Einführung in die Geometrie und Topologie
- Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

20. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel 1

Homotopie und Fundamentalgruppe

Definition 1.1 (Topologischer Raum). *Ein <u>topologischer Raum</u> X ist gegeben durch eine Menge X und ein System σ von Teilmengen von X, den so genannten <u>offenen Mengen</u> von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.*
X Menge, $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

- *(1)* $O_1, O_2 \in \sigma \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \sigma$
- *(2)* $O_\alpha \in \sigma, \alpha \in A, A$ *Indexmenge* $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \sigma$
- *(3)* $X, \emptyset \in \sigma$

Beispiel 1.1. $\sigma = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \sigma)$ *ist topologischer Raum!*

Beispiel 1.2.

$$X \text{ Menge, } \sigma = \{\{x\} | x \in X\} + \text{Axiome, die zu erfüllen sind} \rightsquigarrow \tilde{\sigma}$$

$\Rightarrow (X, \tilde{\sigma})$ *ist topologischer Raum.* σ *ist "Basis" der Topologie* $\tilde{\sigma}$.

Definition 1.2 (Metrischer Raum). *Ein <u>metrischer Raum</u> X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der <u>"Metrik"</u> auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

- *(1)* $d(x, y) = d(y, x)$ *<u>"Symmetrie"</u>*
- *(2)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ *<u>"Definitheit"</u>*
- *(3)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *<u>"Dreiecksungleichung"</u>*
- $\forall x, y, x \in X$

Definition 1.3 (stetig). *Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.*

Bemerkung 1.1. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}(\epsilon > 0)$, und $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.*

Definition 1.4 (Homotopie). *Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung*

$$H\colon X \times I^1 \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

TODO:BILDER

Bemerkung 1.2. *H heißt auch Homotopie von f nach g, eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g. f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.*

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0, 1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t\colon X \to Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1. (TODO: BILD)

Definition 1.5 (homotope Abbildungen). *Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.*

Bemerkung 1.3. *"Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X, Y) := \{F\colon X \to Y \text{ stetig }\}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0, 1]$, so liefert $(\tilde{h_t}) mit \tilde{h_t} := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f, d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.
Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t :\equiv f \forall t \in [0, 1]$
Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t). Dann liefert $M\colon X \times [0, 1] \to Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l.
Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

[1] $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

(TODO:BILD)

Bemerkung 1.4. *Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X,Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet. (TODO: BILD)*

Bemerkung 1.5. *$C(X,Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X,Y]$!*

Beispiel 1.3. *Je zwei stetige Abbildungen $f,g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x,t) := (1-t)f(x) + t\cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g: (TODO: BILD)*

Definition 1.6. *Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (TODO:BILD)*

Korollar 1.1. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X,\mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!*

Beispiel 1.4. *Jeder geschlossene Weg im $\mathbb{R}^2$, d.h. jede stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $\left[[0,1],\mathbb{R}^2\right]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1,0)$. (TODO: BILD) Interpretiere einen geschlossenen Weg im $\mathbb{R}^2$ auch als stetige Abbildung von S^1 in $\mathbb{R}^2$, so gilt also $[S^1,\mathbb{R}^2]$ ist einelementig.*
Aber $[S^1,\mathbb{R}^2\backslash\{0\}]$ ist nichttrivial! (TODO: BILD)

Definition 1.7. *Es sei (X,σ) topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch*

$$\sigma\Big|_A := \{U \cap A | U \in \sigma\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A,\sigma\Big|_A)$ heißt Teilraum von (X,σ).

Bemerkung 1.6. *$B \subset A$ ist also genau dann offen in A, wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.*

Beispiel 1.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 |\ ||x|| = 1\}$
(TODO: BILD)
Achtung: B ist nicht offen in R^2!