Einführung in die Geometrie und Topologie
- Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

18. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel 1

Homotopie und Fundamentalgruppe

Definition 1.1 (Topologischer Raum). *Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System σ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.*
X Menge, $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

- *(1) $O_1, O_2 \in \sigma \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \sigma$*
- *(2) $O_\alpha \in \sigma, \alpha \in A, A$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \sigma$*
- *(3) $X, \emptyset \in \sigma$*

Beispiel 1.1. $\sigma = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \sigma)$ *ist topologischer Raum!*

Beispiel 1.2.

$$X \text{ Menge, } \sigma = \{\{x\} | x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\sigma}$$

$\Rightarrow (X, \tilde{\sigma})$ *ist topologischer Raum.* σ *ist "Basis" der Topologie* $\tilde{\sigma}$.

Definition 1.2 (Metrischer Raum). *Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

- *(1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"*
- *(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"*
- *(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"*
- $\forall x, y, x \in X$

Definition 1.3 (stetig)**.** *Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.*

Bemerkung 1.1. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\} (\epsilon > 0)$, und $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.*

Definition 1.4 (Homotopie)**.** *Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung*

$$H\colon X \times I^1 \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

TODO:BILDER

Bemerkung 1.2. *H heißt auch Homotopie von f nach g, eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g. f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.*

[1] $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$