Einführung in die Geometrie und Topologie
- Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

26. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Homotopie und Fundamentalgruppe **3**

2 Grundlagen der allgemeinen Topologie **6**

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel 1

Homotopie und Fundamentalgruppe

Definition 1.1 (Topologischer Raum). *Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System σ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.*
X Menge, $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

- *(1)* $O_1, O_2 \in \sigma \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \sigma$
- *(2)* $O_\alpha \in \sigma, \alpha \in A, A$ *Indexmenge* $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \sigma$
- *(3)* $X, \emptyset \in \sigma$

Beispiel 1.1. $\sigma = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \sigma)$ *ist topologischer Raum!*

Beispiel 1.2.

$$X \text{ Menge, } \sigma = \{\{x\} | x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\sigma}$$

$\Rightarrow (X, \tilde{\sigma})$ *ist topologischer Raum.* σ *ist "Basis" der Topologie* $\tilde{\sigma}$.

Definition 1.2 (Metrischer Raum). *Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

- *(1)* $d(x, y) = d(y, x)$ *"Symmetrie"*
- *(2)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ *"Definitheit"*
- *(3)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *"Dreiecksungleichung"*
- $\forall x, y, x \in X$

Definition 1.3 (stetig). *Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.*

Bemerkung 1.1. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}(\epsilon > 0)$, und $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.*

Definition 1.4 (Homotopie). *Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung*

$$H\colon X \times I^1 \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

TODO:BILDER

Bemerkung 1.2. *H heißt auch Homotopie von f nach g, eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g. f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.*

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0, 1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t\colon X \to Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1. (TODO: BILD)

Definition 1.5 (homotope Abbildungen). *Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.*

Bemerkung 1.3. *"Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X, Y) := \{F\colon X \to Y \text{ stetig }\}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0, 1]$, so liefert $(\tilde{h_t}) mit \tilde{h_t} := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f, d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.
Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t :\equiv f \forall t \in [0, 1]$
Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t). Dann liefert $M\colon X \times [0, 1] \to Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l.
Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

[1] $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

(TODO:BILD)

Bemerkung 1.4. *Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X,Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet. (TODO: BILD)*

Bemerkung 1.5. *$C(X,Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X,Y]$!*

Beispiel 1.3. *Je zwei stetige Abbildungen $f,g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x,t) := (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g: (TODO: BILD)*

Definition 1.6. *Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (TODO:BILD)*

Korollar 1.1. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X,\mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!*

Beispiel 1.4. *Jeder geschlossene Weg im $\mathbb{R}^2$, d.h. jede stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $\big[[0,1],\mathbb{R}^2\big]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1,0)$. (TODO: BILD) Interpretiere einen geschlossenen Weg im $\mathbb{R}^2$ auch als stetige Abbildung von S^1 in $\mathbb{R}^2$, so gilt also $[S^1,\mathbb{R}^2]$ ist einelementig.*
Aber $[S^1,\mathbb{R}^2\backslash\{0\}]$ ist nichttrivial! (TODO: BILD)

Definition 1.7. *Es sei (X,σ) topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch*

$$\sigma\Big|_A := \{U \cap A | U \in \sigma\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A,\sigma\Big|_A)$ heißt Teilraum von (X,σ).

Bemerkung 1.6. *$B \subset A$ ist also genau dann offen in A, wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.*

Beispiel 1.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \; ||x|| = 1\}$
(TODO: BILD)
Achtung: B ist nicht offen in R^2!

Kapitel 2

Grundlagen der allgemeinen Topologie

Beispiel 2.1 (Beispiele topologischer Räume).

- *(1)* $X, \sigma := \{X, \emptyset\}$ *'triviale Topologie'*
- *(2)* $X, \sigma := \mathcal{P}(X)$ *'diskrete Topologie'*
- *(3) Metrische Räume, siehe unten*
- *(4)* $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \sigma := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ *definiert eine Topologie auf* X*, aber* $\sigma' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ *nicht!*
- *(5)* $X := \mathbb{R}, \sigma := \{O \mid O$ *ist Vereinigung von Intervallen* (a, b) *mit* $a, b \in \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow (X, \sigma)$ *ist topologischer Raum, und* σ *heißt Standard-Topologie.*
- *(6)* $X := \mathbb{R}, \tilde{\sigma} := \{O \mid O = \mathbb{R} \backslash E, E \subset \mathbb{R}$ *endlich*$\} \cup \{\emptyset\}$ *ist auch eine Topologie auf* $\mathbb{R}$*, die so genannte* τ_1*-Topologie.*

Definition 2.1. $A \subset X, X$ *topologischer Raum, heißt abgeschlossen* $:\Leftrightarrow X \backslash A$ *ist offen.*

Bemerkung 2.1. *Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso* X *und* $\emptyset$.

Beispiel 2.2. *In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in* $\mathbb{R}_{\tau_1}$[1] *alle endlichen Teilmengen und* $X, \emptyset$.

Definition 2.2. *Ist* X *topologischer Raum und* $x \in X$*, so heißt jede offene Teilmenge* $O \subset X$ *mit* $x \in O$ *eine Umgebung von* x.

Bemerkung 2.2. *Umgebungen sind per definitionem offen! (TODO: BILD)*

[1] $\mathbb{R}$ mit τ_1-Topologie

Bemerkung 2.3. *Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{Standard}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!*

Beispiel 2.3 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,2\}\right\}$).
(TODO: BILD)
$\Rightarrow$ *$\mathcal{C}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension' $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\ldots$*

Definition 2.3. *Ist (X, σ) topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \sigma$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*

Beispiel 2.4. • *(1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von $\mathbb{R}$.*
• *(2) Sämtliche offenen[2] Kreisscheiben (TODO: BILD) und auch sämtliche offenen Quadrate (TODO: BILD) bilden Basen ein und derselben Topologie auf $\mathbb{R}^2$.*
(TOSO: BILD)

Bemerkung 2.4. • *$\mathcal{B} \subset \sigma$ ist Basis der Topologie von $X \Leftrightarrow \forall O \in \sigma \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}\colon x \in B \subset O$.*
• *$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Bais einer Topologie auf $X \Leftrightarrow X$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ und der Schnitt je zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ ist eine Bereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*
(TODO: BILD)

Definition 2.4. *Seind σ_1 und σ_2 Topologien auf X und $\sigma_1 \subset \sigma_2$, so heißt σ_2 feiner als σ_1 und σ_1 gröber als σ_2.*

Beispiel 2.5. • *Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X, die diskrete Topologie die feinste.*
• *Die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist feiner als die τ_1-Topologie.*

Mehr in metrischen Räumen:

Definition 2.5. *Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$*

- *$B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) < \epsilon\}$ der offene ϵ-Ball um p*
- *$D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ-Ball um p*
- *$S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p,x) = \epsilon\}$ die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)*

[2] bezüglich der euklidischen Metrik

Definition 2.6. *Ist* (X, d) *metrischer Raum und* $A \subset X$*, so heißt der metrische Raum* $(A, d\big|_{A\times A})$ *(metrischer) Unterraum von* X*.*

Beispiel 2.6. *Für* $X = \mathbb{R}^n_{Eukl.}$ *sind* $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ *und* $S^{n-1} := S_1 0$ *metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw.* $(n-1)$*-Sphäre.*
(TODO: BILD)

Definition 2.7. $A \subset (X, d)$ *heißt beschränkt*
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}\colon d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$
(TODO: BILD)
Das Infimum, diam A*, dieser* ρ *heißt dann Durchmesser von* A*.*

Bemerkung 2.5. *In einem metrischen Raum* (X, d) *bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie* $\sigma = \sigma_d$ *von* X*, diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.*

Bemerkung 2.6. $A \subset (X, d)$ *ist dann offen* $\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ *ein offener Ball* $B_\epsilon(p)$ *um* p *mit* $B_\epsilon(p) \subset A$
(TODO: BILD)

Definition 2.8. (X, d) *sei metrischer Raum und* $A \subset X, p \in X$*.*

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p *und* A*.*