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.

Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t \equiv f \forall t \in [0, 1]$

Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t) . Dann liefert $M: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l .

Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

(TODO:BILD)

Bemerkung 1.4. Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X, Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X, Y]$ bezeichnet. (TODO: BILD)

Bemerkung 1.5. $C(X, Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X, Y]$!

Beispiel 1.3. Je zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g : (TODO: BILD)

1.1.6 Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (TODO:BILD)

Korollar 1.1. Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!

Beispiel 1.4. Jeder geschlossene Weg im \mathbb{R}^2 , d.h. jede stetige Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $[[0, 1], \mathbb{R}^2]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1, 0)$. (TODO: BILD) Interpretiere einen geschlossenen Weg im \mathbb{R}^2 auch als stetige Abbildung von $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ in \mathbb{R}^2 , so gilt also $[S^1, \mathbb{R}^2]$ ist einelementig. Aber $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$ ist nichttrivial! (TODO: BILD)

1.1.7 Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}|_A)$ heißt Teilraum von (X, \mathcal{O}) .

Bemerkung 1.6. $B \subset A$ ist also genau dann offen in A , wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.

Beispiel 1.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$
(TODO: BILD)

Achtung: B ist nicht offen in \mathbb{R}^2 !

1.2 Grundlagen der allgemeinen Topologie

Beispiel 1.6 (Beispiele topologischer Räume). • (1) $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$
‘triviale Topologie’

- (2) $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ ‘diskrete Topologie’
- (3) Metrische Räume, siehe unten
- (4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ definiert eine Topologie auf X , aber $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ nicht!
- (5) $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O \text{ ist Vereinigung von Intervallen } (a, b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum, und \mathcal{O} heißt Standard-Topologie.

- (6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ ist auch eine Topologie auf \mathbb{R} , die so genannte \mathcal{T}_1 -Topologie.

1.2.1 Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \setminus A$ ist offen.

Bemerkung 1.7. Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso X und \emptyset .

Beispiel 1.7. In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ¹ alle endlichen Teilmengen und X, \emptyset .

1.2.2 Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x .

Bemerkung 1.8. Umgebungen sind per definitionem offen! (TODO: BILD)

Bemerkung 1.9. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{\text{Standard}}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R} sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!

Beispiel 1.8 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0, 2\}\right\}$).
(TODO: BILD)

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} , enthält überabzählbar viele Elemente und hat ‘Hausdorff-Dimension’ $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6 \dots$

1.2.3 Basis

Ist (X, \mathcal{O}) topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt \mathcal{B} Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

¹ \mathbb{R} mit \mathcal{T}_1 -Topologie

Beispiel 1.9. • (1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von \mathbb{R} .

• (2) Sämtliche offenen² Kreisscheiben (TODO: BILD) und auch sämtliche offenen Quadrate (TODO: BILD) bilden Basen ein und derselben Topologie auf \mathbb{R}^2 .

(TOSO: BILD)

Bemerkung 1.10. • $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ist Basis der Topologie von $X \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset O$.

• $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Basis einer Topologie auf $X \Leftrightarrow X$ ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} und der Schnitt je zweier Mengen aus \mathcal{B} ist eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

(TODO: BILD)

1.2.4 Feiner und gröber

Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt \mathcal{O}_2 feiner als \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_1 gröber als \mathcal{O}_2 .

Beispiel 1.10. • Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X , die diskrete Topologie die feinste.

• Die Standard-Topologie auf \mathbb{R} ist feiner als die \mathcal{T}_1 -Topologie.

Mehr zu metrischen Räumen

1.2.5 ϵ -Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ der offene ϵ -Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ -Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ die ϵ -Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)

²bezüglich der euklidischen Metrik

1.2.6 Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X .

Beispiel 1.11. Für $X = \mathbb{R}_{\text{Eukl.}}^n$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$ -Sphäre.
(TODO: BILD)

1.2.7 Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt

$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}: d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$

(TODO: BILD)

Das Infimum, $\text{diam } A$, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A .

Bemerkung 1.11. In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ von X , diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

Bemerkung 1.12. $A \subset (X, d)$ ist offen

$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$

(TODO: BILD)

1.2.8 Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := \text{dist}(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A .

Erinnerung Ist (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und $A \subset X$, so definiert $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A , die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

Bemerkung 1.13. Ist $A \subset X$ offen in X , so ist auch jede in A offene Menge offen in X , und abgeschlossene Teilmengen einer in X abgeschlossenen Menge A sind auch abgeschlossen in X .

(TODO:BILD)

Aber abgeschlossene Mengen B in $A \subset X$ sind für beliebiges A im Allgemeinen nicht abgeschlossen in X .

Beispiel 1.12. $B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$

1.2.9 Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

- (1) innerer Punkt von A , falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt. (TODO:BILD)
- (2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.
- (3) Randpunkt von A , falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \setminus A$ hat.

1.2.10 Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\overset{\circ}{A}$ Inneres von A .

Bemerkung 1.14. $\overset{\circ}{A}$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A , und A ist offen $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

Beispiel 1.13. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

1.2.11 Abschluss

Der Abschluss \bar{A} von A ist $X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$.

1.2.12 Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ$, d.h. Rand $A = \{ \text{Randpunkte von } A \}$.

(TODO:Exkurs zu ‘Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander’)

1.2.13 Stetigkeit

$f: X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X .

Beispiel 1.14. • $f: X \rightarrow Y$ ist stetig \Leftrightarrow Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

- Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 Topologien auf X , so ist die Identität $\text{id}: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ stetig $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.
- Für $A \subset X$ ist die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}|_A$ die größte Topologie, bezüglich der die Inklusion $i: A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ stetig ist.

1.2.14 Stetigkeit

$f: X \rightarrow Y$ ist stetig in $x \in X \Leftrightarrow \forall$ Umgebungen V von $f(x) \exists$ Umgebung U von x und $f(U) \subset V$
(TODO:BILD)

Bemerkung 1.15. $f: X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

Beispiel 1.15. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für jeden offenen Ball um $f(x)$ ein offener Ball um x existiert, der unter f in den Ball um $f(x)$ abgebildet wird. (Und ferner stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ auch $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ folgt.)

1.2.15 Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ isometrische Einbettung
 $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.
 Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

1.2.16 Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f: X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

Beispiel 1.16. • $f: [0, 1) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi it} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
 ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!
 (TODO:BILD)

- $\text{id}_X: X \rightarrow X$ ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.

Bemerkung 1.16. ‘Homöomorph sein’ ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.

1.2.17 homöomorph

Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

Bemerkung 1.17. *Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:*

- Ist $f: X \rightarrow Y$ Homöomorphismus, so ist $U \subset X$ offen $\Leftrightarrow f(U)$ offen in Y .
- $A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow f(A)$ ist abgeschlossen in Y .
- $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{(f(A))}$.
- U ist Umgebung von $x \in X \Leftrightarrow f(U)$ ist Umgebung von $f(x)$.

Beispiel 1.17. • Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.

- $[0, 1] \cong [a, b] \forall a < b \in \mathbb{R}$
- $(0, 1) \cong (a, b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$

Beispiel 1.18. *Stereographische Projektion (TODO:BILD)*

Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von $S^n \setminus \{N\}$, $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, gegeben wie folgt:

Der Schnitt der Geraden im \mathbb{R}^{n+1} durch N und $x \in S^n \setminus \{N\}$ $f(x)$, mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, ist gegeben durch $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$ mit Umkehrabbildung $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1})$.