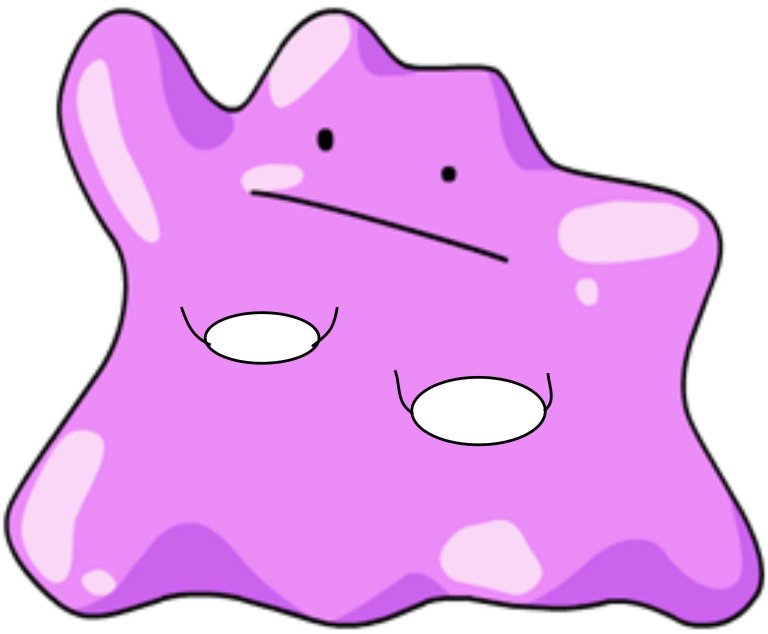
Einführung in die Geometrie und Topologie - Definitionen und Sätze -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

13. Dezember 2011



Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel I

Definitionen und Sätze aus der Vorlesung

Definition I.1 (Topologischer Raum). *Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.*
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ *Indexmenge* $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Definition I.2 (Metrischer Raum). *Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$ gilt:*

(1) $d(x, y) = d(y, x)$ *"Symmetrie"*

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ *"Definitheit"*

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *"Dreiecksungleichung"*

Definition I.3 (Stetigkeit). *Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.*

Definition I.4 (Homotopie). *Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung*

$$H\colon X \times I \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x,0) = f(x)$ *und* $H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$.
(Hier ist $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$*)*
f *und* g *heißen dann* *homotop*, *in Zeichen:* $f \simeq g$.

Definition I.5 (Homotope Abbildungen $f, g\colon X \to Y$)**.** *Zwei (stetige) Abbildungen heißen* *homotop*, *in Zeichen:* $f \simeq g$, *falls eine Homotopie mit Anfang* f *und Ende* g *existiert.*

Definition I.6 (Nullhomotopie)**.** *Eine stetige Abbildung* $f\colon X \to Y$ *heißt* *nullhomotop*, *falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.*

Korollar I.1. *Jede stetige Abbildung* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum* X *besteht* $[X, \mathbb{R}^n]$, n *beliebig, nur aus einem Punkt!*

Definition I.7 (Teilraumtopologie)**.** *Es sei* $(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum und* $A \subset X$. *Die auf* A *durch*

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt *Teilraumtopologie* *und der dadurch gegebene topologische Raum* $(A, \mathcal{O}\big|_A)$ *heißt* *Teilraum* *von* $(X, \mathcal{O})$.

Definition I.8 (Abgeschlossenheit)**.** $A \subset X, X$ *topologischer Raum, heißt* *abgeschlossen*

$$:\Leftrightarrow X \backslash A \text{ ist offen.}$$

Definition I.9 (Umgebung)**.** *Ist* X *topologischer Raum und* $x \in X$, *so heißt jede* *offene* *Teilmenge* $O \subset X$ *mit* $x \in O$ *eine* *Umgebung* *von* x.

Definition I.10 (Basis)**.** *Ist* $(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum mit* $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$,
so heißt $\mathcal{B}$ *Basis der Topologie* $:\Leftrightarrow$ *Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus* $\mathcal{B}$.

Definition I.11 (Produkt-Topologie)**.** *Sind* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topologische Räume, so bildet*

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, *und diese heißt* *Produkt-Topologie auf* $X \times Y$.
Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ *sebst ein topologischer Raum und für gegebene* X, Y *denkt man sich* $X \times Y$ *stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.*

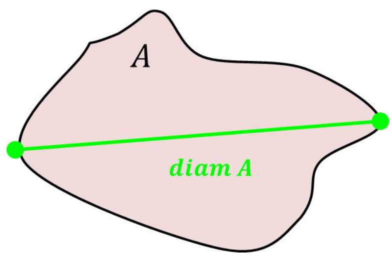
Definition I.12 (Feiner und gröber)**.** *Sind* $\mathcal{O}_1$ *und* $\mathcal{O}_2$ *Topologien auf* X *und* $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$,
so heißt $\mathcal{O}_2$ *feiner* *als* $\mathcal{O}_1$ *und* $\mathcal{O}_1$ *gröber* *als* $\mathcal{O}_2$.

Definition I.13 (ϵ-Ball, Sphäre)**.** *Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$*

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ *der offene ϵ-Ball um p*
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ *der abgeschlossene ϵ-Ball um p*
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ *die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ um p)*

Definition I.14 (Metrischer Unterraum)**.** *Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.*

Definition I.15 (Beschränktheit, Durchmesser)**.** *$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt*
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}\colon d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.



Definition I.16 (Abstand)**.** *(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.*

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Definition I.17 (Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt)**.** *Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p*

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \setminus A$ hat.

Definition I.18 (Inneres)**.** *Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.*

Definition I.19 (Abschluss)**.** *Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X \backslash \left(\mathring{(X \backslash A)} \right)$.*

Definition I.20 (Rand)**.** *Der Rand ∂A von A ist*

$$\partial A := \bar{A} \backslash \mathring{A},$$

d.h. Rand A = { Randpunkte von A }.

Definition I.21 (Stetigkeit)**.** *$f\colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.*

Definition I.22 (Stetigkeit)**.** *$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X$*

$$:\Leftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(x) \quad \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit}$$

$$f(U) \subset V.$$

Definition I.23 (Isometrische Einbettung, Isometrie)**.** *Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung*
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y\left(f(x), f(x')\right) = d_X(x, x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

Definition I.24 (Homöomorphismus)**.** *Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.*

Definition I.25 (homöomorph)**.** *Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.*

Definition I.26. *Einbettung $f\colon X \to Y$ stetig heißt Einbettung*

$$:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y \text{ Homöomorphismus.}$$

Definition I.27. *Äquivalenz von Einbettungen Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow \exists$ Homöomorphismen $h_X\colon X \to X, h_Y\colon Y \to Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$, d.h. dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h_y"] \\
X \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition I.28. *Knoten Eine Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißt Knoten.*

Definition I.29. *zusammenhängend Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend :⇔ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind $\emptyset$ und X.*
Ansonsten heißt X un- oder nicht zusammenhängend.

Definition I.30. *Überdeckung Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$[1] von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X :⇔ $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.*
$\mathcal{U}$ heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung ⇔ alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.
Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' :⇔ $X' \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Definition I.31. *Partition Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen.*

Definition I.32. *Zusammenhangskomponente Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine im Sinne der Inklusion von Mengen maximale zusammenhängende Teilmenge von X.*

Satz I.1. *Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.*
(D.h.: Ist $f\colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so auch $f(X) \subset Y$.)

Korollar I.2. *Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.*

Korollar I.3. *Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Definition I.33. *Weg, Anfangspunkt, Endpunkt ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.*

Definition I.34. *Wegzusammenhang X heißt wegzusammenhängend*

$$:\Leftrightarrow \text{ Zu je zwei Punkten } x, x' \in X \quad \exists \text{ Weg } \gamma\colon [0,1] \to X$$

$$\text{mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = x'.$$

Definition I.35. *Kompaktheit Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

[1] A Indexmenge

Definition I.36. *T_1-Raum Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom* :⇔ *Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält.*
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$

Definition I.37. *T_2-Raum X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom* :⇔ *Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.*
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ *mit* $U_x \cap U_y = \emptyset$

Definition I.38. *Grenzwert Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \quad \forall n \geq N$.*

Definition I.39. *Umgebungsbasis Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.*

Definition I.40. *Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom* :⇔ *jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.*
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom :⇔ *X selbst besitzt eine abzählbare Basis.*
X heißt separabel :⇔ *X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.*

Definition I.41. *Lokale Kompaktheit X heißt lokal kompakt*
:⇔ *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\overline{U}$ kompakt ist.*

Definition I.42. *Lokale Endlichkeit Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich* :⇔ $\forall x \in X \quad \exists U = U(x) \colon A \cap U = \emptyset \quad \forall A \in \Gamma$ *bis auf endlich viele A.*

Definition I.43. *Verfeinerung Γ, Δ Überdeckungen von X. Δ heißt Verfeinerung von Γ*
:⇔ $\forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma \colon A \subset B$.

Definition I.44. *Parakompaktheit X heißt parakompakt* :⇔ *Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.*

Definition I.45. *Mannigfaltigkeit, Karte Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:*

1. *M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie*

2. *M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{offen} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V, V \subset_{offen} \mathbb{R}^n$.*
   Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p.

Definition I.46. *Atlas Ein Atlas für eine topologische n-Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}^2$ von Karten $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup\limits_{a\in\Lambda} U_\alpha$*

Definition I.47. *C^k-Atlas, Kartenwechsel Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k-Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k-Abbildung, also k-mal stetig differenzierbar ist. $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega)$*

Definition I.48. *Verträglichkeit, differenzierbare Struktur Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k-Atlas von M, so heißt eine Karte (φ, U) von M mit $\mathcal{A}$ verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k-Atlas ist. Ein C^k-Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls $\mathcal{A}$ alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.*

Definition I.49. *C^k-Mannigfaltigkeit, glatt Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k-Mannigfaltigkeit) ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k-Struktur auf M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.*

Definition I.50. *C^l-Abbildung Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $(M', \mathcal{A}')$ eine n'-dimensionale $C^{k'}$-Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt differenzierbar (von der Klasse C^l) oder kurz: C^l-Abbildung, falls gilt:*

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine C^l-Abbildung im üblichen Sinn.

Satz I.2 (Äquivalente Beschreibungen einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$)**.** *Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ sind äquivalent:*

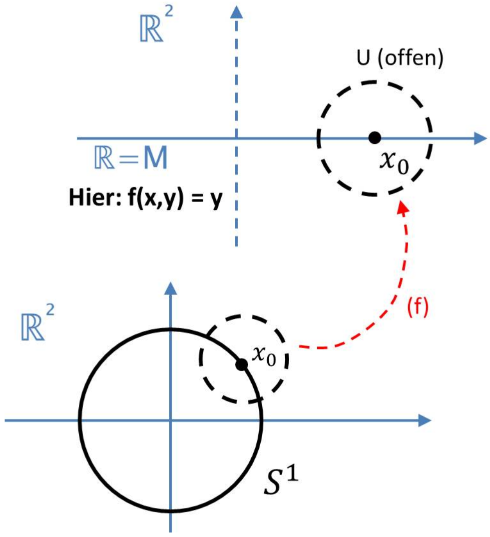
---

[2] Λ Indexmenge

(a) $\forall x_0 \in M \exists$ *Umgebung* $U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und*

$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l) := \{g \colon U \to \mathbb{R}^l \mid g \text{ ist } C^\infty\}$ *mit Rang* $Df(x) = l \quad \forall x \in U$

[3] *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$



(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:* $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen,*
φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$ *und*

$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_{n+l}) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}, W \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$

(Jedes solche ψ *heißt lokale Parametrisierung von* M*).*

Definition I.51. *Untermannigfaltigkeit Eine Menge* $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$*, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$*.*

Satz I.3. *Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$ *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$*. Es sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$ *mit Rang* $Df(x) = l$ *für alle* $x \in U$ *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0)$.

[3] Df ist die Jacobi-Matrix von f

(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subseteq_{\textit{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen*
- φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$

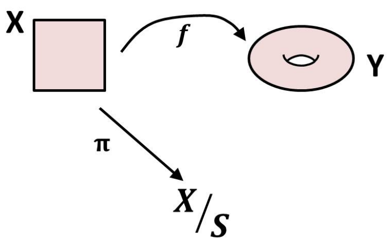
(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{\textit{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$.

Satz I.4. *(C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+l}$ sind C^∞-Mannigfaltigkeiten) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$ und $\{\psi_\alpha\colon W_\alpha \to U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit $M \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Dann ist $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^∞-Atlas und M eine C^∞-Mannigfaltigkeit.*

Definition I.52. *Quotienten(raum)topologie Eine Teilmenge $U \subset X/S$ heißt offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X*

Definition I.53. *Quotientenabbildung Ist S eine Partition von X in nichtleere disjunkte Teilmengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die auf jedem Element von S konstant ist, so existiert eine Abbildung $X/S \to Y$, die jedes Element A von S auf $f(a), a \in A$, abbildet.*



*Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von f nach S, in Zeichen f/S.*

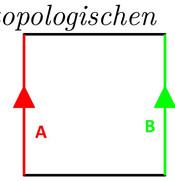
Korollar I.4. *X kompakt, Y Hausdorffsch und $f\colon X \to Y$ sei stetig $\Rightarrow$ Der injektive Quotient $f/_{S(f)}$ ist Homöomorphismus $X/_{S(f)} \to f(X)$*

Definition I.54. *injektiver Quotient Jede Abbildung $f\colon X \to Y$ definiert eine Partition $S = S(f)$ von X, und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von Y unter f.*
Die induzierte Abbildung $f/_{S(f)}\colon X/_{S(f)} \to Y$ ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von f.

Definition I.55. *Kontraktion Die Quotientenmenge eines topologischen Raumes X bzgl. einer Partition S von X, welche aus einer Teilmenge A von X und allen Einpunktmengen aus $X\backslash A$ besteht,*

$$S = A \cup \{\{x\} \mid x \in X\backslash A\}$$

heißt Kontraktion (von X bzgl. $X\backslash A$), und für X/S schreibt man einfach X/A.

Definition I.56. *Verkleben Sind A und B disjunkte Teilräume eines topologischen Raumes X und ist $f\colon A \to B$ ein Homöomorphismus,* 

so heißt der Übergang zum Quotientenraum, der durch die Partition von X in die Einpunktmengen von $X\backslash(A \cup B)$ und die Zweipunktmengen $\{x, f(x)\}, x \in A$ gegeben ist, Verkleben (von X längs A und B via des Homöomorphismus f) und dieser Prozess einfach auch Verkleben von A und B.

Notation:

$$X/_{[a\sim f(a)]} \quad (\textit{mit } a \in A)$$

Definition I.57. *n-dimensionaler projektiver Raum Der n-dimensionale reell-projektive Raum[4] ist*

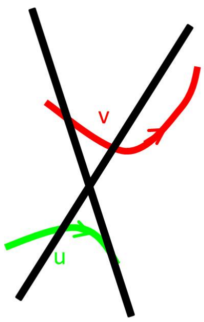
$$\mathbb{RP}^n := S^n/_{[x\sim -x]}$$

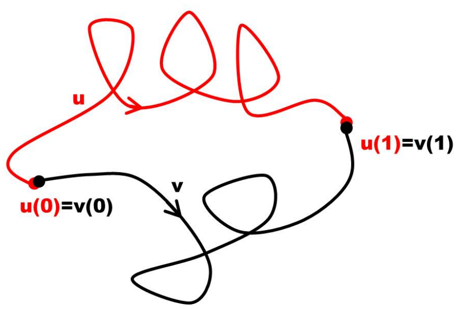
und der n-dimensionale komplex-projektive Raum ist

$$\mathbb{CP}^n := \underbrace{S^{2n+1}}_{\subset \mathbb{C}^{n+1}}/_{[v\sim\lambda v, \lambda\in S^1]}$$

Definition I.58. *homotop bezüglich der Endpunkte Zwei Wege $u, v\colon I \to X$, X topologischer Raum, heißen homotop (bezüglich der Endpunkte) $:\Leftrightarrow$*

1. $u(0) = v(0), u(1) = v(1)$
2. $\exists$ *Homotopie* $H\colon u \simeq v$ (*mit* $H(0,t) \equiv u(0), H(1,t) \equiv u(1)$)

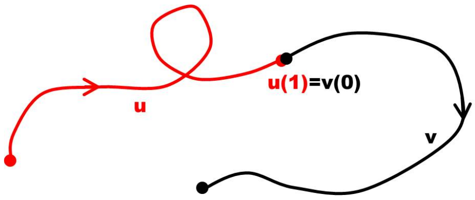




[4] Anschaulich (projektive Geometrie): Die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$

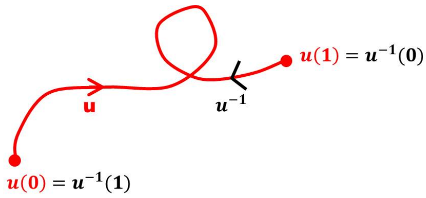
Definition I.59. *Produkt von Wegen Sind u, v Wege in X mit $u(1) = v(0)$, so heißen u und v zusammensetzbar oder aneinanderfügbar und ihr Produkt $u \cdot v$ ist definiert als*

$$(u \cdot v)(s) := \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



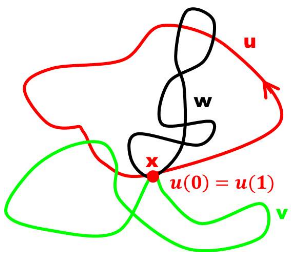
Definition I.60. *Konstanter Weg, Inverser Weg, Geschlossener Weg*

- *Für $x \in X$ sei $c_x \colon I \to X$ mit $c_x \equiv x$ der konstante Weg in $x \in X$.*
- *Für einen Weg $u \colon I \to X$ sei $u^{-1} \colon I \to X, s \mapsto u(1-s)$, der zu u inverse (oder: umgekehrt durchlaufene) Weg.*



- *$u \colon I \to X$ heißt geschlossener Weg (oder: Schleife) in $x \in X$*

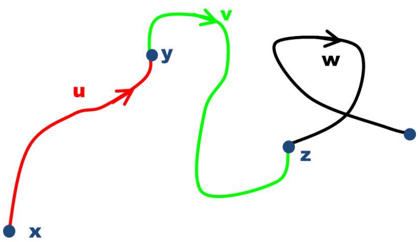
$$:\Leftrightarrow u(0) = x = u(1)$$



Definition I.61. *nullhomotop, einfach zusammenhängend*

- *Ein geschlossener Weg u in x heißt nullhomotop* $:\Leftrightarrow [u] = [c_x]$
- *X heißt einfach zusammenhängend* $:\Leftrightarrow$
  X ist wegzusammenhängend und
  jeder geschlossene Weg u in X ist nullhomotop (zu $c_{u(0)}$).

Lemma I.1. *Für Wege $u, v, w\colon I \to X$*



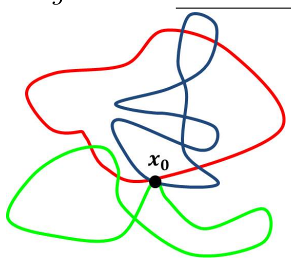
mit $u(0) = x, u(1) = y = v(0), \quad v(1) = z = w(0)$
gilt

1. $[u] \cdot [u^{-1}] = [u \cdot u^{-1}] = [c_x]$
2. $[u^{-1}] \cdot [u] = [u^{-1} \cdot u] = [c_y]$
3. $[u] \cdot [c_y] = [u] = [c_x] \cdot [u]$
4. $[u] \cdot ([v] \cdot [w]) = ([u] \cdot [v]) \cdot [w]$

Satz I.5. *Für einen topologischen Raum X und $x_0 \in X$ ist*

$$\pi_1(X, x_0) := \{[u] \mid u\colon I \to X \text{ geschlossener Weg in } x_0\}$$

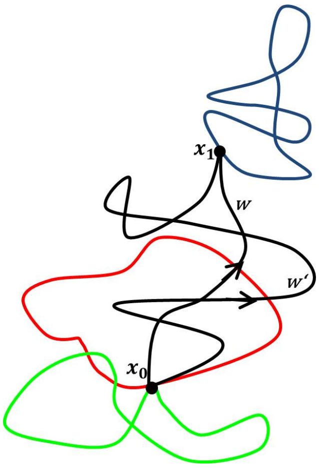
bezüglich $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$ eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe



oder erste Homotopiegruppe von X in x_0.
Neutrales Element ist $1 = 1_{x_0} := [c_{x_0}]$
und Inverses zu $\alpha = [u]$ ist $\alpha^{-1} = [u^{-1}]$.

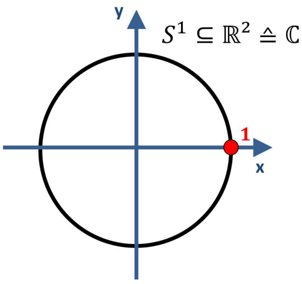
Satz I.6 (Unabhängigkeit vom Basispunkt)**.** *Ist $w\colon I \to X$ Weg von x_0 nach x_1, so ist die Abbildung*

$$w_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad [u] \mapsto [w^{-1} \cdot u \cdot w]$$

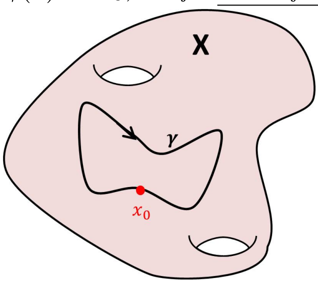


ein Gruppen-Isomorphismus.

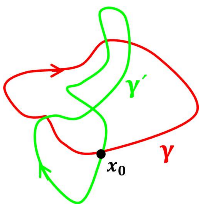
Definition I.62. *Schleife Es sei* $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *und* $1 := (1,0) \in S^1$



Eine stetige Abbildung $\gamma\colon S^1 \to X, X$ *topologischer Raum,* $x_0 \in X$*, mit* $\gamma(1) = x_0$*, heißt Schleife in* x_0*.*



Definition I.63. *schleifenhomotop Zwei Schleifen* γ, γ' *in* x_0 *heißen (schleifen-)homotop, falls es eine Homotopie zwischen ihnen gibt, die auf* $1 \in S^1$ *stationär ist, also* $\gamma(1) = x_0 = \gamma'(1)$ *die ganze Zeit festhält.*



Korollar I.5. *Ist* $s\colon I \to X$ *Weg und* Γ *offene Überdeckung von* X*, so*

existiert eine Folge von Punkten
$a_1, \dots, a_N \in I$ *mit* $0 = a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$ *mit*
$s([a_i, a_{i+1}])$ *ist in einem Element von* Γ *enthalten.*

Lemma I.2. $\forall n \geq 2$ *gilt:* $\forall$ *Wege* $s\colon I \to S^n$ *existiert eine endliche Unterteilung von* I *in Teilintervalle, so dass die Einschränkung von* s *auf jedes der Teilintervalle homotop zu einer Abbildung mit nirgendwo dichtem Bild ist, und zwar durch eine Homotopie, die auf den Endpunkten des Intervalls fixiert ist. (TODO: Bild 12)*

Kapitel II

Definitionen und Sätze aus der Übung

Definition II.1. *Induzierte Topologie Sei X eine Menge. Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik d definiert durch folgende Bedingung eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X:*
$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

(B_ϵ nennt man offenen ϵ-Ball.)

Definition II.2. *Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie*

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

Definition II.3. *Homotopieäquivalenz Seien X, Y topologische Räume. X heißt homotopieäquivalent zu Y, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.*

Definition II.4. *Überdeckung*

- *Eine Familie $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X, falls gilt: $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.*
- *Eine Überdeckung heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls alle $\mathcal{U}_\alpha (\alpha \in A)$ offen (bzw. abgeschlossen) sind.*
- *Es heißt X kompakt, falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ besitzt, d.h. es existiert $A' \subset A$ endlich, so dass $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ eine offene Überdeckung von X ist.*

Definition II.5. *Kompakte Menge Eine kompakte Menge ist eine Teilmenge eines vom Kontext her klaren topologischen Raumes, die bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.*

Definition II.6. *Wegzusammenhang*

- *Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon I(=[0,1]) \to X$ mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$.*
- *Man nennt X wegzusammenhängend, falls für alle $x, y \in X$ ein Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ in X existiert mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.*
- *Eine Wegzusammenhangskomponente von X ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von X, die in keiner echt größeren solchen Teilmenge enthalten ist.*

Definition II.7. *Homotopieäquivalenz Für zwei topologische Räume X, Y heißt eine $\underbrace{\text{stetige Abbildung } f\colon X \to Y}_{f \in C(X,Y)}$* ***Homotopieäquivalenz****, falls es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f \simeq id_x$ und $f \circ g \simeq id_Y$ gilt.*

Definition II.8. *homotop Es seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$. Seien $f, g \in C(X,Y)$. Es heißt f relativ A homotop zu g (in Zeichen $f \simeq g$ rel A), falls eine Homotopie $H\colon X \times I \to Y$ von f nach g existiert, so dass $H(a,t) = H(a,0)$ für alle $a \in A, t \in I$.*

Definition II.9. *kontrahierbar Man nennt X* ***kontrahierbar****, falls gilt: $X \simeq \{pt\}$.*