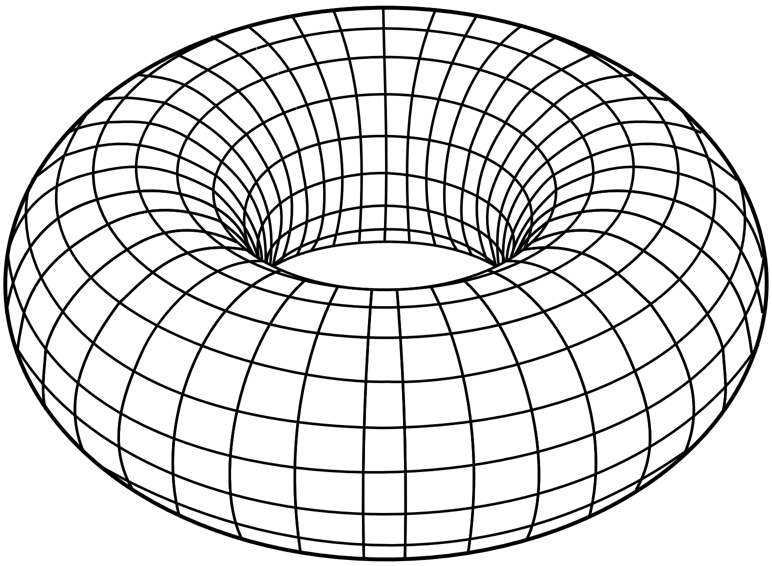
Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

29. Oktober 2011



Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel 1

Homotopie und Fundamentalgruppe

1.1 Vorwort

1.1.1 Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

- *(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$*
- *(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$*
- *(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$*

Beispiel 1.1. $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\} \Rightarrow (X, \mathcal{O})$ *ist topologischer Raum!*

Beispiel 1.2.

X Menge, $\mathcal{O} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ + Axiome, die zu erfüllen sind $\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}})$ ist topologischer Raum. $\mathcal{O}$ ist "Basis" der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$.

1.1.2 Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

- *(1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"*
- *(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"*
- *(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"*

1.1.3 Stetigkeit

Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

Bemerkung 1.1. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind die offenen Mengen der von der Metrik induzierten Topologie Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Umgebungen $U_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}(\epsilon > 0)$, und $F\colon (X, d) \to (Y, d')$ ist stetig im obigen Sinn genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $F(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(F(x))$.*

1.1.4 Homotopie

Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I^a \to Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

[a] $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

TODO:BILDER

Bemerkung 1.2. *H heißt auch Homotopie von f nach g, eine solche ist also eine parametrisierte Schar von Abbildungen mit "Anfang" f und "Ende" g. f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.*

Erinnerung Sind X und Y topologische Räume, so ist eine Homotopie $H = (h_t), t \in [0,1]$, eine parametrisierte Schar von stetigen Abbildungen $h_t\colon X \to Y$ mit Anfang h_0 und Ende h_1. (TODO: BILD)

1.1.5 Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Bemerkung 1.3. *"Homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Symmetrie: Gilt für $f, g \in C(X,Y) := \{F\colon X \to Y \text{ stetig }\}$ $f \simeq g$ vermöge $H = (h_t), t \in [0,1]$, so liefert $(\tilde{h_t})$ mit $\tilde{h_t} := h_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f, d.h. $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$.
Reflexivität: $f \simeq f$ vermöge $h_t :\equiv f \forall t \in [0,1]$
Transitivität: Es sei $f \simeq g$ vermöge (h_t) und ferner $g \simeq l$ vermöge (k_t). Dann liefert $M\colon X \times [0,1] \to Y$ mit

$$M_t := \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ k_{2t-1} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach l.
Also ist $f \simeq g, g \simeq l \Rightarrow f \simeq l$. □

(TODO:BILD)

Bemerkung 1.4. *Die Äquivalenzrelation "Homotopie von Abbildungen" liefert also eine Partition von $C(X,Y)$ in Äquivalenzklassen. Diese heißen Homotopieklassen und die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y wird mit $[X,Y]$ bezeichnet. (TODO: BILD)*

Bemerkung 1.5. *$C(X,Y)$ ist im Allgemeinen viel schwieriger zu verstehen als $[X,Y]$!*

Beispiel 1.3. *Je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop! Denn $H(x,t) := (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$ liefert eine Homotopie von f nach g: (TODO: BILD)*

1.1.6 Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (TODO:BILD)

Korollar 1.1. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!*

Beispiel 1.4. *Jeder geschlossene Weg im $\mathbb{R}^2$, d.h. jede stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ ist nullhomotop. $[[0,1], \mathbb{R}^2]$ + gleicher Anfangs- und Endpunkt besteht nur aus einem Punkt, zum Beispiel der Äquivalenzklasse der konstanten Kurve $t \mapsto (1,0)$. (TODO: BILD) Interpretiere einen geschlossenen Weg im $\mathbb{R}^2$ auch als stetige Abbildung von $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$, so gilt also $[S^1, \mathbb{R}^2]$ ist einelementig.*
Aber $[S^1, \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}]$ ist nichttrivial! (TODO: BILD)

1.1.7 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\Big|_A)$ heißt Teilraum von $(X, \mathcal{O})$.

Bemerkung 1.6. *$B \subset A$ ist also genau dann offen in A, wenn B der Schnitt einer in X offenen Menge mit A ist.*

Beispiel 1.5. $X = \mathbb{R}^2, A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||x|| = 1\}$
(TODO: BILD)
Achtung: B ist nicht offen in $\mathbb{R}^2$!

1.2 Grundlagen der allgemeinen Topologie

Beispiel 1.6 (Beispiele topologischer Räume).

- *(1) $X, \mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$ ‘triviale Topologie’*
- *(2) $X, \mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ ‘diskrete Topologie’*
- *(3) Metrische Räume, siehe unten*
- *(4) $X := \{a, b, c, d\} \Rightarrow \mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$ definiert eine Topologie auf X, aber $\mathcal{O}' := \{X, \emptyset, \{a, c, d\}, \{b, d\}\}$ nicht!*
- *(5) $X := \mathbb{R}, \mathcal{O} := \{O \mid O$ ist Vereinigung von Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow (X, \mathcal{O})$ ist topologischer Raum, und $\mathcal{O}$ heißt Standard-Topologie.*
- *(6) $X := \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}} := \{O \mid O = \mathbb{R} \backslash E, E \subset \mathbb{R}$ endlich$\} \cup \{\emptyset\}$ ist auch eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die so genannte $\mathcal{T}_1$-Topologie.*

1.2.1 Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \backslash A$ ist offen.

Bemerkung 1.7. *Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, ebenso endliche Vereinigungen und genauso X und $\emptyset$.*

Beispiel 1.7. *In einem diskreten topologischen Raum sind alle Teilmengen abgeschlossen, in $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$[1] alle endlichen Teilmengen und $X, \emptyset$.*

1.2.2 Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x.

Bemerkung 1.8. *Umgebungen sind per definitionem offen! (TODO: BILD)*

[1] $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{T}_1$-Topologie

Bemerkung 1.9. *Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}_{Standard}$ ist eine Vereinigung disjunkter offener Intervalle, doch abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind keinesfalls immer Vereinigungen abgeschlossener Intervalle!*

Beispiel 1.8 (Die Cantor-Menge $\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,2\} \right\}$).
(TODO: BILD)
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, enthält überabzählbar viele Elemente und hat 'Hausdorff-Dimension' $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6\ldots$

1.2.3 Basis

Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Beispiel 1.9. • *(1) Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standard-Topologie von $\mathbb{R}$.*
• *(2) Sämtliche offenen[2] Kreisscheiben (TODO: BILD) und auch sämtliche offenen Quadrate (TODO: BILD) bilden Basen ein und derselben Topologie auf $\mathbb{R}^2$.*
(TOSO: BILD)

Bemerkung 1.10. • *$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ist Basis der Topologie von X $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B}\colon x \in B \subset O$.*
• *$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bildet die Bais einer Topologie auf X $\Leftrightarrow$ X ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ und der Schnitt je zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ ist eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*
(TODO: BILD)

1.2.4 Feiner und gröber

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

Beispiel 1.10. • *Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie auf X, die diskrete Topologie die feinste.*
• *Die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist feiner als die $\mathcal{T}_1$-Topologie.*

[2] bezüglich der euklidischen Metrik

Mehr zu metrischen Räumen

1.2.5 ϵ-Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ *der offene ϵ-Ball um p*
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ *der abgeschlossene ϵ-Ball um p*
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ *die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)*

1.2.6 Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

Beispiel 1.11. *Für $X = \mathbb{R}^n_{Eukl.}$ sind $B_1(0), D_1(0) =: D^n$ und $S^{n-1} := S_1(0)$ metrische Unterräume und heißen auch offener bzw. abgeschlossener Einheitsball bzw. $(n-1)$-Sphäre.*
(TODO: BILD)

1.2.7 Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R} \colon d(x, y) < \rho \; \forall x, y \in A$
(TODO: BILD)
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.

Bemerkung 1.11. *In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Bälle die Basis einer Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ von X, diese heißt die von der Metrik induzierte Topologie.*

Bemerkung 1.12. *$A \subset (X, d)$ ist offen*
$\Leftrightarrow \forall p \in A \exists$ ein offener Ball $B_\epsilon(p)$ um p mit $B_\epsilon(p) \subset A$
(TODO: BILD)

1.2.8 Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Erinnerung Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$, so definiert $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf A, die Teilraumtopologie der in A offenen Mengen.

Bemerkung 1.13. *Ist $A \subset X$ offen in X, so ist auch jede in A offene Menge offen in X, und abgeschlossene Teilmengen einer in X abgeschlossenen Menge A sind auch abgeschlossen in X.*
(TODO:BILD)
Aber abgeschlossene Mengen B in $A \subset X$ sind für beliebiges A im Allgemeinen nicht abgecshlossen in X.

Beispiel 1.12. $B := A := (a, b) \subset X := \mathbb{R}$

1.2.9 Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

- *(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt. (TODO:BILD)*
- *(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.*
- *(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \backslash A$ hat.*

1.2.10 Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

Bemerkung 1.14. *$\mathring{A}$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A, und A ist offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$*

Beispiel 1.13. $\mathbb{R} \mathring{\setminus} \mathbb{Q} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

1.2.11 Abschluss

Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X \setminus \left((X \mathring{\setminus} A) \right)$.

1.2.12 Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$, d.h. Rand $A = \{$ Randpunkte von A $\}$.

(TODO:Exkurs zu 'Randbildung (topologisch) und Ableitung (analytisch) sind dual zueinander')

1.2.13 Stetigkeit

$f \colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

Beispiel 1.14.
- *$f \colon X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

- *Sind* $\mathcal{O}_1$ *und* $\mathcal{O}_2$ *Topologien auf* X*, so ist die Identität* $id\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ *stetig* $\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.
- *Für* $A \subset X$ *ist die Teilraumtopologie* $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}\big|_A$ *die größte Topologie, bezüglich der die Inklusion* $i\colon A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ *stetig ist.*

1.2.14 Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ *ist stetig in* $x \in X$ $:\Leftrightarrow$
$\forall$ *Umgebungen* V *von* $f(x) \exists$ *Umgebung* U *von* x *und* $f(U) \subset V$
(TODO:BILD)

Bemerkung 1.15. $f\colon X \to Y$ *ist stetig* $\Leftrightarrow$ f *ist stetig in jedem Punkt* $x \in X$.

Beispiel 1.15. *Eine Abbildung* $f\colon X \to Y$ *zwischen* <u>*metrischen*</u> *Räumen ist bezüglich der von den Metriken induzierten Topologien stetig in* $x \in X$ *genau dann, wenn für jeden offenen Ball um* $f(x)$ *ein offener Ball um* x *existiert, der unter* f *in den Ball um* $f(x)$ *abgebildet wird. (Und ferner stetig in* $x \in X$ *genau dann, wenn für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass für alle* $x' \in X$ *mit* $d_X(x, x') < \delta$ *auch* $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ *folgt.)*

1.2.15 Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y *metrische Räume, so heißt eine Abbildung* $f\colon X \to Y$ <u>*isometrische Einbettung*</u>
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ *gilt* $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.
Ist f *zusätzlich* <u>*bijektiv*</u>*, so heißt* f <u>*Isometrie*</u>.

1.2.16 Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ *topologischer Räume heißt* <u>*Homöomorphismus*</u>*, falls* f *und* f^{-1} *stetig sind.*

Beispiel 1.16.
- *$f\colon [0,1) \to S^1 \subset \mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi it} (= \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus!*
  (TODO:BILD)
- *$id_X\colon X \to X$ ist immer ein Homöomorphismus, Kompositionen von Homöomorphismen ebenfalls.*

Bemerkung 1.16. *'Homöomorph sein' ist eine Äquivalenzrelation für topologische Räume.*

1.2.17 homöomorph

Zweo topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

Bemerkung 1.17. *Homöomorphismen erhalten sämtliche topologischen Strukturen:*

- *Ist $f\colon X \to Y$ Homöomorphismus, so ist $U \subset X$ offen $\Leftrightarrow f(U)$ offen in Y.*
- *$A \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow f(A)$ ist abgeschlossen in Y.*
- *$f(\bar{A}) = f(\bar{A}), f(\mathring{A}) = (f(\mathring{A}))$.*
- *U ist Umgebung von $x \in X \Leftrightarrow f(U)$ ist Umgebung von $f(x)$.*

Beispiel 1.17.
- *Jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.*
- *$[0,1] \cong [a,b] \forall a < b \in \mathbb{R}$*
- *$(0,1) \cong (a,b) \cong \mathbb{R} \forall a < b \in \mathbb{R}$*

Beispiel 1.18. *Stereoraphische Projektion (TODO:BILD)*
Die stereographische Projektion ist ein Homöomorphismus von $S^n \backslash \{N\}, N := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, gegeben wie folgt:
Der Schnitt der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und $x \in S^n \backslash \{N\}$ $f(x)$, mit der Hyperebene $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, ist gegeben durch $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) =: f(x)$ mit Umkehrabbildung $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\frac{2y_1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1})$.