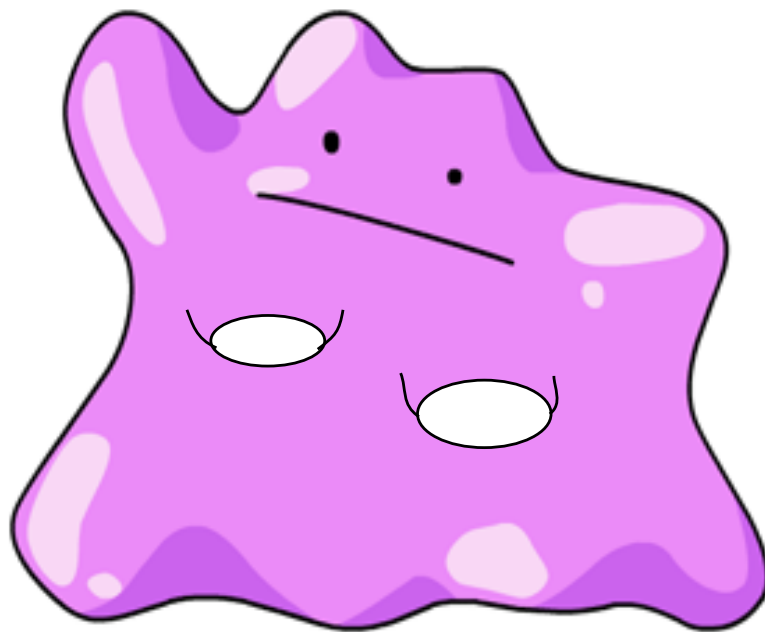


Einführung in die Geometrie und Topologie - Definitionen -

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

23. November 2011



Topologischer Raum

Ein topologischer Raum X ist gegeben durch eine Menge X und ein System \mathcal{O} von Teilmengen von X , den so genannten offenen Mengen von X , welches unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und X und die leere Menge \emptyset als Elemente enthält.

X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$:

- (1) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
- (2) $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A, A \text{ Indexmenge} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$
- (3) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum X ist eine Menge X mit einer Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, der "Metrik" auf X , die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall x, y, z \in X$

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$ "Symmetrie"
- (2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) \geq 0$ "Definitheit"
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "Dreiecksungleichung"

Stetigkeit

Eine Abbildung $F: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt stetig, falls die F -Urbilder offener Mengen in Y offene Teilmengen von X sind.

Homotopie

Eine Homotopie $H: f \simeq g$ zwischen zwei (stetigen) Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine (stetige) Abbildung

$$H: X \times I^1 \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

Homotope Abbildungen

Zwei (stetige) Abbildungen heißen homotop, in Zeichen: $f \simeq g$, falls eine Homotopie mit Anfang f und Ende g existiert.

¹ $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

Nullhomotopie

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt nullhomotop, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und $A \subset X$. Die auf A durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

induzierte Topologie heißt Teilraumtopologie und der dadurch gegebene topologische Raum $(A, \mathcal{O}|_A)$ heißt Teilraum von (X, \mathcal{O}) .

Abgeschlossenheit

$A \subset X$, X topologischer Raum, heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \setminus A$ ist offen.

Umgebung

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so heißt jede offene Teilmenge $O \subset X$ mit $x \in O$ eine Umgebung von x .

Basis

Ist (X, \mathcal{O}) topologischer Raum mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so heißt \mathcal{B} Basis der Topologie $:\Leftrightarrow$ Jede (nichtleere) offene Menge ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

Feiner und gröber

Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 Topologien auf X und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt \mathcal{O}_2 feiner als \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_1 gröber als \mathcal{O}_2 .

ϵ -Ball, Sphäre

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\epsilon > 0$ sei für $p \in X$

- $B_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) < \epsilon\}$ der offene ϵ -Ball um p
- $D_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) \leq \epsilon\}$ der abgeschlossene ϵ -Ball um p
- $S_\epsilon(p) := \{x \in C \mid d(p, x) = \epsilon\}$ die ϵ -Sphäre um p (oder Sphäre vom Radius ϵ)

Metrischer Unterraum

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so heißt der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ (metrischer) Unterraum von X .

Beschränktheit, Durchmesser

$A \subset (X, d)$ heißt beschränkt

$:\Leftrightarrow \exists 0 < \rho \in \mathbb{R}: d(x, y) < \rho \ \forall x, y \in A$

Das Infimum, $\text{diam } A$, dieser ρ heißt dann Durchmesser von A .

Abstand

(X, d) sei metrischer Raum und $A \subset X, p \in X$.

$$d(p, A) := \text{dist}(p, A) := \inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$$

heißt Abstand von p und A .

Innerer Punkt, äußerer Punkt, Randpunkt

Für $p \in A \subset X$, X topologischer Raum, heißt p

- (1) innerer Punkt von A , falls es eine in A enthaltene Umgebung U um p gibt.
- (2) äußerer Punkt, falls eine zu p disjunkte Umgebung V in X existiert.
- (3) Randpunkt von A , falls jede Umgebung von p nichtleeren Durchschnitt mit A und $X \setminus A$ hat.

Inneres

Für $A \subset X$ heißt die größte in X offene und in A enthaltene Teilmenge $\overset{\circ}{A}$ Inneres von A .

Abschluss

Der Abschluss \bar{A} von A ist $X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$.

Rand

Der Rand ∂A von A ist $\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, d.h. Rand $A = \{ \text{Randpunkte von } A \}$.

Stetigkeit

$f: X \rightarrow Y$ ist stetig $:\Leftrightarrow \forall$ offenen Mengen in Y ist das Urbild unter f offene Menge in X .

Stetigkeit

$f: X \rightarrow Y$ ist stetig in $x \in X : \Leftrightarrow \forall$ Umgebungen V von $f(x) \exists$ Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Isometrische Einbettung, Isometrie

Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ isometrische Einbettung

$:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ gilt $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.

Eine isometrische Einbettung ist immer injektiv.

Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Isometrie.

Homöomorphismus

Eine invertierbare Abbildung $f: X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.

homöomorph

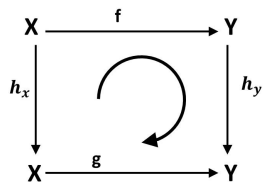
Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph oder vom gleichen Homöomorphietyp, in Zeichen $X \cong Y$, falls es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

Einbettung

$f: X \rightarrow Y$ stetig heißt Einbettung $:\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} f(X) \subset Y$ Homöomorphismus.

Äquivalenz von Einbettungen

Zwei Einbettungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen äquivalent $:\Leftrightarrow \exists$ Homöomorphismen $h_X: X \rightarrow X, h_Y: Y \rightarrow Y$ mit $g \circ h_X = h_Y \circ f$, d.h. dass das Diagramm



kommutiert.

Knoten

Eine Einbettung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Knoten.

zusammenhängend

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Die einzigen in X gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind \emptyset und X .

Ansonsten heißt X un- oder nicht zusammenhängend.

Überdeckung

Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ² von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X $:\Leftrightarrow X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

\mathcal{U} heißt offene beziehungsweise abgeschlossene Überdeckung \Leftrightarrow alle U_α sind offen beziehungsweise abgeschlossen.

Für $X' \subset X$ heißt eine Familie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ wie oben Überdeckung von X' $:\Leftrightarrow X' \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Partition

Eine Partition oder Zerlegung einer Menge ist eine Überdeckung dieser Menge durch paarweise disjunkte Teilmengen.

² A Indexmenge

Zusammenhangskomponente

Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X .

Weg, Anfangspunkt, Endpunkt

ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, und $\gamma(0)$ heißt Anfangs-, $\gamma(1)$ Endpunkt.

Wegzusammenhang

X heißt wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow$ Zu je zwei Punkten $x, x' \in X \exists$ Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$.

Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

T_1 -Raum

Ein topologischer Raum X heißt T_1 -Raum bzw. erfüllt das erste Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ Für je zwei verschiedene Punkte von X existiert für jeden dieser Punkte eine Umgebung in X , die den anderen nicht enthält.
 $\forall x \neq y \in X \exists U = U_x: y \notin U_x$

T_2 -Raum

X heißt Hausdorff- oder T_2 -Raum bzw. erfüllt das zweite Trennungsaxiom $:\Leftrightarrow$ Je zwei verschiedene Punkte in X besitzen disjunkte Umgebungen.
 $\forall x \neq y \in X \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

Grenzwert

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in einem topologischen Raum X , so heißt $x \in X$ Grenzwert der Folge (x_n) genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \forall n \geq N$.

Umgebungsbasis

Ist X topologischer Raum und $x \in X$, so ist eine Umgebungsbasis oder Basis von X in x eine Familie von Umgebungen von x , sodass jede Umgebung von x eine Umgebung aus der Familie enthält.

Abzählbarkeitsaxiome, Separabilität

X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow$ jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Basis.

X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom $:\Leftrightarrow X$ selbst besitzt eine abzählbare Basis.

X heißt separabel $:\Leftrightarrow X$ enthält eine abzählbare und dichte ($\bar{A} = X$) Menge A .

Lokale Kompaktheit

X heißt lokal kompakt

$:\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U , sodass \bar{U} kompakt ist.

Lokale Endlichkeit

Eine Familie Γ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt lokal endlich $:\Leftrightarrow \forall x \in X \exists U = U(x) : A \cap U = \emptyset \forall A \in \Gamma$ bis auf endlich viele A .

Verfeinerung

Γ, Δ Überdeckungen von X . Δ heißt Verfeinerung von Γ

$:\Leftrightarrow \forall A \in \Delta \exists B \in \Gamma : A \subset B$.

Parakompaktheit

X heißt parakompakt $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.

Mannigfaltigkeit, Karte

Ein topologischer Raum M heißt n -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie

2. M ist lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n , d.h. zu jedem $p \in M$ existieren eine Umgebung $U = U(p) \subset_{\text{offen}} M$ und ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow V, V \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$.
Jedes solche Paar (U, φ) heißt eine Karte oder ein lokales Koordinatensystem um p .

Atlas

Ein Atlas für eine topologische n -Mannigfaltigkeit M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ³ von Karten $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

C^k -Atlas, Kartenwechsel

Ein Atlas heißt differenzierbar von der Klasse C^k (oder: C^k -Atlas von M), wenn für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ eine C^k -Abbildung, also k -mal stetig differenzierbar ist. ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$)

Verträglichkeit, differenzierbare Struktur

Ist M topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^k -Atlas von M , so heißt eine Karte (φ, U) von M mit \mathcal{A} verträglich, falls $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(\varphi, U)\}$ ebenfalls C^k -Atlas ist. Ein C^k -Atlas heißt maximal (oder differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)), falls \mathcal{A} alle mit \mathcal{A} verträglichen Karten enthält.

C^k -Mannigfaltigkeit, glatt

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k (kurz: C^k -Mannigfaltigkeit) ist ein Paar (M, \mathcal{A}) bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und einer C^k -Struktur auf M . Eine C^∞ -Mannigfaltigkeit heißt auch glatt.

Produkt-Topologie

Sind (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, so bildet

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

³ Λ Indexmenge

die Basis einer Topologie für die Menge $X \times Y$, und diese heißt Produkt-Topologie auf $X \times Y$.

Versehen mit der Produkt-Topologie ist $X \times Y$ selbst ein topologischer Raum und für gegebene X, Y denkt man sich $X \times Y$ stillschweigend mit der Produkt-Topologie versehen.

C^l -Abbildung

Es seien (M, \mathcal{A}) eine n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, (M', \mathcal{A}') eine n' -dimensionale $C^{k'}$ -Mannigfaltigkeit und $l \leq \min(k, k')$. Eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow M'$ heißt differenzierbar (von der Klasse C^l) oder kurz: C^l -Abbildung, falls gilt:

$$\forall (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ und } (\varphi', U') \in \mathcal{A}' \text{ mit } f(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ ist}$$

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow \varphi'(f(U) \cap U')}$$

eine C^l -Abbildung im üblichen Sinn.

Untermannigfaltigkeit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+l}$, die eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) erfüllt, heißt dann n -dimensionale (glatte/differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} .

Quotienten(raum)topologie

Eine Teilmenge $U \subset X/S$ heißt offen : $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X

Alle im Sinne dieser Definition offenen Teilmengen von X/S definieren dann eine Topologie auf X/S und die Menge X/S zusammen mit dieser Topologie heißt Quotientenraum von X nach S .

Quotientenabbildung

Ist S eine Partition von X in nichtleere disjunkte Teilmengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, die auf jedem Element von S konstant ist, so existiert eine Abbildung $X/S \rightarrow Y$, die jedes Element A von S auf $f(a)$, $a \in A$, abbildet. Diese heißt dann **Quotientenabbildung** von f nach S , in Zeichen f/S .

injektiver Quotient

Jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ definiert eine Partition $S = S(f)$ von X , und zwar in die nichtleeren Urbilder der Elemente von Y unter f .

Die induzierte Abbildung $f/S(f): X/S(f) \rightarrow Y$ ist dann injektiv und heißt injektiver Quotient von f .