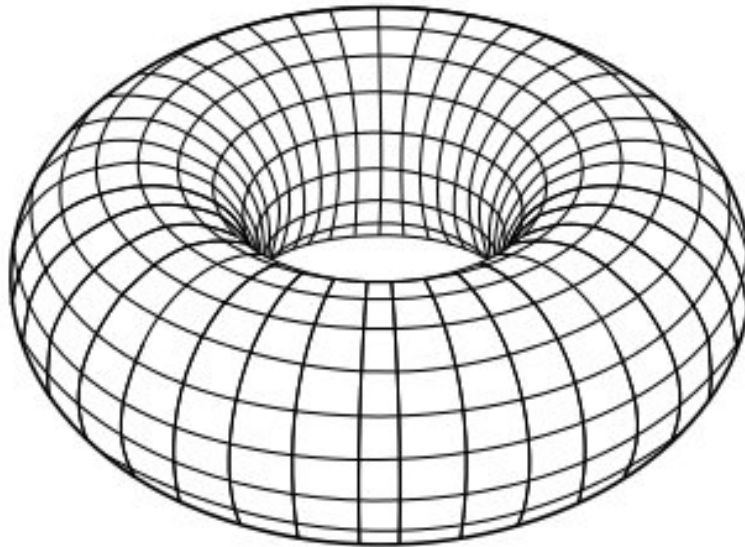


Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

26. Oktober 2011



Inhaltsverzeichnis

1 Homotopie und Fundamentalgruppe	2
2 Grundlagen der allgemeinen Topologie	5

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel 1

Homotopie und Fundamentalgruppe

Definition 1.1 (Topologischer Raum). Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System σ von Teilmengen von X , den so genannten offenen Mengen von X , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge \emptyset als Elemente enthält.

X Menge, $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

- (1) $O_1, O_2 \in \sigma \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \sigma$
- (2) $O_\alpha \in \sigma, \alpha \in A, A \text{ Indexmenge} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \sigma$
- (3) $X, \emptyset \in \sigma$

Beispiel 1.1. $\sigma = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \sigma)$ ist topologischer Raum!

Beispiel 1.2.

X Menge, $\sigma = \{\{x\} \mid x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\sigma}$

$\Rightarrow (X, \tilde{\sigma})$ ist topologischer Raum. σ ist "Basis" der Topologie $\tilde{\sigma}$.

Definition 1.2 (Metrischer Raum). Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"
- (2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"
- $\forall x, y, z \in X$

Definition 1.3 (stetig). Eine Abbildung $F: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F -Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

Bemerkung 1.1. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} (\epsilon > 0)$, und $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.

Definition 1.4 (Homotopie). Eine Homotopie $H: f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I^1 \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

TODO:BILDER

Bemerkung 1.2. H heißt auch Homotopie von f nach g , eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g . f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0, 1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t: X \rightarrow Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1 . (TODO: BILD)

Definition 1.5 (homotope Abbildungen). Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung 1.3. "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X, Y) := \{F: X \rightarrow Y \text{ stetig} \}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0, 1]$, so liefert (\tilde{h}_t) mit $\tilde{h}_t := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f , d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.

Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t \equiv f \forall t \in [0, 1]$

Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t) . Dann liefert $M: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l .

Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

¹ $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

(TODO:BILD)

Bemerkung 1.4. Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X, Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X, Y]$ bezeichnet. (TODO: BILD)

Bemerkung 1.5. $C(X, Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X, Y]$!

Beispiel 1.3. Je zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g : (TODO: BILD)

Definition 1.6. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (TODO:BILD)

Korollar 1.1. Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!

Beispiel 1.4. Jeder geschlossene Weg im \mathbb{R}^2 , d.h. jede stetige Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $[0, 1], \mathbb{R}^2$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1, 0)$. (TODO: BILD) Interpretiere einen geschlossenen Weg im \mathbb{R}^2 auch als stetige Abbildung von S^1 in \mathbb{R}^2 , so gilt also $[S^1, \mathbb{R}^2]$ ist einelementig.
Aber $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$ ist nichttrivial! (TODO: BILD)

Definition 1.7. Es sei (X, σ) topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\sigma|_A := \{U \cap A \mid U \in \sigma\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \sigma|_A)$ heißt Teilraum von (X, σ) .

Bemerkung 1.6. $B \subset A$ ist also genau dann offen in A , wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.

Beispiel 1.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$
(TODO: BILD)

Achtung: B ist nicht offen in \mathbb{R}^2 !

Kapitel 2

Grundlagen der allgemeinen Topologie

- Beispiel 2.1** (Beispiele topologischer Räume). • (1) $X, \sigma := \{X, \emptyset\}$ ‘triviale Topologie’
- (2) $X, \sigma := \mathcal{P}(X)$ ‘diskrete Topologie’
 - (3) *Metrische Räume, siehe unten*
 - (4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \sigma := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ definiert eine Topologie auf X , aber $\sigma' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ nicht!
 - (5) $X := \mathbb{R}, \sigma := \{O \mid O \text{ ist Vereinigung von Intervallen } (a, b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (X, \sigma) \text{ ist topologischer Raum, und } \sigma \text{ hei\u00dft Standard-Topologie.}$
 - (6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\sigma} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ ist auch eine Topologie auf \mathbb{R} , die so genannte τ_1 -Topologie.

Definition 2.1. $A \subset X, X$ topologischer Raum, hei\u00dft abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \setminus A$ ist offen.

Bemerkung 2.1. Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso X und \emptyset .

Beispiel 2.2. In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in \mathbb{R}_{τ_1} ¹ alle endlichen Teilmengen und X, \emptyset .

Definition 2.2. Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so hei\u00dft jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x .

Bemerkung 2.2. Umgebungen sind per definitionem offen! (TODO: BILD)

¹ \mathbb{R} mit τ_1 -Topologie

Bemerkung 2.3. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{\text{Standard}}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R} sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!

Beispiel 2.3 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0, 2\} \right\}$).
(TODO: BILD)

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} , enthält überabzählbar viele Elemente und hat ‘Hausdorff-Dimension’ $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6 \dots$

Definition 2.3. Ist (X, σ) topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \sigma$, so heißt \mathcal{B} Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

Beispiel 2.4. • (1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von \mathbb{R} .

• (2) Sämtliche offenen² Kreisscheiben (TODO: BILD) und auch sämtliche offenen Quadrate (TODO: BILD) bilden Basen ein und derselben Topologie auf \mathbb{R}^2 .

(TOSO: BILD)

Bemerkung 2.4. • $\mathcal{B} \subset \sigma$ ist Basis der Topologie von $X \Leftrightarrow \forall O \in \sigma \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset O$.

• $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Basis einer Topologie auf $X \Leftrightarrow X$ ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} und der Schnitt je zweier Mengen aus \mathcal{B} ist eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

(TODO: BILD)

Definition 2.4. Seind σ_1 und σ_2 Topologien auf X und $\sigma_1 \subset \sigma_2$, so heißt σ_2 feiner als σ_1 und σ_1 gröber als σ_2 .

Beispiel 2.5. • Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X , die diskrete Topologie die feinste.

• Die Standard-Topologie auf \mathbb{R} ist feiner als die τ_1 -Topologie.

Mehr in metrischen Räumen:

Definition 2.5. Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ der offene ϵ -Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ -Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ die ϵ -Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)

²bezüglich der euklidischen Metrik

Definition 2.6. Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X .

Beispiel 2.6. Für $X = \mathbb{R}_{Eukl.}^n$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$ -Sphäre.
(TODO: BILD)

Definition 2.7. $A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
: $\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}: d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$
(TODO: BILD)

Das Infimum, $\text{diam } A$, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A .

Bemerkung 2.5. In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\sigma = \sigma_d$ von X , diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

Bemerkung 2.6. $A \subset (X, d)$ ist dann offen $\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$
(TODO: BILD)

Definition 2.8. (X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := \text{dist}(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A .