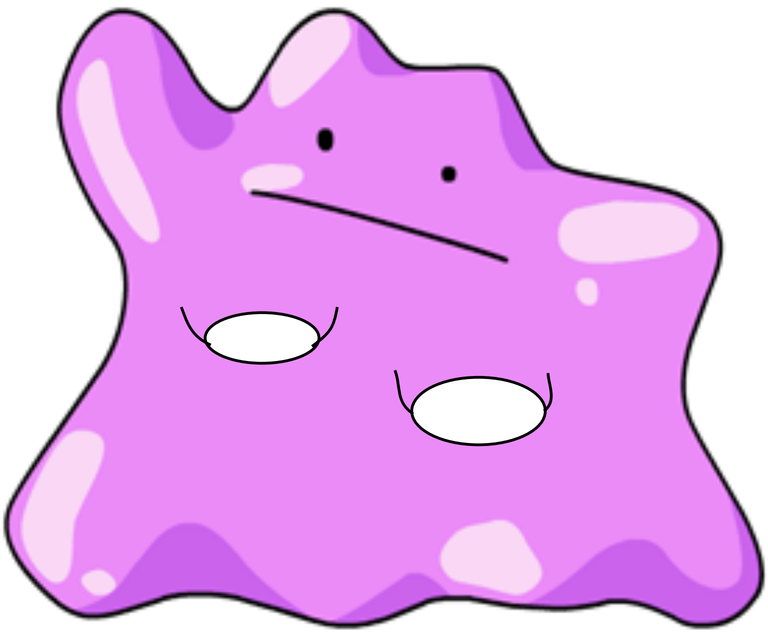
Einführung in die Geometrie und Topologie - Definitionen und Sätze -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

24. November 2011



Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

(1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"

Stetigkeit

Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

Homotopie

Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I^1 \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

[1] $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\Big|_A)$ heißt Teilraum von $(X, \mathcal{O})$.

Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \backslash A$ ist offen.

Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x.

Basis

Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Feiner und gröber

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

ϵ-Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) < \epsilon\}$ der offene ϵ-Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ-Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) = \epsilon\}$ die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)

Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R} \colon d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.

Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \backslash A$ hat.

Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

Abschluss

Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X \backslash \left((X \mathring{\backslash} A) \right)$.

Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A} \backslash \mathring{A}$, d.h. Rand $A = \{$ Randpunkte von A $\}$.

Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X :\Leftrightarrow \forall$ Umgebungen V von $f(x) \exists$ Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y\left(f(x), f(x')\right) = d_X(x, x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

homöomorph

Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

Einbettung

$f\colon X \to Y$ stetig heißt Einbettung $:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y$ Homöomorphismus.

Äquivalenz von Einbettungen

Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ heißen äquivalent :⇔ ∃ Homöomorphismen $h_X\colon X \to X, h_Y\colon Y \to Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$, d.h. dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_x"'] & Y \arrow[d, "h_y"] \\
X \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Knoten

Eine Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißt Knoten.

zusammenhängend

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend :⇔ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind $\emptyset$ und X.
Ansonsten heißt X un- oder nicht zusammenhängend.

Überdeckung

Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$[2] von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X :⇔ $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.
$\mathcal{U}$ heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung ⇔ alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.
Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' :⇔ $X' \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Partition

Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte Teilmengen.

[2] A Indexmenge

Zusammenhangskomponente

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X.

Satz

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.
(D.h.: Ist $f\colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so auch $f(X) \subset Y$.)

Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.

Wegzusammenhang

X heißt wegzusammenhängend :⇔ Zu je zwei Punkten $x, x' \in X \exists$ Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$.

Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

T_1-Raum

Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom :⇔ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält.
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$

T_2-Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom :⇔ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

Grenzwert

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \forall n \geq N$.

Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ X selbst besitzt eine abzählbare Basis.
X heißt separabel $:\Leftrightarrow$ X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.

Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt
$:\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\overline{U}$ kompakt ist.

Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich $:\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U = U(x) \colon A \cap U = \emptyset \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A.

Verfeinerung

Γ, Δ Überdeckungen von X. Δ heißt Verfeinerung von Γ
$:\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma \colon A \subset B$.

Parakompaktheit

X heißt parakompakt $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie
2. M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{offen} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V, V \subset_{offen} \mathbb{R}^n$.
   Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p.

Atlas

Ein Atlas für eine topologische n-Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$[3] von Karten $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup\limits_{a \in \Lambda} U_\alpha$

C^k-Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k-Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k-Abbildung, also k-mal stetig differenzierbar ist. $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega)$

Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k-Atlas von M, so heißt eine Karte (φ, U) von M mit $\mathcal{A}$ verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k-Atlas ist. Ein C^k-Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls $\mathcal{A}$ alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.

C^k-Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k-Mannigfaltigkeit) ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k-Struktur auf M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.

[3] Λ Indexmenge

Produkt-Topologie

Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, so bildet

$$\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, und diese heißt Produkt-Topologie auf $X \times Y$.
Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ sebst ein topologischer Raum und für gegebene X, Y denkt man sich $X \times Y$ stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

C^l-Abbildung

Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $(M', \mathcal{A}')$ eine n'-dimensionale $C^{k'}$-Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt differenzierbar (von der Klasse C^l) oder kurz: C^l-Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine C^l-Abbildung im üblichen Sinn.

Untermannigfaltigkeit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$.

Hier endet der Stoff für den ersten Test.

Satz: Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$. Es sind äquivalent:

(a) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$ mit Rang $Df(x) = l$ für alle $x \in U$ dergestalt, dass $U \cap M = f^{-1}(0)$.

(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ ist offen

- φ ist C^∞-Diffeomorphismus $U \to \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\psi \in C^\infty(W, U)$ mit folgenden Eigenschaften:

- ψ ist Homöomorphismus $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ ist injektiv für alle $w \in W$.

Satz: C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+l}$ sind C^∞-Mannigfaltigkeiten

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$ und $\{\psi_\alpha \colon W_\alpha \to U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Dann ist $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^∞-Atlas und M eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

Quotienten(raum)topologie

Eine Teilmenge $U \subset X/S$ heißt offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X
Alle im Sinne dieser Definition offenen Teilmengen von X/S definieren dann eine Topologie auf X/S und die Menge X/S zusammen mit dieser Topologie heißt Qotientenraum von X nach S.

Quotientenabbildung

Ist S eine Partition von X in nichtleere disjunkte Teilmengen und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung, die auf jedem Element von S konstant ist, so existiert eine Abbildung $X/S \to Y$, die jedes Element A von S auf $f(a), a \in A$, abbildet. Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von f nach S, in Zeichen f/S.

injektiver Quotient

Jede Abbildung $f \colon X \to Y$ definiert eine Partition $S = S(f)$ von X, und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von Y unter f.
Die induzierte Abbildung $f/_{S(f)} \colon X/_{S(f)} \to Y$ ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von f.

Kontraktion

Die Quotientenmenge eines topologischen Raumes X bzgl. einer Partition S von X, welche aus einer Teilmenge A von X und allen Einpunktmengen aus $X \backslash A$ besteht,

$$S = A \cup \{\{x\} \mid x \in X \backslash A\}$$

heißt Kontraktion (von X bzgl. $X \backslash A$), und für X/S schreibt man einfach X/A.

Verkleben

Sind A und B disjunkte Teilräume eines topologischen Raumes X und ist $f\colon A \to B$ ein Homöomorphismus, (TODO: Bild) so heißt der Übergang zum Quotientenraum, der durch die Partition von X in die Einpunktmengen von $X \backslash (A \cup B)$ und die Zweipunktmengen $\{x, f(x)\}, x \in A$ gegeben ist, als Verkleben (von X längs A und B via des Homöomorphismus f) und dieser Prozess einfach auch Verkleben von A und B.
Notation

$$X/_{[a \sim f(a)]} \quad (\text{mit } a \in A)$$

n-dimensionaler reell-projektiver Raum

Der n-dimensionale reell-projektive Raum ist

$$\mathbb{RP}^n := S^n/_{[x \sim -x]}$$

[4]

und der n-dimensionale komplex-projektive Raum ist

$$\mathbb{CP}^n := \underbrace{S^{2n+1}}_{\subset \mathbb{C}^{n+1}}/_{[v \sim \lambda v, \lambda \in S^1]}$$

[4] Anschaulich (projektive Geometrie): Die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$