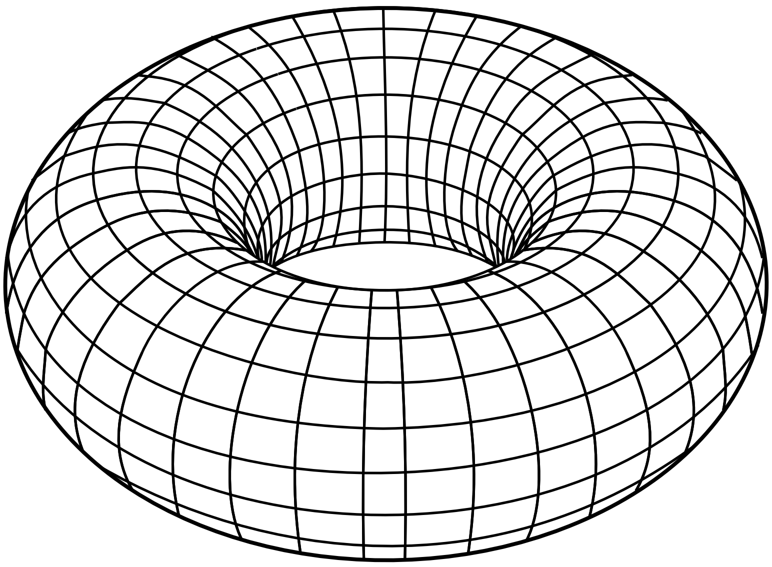
Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

17. November 2011



Inhaltsverzeichnis

I Homotopie und Fundamentalgruppe **2**

0 Vorwort 2

1 Grundlagen der allgemeinen Topologie 10

II Topologische Eigenschaften **20**

1 Trennungseigenschaften 25

2 Abzählbarkeitsaxiome 27

III Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume **30**

1 Mannigfaltigkeiten 30

2 Produkt-Topologie 35

3 Differenzierbare Abbildungen 36

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel I

Homotopie und Fundamentalgruppe

0 Vorwort

0.1 Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ *Indexmenge* $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Beispiel I.1. $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ *ist topologischer Raum!*

Beispiel I.2.

X Menge, $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ + *Axiome, die zu erfüllen sind* $\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$ *ist topologischer Raum.* $\mathcal{O}$ *ist "Basis" der Topologie* $\tilde{\mathcal{O}}$.

0.2 Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X *ist eine Menge* X *mit einer Abbildung* $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$*, der "Metrik" auf* X*, die folgende Eigenschaften erfüllt:* $\forall x, y, z \in X$

(1) $d(x, y) = d(y, x)$ *"Symmetrie"*

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ *"Definitheit"*

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *"Dreiecksungleichung"*

0.3 Stetigkeit

Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ *zwischen topologischen Räumen* X *und* Y *heißt stetig, falls die* F*-Urbilder offener Mengen in* Y *offene Teilmengen von* X *sind.*

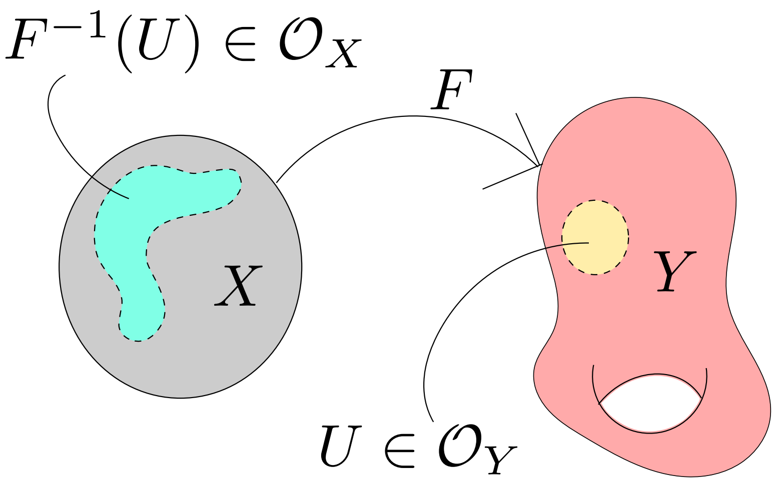


Abbildung I.1: Stetige Abbildung

Bemerkung I.1. *Ist* (X, d) *ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen* $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}(\epsilon > 0)$*, und* $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ *ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit* $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$*.*

0.4 Homotopie

Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I^a \to Y, (x,t) \mapsto H(x,t)$$

mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x) \forall x \in X$.

[a] $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$

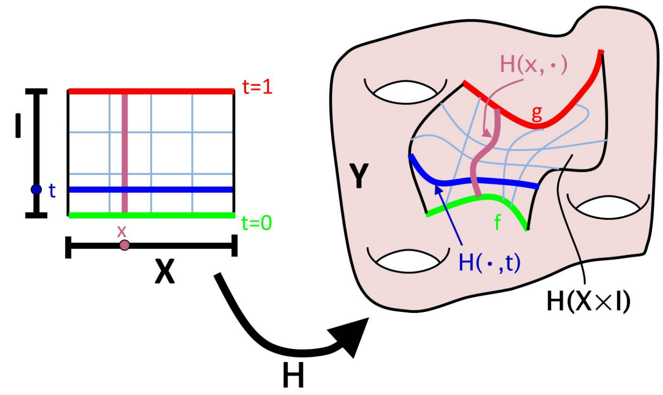


Abbildung I.2: Homotopie

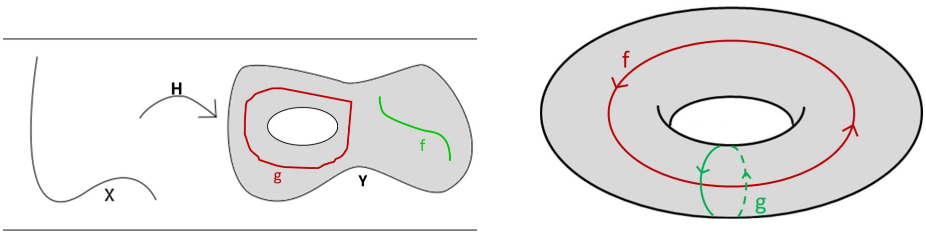
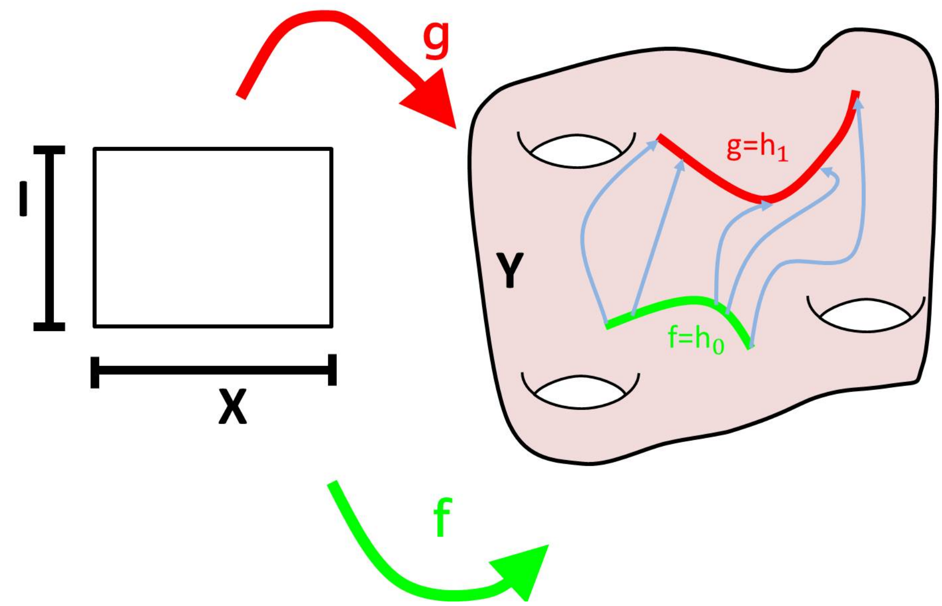


Abbildung I.3: f und g sind jeweils nicht homotop!

Bemerkung I.2. *H heißt auch Homotopie von f nach g, eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g. f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.*

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0,1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t \colon X \to Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1.



0.5 Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung I.3. *"Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X,Y) := \{F \colon X \to Y \text{ stetig }\}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0,1]$, so liefert $(\tilde{h_t})$ mit $\tilde{h_t} := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f, d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.
Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t :\equiv f \forall t \in [0,1]$
Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t). Dann liefert $M \colon X \times [0,1] \to Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l.
Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

Bemerkung I.4. *Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X,Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet.*

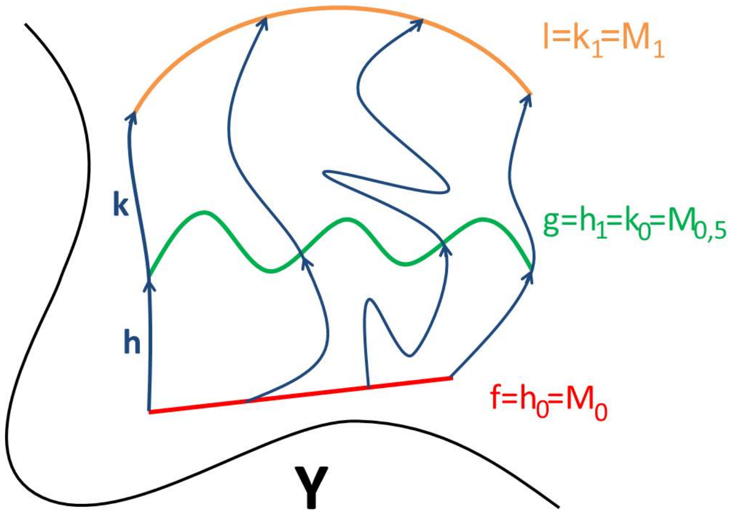


Abbildung I.4: Transitivität der Relation "homotop sein"

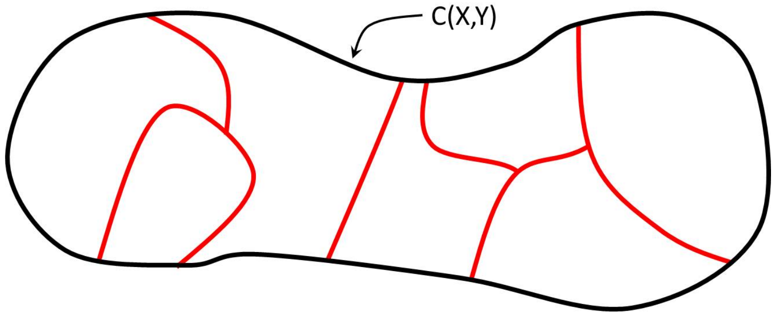


Abbildung I.5: Äquivalenzklassen $[X, Y]$ von $C(X, Y)$

Bemerkung I.5. *$C(X, Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X, Y]$!*

Beispiel I.3. *Je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x, t) := (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g:*

0.6 Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

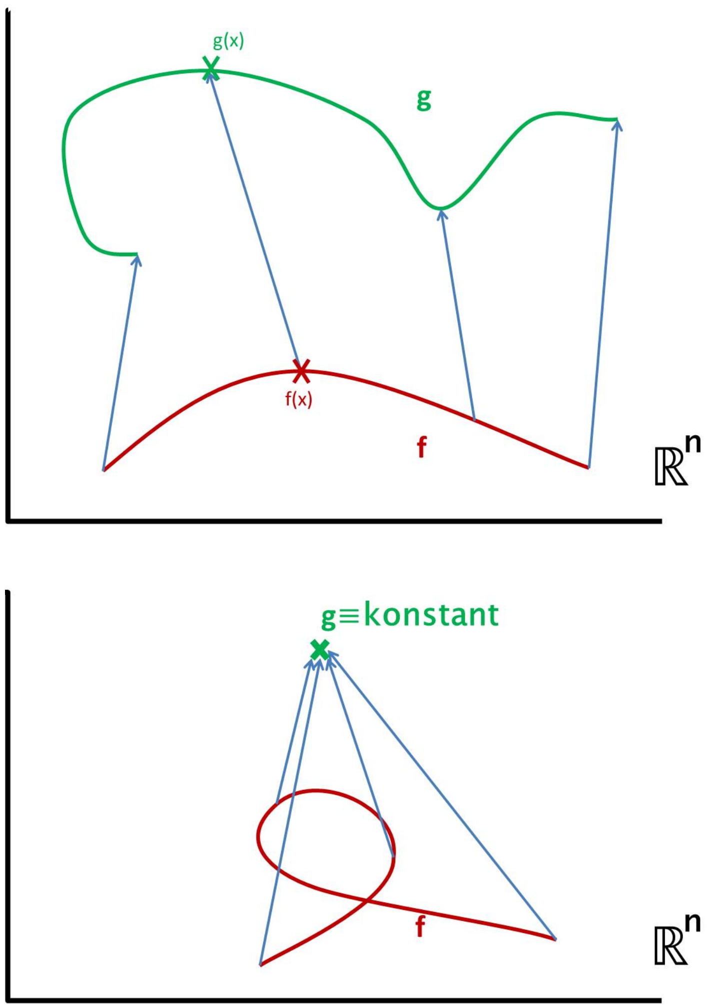


Abbildung I.6: f ist nullhomotop

Korollar I.1. *Jede stetige Abbildung* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum* X *besteht* $[X, \mathbb{R}^n]$, n *beliebig, nur aus einem Punkt!*

Beispiel I.4. *Jeder* <u>*geschlossene Weg im* $\mathbb{R}^2$</u>*, d.h. jede stetige Abbildung* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *mit* $f(0) = f(1)$ *ist nullhomotop.* $\big[[0,1], \mathbb{R}^2\big]$ + *gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve* $t \mapsto (1,0)$.

Interpretiere einen geschlossenen Weg im $\mathbb{R}^2$ *auch als stetige Abbildung von* $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$ *in* $\mathbb{R}^2$*, so gilt also* $[S^1, \mathbb{R}^2]$ *ist einelementig.* <u>*Aber*</u> $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$ *ist nichttrivial!*

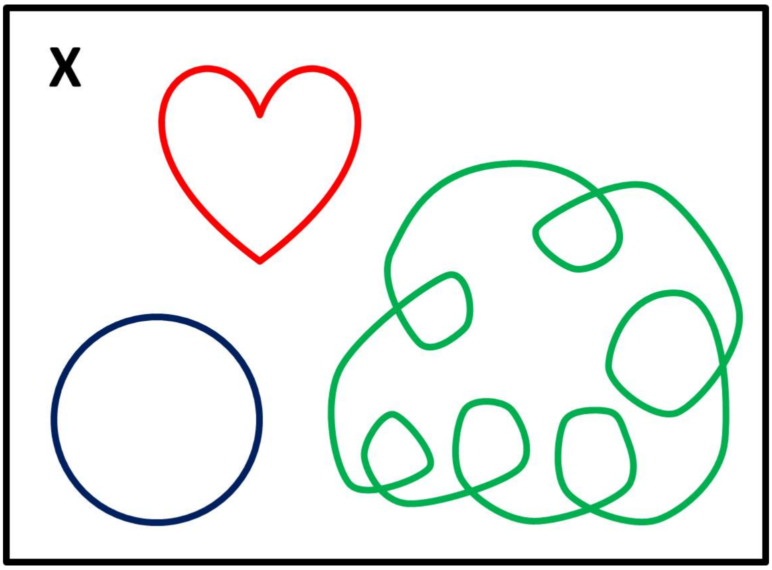
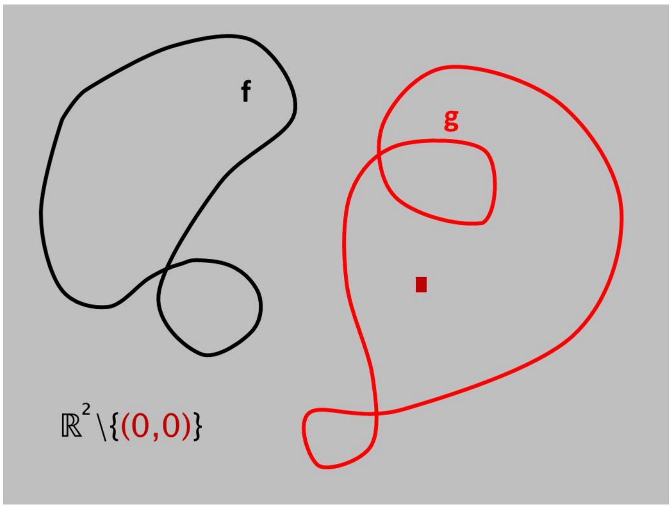


Abbildung I.7: Geschlossene Wege in $\mathbb{R}^n$



0.7 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt <u>Teilraumtopologie</u> und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\big|_A)$ heißt <u>Teilraum</u> von $(X, \mathcal{O})$.

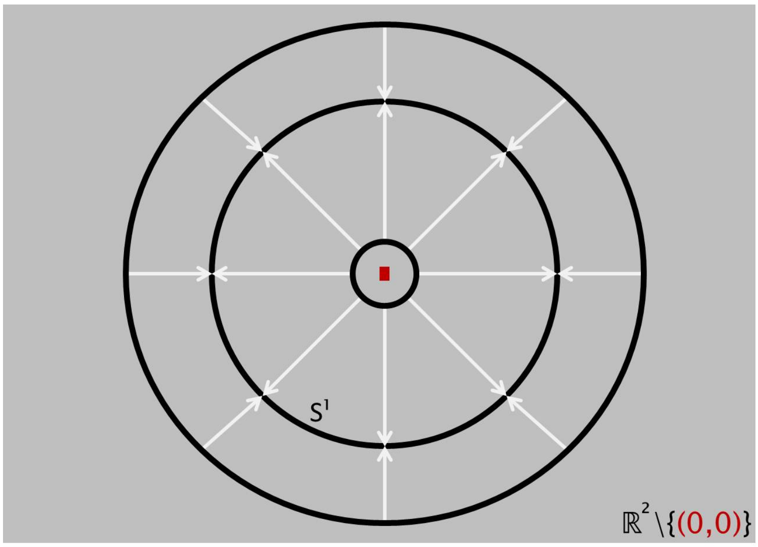
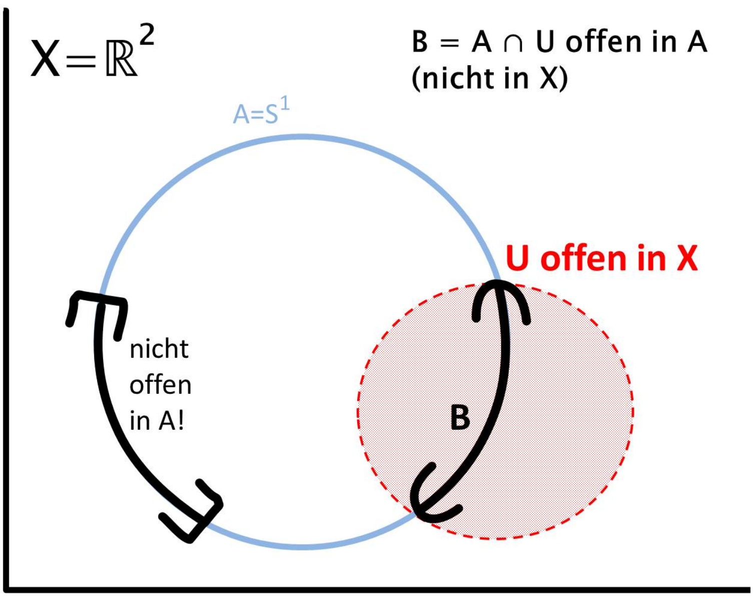


Abbildung I.8: $[S^1, \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}]$ "=" $[S^1, S^1]$

Bemerkung I.6. *$B \subset A$ ist also genau dann offen in A, wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.*

Beispiel I.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$



Achtung: B ist nicht offen in $\mathbb{R}^2$!

1 Grundlagen der allgemeinen Topologie

Beispiel I.6 (Beispiele topologischer Räume)**.** *(1)* $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$ *'triviale Topologie'*

(2) $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ *'diskrete Topologie'*

(3) Metrische Räume, siehe unten

(4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ *definiert eine Topologie auf* X*, aber* $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ *nicht!*

(5) $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O$ *ist Vereinigung von Intervallen* (a, b) *mit* $a, b \in \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow (X, \mathcal{O})$ *ist topologischer Raum, und* $\mathcal{O}$ *heißt Standard-Topologie.*

(6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \backslash E, E \subset \mathbb{R}$ *endlich*$\} \cup \{\emptyset\}$ *ist auch eine Topologie auf* $\mathbb{R}$*, die so genannte* $\mathcal{T}_1$*-Topologie.*

1.1 Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ *topologischer Raum, heißt abgeschlossen* $:\Leftrightarrow X \backslash A$ *ist offen.*

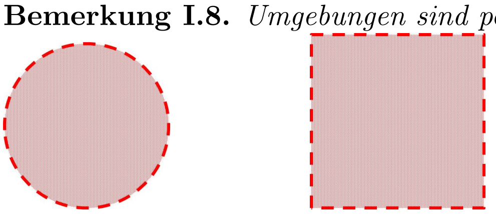
Bemerkung I.7. *Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso* X *und* $\emptyset$.

Beispiel I.7. *In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in* $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$[1] *alle endlichen Teilmengen und* $X, \emptyset$.

1.2 Umgebung

Ist X *topologischer Raum und* $x \in X$*, so heißt jede offene Teilmenge* $O \subset X$ *mit* $x \in O$ *eine Umgebung von* x.

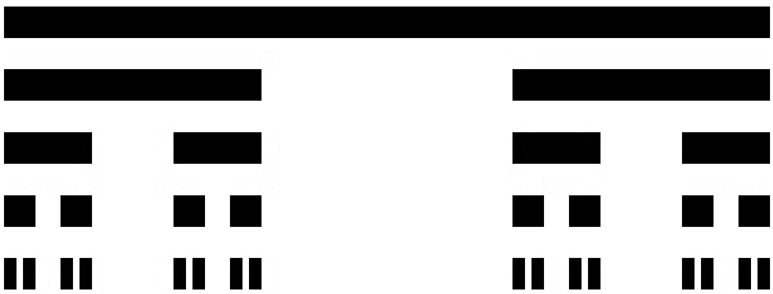
Bemerkung I.8. *Umgebungen sind per definitionem offen!*



[1] $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{T}_1$-Topologie

Bemerkung I.9. *Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{Standard}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!*

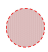
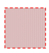
Beispiel I.8 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,2\} \right\}$).
$\Rightarrow$ *$\mathcal{C}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension'* $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\ldots$



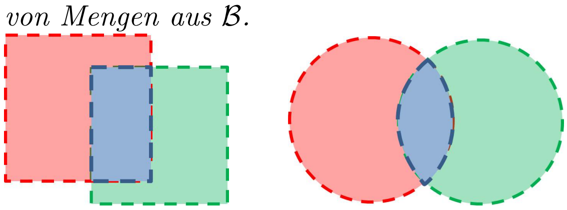
1.3 Basis

Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Beispiel I.9. *(1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von $\mathbb{R}$.*

(2) Sämtliche offenen[2] Kreisscheiben  *und auch sämtliche offenen Quadrate*  *bilden Basen ein und derselben Topologie auf $\mathbb{R}^2$.*

Bemerkung I.10. • *$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ist Basis der Topologie von $X \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}\colon x \in B \subset O$.*
• *$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Bais einer Topologie auf $X \Leftrightarrow X$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ und der Schnitt je zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ ist eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*



[2]bezüglich der euklidischen Metrik

1.4 Feiner und gröber

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

Beispiel I.10. • *Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X, die diskrete Topologie die feinste.*
• *Die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist feiner als die $\mathcal{T}_1$-Topologie.*

Mehr zu metrischen Räumen

1.5 ϵ-Ball, Sphäre

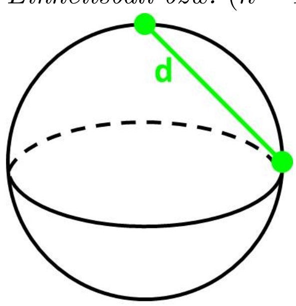
Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ *der offene ϵ-Ball um p*
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ *der abgeschlossene ϵ-Ball um p*
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ *die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)*

1.6 Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d\big|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

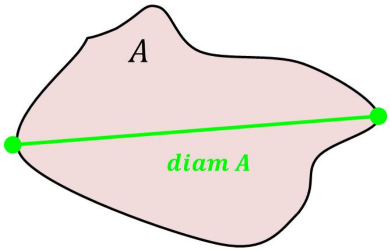
Beispiel I.11. *Für $X = \mathbb{R}^n_{Eukl.}$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$-Sphäre.*



$S^2 \subset \mathbb{R}^3$

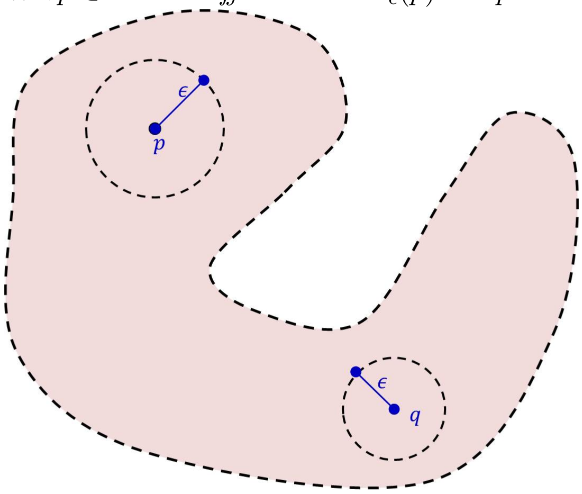
1.7 Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X,d)$ heißt beschränkt
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}\colon d(x,y) < \rho \ \forall x,y \in A$
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.



Bemerkung I.11. *In einem metrischen Raum (X,d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ von X, diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.*

Bemerkung I.12. *$A \subset (X,d)$ ist offen*
$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ *ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$*



1.8 Abstand

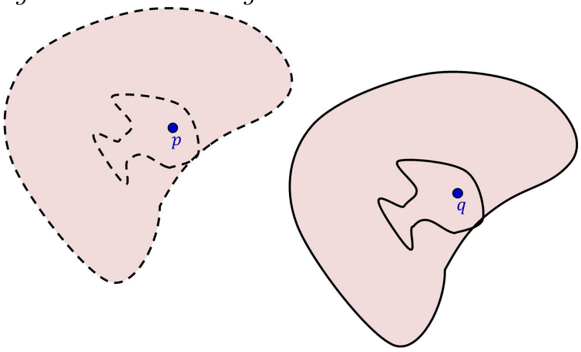
(X,d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p,A) := dist(p,A) := \inf\{d(p,a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Erinnerung Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$, so definiert $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A, die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

Bemerkung I.13. *Ist $A \subset X$ offen in X, so ist auch jede in A offene Menge offen in X, und abgeschlossene[3] Teilmengen einer in X abgeschlossenen Menge A sind auch abgeschlossen in X.*



Aber abgeschlossene Mengen B in $A \subset X$ sind für beliebiges A im Allgemeinen nicht abgeschlossen in X.

Beispiel I.12 (Beispiel zu Bemerkung I.13)**.** $B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$

1.9 Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

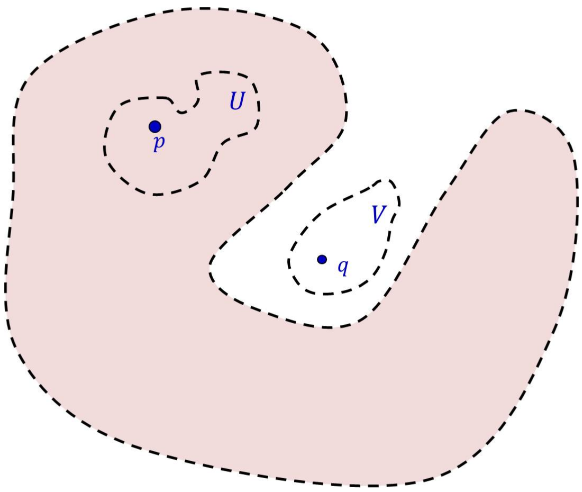
Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \backslash A$ hat.

[3] in A



1.10 Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

Bemerkung I.14. *$\mathring{A}$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A, und A ist offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$*

Beispiel I.13. $\mathbb{R}\overset{\circ}{\backslash}\mathbb{Q} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

1.11 Abschluss

Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X\backslash \left((X\overset{\circ}{\backslash} A)\right)$.

1.12 Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A}\backslash\mathring{A}$, d.h. Rand A = \{ Randpunkte von A \}.

(TODO:Exkurs zu 'Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander')

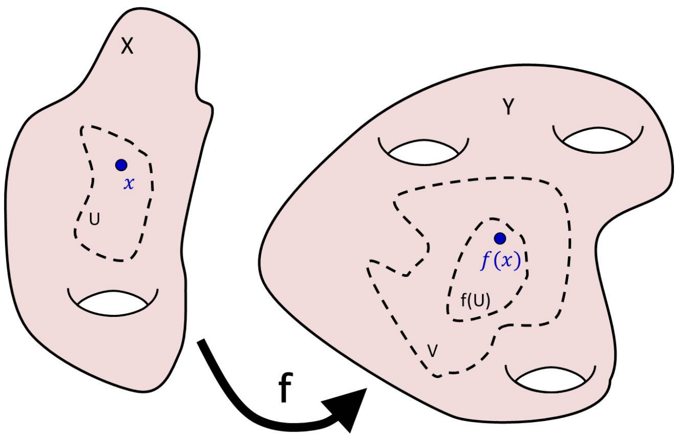
1.13 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

Beispiel I.14.
- *$f\colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
- *Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X, so ist die Identität $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ stetig $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.*
- *Für $A \subset X$ ist die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}\big|_A$ die gröbste Topologie, bezüglich der die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ stetig ist.*

1.14 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ *ist stetig in* $x \in X$ $:\Leftrightarrow$ $\forall$ *Umgebungen* V *von* $f(x) \exists$ *Umgebung* U *von* x *mit* $f(U) \subset V$.



Bemerkung I.15. *$f\colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$.*

Beispiel I.15. *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen <u>metrischen</u> Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für jeden offenen Ball B um $f(x)$ ein offener Ball um x existiert, der unter f in B abgebildet wird. (Und ferner stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ auch $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ folgt.)*

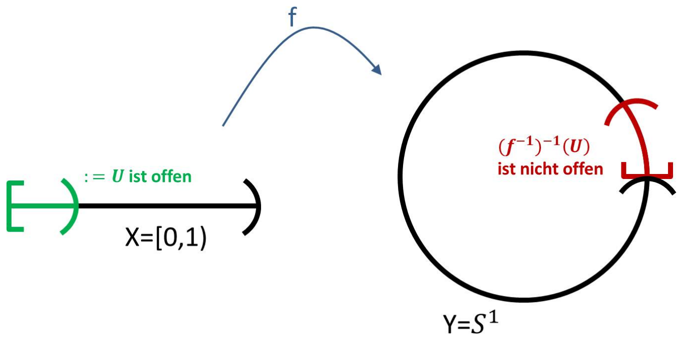
1.15 Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

1.16 Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

Beispiel I.16.
- $f\colon [0,1) \to S^1 \subset \mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ *ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!*



- *$id_X\colon X \to X$ ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.*

Bemerkung I.16. *'Homöomorph sein' ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.*

1.17 homöomorph

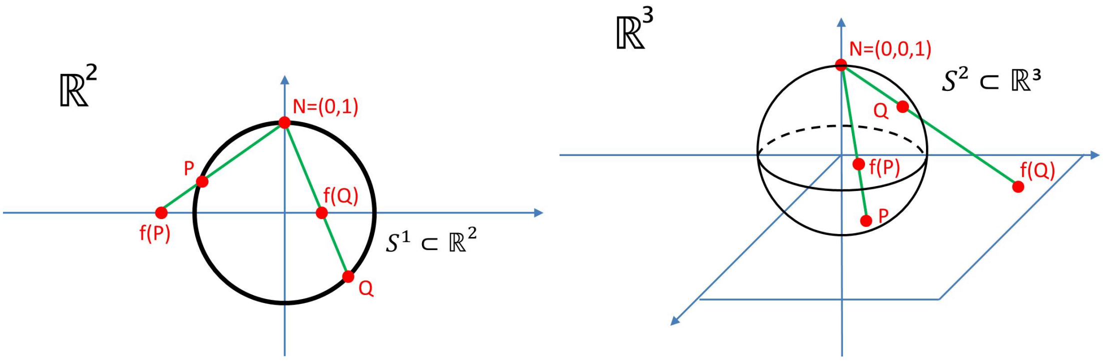
Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

Bemerkung I.17. *Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:*

- *Ist $f\colon X \to Y$ Homöomorphismus, so ist $U \subset X$ offen $\Leftrightarrow f(U)$ offen in Y.*
- *$A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow f(A)$ ist abgeschlossen in Y.*
- *$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}, f(\mathring{A}) = (f(\overset{\circ}{A}))$.*
- *U ist Umgebung von $x \in X \Leftrightarrow f(U)$ ist Umgebung von $f(x)$.*

Beispiel I.17.
- *Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.*
- $[0,1] \cong [a,b] \forall a < b \in \mathbb{R}$
- $(0,1) \cong (a,b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$

Beispiel I.18. *Stereographische Projektion*



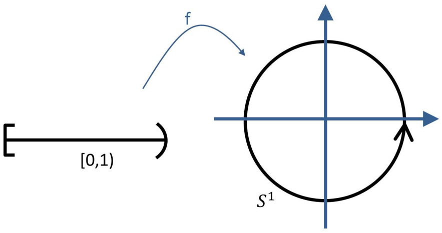
Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von $S^n \backslash \{N\}, N := (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, gegeben wie folgt:
Der Schnitt der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und $x \in S^n \backslash \{N\}$ mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, $f(x)$, ist gegeben durch $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$ mit Umkehrabbildung $y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \ldots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1})$.

1.18 Einbettung

$f\colon X \to Y$ stetig heißt Einbettung $:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y$ Homöomorphismus.

Beispiel I.19.
- *Für $A \subset X$ ist die Inklusion $\iota\colon A \hookrightarrow X, x \mapsto x$, stets eine Einbettung.*

- $[0,1) \to S^1$ *ist keine Einbettung!*



- *Der Satz über die Umkehrabbildung/ Impliziter Funktionensatz aus der Analysis zeigt:*
  Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar und in* $p \in \mathbb{R}^n$ *die Jacobi-Matrix* $Df(p)$ *invertierbar, so existiert eine Umgebung von* p*, auf der* $f\big|_U$ *eine Einbettung ist.*

1.19 Äquivalenz von Einbettungen

Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ *heißen äquivalent* $:\Leftrightarrow$ $\exists$ *Homöomorphismen* $h_X\colon X \to X, h_Y\colon Y \to Y$ *mit* $g \circ h_X = h_Y \circ f$,

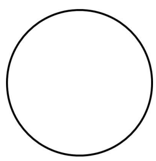
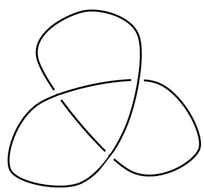
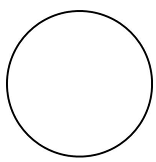
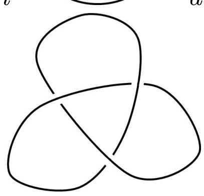
d.h. dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h_y"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

1.20 Knoten

Eine Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$ *heißt Knoten.*

Beispiel I.20. *Die Knoten mit Bildern*  *und*  *sind äquivalent, die mit*  *und*  *nicht!*

Kapitel II

Topologische Eigenschaften

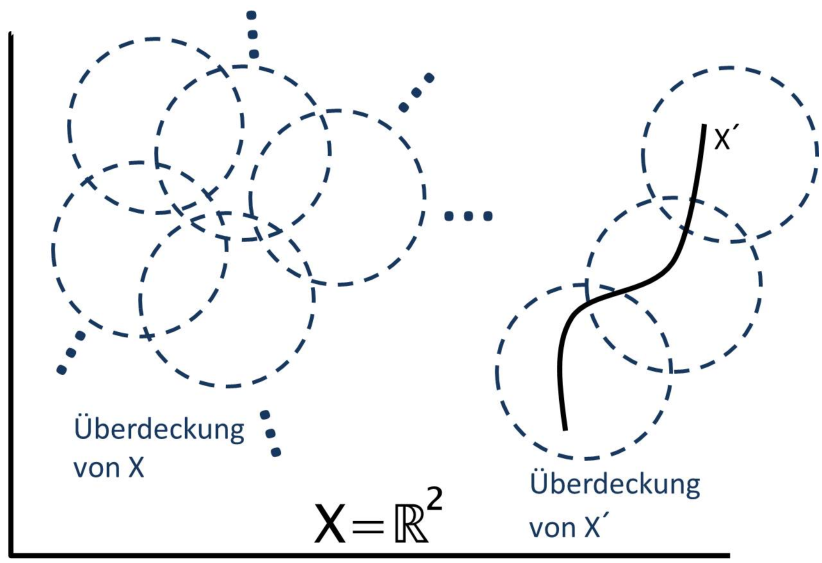
0.21 zusammenhängend

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ *Die einzigen in* X *gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind* $\emptyset$ *und* X.
Ansonsten heißt X *un- oder nicht zusammenhängend.*

0.22 Überdeckung

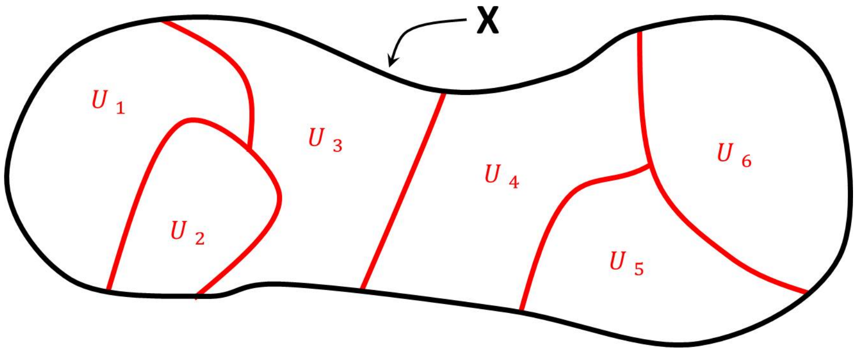
Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$[a] *von Teilmengen von* X *heißt Überdeckung von* X $:\Leftrightarrow X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.
$\mathcal{U}$ *heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung* $\Leftrightarrow$ *alle* U_α *sind offen beziehungsweise abgeschlossen.*
Für $X' \subset X$ *heißt eine Familie* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ *wie oben Überdeckung von* X' $:\Leftrightarrow X' \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

[a] A Indexmenge



0.23 Partition

Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte Teilmengen.



Bemerkung II.1. *Ein topologischer Raum X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Es existiert keine Partition von X in zwei nichtleere offene Teilmengen $\Leftrightarrow$ es existiert keine Partition von X in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen Denn: $A \subset X$ ist offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A und $X \backslash A$ sind offen $\Leftrightarrow$ A und $X \backslash A$ sind abgeschlossen*

Beispiel II.1. • *$\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi)) \cup (\mathbb{Q} \cap (\pi, +\infty))$.*

- *Die einzigen zusammenhängenden und mit der diskreten Topologie versehenen Räume sind $\emptyset$ und der nur aus einem Punkt bestehende Raum.*

Bemerkung II.2. *Allgemein sagt man von einer Menge, sie sei zusammenhängend, wenn diese, aufgefasst als Teilraum eines topologischen Raumes, zusammenhängend ist.*

Beispiel II.2. $[0,1](\subset \mathbb{R})$ *ist zusammenhängend, aber* $[0,1] \cup (2,3)$ *nicht!*

Beispiel II.3. *Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A ist leer, einpunktig, oder unendlich!*

Bemerkung II.3 (Eigenschaften zusammenhängender Mengen)**.**
- *A zusammenhängend $\Rightarrow$ $\bar{A}$ zusammenhängend*
- *$A, B \subset X$ zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend*
- *$A \cup B$ zusammenhängend, $A \cap B$ zusammenhängend $\not\Rightarrow A, B$ zusammenhängend ($A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$)*

0.24 Zusammenhangskomponente

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X.

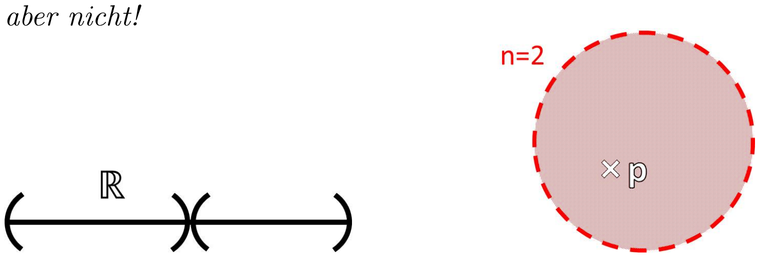
Bemerkung II.4.
- *Jeder Punkt von X liegt genau in einer Zusammenhangskomponente, und diese ist die Vereinigung aller diesen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen.*
- *Zwei Zusammenhangskomponenten sind damit entweder gleich oder disjunkt.*
- *Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.*

Satz II.1. *Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.*
(D.h.: Ist $f\colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so auch $f(X) \subset Y$.)

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $Y = f(X)$ und sei $Y = U \cup V$ Partition von Y in zwei offene Mengen $\Rightarrow$ $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ sind offen in X (f stetig) und bilden eine Partition von X. X ist zusammenhängend. $\Rightarrow f^{-1}(U)$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$.
Sei o.E. $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow V = f(X)$ (f surjektiv auf $f(X)$)
$\Rightarrow$ Es existiert keine Partition von Y in nichtleere offene Mengen $\Leftrightarrow$ Y zusammenhängend. $\square$

Korollar II.1. *Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.*

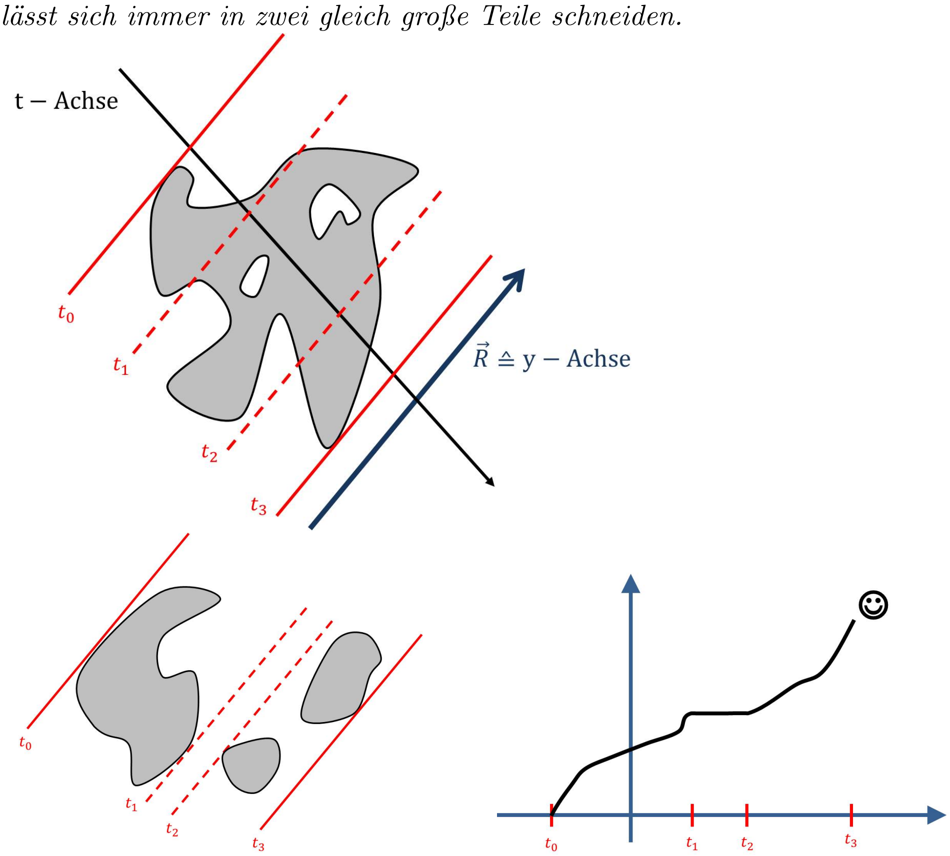
Beispiel II.4. *Für $n > 1$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph!*
<u>Denn:</u> $\mathbb{R}^n \cong \mathring{D}^n$ (Einheitskugel) und nimmt man aus $\mathring{D}^n$ einen Punkt p heraus, so bleibt für $n > 1$ $\mathring{D}^n \backslash \{p\}$ zusammenhängend, $\mathring{D}^1 = (-1, 1) \cong \mathbb{R}$ aber nicht!



<u>Allgemeiner (Brouwder)</u> $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow m = n$

Korollar II.2. *Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

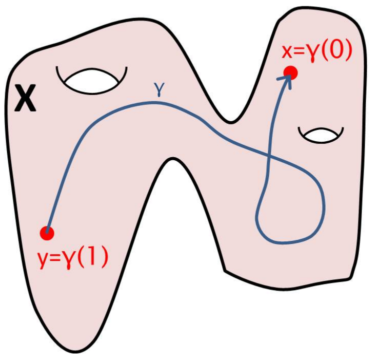
Beispiel II.5. *Waffel teilen. Eine Waffel, wie unregelmäßig auch immer, lässt sich immer in zwei gleich große Teile schneiden.*



Bei unzusammenhängenden Waffeln ist die Schnittgerade selbst bei vorgegebener Schnittrichtung nicht eindeutig.

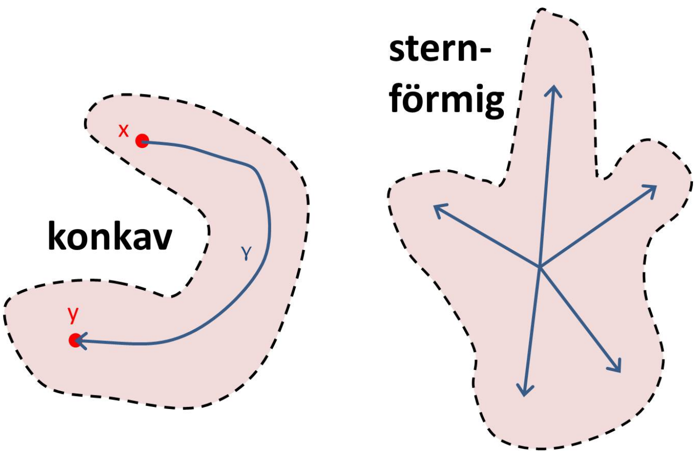
0.25 Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.



0.26 Wegzusammenhang

X heißt wegzusammenhängend :⇔ Zu je zwei Punkten $x, x' \in X \exists$ Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$.



Beispiel II.6.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$B = A \cup \{(0,0)\}$$

$\Rightarrow$ *B ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.*

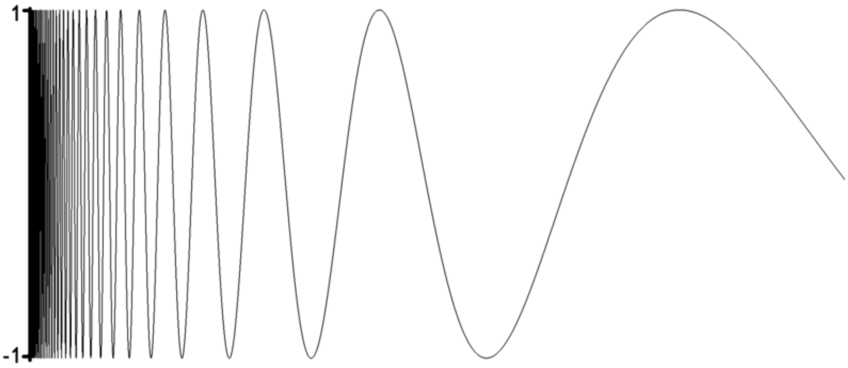


Bild: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sinuseinsdurchx.png&filetimestamp=20080624085708

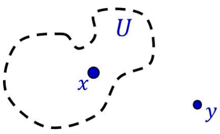
0.27 Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

1 Trennungseigenschaften

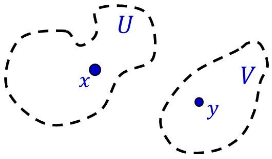
1.1 T_1-Raum

Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ *Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält.*
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$



1.2 T_2-Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ *Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.*
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ *mit* $U_x \cap U_y = \emptyset$

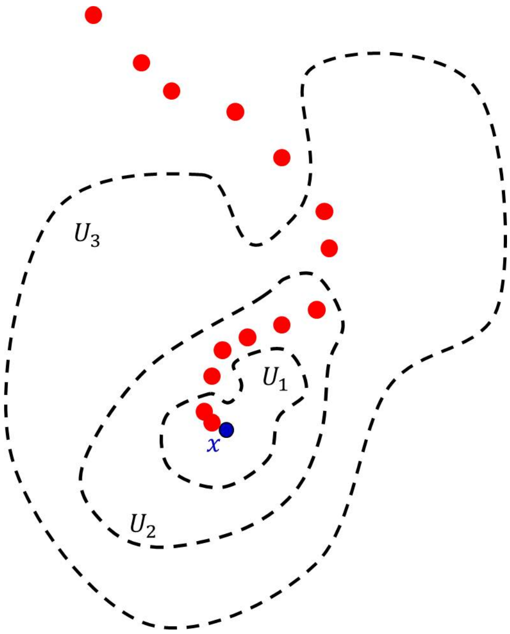


Beispiel II.7. *Jeder metrische Raum ist Hausdorff-Raum.*

Bemerkung II.5. *Hausdorff-Räume sind z.B. deshalb wichtig, weil Grenzwerte dort eindeutig sind!*

1.3 Grenzwert

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \forall n \geq N$.



Beispiel II.8. *In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

Bemerkung II.6. *Hausdorff-Räume sind auch T_1-Räume, aber:*

Beispiel II.9. *In $X = \mathbb{R}_{T_1}$ ist jeder Punkt abgeschlossen ($\Rightarrow T_1$), doch je zwei nichtleere offene Mengen schneiden sich - X ist damit nicht T_2! "Schlimmer": In $\mathbb{R}_{T_1}$ ist jeder Punkt Grenzwert der Folge $x_n = n$! Denn eine Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}_{T_1}$ hat die Form $U = \mathbb{R}\backslash\{x_1, \ldots, x_M\}$ mit $x_1 < \ldots < x_M$. Dann gilt aber $x_n = n \in U \forall n > x_M$.*

2 Abzählbarkeitsaxiome

2.1 Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Beispiel II.10. *Ist B Basis der Topologie eines Raumes X, so ist für jedes $x \in X$ $\{U \in B \mid x \in U\}$ eine Basis von X in x.*

Beispiel II.11. *In einem metrischen Raum X sind folgende Mengen von Bällen Basen von X in $x \in X$:*

- *alle offenen Bälle mit Zentrum x*
- *alle offenen Bälle mit Zentrum x und rationalen Radii*

Beispiel II.12. *Ist X mit der diskreten bzw. trivialen Topologie versehen, so ist die 'kleinste' Basis in $x \in X$ gegeben durch $\{\{x\}\}$ bzw. $\{X\}$.*

2.2 Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ X selbst besitzt eine abzählbare Basis.
X heißt separabel $:\Leftrightarrow$ X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.

Bemerkung II.7. *Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste, aber:*

Beispiel II.13. *Überabzählbare diskrete Räume (wie $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$) erfüllen nach Beispiel II.12 das erste Abzählbarkeitsaxiom, nicht aber das zweite!*

Bemerkung II.8. *Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und jeder separable metrische Raum auch das zweite.*

Beispiel II.14. *$\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist aber separabel - $\mathbb{N}$ ist dicht!*

Beispiel II.15. *Euklidische Räume und alle ihre Teilmengen erfüllen das 2. Abzählbarkeitsaxiom und sind separabel.*

Wozu das Ganze?

$\rightsquigarrow$ Funktionenräume

$\rightsquigarrow$ Mannigfaltigkeiten

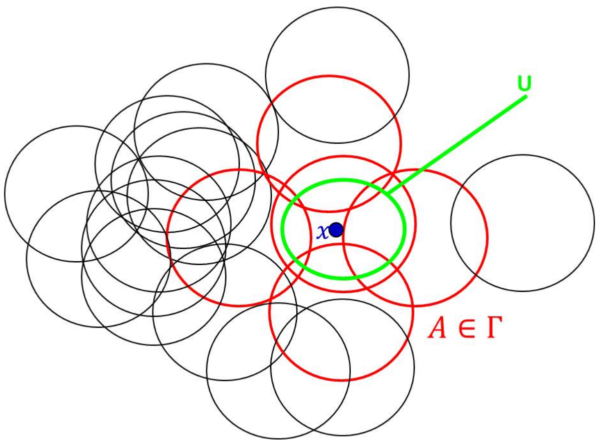
$\rightsquigarrow$ Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung eines Raumes, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, enthält auch eine abzählbare Teilüberdeckung.

2.3 Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt
$:\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\overline{U}$ kompakt ist.

2.4 Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich $:\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U = U(x)\colon A \cap U = \emptyset \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A.

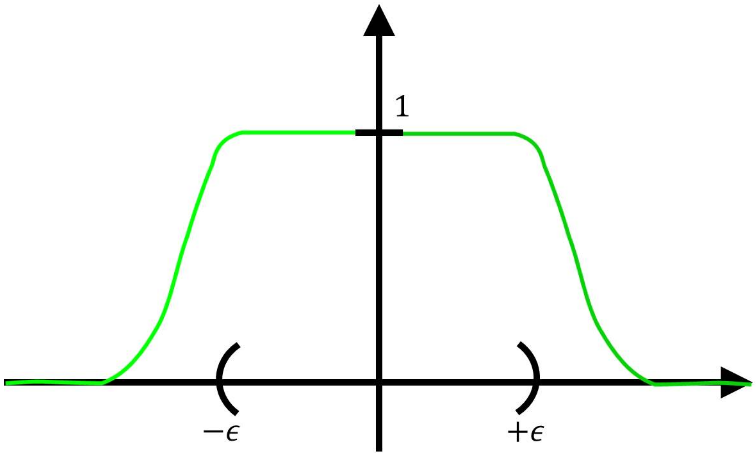


2.5 Verfeinerung

Γ, Δ Überdeckungen von X. Δ heißt Verfeinerung von Γ
$:\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma\colon A \subset B$.

2.6 Parakompaktheit

X heißt parakompakt $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.



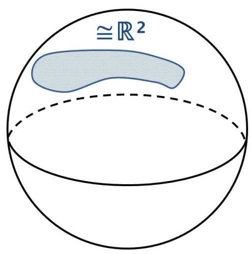
Cut-off

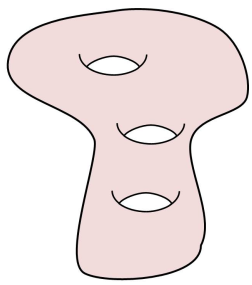
Kapitel III

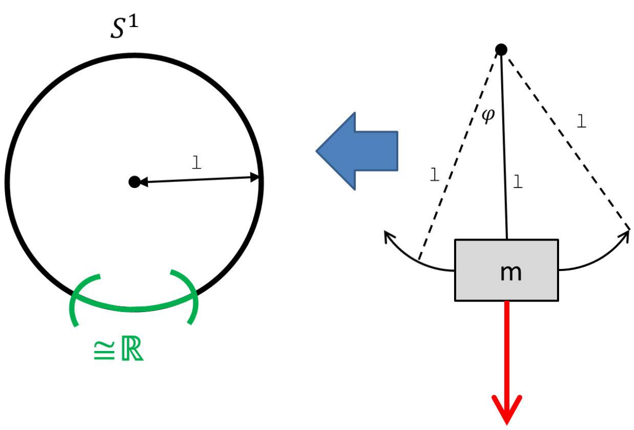
Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume

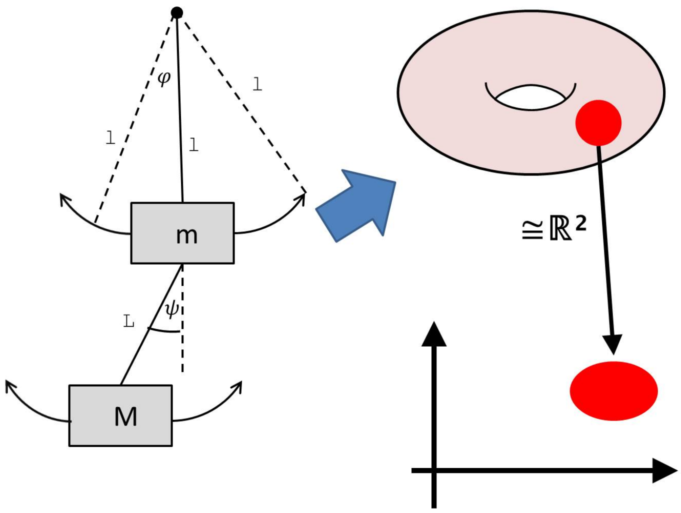
1 Mannigfaltigkeiten

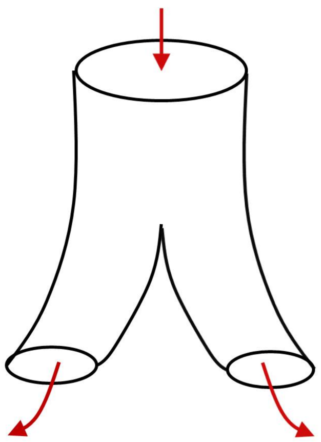
Beispiele zu Mannigfaltigkeiten (Exkurs) Doppelpendel, Quantenfeldtheorie







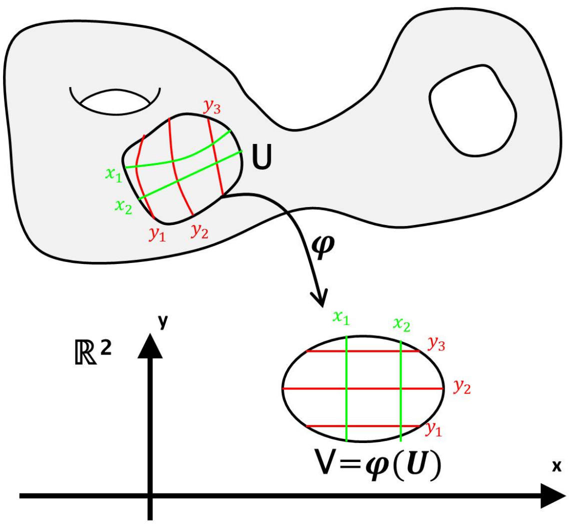




1.1 Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. *M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie*
2. *M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{offen} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V, V \subset_{offen} \mathbb{R}^n$.*
   Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p.



Bemerkung III.1. *Die Zahl n, die Dimension von M, ist eindeutig bestimmt! (folgt aus Brouwers Satz von der Invarianz des Gebietes)*

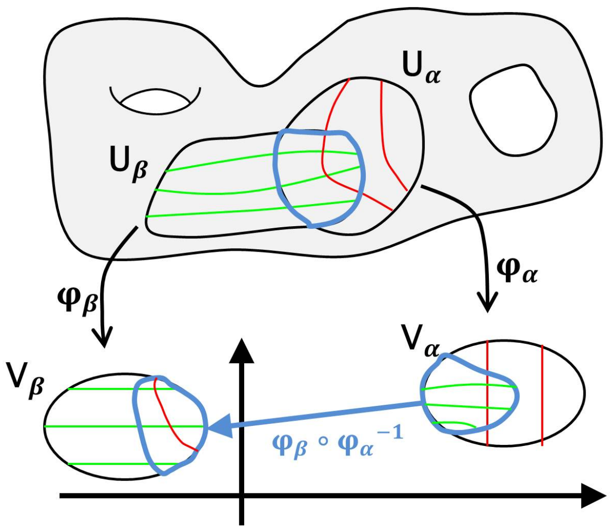
1.2 Atlas

Ein Atlas für eine topologische n-Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$[a] von Karten $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup\limits_{a\in\Lambda} U_\alpha$

[a] Λ Indexmenge

1.3 C^k-Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k-Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k-Abbildung, also k-mal stetig differenzierbar ist. ($k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega$)

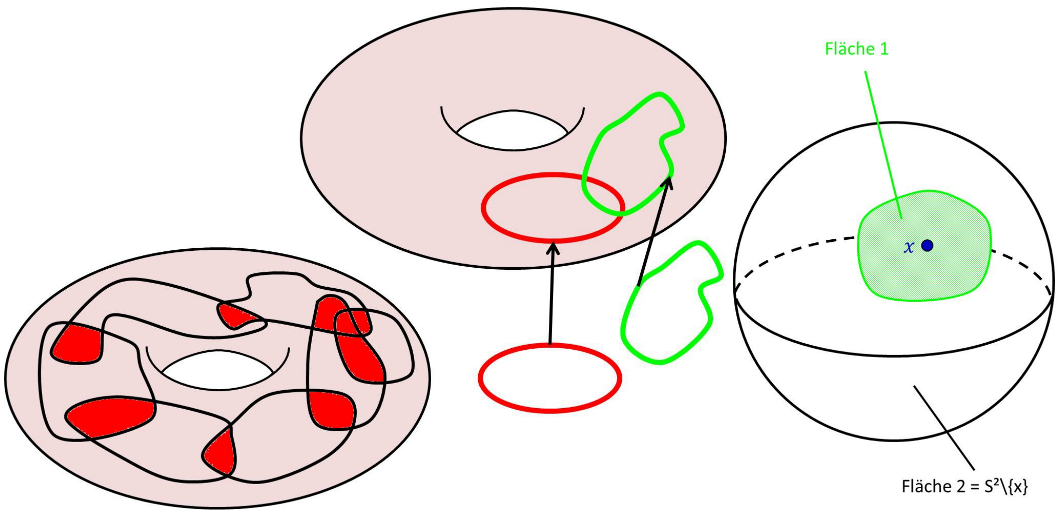


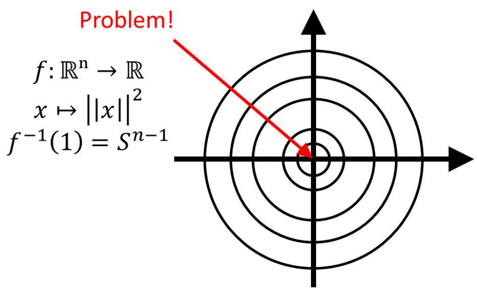
1.4 Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k-Atlas von M, so heißt eine Karte (φ, U) von M mit $\mathcal{A}$ verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k-Atlas ist. Ein C^k-Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls $\mathcal{A}$ alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.

1.5 C^k-Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k-Mannigfaltigkeit) ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k-Struktur auf M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.





Richtig toller Exkurs zu Mannigfaltigkeiten ... Killing-Fields, Lie-Groups (festgenommener Matheprof kurz nach 9/11), Perverse Garben, wir leben in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, ...

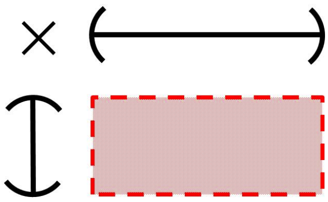
2 Produkt-Topologie

2.1 Produkt-Topologie

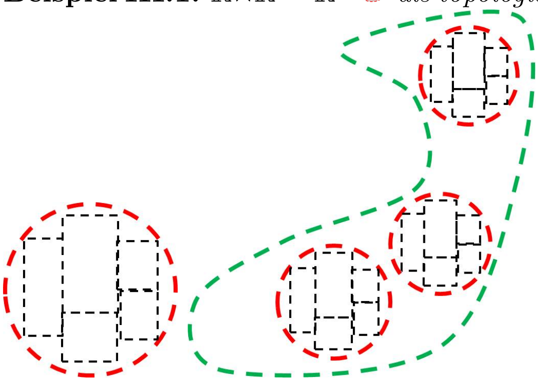
Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, so bildet

$$\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, und diese heißt Produkt-Topologie auf $X \times Y$.
Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ sebst ein topologischer Raum und für gegebene X, Y denkt man sich $X \times Y$ stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.



Beispiel III.1. $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  *als topologische Räume!*



Ebenso: $(\mathbb{R}^1)^n = \mathbb{R}^n$*!*

Einige Eigenschaften der Produkt-Topologie

- Produkte von Hausdorff-Räumen sind Hausdorff-Räume.
- Produkte von zusammenhängenden Räumen sind zusammenhängend.
- Produkte von wegzusammenhängenden Räumen sind wegzusammenhängend.
- Produkte von kompakten/separablen Räumen sind kompakt/separabel.
- Produkte von Räumen, die das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, erfüllen diese auch.

Beispiel III.2. *Produkte topologischer oder differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind topologische oder differenzierbare*[1] *Mannigfaltigkeiten.*

Beispiel III.3.
- $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$ *(Polarkoordinaten) (TODO: Bild 2)*
- $O(n) \cong SO(n) \times O(1)$
- $(S^1)^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ mal}}$ *heißt* *n-dimensionaler Torus* *(TODO: Bild 3)*

3 Differenzierbare Abbildungen

3.1 C^l-Abbildung

Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $(M', \mathcal{A}')$ eine n'-dimensionale $C^{k'}$-Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt differenzierbar (von der Klasse C^l) oder kurz: C^l-Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine C^l-Abbildung im üblichen Sinn. (TODO: Bild 4)

TODO: Exkurs über Tangentialvektoren, Vektorfelder, Satz vom Igel, Physik des starren Körpers, Differentialtopologie

Spezielle Mannigfaltigkeiten: Untermannigfaltigkeiten topologischer Räume:

Satz III.1 (Äquivalente Beschreibungen einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$)**.** *Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists$ *Umgebung* $U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und*

$$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l) := \{g\colon U \to \mathbb{R}^l \mid g \text{ ist } C^\infty\} \text{ mit Rang } Df(x) = l \quad \forall x \in U$$

[2] *dergestalt, dass $U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ (TODO: Bild 5)*

[1] (C^∞)
[2] Df ist die Jacobi-Matrix von f

(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:* $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen,* φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$ *und*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_{n+l}) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}, W \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$

(Jedes solche ψ *heißt lokale Parametrisierung von* M*).*

Interpretation

(a) besagt: $U \cap M$ ist (im Sinne der Rangbedingung) durch l unabhängige Gleichungen $f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0$ definiert.

(b) besagt: nach Anwendung eines Diffeomorphismus sieht $U \cap M$ wie eine offene Teilmenge eines linearen Unterraumes von $\mathbb{R}^{n+l}$ aus.

(c) besagt: M lässt sich lokal parametrisieren.

3.2 Untermannigfaltigkeit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$*, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$*.*

Satz III.2. *Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$ *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$*. Es sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$ *mit Rang* $Df(x) = l$ *für alle* $x \in U$ *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0)$*.*

(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen*
- φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$*,* $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$*.*

Beispiel III.4. *zu (a)*
Die n*-Sphäre vom Radius* r

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = r\}$$

ist eine n*-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*
Denn: Definiere $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||^2 - r^2$*. Dann gilt:*

- $S_r^n = f^{-1}(0)$ *und*
- $Df(x) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = 2x$ *erfüllt Rang* $Df(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \supseteq S_r^n$ *(wegen* $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$*).*

Allgemeiner:

- *Niveaumengen: Es seien* $V \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}, f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l), c \in \mathbb{R}^l$*. Gilt Rang* $Df(x) = l$ *in jedem Punkt* x *der Niveaumenge*

$$f^{-1}(c) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist $f^{-1}(c)$ *eine glatte* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$*.*

Beweis. (a)⇒(b): Es seien U und f wie in (a) gewählt und $f_1, \dots, f_l$ die Komponenten von f. Sei $x_0 \in M$. Durch Umnummerierung seien die Indizes so gewählt, dass ohne Einschränkung die Reihenfolge so, dass die $(l \times l)$-Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j \in \{1,\dots,l\}}$$

in x_0 invertierbar ist. Definiere die Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_l(x))$. Dann gilt:

$$D\varphi(x_0) = (TODO : Matrix2)$$

und damit

$$\det D\varphi(x_0) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j} \neq 0.$$

Mit dem Satz über inverse Funktionen (oder "Satz über die Umkehrabbildung") folgt: Es existieren Umgebungen $U' = U'(x_0) \subseteq U$ und $V'(\varphi(x_0)) \subseteq V = \varphi(U)$, so dass $\varphi\big|_{U'}\colon U' \to V'$ ist C^∞-Diffeomorphismus.

Es gilt: $\varphi(U' \cap M) = \{(y_1, \ldots, y_{n+l}) \in \varphi(U') \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$, denn:
" $\subseteq$ " : ist klar nach Definition von f und φ.
" $\supseteq$ " : Ist y Element der rechten Seite, so existiert $x \in U'$ mit $\varphi(x) = y$ und $f(x) = 0$. Da $x \in U' \subseteq U$ und $f(x) = 0$, gilt: $x \in U' \cap M$, und damit $y = \varphi(x) \in \varphi(U' \cap M)$.
(b)$\Rightarrow$(c): Es seien U und φ wie in (b) gewählt und

$$\pi\colon \mathbb{R}^{n+l} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_{n+l}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n),$$

die Projektion und

$$\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+l}, (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

die Inklusion.
Setze $W := \pi(\varphi(U \cap M))$ und definiere $\psi\colon W \to U$ durch $\psi := \varphi^{-1} \circ \iota$.
(TODO: Bild 1)
Dann ist W offen und $\psi\colon W \to U \cap M$ ein Homöomorphismus, denn $\iota'\colon W \to \varphi(U \cap M)$ ist Homöomorphismus und $\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap M) \to U \cap M$ ist Homöomorphismus.
Mit der Kettenregel folgt: Für alle $w \in W$ gilt:

$$\begin{aligned} D\psi(w) &= D(\varphi^{-1} \circ \iota')(w) = \underline{(D\varphi^{-1})(\iota'(w))} \cdot D\iota'(w) \\ &\overset{(D\varphi^{-1})(y)=((D\varphi)(\varphi^{-1}(y)))^{-1}}{=} ((D\varphi)(\varphi^{-1}(\iota'(w))))^{-1} \circ \iota' \\ &= (D\varphi(\psi(w))^{-1} \circ \iota'. \end{aligned}$$

Somit ist $D\psi(w)$ als Komposition einer bijektiven und einer injektiven Abbildung injektiv für alle $w \in W$.
(c)$\Rightarrow$(a): Es seien U, W und ψ wie in (c) gewählt und $\psi(\hat{w}) = x_0$ für $\hat{w} \in W$.
Da Rang $D\psi(\hat{w}) = n$ folgt nach evtl. Umnummerierung

$$\left(\frac{\delta\psi_i}{\delta w_j}(\hat{w})\right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$$

ist invertierbar. Definiere $g\colon W \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{n+l}, (w, y) \mapsto \psi(w) + (0, y)$, d.h. $g(w_1, \ldots, w_n, y_1, \ldots, y_l) = (\psi_1(w), \ldots, \psi_n(w), \psi_{n+1}(w) + y_1, \psi_{n+l}(w) + y_l)$.
Dann gilt:

$$Dy(\hat{w}, 0) = (TODO : Matrix4)$$

ist invertierbar. Mit dem Satz über inverse Funktionen folgt: Es existieren Umgebungen $V = V((\hat{w}, 0)) \subseteq W \times \mathbb{R}^l$ und $U' = U'(g(\hat{w}, 0))$, so dass $g\big|_V\colon V \to U'$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.
Verkleinert man gegebenenfalls V, so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass gilt: $U' \subseteq U$. Da $\{w \in W \mid (w, 0) \in V\}$ offen ist in W und $\psi\colon W \to \psi(W)$ nach Voraussetzung ein Homöomorphismus ist, folgt:

$\{\psi(w) \mid (w,0) \in V\}$ ist offen in $\psi(W)$.
Nach Definition der Unterraumtopologie existiert $U'' \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n+l}$ mit $\{\psi(w) \mid (w,0) \in V\} = U'' \cap \psi(W)$.
Wegen $\psi(w) = g(w,0)$ bedeutet dies:

$$(*) U'' \cap \psi(W) = g(V \cap (W \times \{0\})).$$

Setze $\tilde{U} := U' \cap U'', \tilde{V} := (g\big|_V)^{-1}(\tilde{U}) = g^{-1}(\tilde{U}) \cap V$. Dann ist $g\big|_{\tilde{V}} \colon \tilde{V} \to \tilde{U}$ ein C^∞-Diffeomorphismus.
Behauptung: Es gilt: $\tilde{U} \cap M = g(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$.
[Beweis: folgt mit (*)].
Ist $\pi \colon \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^l, (x_1, \ldots, x_{n+l}) \mapsto (x_{n+1}, \ldots, x_{n+l})$ die Projektion, so erfüllt $f := \pi \circ (g\big|_{\tilde{V}})^{-1} \colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^l$ die Bedingung in (a). $\square$

Satz III.3. *(C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+l}$ sind C^∞-Mannigfaltigkeiten) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$ und $\{\psi_\alpha \colon W_\alpha \to U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Dann ist $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^∞-Atlas und M eine C^∞-Mannigfaltigkeit.*