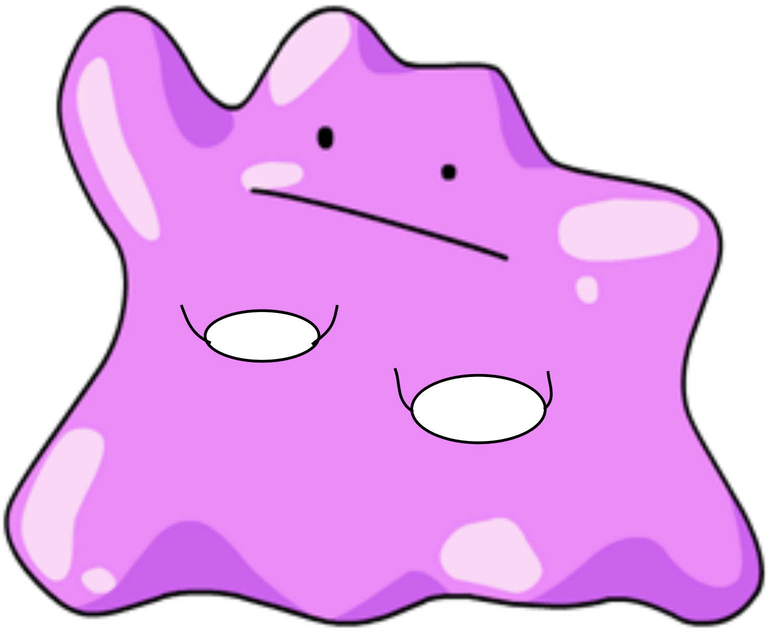
Einführung in die Geometrie und Topologie - Definitionen und Sätze -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

7. Dezember 2011



Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann gehalten wird.

Kapitel I

Definitionen und Sätze aus der Vorlesung

Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, den so genannten offenen Mengen von X, welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge $\emptyset$ als Elemente enthält.
X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

(1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A$ Indexmenge $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$ gilt:

(1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"

Stetigkeit

Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F-Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

Homotopie

Eine Homotopie $H\colon f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H\colon X \times I \to Y, (x,t) \mapsto H(x,t)$$

mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$.
(Hier ist $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$)
f und g heißen dann homotop, in Zeichen: $f \simeq g$.

Homotope Abbildungen $f, g\colon X \to Y$

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Korollar I.1. *Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist nullhomotop, d.h. für jeden topologischen Raum X besteht $[X, \mathbb{R}^n]$, n beliebig, nur aus einem Punkt!*

Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}\Big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}\Big|_A)$ heißt Teilraum von $(X, \mathcal{O})$.

Abgeschlossenheit

$A \subset X, X$ topologischer Raum, heißt abgeschlossen

$$:\Leftrightarrow X \backslash A \text{ ist offen.}$$

Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x.

Basis

Ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$,
so heißt $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Produkt-Topologie

Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, so bildet

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, und diese heißt Produkt-Topologie auf $X \times Y$.
Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ sebst ein topologischer Raum und für gegebene X, Y denkt man sich $X \times Y$ stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

Feiner und gröber

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$,
so heißt $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$.

ϵ-Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

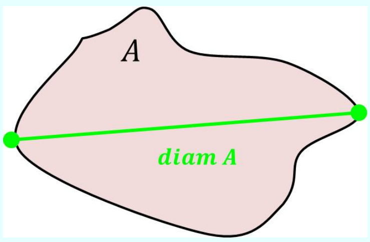
- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ der offene ϵ-Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ-Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ die ϵ-Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ um p)

Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X.

Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt
$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}\colon d(x, y) < \rho \; \forall x, y \in A$
Das Infimum, diam A, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A.



Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := dist(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A.

Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

(1) innerer Punkt von A, falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.

(2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.

(3) Randpunkt von A, falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \backslash A$ hat.

Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\mathring{A}$ Inneres von A.

Abschluss

Der Abschluss $\bar{A}$ von A ist $X \backslash \Big((X \backslash A)^{\circ} \Big)$.

Rand

Der Rand ∂A von A ist

$$\partial A := \bar{A} \backslash \mathring{A},$$

d.h. Rand $A = \{$ Randpunkte von A $\}$.

Stetigkeit

$f \colon X \to Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow$ $\forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X.

Stetigkeit

$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X$

$$:\Leftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(x) \quad \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit}$$

$$f(U) \subset V.$$

Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ isometrische Einbettung
$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y\left(f(x), f(x')\right) = d_X(x, x')$.
Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.
Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

homöomorph

Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt.

Einbettung

$f\colon X \to Y$ stetig heißt Einbettung

$$:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y \text{ Homöomorphismus.}$$

Äquivalenz von Einbettungen

Zwei Einbettungen $f, g\colon X \to Y$ heißen <u>äquivalent</u> $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Homöomorphismen $h_X\colon X \to X, h_Y\colon Y \to Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$,

d.h. dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h_y"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Knoten

Eine Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißt <u>Knoten</u>.

zusammenhängend

Ein topologischer Raum heißt <u>zusammenhängend</u> $:\Leftrightarrow$ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind $\emptyset$ und X. Ansonsten heißt X <u>un-</u> oder <u>nicht zusammenhängend</u>.

Überdeckung

Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$[a] von Teilmengen von X heißt <u>Überdeckung von X</u> $:\Leftrightarrow X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

$\mathcal{U}$ heißt <u>offene</u> beziehungsweise <u>abgeschlossene</u> Überdeckung $\Leftrightarrow$ alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.

Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' $:\Leftrightarrow X' \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

[a] A Indexmenge

Partition

Eine <u>Partition</u> oder <u>Zerlegung</u> einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen.

Zusammenhangskomponente

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine im Sinne der Inklusion von Mengen maximale zusammenhängende Teilmenge von X.

Satz I.1. *Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.*
(D.h.: Ist $f\colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so auch $f(X) \subset Y$.)

Korollar I.2. *Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, und ebenso die Zahl der Zusammenhangskomponenten.*

Korollar I.3. *Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.

Wegzusammenhang

X heißt wegzusammenhängend

$$:\Leftrightarrow \text{ Zu je zwei Punkten } x, x' \in X \quad \exists \text{ Weg } \gamma\colon [0,1] \to X$$

$$\text{mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = x'.$$

Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

T_1-Raum

Ein topologischer Raum X heißt T_1-Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom :⇔ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X, die den anderen nicht enthält.
$\forall x \neq y \in X \exists U = U_X : y \notin U_X$

T_2-Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom :⇔ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.
$\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

Grenzwert

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X, so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \quad \forall n \geq N$.

Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom :⇔ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.
X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom :⇔ X selbst besitzt eine abzählbare Basis.
X heißt separabel :⇔ X enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A.

Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt
:⇔ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\overline{U}$ kompakt ist.

Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich :⇔ $\forall x \in X \quad \exists U = U(x)\colon A \cap U = \emptyset \quad \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A.

Verfeinerung

Γ, Δ Überdeckungen von X. Δ heißt Verfeinerung von Γ
:⇔ $\forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma\colon A \subset B$.

Parakompaktheit

X heißt parakompakt :⇔ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie

2. M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{offen} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V, V \subset_{offen} \mathbb{R}^n$.
   Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p.

Atlas

Ein Atlas für eine topologische n-Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$[a] von Karten $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup\limits_{a \in \Lambda} U_\alpha$

[a] Λ Indexmenge

C^k-Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k-Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k-Abbildung, also k-mal stetig differenzierbar ist. ($k = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega$)

Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k-Atlas von M, so heißt eine Karte (φ, U) von M mit $\mathcal{A}$ verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k-Atlas ist. Ein C^k-Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls $\mathcal{A}$ alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält.

C^k-Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k-Mannigfaltigkeit) ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k-Struktur auf M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.

C^l-Abbildung

Es seien $(M, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, $(M', \mathcal{A}')$ eine n'-dimensionale $C^{k'}$-Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt <u>differenzierbar</u> (<u>von der Klasse C^l</u>) oder kurz: C^l-Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(f(U) \cap U')}$$

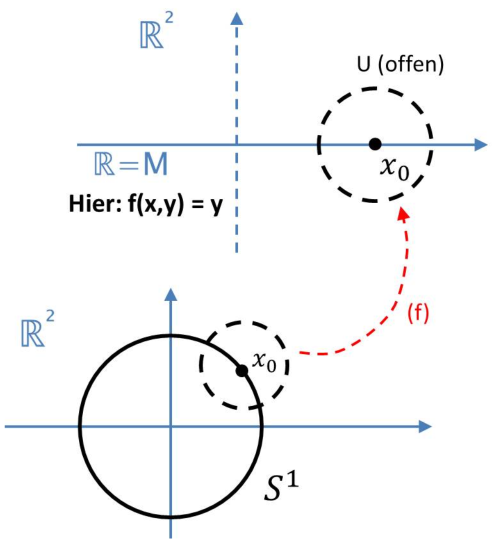
eine C^l-Abbildung im üblichen Sinn.

Satz I.2 (Äquivalente Beschreibungen einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$)**.** *Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$ sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists$ *Umgebung* $U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und*

$$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l) := \{g\colon U \to \mathbb{R}^l \mid g \text{ ist } C^\infty\} \text{ mit Rang } Df(x) = l \quad \forall x \in U$$

[1] *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$



(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:* $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen,*
φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$ *und*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \ldots, y_{n+l}) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \ldots = y_{n+l} = 0\}$$

[1] Df ist die Jacobi-Matrix von f

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subset_{offen} \mathbb{R}^{n+l}, W \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$

(Jedes solche ψ *heißt lokale Parametrisierung von* M*).*

Untermannigfaltigkeit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n-dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+l}$.

Satz I.3. *Äquivalente Beschreibung einer glatten Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$ *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$*. Es sind äquivalent:*

(a) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^l)$ *mit Rang* $Df(x) = l$ *für alle* $x \in U$ *dergestalt, dass* $U \cap M = f^{-1}(0)$*.*

(b) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^{n+l}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ *ist offen*
- φ *ist* C^∞*-Diffeomorphismus* $U \to \varphi(U)$
- $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \varphi(U) \mid y_{n+1} = \dots = y_{n+l} = 0\}$

(c) $\forall x_0 \in M \exists U = U(x_0) \subseteq_{offen} \mathbb{R}^{n+l}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\psi \in C^\infty(W, U)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- ψ *ist Homöomorphismus* $W \to U \cap M$
- $D\psi(w)$ *ist injektiv für alle* $w \in W$*.*

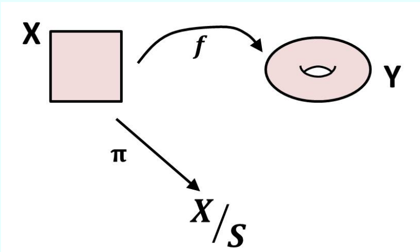
Satz I.4. *(*C^∞*-Untermannigfaltigkeiten von* $\mathbb{R}^{n+l}$ *sind* C^∞*-Mannigfaltigkeiten) Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ n*-dimensionale* C^∞*-Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^{n+l}$ *und* $\{\psi_\alpha \colon W_\alpha \to U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ *eine Menge lokaler Parametrisierungen (wie in (c)) mit* $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$*. Dann ist* $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ *ein* C^∞*-Atlas und* M *eine* C^∞*-Mannigfaltigkeit.*

Quotienten(raum)topologie

Eine Teilmenge $U \subset X/S$ heißt offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X

Quotientenabbildung

Ist S eine Partition von X in nichtleere disjunkte Teilmengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die auf jedem Element von S konstant ist, so existiert eine Abbildung $X/S \to Y$, die jedes Element A von S auf $f(a), a \in A$, abbildet.



Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von f nach S, in Zeichen f/S.

Korollar I.4. *X kompakt, Y Hausdorffsch und $f\colon X \to Y$ sei stetig $\Rightarrow$ Der injektive Quotient $f/_{S(f)}$ ist Homöomorphismus $X/_{S(f)} \to f(X)$*

injektiver Quotient

Jede Abbildung $f\colon X \to Y$ definiert eine Partition $S = S(f)$ von X, und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von Y unter f.
Die induzierte Abbildung $f/_{S(f)}\colon X/_{S(f)} \to Y$ ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von f.

Kontraktion

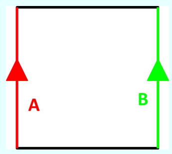
Die Quotientenmenge eines topologischen Raumes X bzgl. einer Partition S von X, welche aus einer Teilmenge A von X und allen Einpunktmengen aus $X\backslash A$ besteht,

$$S = A \cup \{\{x\} \mid x \in X\backslash A\}$$

heißt Kontraktion (von X bzgl. $X\backslash A$), und für X/S schreibt man einfach X/A.

Verkleben

Sind A und B disjunkte Teilräume eines topologischen Raumes X und ist $f\colon A \to B$ ein Homöomorphismus,



so heißt der Übergang zum Quotientenraum, der durch die Partition von X in die Einpunktmengen von $X \backslash (A \cup B)$ und die Zweipunktmengen $\{x, f(x)\}, x \in A$ gegeben ist, Verkleben (von X längs A und B via des Homöomorphismus f) und dieser Prozess einfach auch Verkleben von A und B.
Notation:

$$X/_{[a \sim f(a)]} \quad (\text{mit } a \in A)$$

n-dimensionaler projektiver Raum

Der n-dimensionale reell-projektive Raum[a] ist

$$\mathbb{RP}^n := S^n/_{[x \sim -x]}$$

und der n-dimensionale komplex-projektive Raum ist

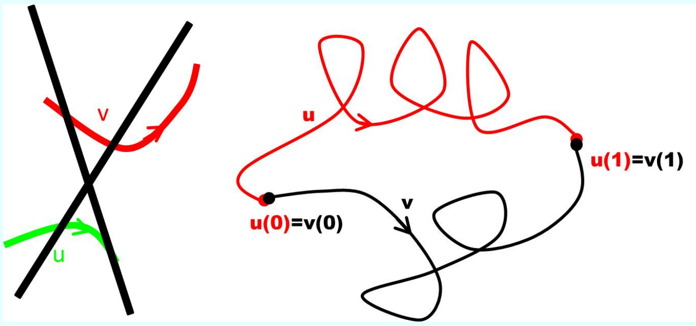
$$\mathbb{CP}^n := \underbrace{S^{2n+1}}_{\subset \mathbb{C}^{n+1}}/_{[v \sim \lambda v, \lambda \in S^1]}$$

[a]Anschaulich (projektive Geometrie): Die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$

homotop bezüglich der Endpunkte

Zwei Wege $u, v\colon I \to X$, X topologischer Raum, heißen homotop (bezüglich der Endpunkte) :⇔

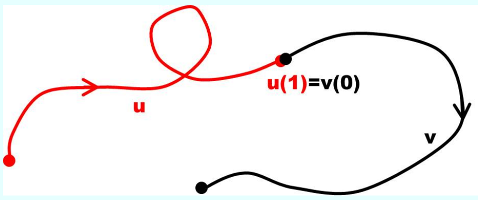
1. $u(0) = v(0), u(1) = v(1)$
2. $\exists$ Homotopie $H\colon u \simeq v$ (mit $H(0,t) \equiv u(0), H(1,t) \equiv u(1)$)



Produkt von Wegen

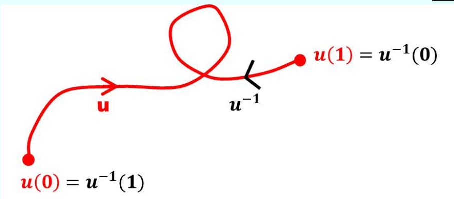
Sind u, v Wege in X mit $u(1) = v(0)$, so heißen u und v zusammensetzbar oder aneinanderfügbar und ihr Produkt $u \cdot v$ ist definiert als

$$(u \cdot v)(s) := \begin{cases} u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



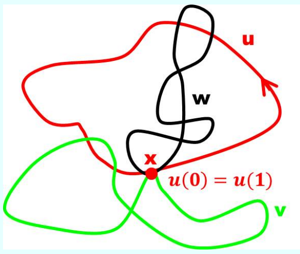
Konstanter Weg, Inverser Weg, Geschlossener Weg

- Für $x \in X$ sei $c_x \colon I \to X$ mit $c_x \equiv x$ der konstante Weg in $x \in X$.
- Für einen Weg $u \colon I \to X$ sei $u^{-1} \colon I \to X, s \mapsto u(1-s)$, der zu u inverse (oder: umgekehrt durchlaufene) Weg.



- $u \colon I \to X$ heißt geschlossener Weg (oder: Schleife) in $x \in X$

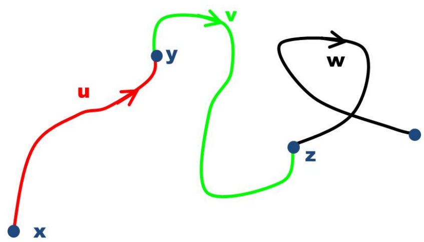
$$:\Leftrightarrow u(0) = x = u(1)$$



nullhomotop, einfach zusammenhängend

- Ein geschlossener Weg u in x heißt nullhomotop
  $:\Leftrightarrow [u] = [c_x]$
- X heißt einfach zusammenhängend $:\Leftrightarrow$
  X ist wegzusammenhängend und
  jeder geschlossene Weg u in X ist nullhomotop (zu $c_{u(0)}$).

Lemma I.1. *Für Wege* $u, v, w \colon I \to X$



mit $u(0) = x, u(1) = y = v(0), \quad v(1) = z = w(0)$

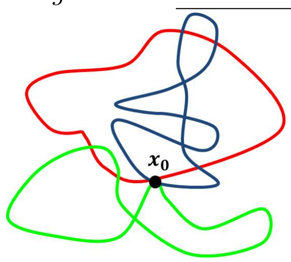
gilt

1. $[u] \cdot [u^{-1}] = [u \cdot u^{-1}] = [c_x]$
2. $[u^{-1}] \cdot [u] = [u^{-1} \cdot u] = [c_y]$
3. $[u] \cdot [c_y] = [u] = [c_x] \cdot [u]$
4. $[u] \cdot ([v] \cdot [w]) = ([u] \cdot [v]) \cdot [w]$

Satz I.5. *Für einen topologischen Raum X und $x_0 \in X$ ist*

$$\pi_1(X, x_0) := \{[u] \mid u\colon I \to X \text{ geschlossener Weg in } x_0\}$$

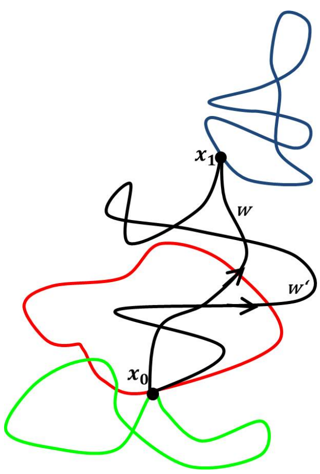
bezüglich $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$ eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe



oder erste Homotopiegruppe von X in x_0.
Neutrales Element ist $1 = 1_{x_0} := [c_{x_0}]$
und Inverses zu $\alpha = [u]$ ist $\alpha^{-1} = [u^{-1}]$.

Satz I.6 (Unabhängigkeit vom Basispunkt)**.** *Ist $w\colon I \to X$ Weg von x_0 nach x_1, so ist die Abbildung*

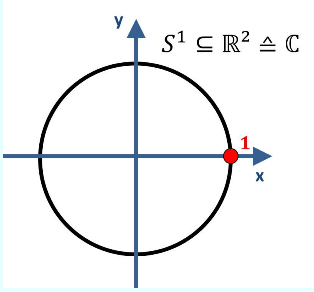
$$w_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad [u] \mapsto [w^{-1} \cdot u \cdot w]$$



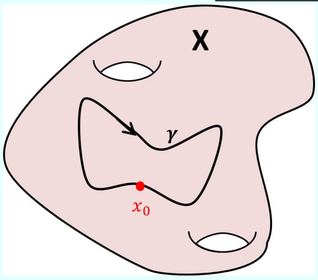
ein Gruppen-Isomorphismus.

Schleife

Es sei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $1 := (1,0) \in S^1$

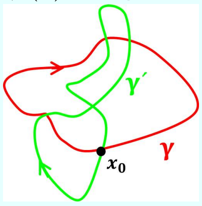


Eine stetige Abbildung $\gamma\colon S^1 \to X$, X topologischer Raum, $x_0 \in X$, mit $\gamma(1) = x_0$, heißt Schleife in x_0.



schleifenhomotop

Zwei Schleifen γ, γ' in x_0 heißen (schleifen-)homotop, falls es eine Homotopie zwischen ihnen gibt, die auf $1 \in S^1$ stationär ist, also $\gamma(1) = x_0 = \gamma'(1)$ die ganze Zeit festhält.



Korollar I.5. *Ist $s\colon I \to X$ Weg und Γ offene Überdeckung von X, so existiert eine Folge von Punkten*
$a_1, \ldots, a_N \in I$ *mit* $0 = a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = 1$ *mit*
$s([a_i, a_{i+1}])$ *ist in einem Element von* Γ *enthalten.*

Lemma I.2. $\forall n \geq 2$ *gilt:* $\forall$ *Wege* $s\colon I \to S^n$ *existiert eine endliche Unterteilung von I in Teilintervalle, so dass die Einschränkung von s auf jedes der Teilintervalle homotop zu einer Abbildung mit nirgendwo dichtem Bild ist, und zwar durch eine Homotopie, die auf den Endpunkten des Intervalls fixiert ist. (TODO: Bild 12)*

Kapitel II

Definitionen und Sätze aus der Übung

Induzierte Topologie

Sei X eine Menge. Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik d definiert durch folgende Bedingung eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X:
$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

(B_ϵ nennt man offenen ϵ-Ball.)

Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

Homotopieäquivalenz

Seien X, Y topologische Räume. X heißt homotopieäquivalent zu Y, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.

Überdeckung

- Eine Familie $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X, falls gilt: $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.
- Eine Überdeckung heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls alle $\mathcal{U}_\alpha (\alpha \in A)$ offen (bzw. abgeschlossen) sind.
- Es heißt X kompakt, falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ besitzt, d.h. es existiert $A' \subset A$ endlich, so dass $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ eine offene Überdeckung von X ist.

Kompakte Menge

Eine kompakte Menge ist eine Teilmenge eines vom Kontext her klaren topologischen Raumes, die bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.

Wegzusammenhang

- Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon I(= [0,1]) \to X$ mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$.
- Man nennt X wegzusammenhängend, falls für alle $x, y \in X$ ein Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ in X existiert mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.
- Eine Wegzusammenhangskomponente von X ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von X, die in keiner echt größeren solchen Teilmenge enthalten ist.

Homotopieäquivalenz

Für zwei topologische Räume X, Y heißt eine $\underbrace{\text{stetige Abbildung } f\colon X \to Y}_{f \in C(X,Y)}$ **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f \simeq id_x$ und $f \circ g \simeq id_Y$ gilt.

homotop

Es seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$. Seien $f, g \in C(X, Y)$. Es heißt f relativ A homotop zu g (in Zeichen $f \simeq g$ rel A), falls eine Homotopie $H\colon X \times I \to Y$ von f nach g existiert, so dass $H(a, t) = H(a, 0)$ für alle $a \in A, t \in I$.

kontrahierbar

Man nennt X **kontrahierbar**, falls gilt: $X \simeq \{pt\}$.