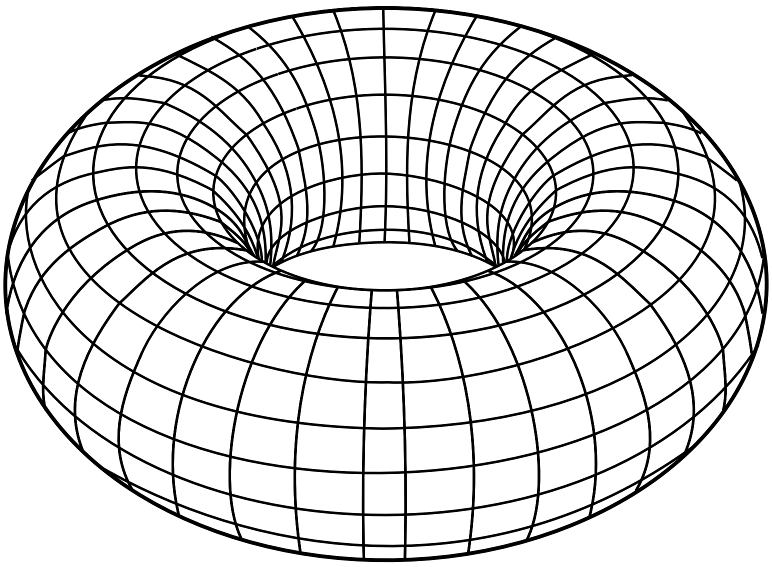
Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

9. November 2011



Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel I

Homotopie und Fundamentalgruppe

0 Vorwort

0.1 Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ *Indexmenge* $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Beispiel I.1. $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ *ist topologischer Raum!*

Beispiel I.2.

X Menge, $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ + *Axiome, die zu erfüllen sind* $\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$ *ist topologischer Raum. $\mathcal{O}$ ist "Basis" der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$.*

0.2 Metrischer Raum

Ein <u>metrischer Raum</u> X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der <u>"Metrik"</u> auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

(1) $d(x,y) = d(y,x)$ *<u>"Symmetrie"</u>*

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x,y) \geq 0$ *<u>"Definitheit"</u>*

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *<u>"Dreiecksungleichung"</u>*

0.3 Stetigkeit

Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt <u>stetig</u>, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

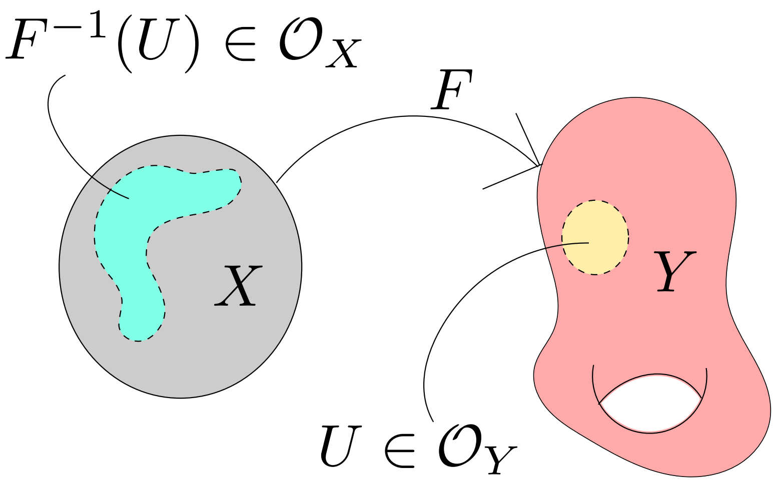


Abbildung I.1: Stetige Abbildung

Bemerkung I.1. *Ist (X,d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}(\epsilon > 0)$, und $F\colon (X,d) \to (Y,d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.*

0.4 Homotopie

Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I^a \to Y, (x,t) \mapsto H(x,t)$$

mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x) \forall x \in X$.

[a] $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$

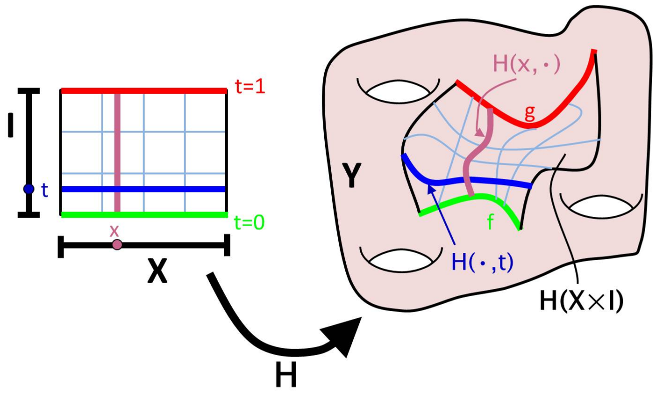
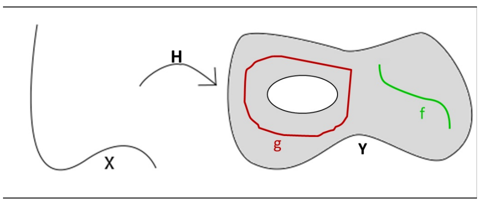


Abbildung I.2: Homotopie



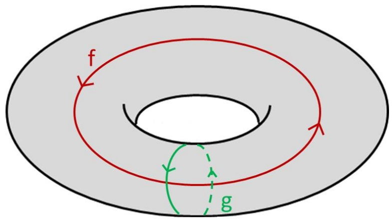


Abbildung I.3: f und g sind jeweils nicht homotop!

Bemerkung I.2. *H heißt auch Homotopie von f nach g, eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g. f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.*

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0,1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t\colon X \to Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1. (TODO: BILD)

0.5 Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung I.3. *"Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X,Y) := \{F\colon X \to Y \text{ stetig }\}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0,1]$, so liefert $(\tilde{h_t})$ mit $\tilde{h_t} := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f, d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.
Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t :\equiv f \forall t \in [0,1]$
Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t). Dann liefert $M\colon X \times [0,1] \to Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l.
Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

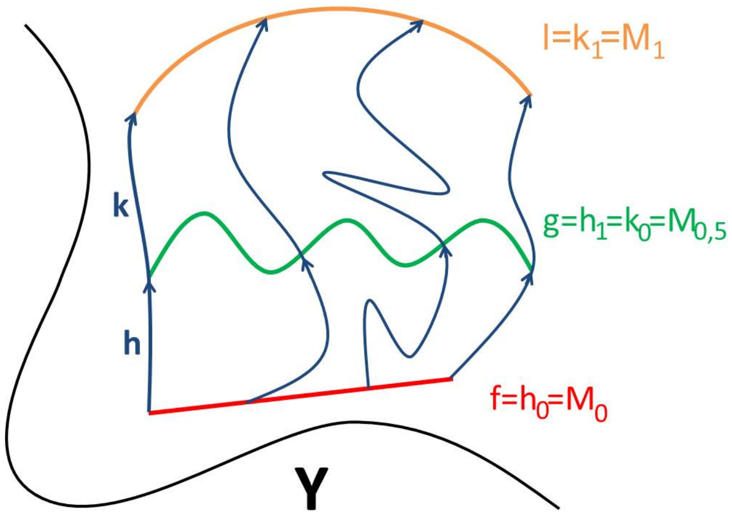


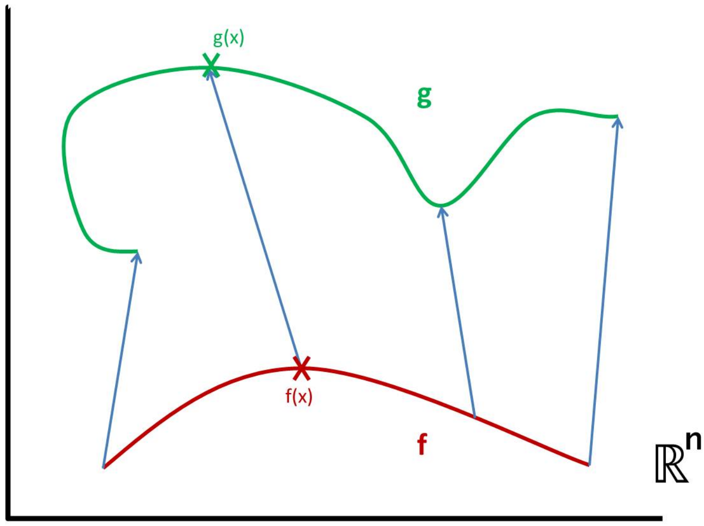
Abbildung I.4: Transitivität der Relation "homotop sein"

Bemerkung I.4. *Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X,Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet.*

Abbildung I.5: Äquivalenzklassen $[X, Y]$ von $C(X, Y)$

Bemerkung I.5. *$C(X, Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X, Y]$!*

Beispiel I.3. *Je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x, t) := (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g:*



0.6 Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Korollar I.1. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!*

Beispiel I.4. *Jeder geschlossene Weg im $\mathbb{R}^2$, d.h. jede stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $\big[[0,1], \mathbb{R}^2\big]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1, 0)$.*

Interpretiere einen geschlossenen Weg im $\mathbb{R}^2$ auch als stetige Abbildung von $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$, so gilt also $[S^1, \mathbb{R}^2]$ ist einelementig. Aber $[S^1, \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}]$ ist nichttrivial! (TODO: BILD)

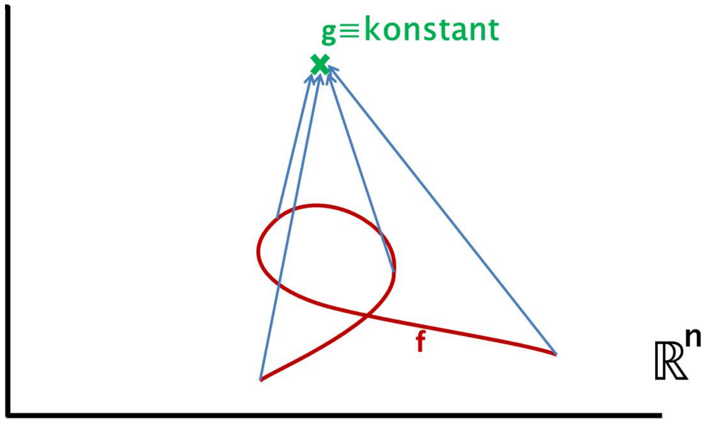


Abbildung I.6: f ist nullhomotop

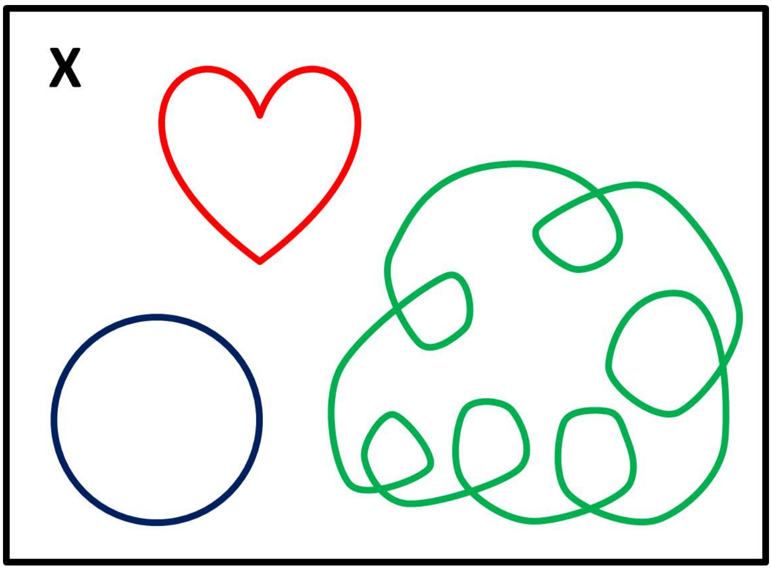


Abbildung I.7: Geschlossene Wege in $\mathbb{R}^n$

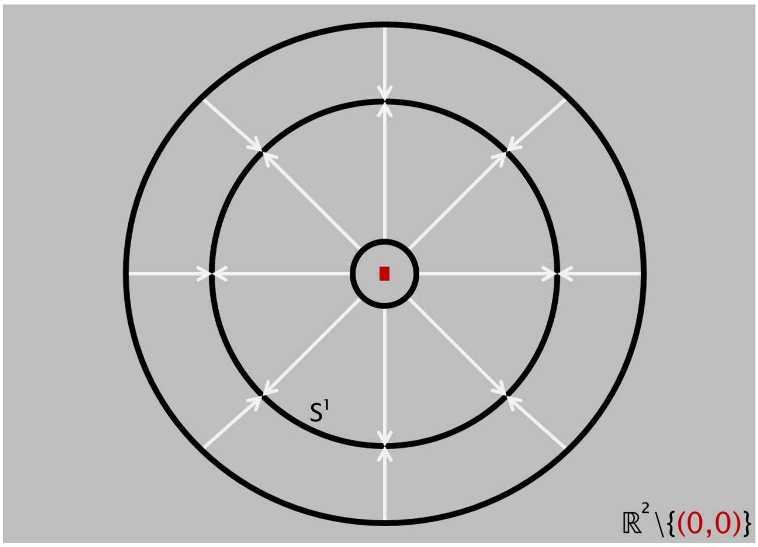


Abbildung I.8: $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}]$ "=" $[S^1, S^1]$

0.7 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\big|_A)$ heißt Teilraum von $(X, \mathcal{O})$.

Bemerkung I.6. *$B \subset A$ ist also genau dann offen in A, wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.*

Beispiel I.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$

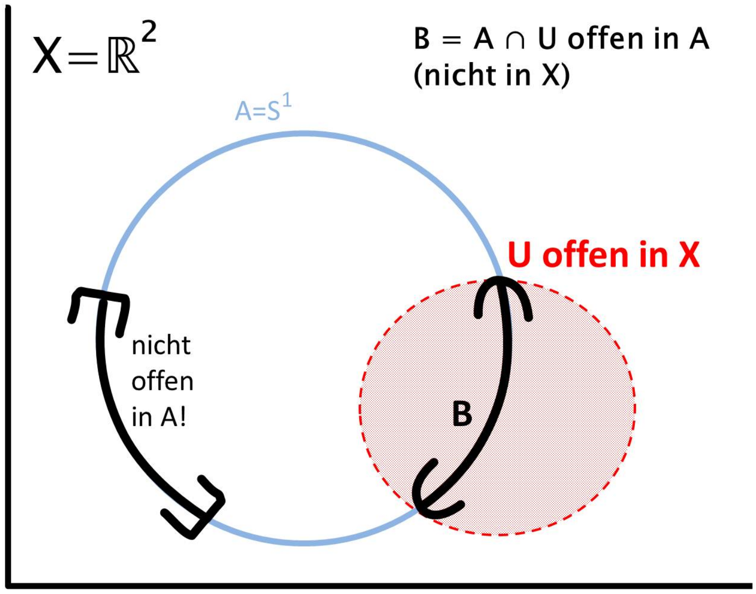
Achtung: B ist nicht offen in $\mathbb{R}^2$!

1 Grundlagen der allgemeinen Topologie

Beispiel I.6 (Beispiele topologischer Räume)**.** *(1) $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$ 'triviale Topologie'*

(2) $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ 'diskrete Topologie'

(3) Metrische Räume, siehe unten



(4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ *definiert eine Topologie auf* X*, aber* $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ *nicht!*

(5) $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O$ *ist Vereinigung von Intervallen* (a, b) *mit* $a, b \in \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow (X, \mathcal{O})$ *ist topologischer Raum, und* $\mathcal{O}$ *heißt Standard-Topologie.*

(6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R}$ *endlich*$\} \cup \{\emptyset\}$ *ist auch eine Topologie auf* $\mathbb{R}$*, die so genannte* $\mathcal{T}_1$*-Topologie.*

1.1 Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ *topologischer Raum, heißt abgeschlossen* $:\Leftrightarrow X \setminus A$ *ist offen.*

Bemerkung I.7. *Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso* X *und* $\emptyset$*.*

Beispiel I.7. *In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in* $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$[1] *alle endlichen Teilmengen und* $X, \emptyset$*.*

1.2 Umgebung

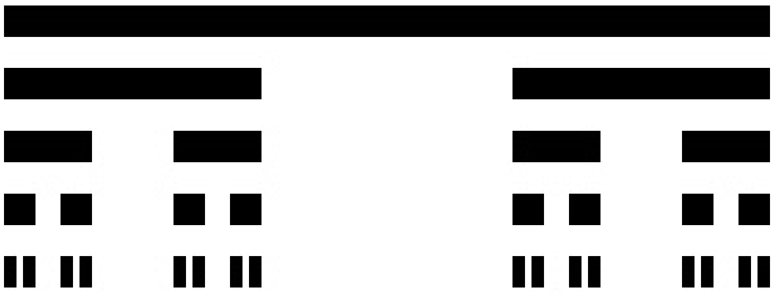
Ist X *topologischer Raum und* $x \in X$*, so heißt jede offene Teilmenge* $O \subset X$ *mit* $x \in O$ *eine Umgebung von* x*.*

[1] $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{T}_1$-Topologie

Bemerkung I.8. *Umgebungen sind per definitionem offen! (TODO: BILD)*

Bemerkung I.9. *Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{Standard}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!*

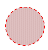
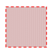
Beispiel I.8 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,2\} \right\}$).
$\Rightarrow$ *$\mathcal{C}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension'* $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\ldots$



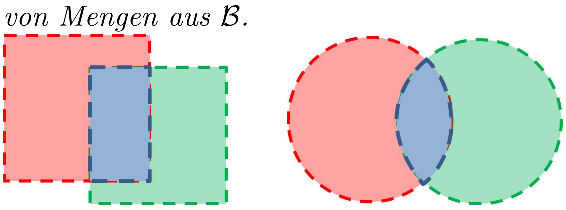
1.3 Basis

Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie :$\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Beispiel I.9. *(1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von $\mathbb{R}$.*

(2) Sämtliche offenen[2] Kreisscheiben  *und auch sämtliche offenen Quadrate*  *bilden Basen ein und derselben Topologie auf $\mathbb{R}^2$.*

Bemerkung I.10. • *$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ist Basis der Topologie von X $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}\colon x \in B \subset O$.*
• *$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Bais einer Topologie auf X $\Leftrightarrow$ X ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ und der Schnitt je zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ ist eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*



[2]bezüglich der euklidischen Metrik

1.4 Feiner und gröber

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

Beispiel I.10. • *Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X, die diskrete Topologie die feinste.*
• *Die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist feiner als die $\mathcal{T}_1$-Topologie.*

Mehr zu metrischen Räumen

1.5 ϵ-Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ *der offene ϵ-Ball um p*
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ *der abgeschlossene ϵ-Ball um p*
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ *die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)*

1.6 Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

Beispiel I.11. *Für $X = \mathbb{R}^n_{Eukl.}$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$-Sphäre.*
(TODO: BILD)

1.7 Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R} \colon d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$
(TODO: BILD)
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.

Bemerkung I.11. *In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ von X, diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.*

Bemerkung I.12. *$A \subset (X, d)$ ist offen*
$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$
(TODO: BILD)

1.8 Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Erinnerung Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$, so definiert $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A, die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

Bemerkung I.13. *Ist $A \subset X$ offen in X, so ist auch jede in A offene Menge offen in X, und abgeschlossene[3] Teilmengen einer in X abgeschlossenen Menge A sind auch abgeschlossen in X.*
(TODO:BILD)
Aber abgeschlossene Mengen B in $A \subset X$ sind für beliebiges A im Allgemeinen nicht abgeschlossen in X.

Beispiel I.12 (Beispiel zu Bemerkung I.13)**.** $B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$

1.9 Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt. (TODO:BILD)

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \backslash A$ hat.

[3] in A

1.10 Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

Bemerkung I.14. *$\mathring{A}$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A, und A ist offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$*

Beispiel I.13. $\overset{\circ}{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

1.11 Abschluss

Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X\backslash \left((\overset{\circ}{X\backslash A})\right)$.

1.12 Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A}\backslash\mathring{A}$, d.h. Rand $A = \{$ Randpunkte von A $\}$.

(TODO:Exkurs zu 'Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander')

1.13 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

Beispiel I.14.

- *$f\colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
- *Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X, so ist die Identität id: $(X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ stetig $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.*
- *Für $A \subset X$ ist die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}\big|_A$ die gröbste Topologie, bezüglich der die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ stetig ist.*

1.14 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X$:$\Leftrightarrow$
$\forall$ Umgebungen V von $f(x) \exists$ Umgebung U von x und $f(U) \subset V$
(TODO:BILD)

Bemerkung I.15. *$f\colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.*

Beispiel I.15. *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für jeden offenen Ball B um $f(x)$ ein offener Ball um x existiert, der unter f in B abgebildet wird. (Und ferner stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x,x') < \delta$ auch $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ folgt.)*

1.15 Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung
:$\Leftrightarrow$ $\forall x, x' \in X$ gilt $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x,x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

1.16 Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

Beispiel I.16.

- *$f\colon [0,1) \to S^1 \subset \mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!*
  (TODO:BILD)
- *$id_X\colon X \to X$ ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.*

Bemerkung I.16. *'Homöomorph sein' ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.*

1.17 homöomorph

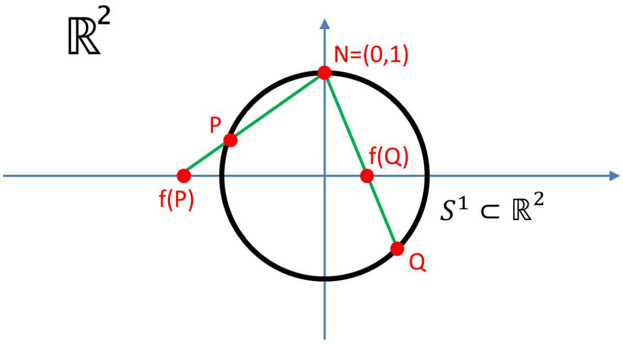
Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

Bemerkung I.17. *Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:*

- *Ist $f\colon X \to Y$ Homöomorphismus, so ist $U \subset X$ offen $\Leftrightarrow$ $f(U)$ offen in Y.*
- *$A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $f(A)$ ist abgeschlossen in Y.*
- *$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}, f(\mathring{A}) = (f(\mathring{A}))$.*
- *U ist Umgebung von $x \in X \Leftrightarrow f(U)$ ist Umgebung von $f(x)$.*

Beispiel I.17.
- *Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.*
- *$[0, 1] \cong [a, b] \forall a < b \in \mathbb{R}$*
- *$(0, 1) \cong (a, b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$*

Beispiel I.18. *Stereographische Projektion*



Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von $S^n \backslash \{N\}, N := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, gegeben wie folgt:
Der Schnitt der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und $x \in S^n \backslash \{N\}$ mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, $f(x)$, ist gegeben durch $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$ mit Umkehrabbildung $y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \ldots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1})$.

1.18 Einbettung

$f\colon X \to Y$ stetig heißt Einbettung :⇔ $X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y$ Homöomorphismus.

Beispiel I.19. • *Für $A \subset X$ ist die Inklusion $\iota\colon A \hookrightarrow X$*

TODO: Vorlesung vom Donnerstag

2 Trennungseigenschaften

2.1 T_1-Raum

Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom :⇔ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält. (TODO:Bild)
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$

2.2 T_2-Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom :⇔ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ *mit* $U_x \cap U_y = \emptyset$ *(TODO:Bild)*

Beispiel I.20. *Jeder metrische Raum ist Hausdorff-Raum.*

Bemerkung I.18. *Hausdorff-Räume sind z.B. deshalb wichtig, weil Grenzwerte dort eindeutig sind!*

Definition I.1. *Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \forall n \geq N$. (TODO:Bild)*

Beispiel I.21. *In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

Bemerkung I.19. *Hausdorff-Räume sind auch T_1-Räume, aber:*

Beispiel I.22. *In $X = \mathbb{R}_{T_1}$ ist jeder Punkt abgeschlossen ($\Rightarrow T_1$), doch je zwei nichtleere offene Mengen schneiden sich - X ist damit nicht T_2! "Schlimmer": In $\mathbb{R}_{T_1}$ ist jeder Punkt Grenzwert der Folge $x_n = n$! Denn eine Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}_{T_1}$ hat die Form $U = \mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_M\}$ mit $x_1 < \ldots < x_M$. Dann gilt aber $x_n = n \in U \forall n > x_M$.*

3 Abzählbarkeitsaxiome

3.1 Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Beispiel I.23. *Ist B Basis der Topologie eines Raumes X, so ist für jedes $x \in X$ $\{U \in B \mid x \in U\}$ eine Basis von X in x.*

Beispiel I.24. *In einem metrischen Raum X sind folgende Mengen von Bällen Basen von X in $x \in X$:*

- *alle offenen Bälle mit Zentrum x*
- *alle offenen Bälle mit Zentrum x und rationalen Radii*

Beispiel I.25. *Ist X mit der diskreten bzw. trivialen Topologie versehen, so ist die 'kleinste' Basis in $x \in X$ gegeben durch $\{\{x\}\}$ bzw. $\{X\}$.*

3.2 Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ X selbst besitzt eine abzählbare Basis.
X heißt separabel $:\Leftrightarrow$ X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.

Bemerkung I.20. *Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste, aber:*

Beispiel I.26. *Überabzählbare diskrete Räume (wie $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$) erfüllen nach Beispiel I.25 das erste Abzählbarkeitsaxiom, nicht aber das zweite!*

Bemerkung I.21. *Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und jeder separable metrische Raum auch das zweite.*

Beispiel I.27. $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ *erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist aber separabel -* $\mathbb{N}$ *ist dicht!*

Beispiel I.28. *Euklidische Räume und alle ihre Teilmengen erfüllen das 2. Abzählbarkeitsaxiom und sind separabel.*

Wozu das Ganze?
$\rightsquigarrow$ Funktionenräume
$\rightsquigarrow$ Mannigfaltigkeiten
$\rightsquigarrow$ Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung eines Raumes, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, enthält auch eine abzählbare Teilüberdeckung.

3.3 Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt
$:\Leftrightarrow$ *Jeder Punkt* $x \in X$ *besitzt eine Umgebung* U, *sodass* $\overline{U}$ *kompakt ist.*

3.4 Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ *von Teilmengen eines topologischen Raumes* X *heißt lokal endlich* $:\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U = U(x)\colon A \cap U = \emptyset \forall A \in \Gamma$ *bis auf endlich viele* A. *(TODO:Bild)*

3.5 Verfeinerung

Γ, Δ *Überdeckungen von* X. Δ *heißt Verfeinerung von* Γ
$:\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma\colon A \subset B$.

3.6 Parakompaktheit

X heißt parakompakt $:\Leftrightarrow$ *Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.*

(TODO:Bild) Cut-off