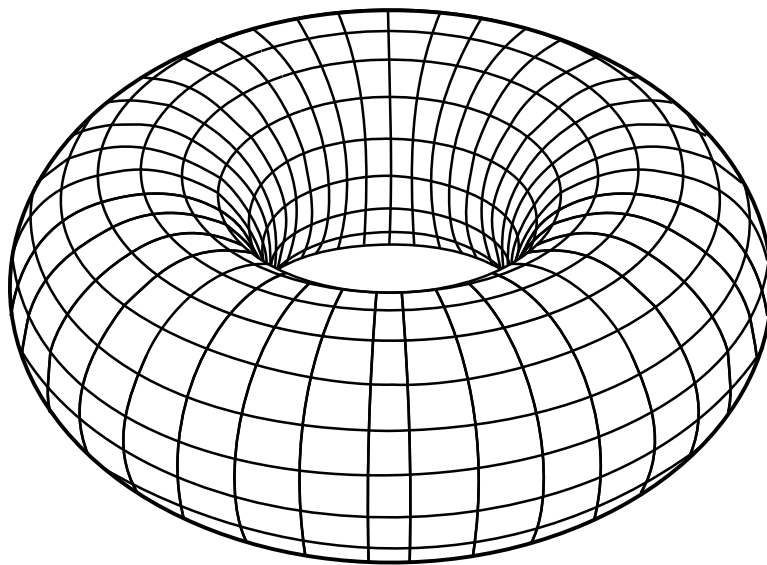


Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

15. November 2011



Inhaltsverzeichnis

I	Homotopie und Fundamentalgruppe	2
0	Vorwort	2
1	Grundlagen der allgemeinen Topologie	10
II	Topologische Eigenschaften	20
1	Trennungseigenschaften	24
2	Abzählbarkeitsaxiome	25
III	Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume	27

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel I

Homotopie und Fundamentalgruppe

0 Vorwort

0.1 Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System \mathcal{O} von Teilmengen von X , den so genannten offenen Mengen von X , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge \emptyset als Elemente enthält.

X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$(1) \quad O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$$

$$(2) \quad O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A \text{ Indexmenge} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$$

$$(3) \quad X, \emptyset \in \mathcal{O}$$

Beispiel I.1. $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum!

Beispiel I.2.

X Menge, $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$ ist topologischer Raum. \mathcal{O} ist "Basis" der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$.

0.2 Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X , die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"
- (2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"

0.3 Stetigkeit

Eine Abbildung $F: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F -Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

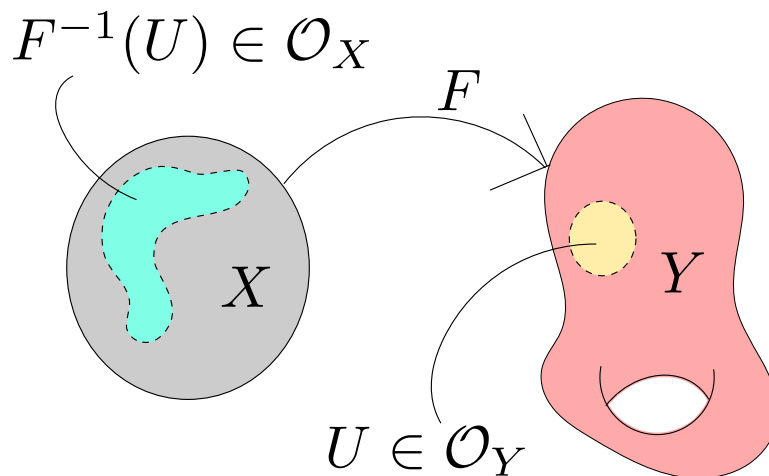


Abbildung I.1: Stetige Abbildung

Bemerkung I.1. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ ($\epsilon > 0$), und $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.

0.4 Homotopie

Eine Homotopie $H: f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I^a \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

$$^a I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

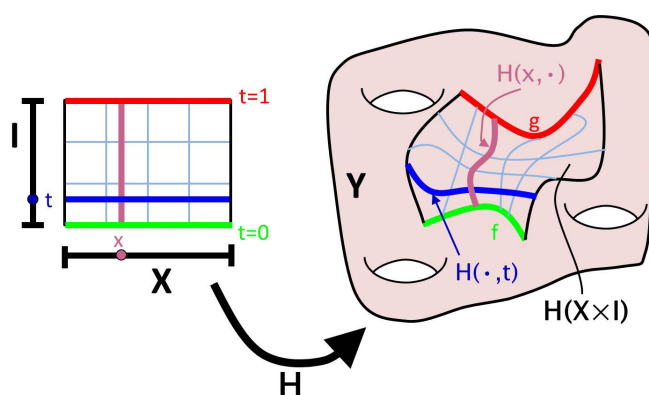


Abbildung I.2: Homotopie

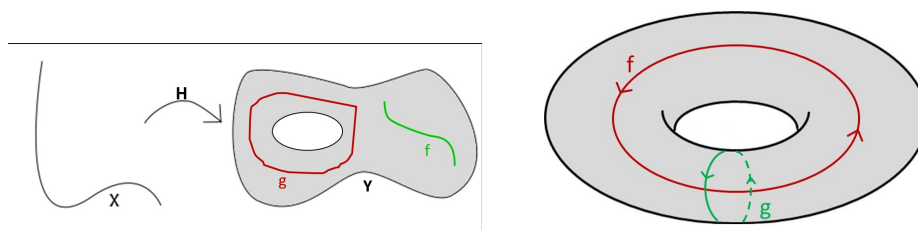
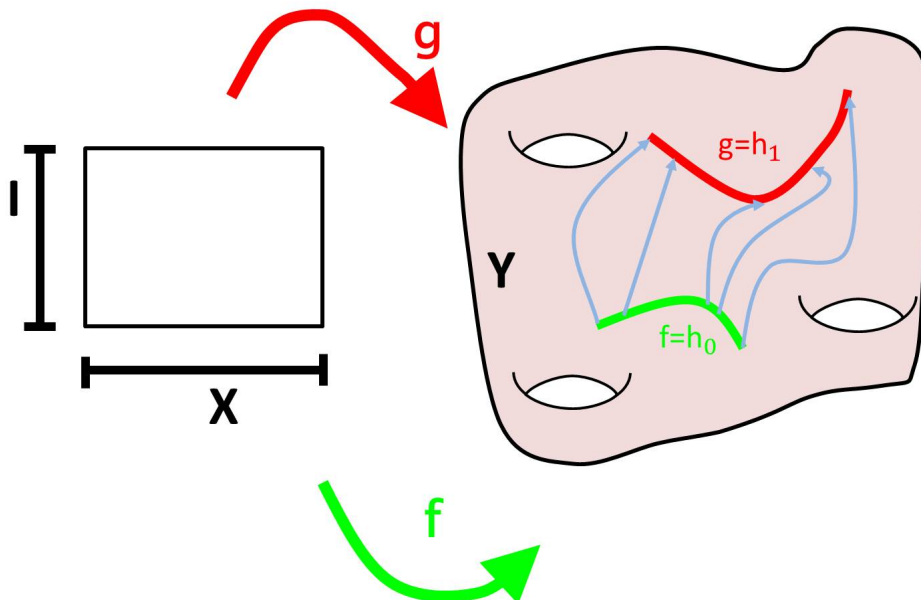


Abbildung I.3: f und g sind jeweils nicht homotop!

Bemerkung I.2. H heißt auch Homotopie von f nach g , eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g . f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0, 1]$, eine parametrisierte Schar von ste-

tigen Abbildungen $h_t: X \rightarrow Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1 .



0.5 Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen *homotop*, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung I.3. "Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X, Y) := \{F: X \rightarrow Y \text{ stetig} \}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0, 1]$, so liefert (\tilde{h}_t) mit $\tilde{h}_t := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f , d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.

Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t := f \forall t \in [0, 1]$

Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t) . Dann liefert $M: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l .

Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

Bemerkung I.4. Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X, Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen *Homotopieklassen* und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X, Y]$ bezeichnet.

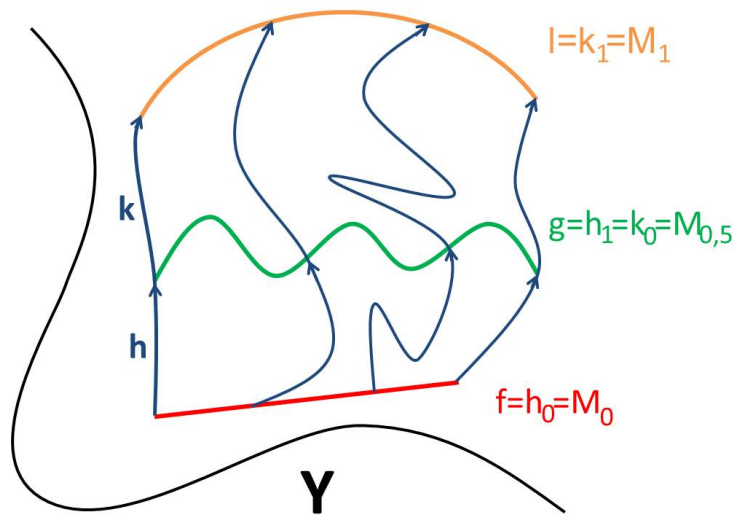
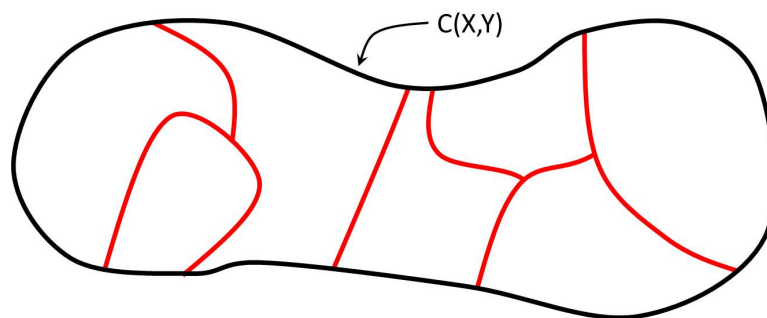


Abbildung I.4: Transitivität der Relation "homotop sein"

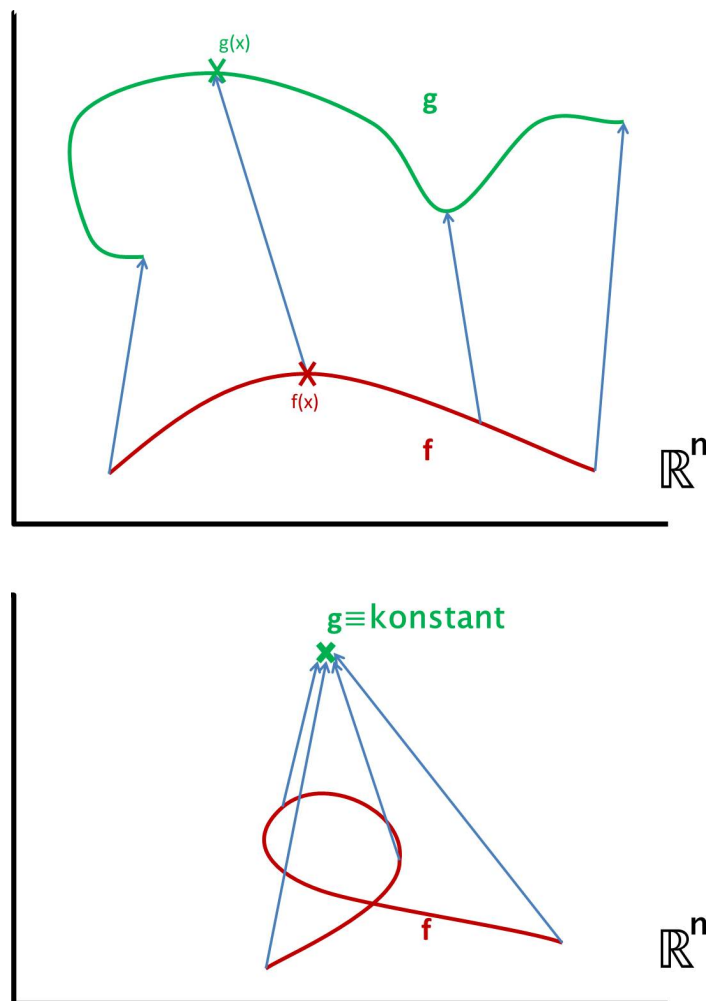
Abbildung I.5: Äquivalenzklassen $[X, Y]$ von $C(X, Y)$

Bemerkung I.5. $C(X, Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X, Y]$!

Beispiel I.3. Je zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g :

0.6 Nullhomotopie

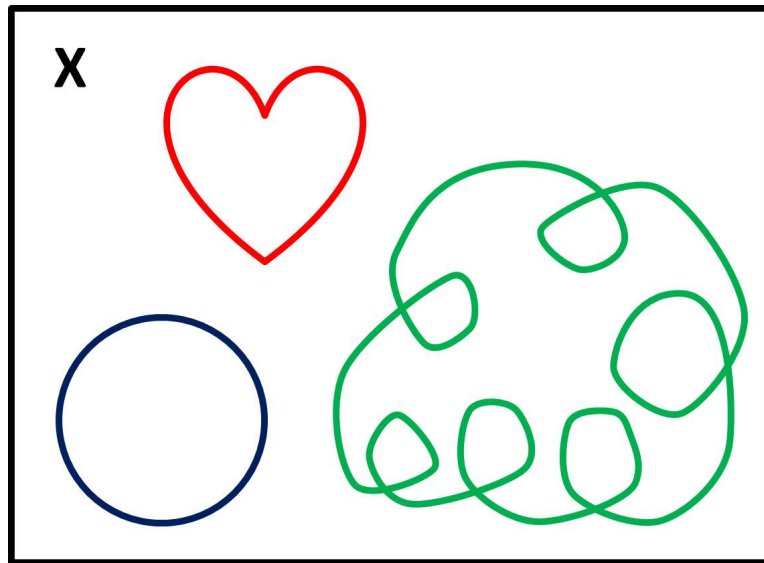
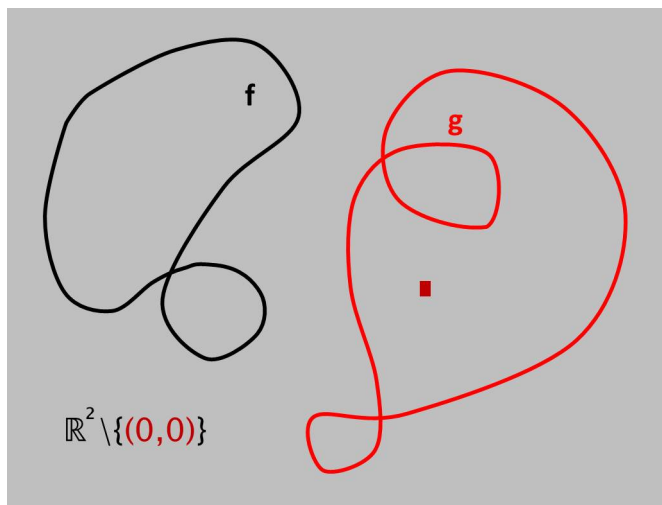
Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Abbildung I.6: f ist nullhomotop

Korollar I.1. Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!

Beispiel I.4. Jeder geschlossene Weg im \mathbb{R}^2 , d.h. jede stetige Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $[[0, 1], \mathbb{R}^2]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1, 0)$.

Interpretiere einen geschlossenen Weg im \mathbb{R}^2 auch als stetige Abbildung von $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ in \mathbb{R}^2 , so gilt also $[S^1, \mathbb{R}^2]$ ist einelementig. Aber $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$ ist nichttrivial!

Abbildung I.7: Geschlossene Wege in \mathbb{R}^n 

0.7 Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}|_A)$ heißt Teilraum von (X, \mathcal{O}) .

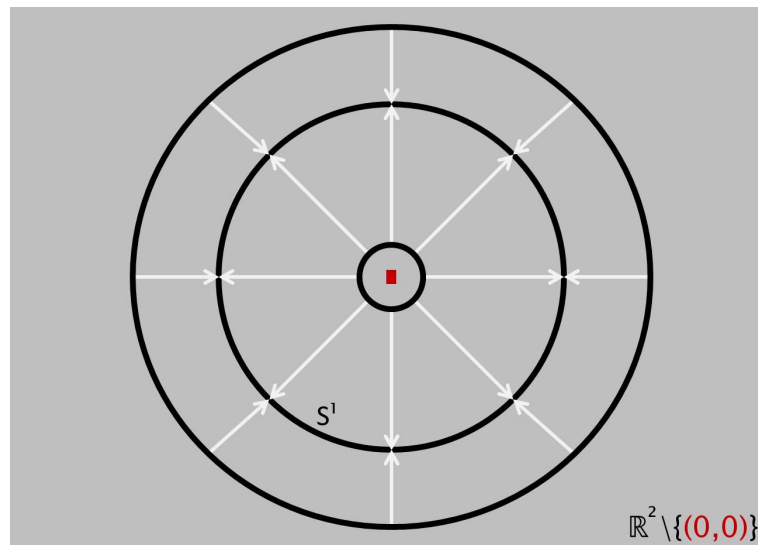
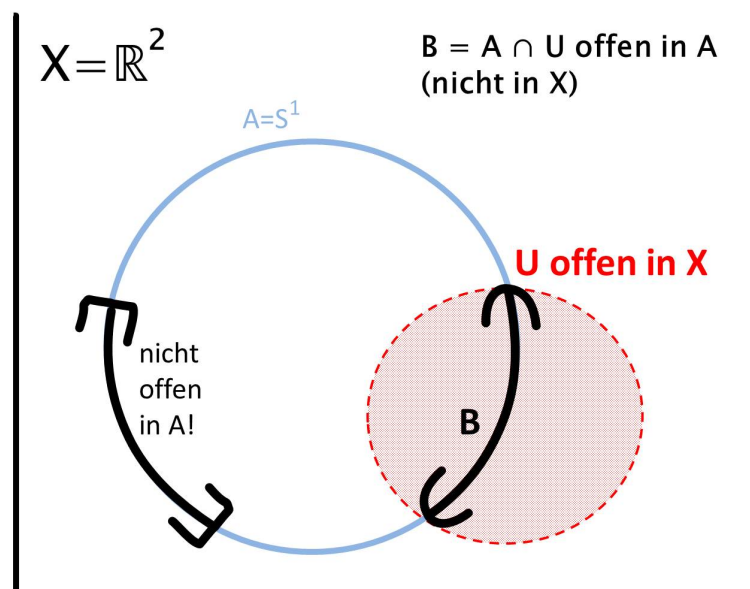


Abbildung I.8: $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}] \cong [S^1, S^1]$

Bemerkung I.6. $B \subset A$ ist also genau dann offen in A , wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.

Beispiel I.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



Achtung: B ist nicht offen in \mathbb{R}^2 !

1 Grundlagen der allgemeinen Topologie

Beispiel I.6 (Beispiele topologischer Räume). (1) $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$
‘triviale Topologie’

(2) $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ ‘diskrete Topologie’

(3) *Metrische Räume, siehe unten*

(4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ definiert
 eine Topologie auf X , aber $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ nicht!

(5) $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O \text{ ist Vereinigung von Intervallen } (a, b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum, und \mathcal{O} heißt Standard-Topologie.

(6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \setminus E, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ ist auch eine
 Topologie auf \mathbb{R} , die so genannte \mathcal{T}_1 -Topologie.

1.1 Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \setminus A$ ist offen.

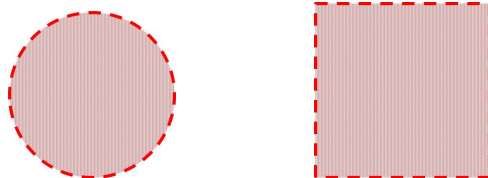
Bemerkung I.7. Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso X und \emptyset .

Beispiel I.7. In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ¹ alle endlichen Teilmengen und X, \emptyset .

1.2 Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x .

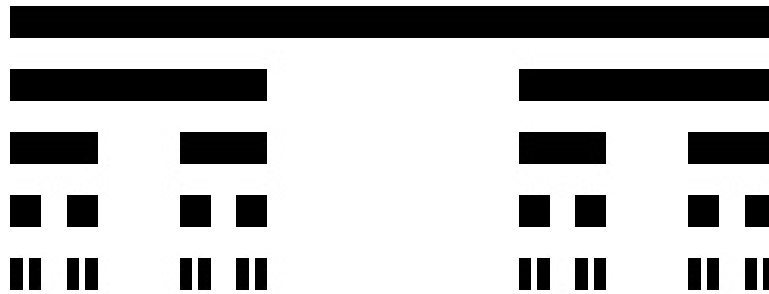
Bemerkung I.8. Umgebungen sind per definitionem offen!



¹ \mathbb{R} mit \mathcal{T}_1 -Topologie

Bemerkung I.9. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{\text{Standard}}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R} sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!



Beispiel I.8 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0, 2\} \right\}$).
 $\Rightarrow \mathcal{C}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} , enthält überabzählbar viele Elemente und hat ‘Hausdorff-Dimension’ $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6 \dots$



1.3 Basis

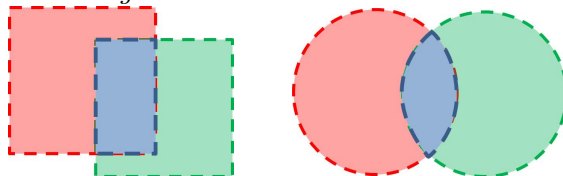
Ist (X, \mathcal{O}) topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt \mathcal{B} Basis der Topologie \Leftrightarrow Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

Beispiel I.9. (1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von \mathbb{R} .

(2) Sämtliche offenen² Kreisscheiben  und auch sämtliche offenen Quadrate  bilden Basen in und derselben Topologie auf \mathbb{R}^2 .

Bemerkung I.10. • $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ist Basis der Topologie von $X \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset O$.

• $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Basis einer Topologie auf $X \Leftrightarrow X$ ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} und der Schnitt je zweier Mengen aus \mathcal{B} ist eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .



²bezüglich der euklidischen Metrik

1.4 Feiner und gröber

Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt \mathcal{O}_2 feiner als \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_1 gröber als \mathcal{O}_2 .

Beispiel I.10. • Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X , die diskrete Topologie die feinste.

• Die Standard-Topologie auf \mathbb{R} ist feiner als die \mathcal{T}_1 -Topologie.

Mehr zu metrischen Räumen

1.5 ϵ -Ball, Sphäre

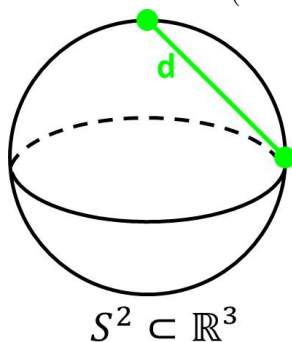
Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ der offene ϵ -Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ -Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ die ϵ -Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)

1.6 Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X .

Beispiel I.11. Für $X = \mathbb{R}_{Eukl.}^n$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$ -Sphäre.

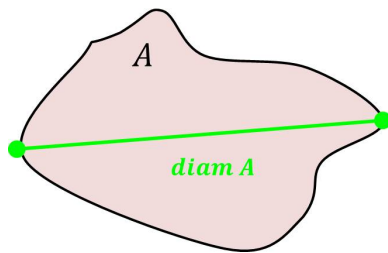


1.7 Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt

$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R} : d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$

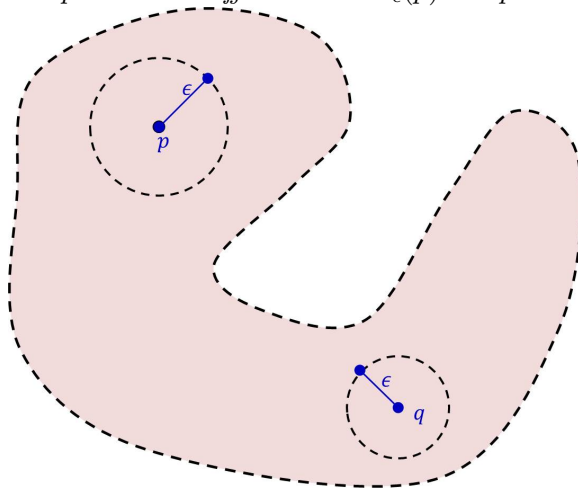
Das Infimum, $\text{diam } A$, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A .



Bemerkung I.11. In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ von X , diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.

Bemerkung I.12. $A \subset (X, d)$ ist offen

$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$



1.8 Abstand

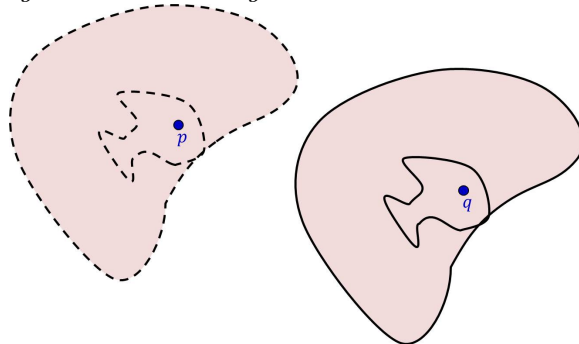
(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := \text{dist}(p, A) := \inf \{ d(p, a) \mid a \in A \}$$

heißt Abstand von p und A .

Erinnerung Ist (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und $A \subset X$, so definiert $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A , die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

Bemerkung I.13. Ist $A \subset X$ offen in X , so ist auch jede in A offene Menge offen in X , und abgeschlossene³ Teilmengen einer in X abgeschlossenen Menge A sind auch abgeschlossen in X .



Aber abgeschlossene Mengen B in $A \subset X$ sind für beliebiges A im Allgemeinen nicht abgeschlossen in X .

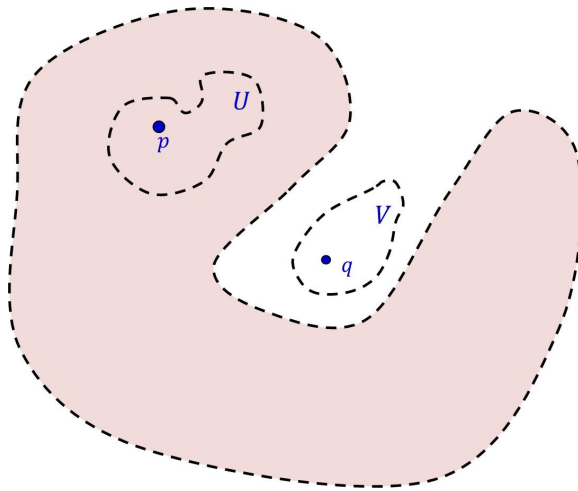
Beispiel I.12 (Beispiel zu Bemerkung I.13). $B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$

1.9 Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

- (1) innerer Punkt von A , falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.
- (2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.
- (3) Randpunkt von A , falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \setminus A$ hat.

³in A



1.10 Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\overset{\circ}{A}$ Inneres von A .

Bemerkung I.14. $\overset{\circ}{A}$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A , und A ist offen $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

Beispiel I.13. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$

1.11 Abschluss

Der Abschluss \bar{A} von A ist $X \setminus \left((X \setminus A)^\circ \right)$.

1.12 Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, d.h. Rand $A = \{ \text{Randpunkte von } A \}$.

(TODO:Exkurs zu ‘Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander’)

1.13 Stetigkeit

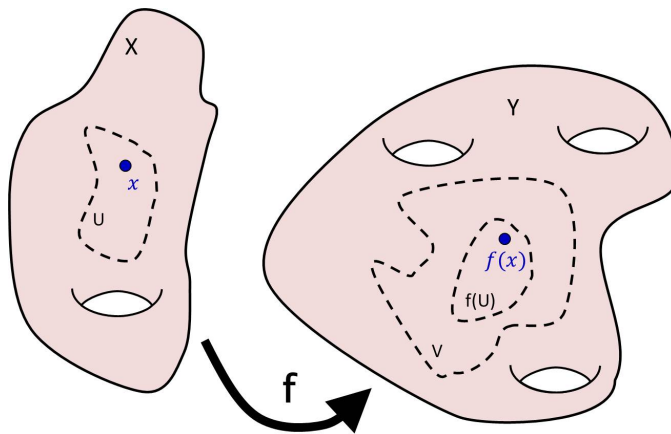
$f: X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X .

Beispiel I.14. • $f: X \rightarrow Y$ ist stetig \Leftrightarrow Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

- Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 Topologien auf X , so ist die Identität $\text{id}: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ stetig $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.
- Für $A \subset X$ ist die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}|_A$ die größte Topologie, bezüglich der die Inklusion $i: A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ stetig ist.

1.14 Stetigkeit

$f: X \rightarrow Y$ ist stetig in $x \in X$ $:\Leftrightarrow$
 \forall Umgebungen V von $f(x) \exists$ Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.



Bemerkung I.15. $f: X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.

Beispiel I.15. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für jeden offenen Ball B um $f(x)$ ein offener Ball um x existiert, der unter f in B abgebildet wird. (Und ferner stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ auch $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ folgt.)

1.15 Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ isometrische Einbettung

$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.

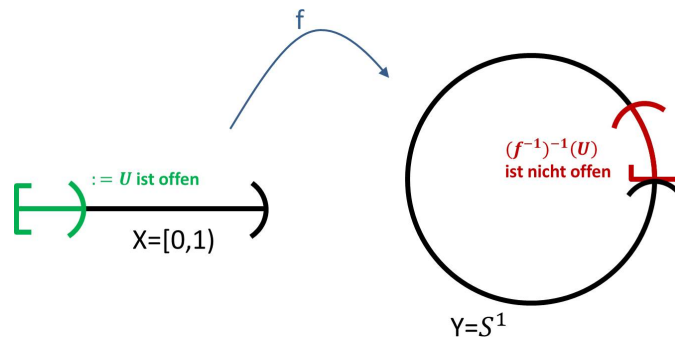
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.

Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

1.16 Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f: X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

Beispiel I.16. • $f: [0, 1) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!



- $\text{id}_X: X \rightarrow X$ ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.

Bemerkung I.16. ‘Homöomorph sein’ ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.

1.17 homöomorph

Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

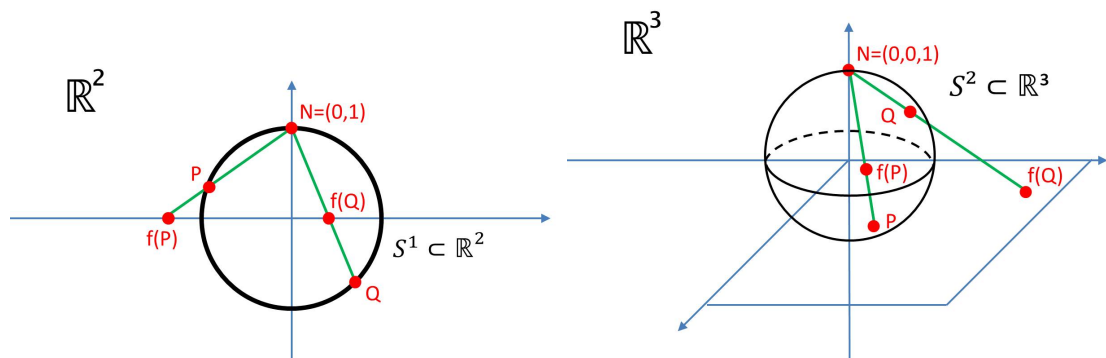
Bemerkung I.17. Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:

- Ist $f: X \rightarrow Y$ Homöomorphismus, so ist $U \subset X$ offen $\Leftrightarrow f(U)$ offen in Y .
- $A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow f(A)$ ist abgeschlossen in Y .
- $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, $f(\mathring{A}) = (f(\bar{A}))^\circ$.
- U ist Umgebung von $x \in X \Leftrightarrow f(U)$ ist Umgebung von $f(x)$.

Beispiel I.17. • Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.

- $[0, 1] \cong [a, b] \forall a < b \in \mathbb{R}$
- $(0, 1) \cong (a, b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$

Beispiel I.18. Stereographische Projektion



Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von $S^n \setminus \{N\}$, $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, gegeben wie folgt:

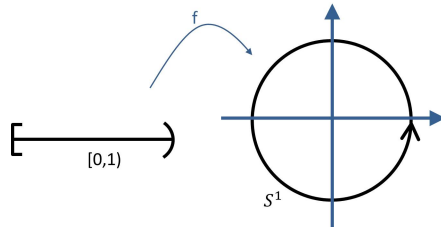
Der Schnitt der Geraden im \mathbb{R}^{n+1} durch N und $x \in S^n \setminus \{N\}$ mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, $f(x)$, ist gegeben durch $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$ mit Umkehrabbildung $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1})$.

1.18 Einbettung

$f: X \rightarrow Y$ stetig heißt Einbettung $:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y$ Homöomorphismus.

Beispiel I.19. • Für $A \subset X$ ist die Inklusion $\iota: A \hookrightarrow X, x \mapsto x$, stets eine Einbettung.

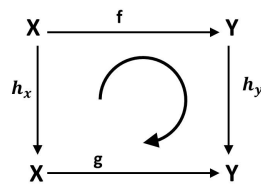
- $[0, 1) \rightarrow S^1$ ist keine Einbettung!



- Der Satz über die Umkehrabbildung/ Impliziter Funktionensatz aus der Analysis zeigt:
Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und in $p \in \mathbb{R}^n$ die Jacobi-Matrix $Df(p)$ invertierbar, so existiert eine Umgebung von p , auf der $f|_U$ eine Einbettung ist.

1.19 Äquivalenz von Einbettungen

Zwei Einbettungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow \exists$ Homöomorphismen $h_X: X \rightarrow X, h_Y: Y \rightarrow Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$,



d.h. dass das Diagramm

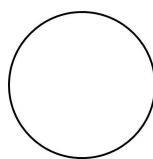
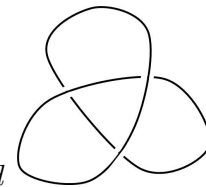
kommutiert.

1.20 Knoten

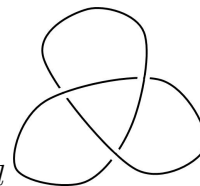
Eine Einbettung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Knoten.

Beispiel I.20. Die Knoten mit Bildern

und



und



nicht!

sind äquivalent, die mit

Kapitel II

Topologische Eigenschaften

0.21 zusammenhängend

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind \emptyset und X .

Ansonsten heißt X un- oder nicht zusammenhängend.

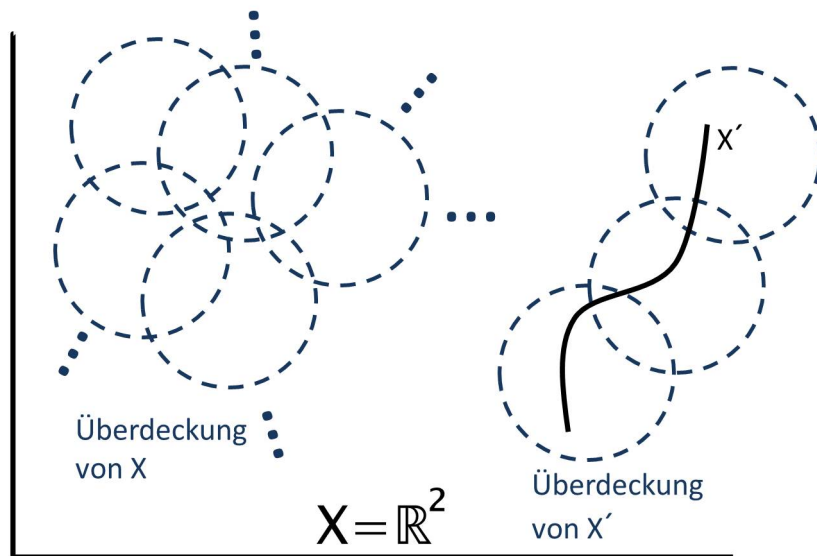
0.22 Überdeckung

Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ^a von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X $:\Leftrightarrow X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

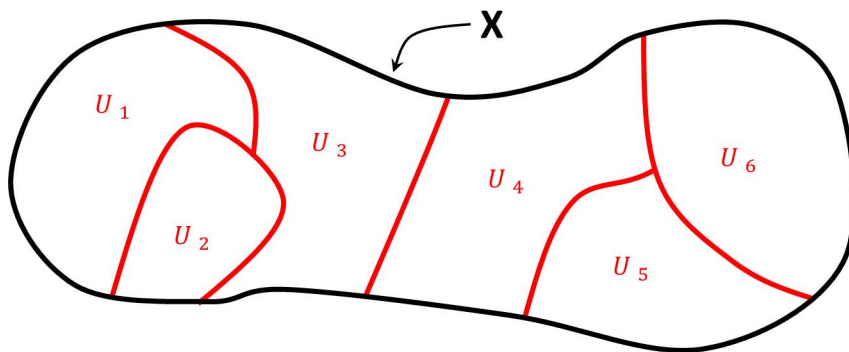
\mathcal{U} heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung \Leftrightarrow alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.

Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' $:\Leftrightarrow X' \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

^a A Indexmenge



Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte Teilmengen.



Bemerkung II.1. Ein topologischer Raum X ist zusammenhängend \Leftrightarrow Es existiert keine Partition von X in zwei nichtleere offene Teilmengen \Leftrightarrow es existiert keine Partition von X in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen
Denn: $A \subset X$ ist offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow A$ und $X \setminus A$ sind offen $\Leftrightarrow A$ und $X \setminus A$ sind abgeschlossen

Beispiel II.1. • \mathbb{Q} als Teilmenge von \mathbb{R} ist nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi)) \cup (\mathbb{Q} \cap (\pi, +\infty))$.

- Die einzigen zusammenhängenden und mit der diskreten Topologie versehenen Räume sind \emptyset und der nur aus einem Punkt bestehende Raum.

Bemerkung II.2. Allgemein sagt man von einer Menge, sie sei zusammenhängend, wenn diese, aufgefasst als Teilraum eines topologischen Raumes, zusammenhängend ist.

Beispiel II.2. $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend, aber $[0, 1] \cup (2, 3)$ nicht!

Beispiel II.3. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow A$ ist leer, einpunktig, oder unendlich!

Bemerkung II.3 (Eigenschaften zusammenhängender Mengen). • A zusammenhängend $\Rightarrow \bar{A}$ zusammenhängend

- $A, B \subset X$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend
- $A \cup B$ zusammenhängend, $A \cap B$ zusammenhängend $\not\Rightarrow A, B$ zusammenhängend ($A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

0.24 Zusammenhangskomponente

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X .

Bemerkung II.4. • Jeder Punkt von X liegt genau in einer Zusammenhangskomponente, und diese ist die Vereinigung aller diesen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen.

- Zwei Zusammenhangskomponenten sind damit entweder gleich oder disjunkt.
- Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

Satz II.1. Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

(D.h.: Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend, so auch $f(X) \subset Y$.)

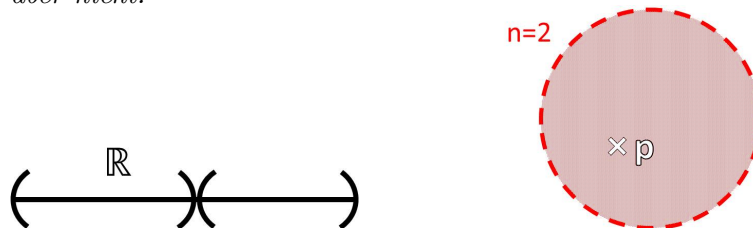
Beweis. Es sei ohne Einschränkung $Y = f(X)$ und sei $Y = U \cup V$ Partition von Y in zwei offene Mengen $\Rightarrow f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ sind offen in X (f stetig) und bilden eine Partition von X . X ist zusammenhängend. $\Rightarrow f^{-1}(U)$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$.

Sei o.E. $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow V = f(X)$ (f surjektiv auf $f(X)$) \Rightarrow Es existiert keine Partition von Y in nichtleere offene Mengen $\Leftrightarrow Y$ zusammenhängend. \square

Korollar II.1. Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.

Beispiel II.4. Für $n > 1$ sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R} nicht homöomorph!

Denn: $\mathbb{R}^n \cong \mathring{D}^n$ (Einheitskugel) und nimmt man aus \mathring{D}^n einen Punkt p heraus, so bleibt für $n > 1$ $\mathring{D}^n \setminus \{p\}$ zusammenhängend, $\mathring{D}^1 = (-1, 1) \cong \mathbb{R}$ aber nicht!



Allgemeiner (Brouwer) $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow m = n$

Korollar II.2. Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel II.5. Waffel teilen. Eine Waffel, wie unregelmäßig auch immer, lässt sich immer in zwei gleich große Teile schneiden.
(TODO: Bild) (TODO: Bild)

0.25 Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.
(TODO: Bild)

0.26 Wegzusammenhang

X heißt wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Zu je zwei Punkten $x, x' \in X \exists$ Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$.
(TODO: Bild) (TODO: Bild)

Beispiel II.6. (TODO: Bild)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$B = A \cup \{(0, 0)\}$$

$\Rightarrow B$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

0.27 Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

1 Trennungseigenschaften**1.1 T_1 -Raum**

Ein topologischer Raum X heißt T_1 -Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X , die den anderen nicht enthält. (TODO:Bild)

$$\forall x \neq y \in X \exists U = U_x : y \notin U_x$$

1.2 T_2 -Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2 -Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y \text{ mit } U_x \cap U_y = \emptyset \text{ (TODO:Bild)}$$

Beispiel II.7. Jeder metrische Raum ist Hausdorff-Raum.

Bemerkung II.5. Hausdorff-Räume sind z.B. deshalb wichtig, weil Grenzwerte dort eindeutig sind!

1.3 Grenzwert

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X , so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \forall n \geq N$. (TODO:Bild)

Beispiel II.8. In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.

Bemerkung II.6. Hausdorff-Räume sind auch T_1 -Räume, aber:

Beispiel II.9. In $X = \mathbb{R}_{T_1}$ ist jeder Punkt abgeschlossen ($\Rightarrow T_1$), doch je zwei nichtleere offene Mengen schneiden sich - X ist damit nicht T_2 ! "Schlimmer": In \mathbb{R}_{T_1} ist jeder Punkt Grenzwert der Folge $x_n = n!$ Denn eine Umgebung eines Punktes in \mathbb{R}_{T_1} hat die Form $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_M\}$ mit $x_1 < \dots < x_M$. Dann gilt aber $x_n = n \in U \forall n > x_M$.

2 Abzählbarkeitsaxiome

2.1 Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x , sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Beispiel II.10. Ist B Basis der Topologie eines Raumes X , so ist für jedes $x \in X$ $\{U \in B \mid x \in U\}$ eine Basis von X in x .

Beispiel II.11. In einem metrischen Raum X sind folgende Mengen von Bällen Basen von X in $x \in X$:

- alle offenen Bälle mit Zentrum x
- alle offenen Bälle mit Zentrum x und rationalen Radii

Beispiel II.12. Ist X mit der diskreten bzw. trivialen Topologie versehen, so ist die 'kleinste' Basis in $x \in X$ gegeben durch $\{\{x\}\}$ bzw. $\{X\}$.

2.2 Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.

X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow X$ selbst besitzt eine abzählbare Basis.

X heißt separabel $:\Leftrightarrow X$ enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A .

Bemerkung II.7. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste, aber:

Beispiel II.13. Überabzählbare diskrete Räume (wie $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{diskret}})$) erfüllen nach [Beispiel II.12](#) das erste Abzählbarkeitsaxiom, nicht aber das zweite!

Bemerkung II.8. Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und jeder separable metrische Raum auch das zweite.

Beispiel II.14. $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist aber separabel - \mathbb{N} ist dicht!

Beispiel II.15. Euklidische Räume und alle ihre Teilmengen erfüllen das 2. Abzählbarkeitsaxiom und sind separabel.

Wozu das Ganze?

↪ Funktionenräume

↪ Mannigfaltigkeiten

↪ Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung eines Raumes, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, enthält auch eine abzählbare Teilüberdeckung.

2.3 Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt

$:\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U , sodass \bar{U} kompakt ist.

2.4 Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich $:\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U = U(x) : A \cap U = \emptyset \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A . (TODO:Bild)

2.5 Verfeinerung

Γ, Δ Überdeckungen von X . Δ heißt Verfeinerung von Γ

$:\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma : A \subset B$.

2.6 Parakompaktheit

X heißt parakompakt $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

(TODO:Bild) Cut-off

Kapitel III

Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume

Beispiele zu Mannigfaltigkeiten (Exkurs) (TODO:Bild 1)

0.7 Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum M heißt n -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

- 1. M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie*
- 2. M ist lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n , d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{\text{offen}} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow V, V \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$.
Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p .*

(TODO:Bild 2)

Bemerkung III.1. Die Zahl n , die Dimension von M , ist eindeutig bestimmt! (folgt aus Brouwers Satz von der Invarianz des Gebietes)

0.8 Atlas

Ein Atlas für eine topologische n -Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}^a$ von Karten $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

^a Λ Indexmenge

0.9 C^k -Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k -Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k -Abbildung, also k -mal stetig differenzierbar ist. ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$)
(TODO: Bild 3)

0.10 Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k -Atlas von M , so heißt eine Karte (φ, U) von M mit \mathcal{A} verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k -Atlas ist. Ein C^k -Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls \mathcal{A} alle mit \mathcal{A} verträglichen Karten enthält.

0.11 C^k -Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k -Mannigfaltigkeit) ist ein Paar (M, \mathcal{A}) bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k -Struktur auf M . Eine C^∞ -Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.
(TODO: Bild 4)

Richtig toller Exkurs zu Mannigfaltigkeiten ...