Chapter 1

Introducción

Si una función definida en algún intervalo I se sustituye en una ecuación diferencial y la reduce a una identidad, entonces se dice que esa función es una solución de la ecuación en ese intervalo. Una solución en la cual la variable dependiente se expresamente solamente en términos de la variable independiente y de constantes se dice que es una solución explícita, en caso contrario se tiene una solución ímplicita. La solución general de una ecuación diferencial de grado n contiene n parámetros en su solución, lo cual significa que una ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones que corresponden al número infinito de valores de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que no tiene tales parámetros se llama una solución particular.

En los siguientes problemas se comprueba que la función indicada sea una solución de la ecuación diferencial dada. Cuando aparecen, los simbolos c_1 y c_2 indican constantes.

Problema 1.

$$2y' + y = 0$$

Donde:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}$$

Solución:
Derivando:

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)+e^{-\frac{x}{2}}=0$$

$$-e^{-\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}=0$$

$$0=0$$

$\therefore\ y=e^{-\frac{x}{2}}$ si es solución.

Problema 2.

$$\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}$$

Donde:

$$y=e^{3x}+10e^{2x}$$

Solución:

Derivando:

$$y'=3e^{3x}+20e^{2x}$$

Sustituyendo:

$$3e^{3x}+20e^{2x}-2(e^{3x}+10e^{2x})=e^{3x}$$

$$3e^{3x}+20e^{2x}-2e^{3x}-20e^{2x}=e^{3x}$$

$$e^{3x}=e^{3x}$$

como queda una identidad entonces $y=e^{3x}+10e^{2x}$ si es solución de la ecuacón diferencial.

Problema 3.

$$\frac{dy}{dx}+20y=24$$

Donde:

$$y=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$$

Solución:
Derivando:

$$y' = 24e^{-20t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$24e^{-20t} + 20(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}) = 24$$

$$24e^{-20t} + 24 - 24e^{-20t} = 24$$

$$24 = 24$$

$\therefore y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$ si es solución de la ecuación diferencial.

Problema 4.

$$y' = 25 + y^2$$

Donde:

$$y = 5\tan 5x$$

Solución:
Derivando:

$$y' = 25\sec^2 5x$$

Sustituyendo:

$$25\sec^2 5x = 25 + 25\tan^2 5x$$

$$25\sec^2 5x = 25(1 + \tan^2 5x)$$

$$25\sec^2 5x = 25\sec^2 5x$$

$\therefore y = 5\tan 5x$ si es solución de la ecuación diferencial.

Problema 5.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

Donde:

$$y = (\sqrt{x} + c_1)^2, x > 0, c_1 > 0$$

Solución:
Derivando:

$$y\prime = 2(\sqrt{x} + c_1)(\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$y' = \frac{\sqrt{x} + c_1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}}$$

La ecuación diferencial puede escribirse de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

y como:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x} + c_1)^2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + c_1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}}$$

y como ya se había encontrado:

$$y' = 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}}$$

Entonces:

$$1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{c_1}{\sqrt{x}}$$

$\therefore y = (\sqrt{x} + c_1)^2$ si es solución.

Problema 6.

$$y' + y = senx$$

Donde:

$$y = \frac{1}{2}senx - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$$

Solución:
Derivando:

$$y' = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}senx - 10e^{-x}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}senx - 10e^{-x} + \frac{1}{2}senx - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$$

$$senx = senx$$

$\therefore y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$ si es solución.

Problema 7.

$$2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$$

Donde:

$$x^2y + y^2 = c_1$$

Solución:
Utilizando derivación ímplicita:

$$\frac{d}{dx}(x^2y + y^2 = c_1)$$

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$$

la cual es la ecuación original, $\therefore x^2y + y^2 = c_1$ es una solución ímplicita de la ecuación diferencial.

Problema 8.

$$x^2dy + 2xydx = 0$$

Donde:

$$y = -\frac{1}{x^2}$$

Solución:
La ecuación puede escribirse como:

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

Derivando la posible solución:

$$y = \frac{2}{x^3}$$

Sustituyendo:

$$2x^2x^{-3} - 2xx^{-2} = 0$$

$$2x^{-1} - 2x^{-1} = 0$$

$$0 = 0$$

Se obtiene una identidad, $\therefore y = -\frac{1}{x^2}$ si es solución de la ecuación.

Problema 9.

$$y' = 2\sqrt{\mid y \mid}$$

Donde:

$$y = x \mid x \mid$$

Solución:
El valor absoluto se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la función se escribe como:

$$y = x \mid x \mid = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ -x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La derivada es:

$$y' = \begin{cases} 2x & si \quad x \geq 0 \\ -2x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto si $x > 0$, $\sqrt{|y|} = \sqrt{x^2} = x$
Y sustituyendo en la ecuación:

$$2x = 2\sqrt{x^2} = 2x$$

Ahora bien, si $x < 0$, $\sqrt{|y|} = -x$ y al hacer la sustitución:

$$-2x = -2x$$

$\therefore$ $y = x \mid x \mid$ si es solución.

Problema 10.

$$y' - \frac{1}{x}y = 1$$

Donde:

$$y = xlnx$$

Solución:
Derivando:

$$y' = lnx + 1$$

Sustituyendo:

$$lnx + 1 - (\frac{1}{x})(xlnx) = 1$$

$$1 = 1$$

Se obtiene una identidad, $\therefore$ $y = xlnx$ si es solución de la ecuación.

Problema 11.

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Donde:

$$P = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}}$$

Solución:
Derivando:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(1 + bc_1 e^{at})(a^2 c_1 e^{at}) - (ac_1 e^{at})(abc_1 e^{at})}{(1 + bc_1 e^{at})^2}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{a^2 c_1 e^{at} + a^2 bc_1^2 e^{2at} - a^2 bc_1^2 e^{2at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2} = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} \left[a - b(\frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}}) \right]$$

$$\frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2} = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} \left[a - \frac{abc_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} \right]$$

$$\frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2} = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} \left[\frac{a(1 + bc_1 e^{at}) - (abc_1 e^{at})}{1 + bc_1 e^{at}} \right]$$

$$\frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2} = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} \left[\frac{a}{1 + bc_1 e^{at}} \right]$$

Es decir:

$$\frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2} = \frac{a^2 c_1 e^{at}}{(1 + bc_1 e^{at})^2}$$

Se obtiene una identidad, $\therefore P = \frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}}$ si es solución de la ecuación.

Problema 12.

$$\frac{dx}{dt} = (2-x)(1-x)$$

Donde:

$$t = ln\frac{2-x}{1-x}$$

Solución:
Derivando en forma ímplicita:

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right) = t\right]$$

$$\left(\frac{1-x}{2-x}\right)\left[\frac{(1-x)(-\frac{dx}{dt}) - (2-x)(-\frac{dx}{dt})}{(1-x)^2}\right] = 1$$

$$\frac{dx}{dt}\left[\frac{1}{(2-x)(1-x)}\right](-1+x+2-x) = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = (2-x)(1-x)$$

la cual es la ecuación original. Por lo tanto $t = ln\frac{2-x}{1-x}$ si es solución ya que se obtiene la misma ecuación.

Problema 13.

$$y' + 2xy = 1$$

Donde:

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$$

Solución:
Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}e^{x^2} + (\int_0^x e^{t^2}dt)(-2xe^{-x^2}) - 2c_1xe^{-x^2}$$

Sustituyendo:

$$1 - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt - 2c_1xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + 2c_1xe^{-x^2} = 1$$

$$1 = 1$$

Se obtiene una identidad, $\therefore y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$ si es solución de la ecuación.

Problema 14.

$$y'' + y' - 12y = 0$$

Donde:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$$

Solución:
Derivando dos veces:

$$y' = 3c_1e^{3x} - 4c_2e^{-4x}$$

$$y'' = 9c_1e^{3x} + 16c_2e^{-4x}$$

Sustituyendo:

$$9c_1e^{3x} + 16c_2e^{-4x} + 3c_1e^{3x} - 4c_2e^{-4x} - 12(c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}) = 0$$

$$9c_1e^{3x} + 16c_2e^{-4x} + 3c_1e^{3x} - 4c_2e^{-4x} - 12c_1e^{3x} - 12c_2e^{-4x} = 0$$

$$0 = 0$$

Se obtiene una identidad, $\therefore y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$ si es solución de la ecuación.

Problema 15.

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

Donde:

$$y = e^{3x}\cos 2x$$

Solución:
Derivando dos veces:

$$y' = 3e^{3x}\cos 2x - 2e^{3x}sen2x$$

$$y'' = 9e^{3x}\cos 2x - 6e^{3x}sen2x - 6e^{3x}sen2x - 4e^{3x}\cos 2x$$

Sustituyendo:

$$9e^{3x}\cos 2x - 6e^{3x}sen2x - 6e^{3x}sen2x - 4e^{3x}\cos 2x -$$

$$-18e^{3x}\cos 2x + 12e^{3x}sen2x + 13e^{3x}\cos 2x = 0$$

$$0 = 0$$

Se obtiene una identidad, $\therefore\ y = e^{3x}\cos 2x$ si es solución de la ecuación.

Problema 16.

$$\frac{d^2x}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Donde:

$$y = e^{2x} + xe^{2x}$$

Solución:
Derivando:

$$y' = 2e^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x} = 3e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$y'' = 6e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} = 8e^{2x} + 4xe^{2x}$$

Sustituyendo:

$$8e^{2x} + 4xe^{2x} - 12e^{2x} - 8xe^{2x} + 4e^{2x} + 4xe^{2x} = 0$$

$$0 = 0$$

Se obtiene una identidad, $\therefore y = e^{2x} + xe^{2x}$ si es solución de la ecuación.

Problema 17.

$$y'' + (y')^2 = 0$$

Donde:

$$y = ln \mid x + c_1 \mid + c_2$$

Solución:
Derivando:

$$y' = \frac{1}{x + c_1}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x + c_1)^2}$$

Sustituyendo:

$$-\frac{1}{(x + c_1)^2} + (\frac{1}{x + c_1})^2 = 0$$

$$0 = 0$$

Se obtiene una identidad, $\therefore y = ln \mid x + c_1 \mid + c_2$ si es solución de la ecuación.

Problema 18.

$$x^2y'' + xy' + 2y = 0$$

Donde:

$$y = x\cos(\ln x), x > 0$$

Solución:
Derivando:

$$y' = \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$$

$$y'' = -\frac{1}{x}\sin(\ln x) - \frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

Sustituyendo:

$$-x^2\frac{1}{x}\sin(\ln x) - x^2\frac{1}{x}\cos(\ln x) - x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0$$

$$-x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0$$

$$0 = 0$$

Se obtiene una identidad, $\therefore\ y = x\cos(\ln x)$ si es solución de la ecuación.

Problema 19.

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$$

Donde:

$$y = c_1\sin 3x + c_2\cos 3x + 4e^x$$

Solución:
Obteniendo las tres derivadas:

$$y' = 3c_1\cos 3x - 3c_2\sin 3x + 4e^x$$

$$y'' = -9c_1\sin 3x - 9c_2\cos 3x + 4e^x$$

$$y''' = -27c_1\cos 3x + 27c_2\sin 3x + 4e^x$$

Sustituyendo:
$-27c_1\cos 3x + 27c_2\sin 3x + 4e^x + 9c_1\sin 3x + 9c_2\cos 3x - 4e^x + 27c_1\cos 3x - 27c_2\sin 3x + 36e^x - 9c_1\sin 3x - 9c_2\cos 3x - 36e^x = 0$

$$0 = 0$$

Como se obtiene una identidad se tiene que $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x$ si es solución.

Problema 20.

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 12x^2$$

Donde:

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + 4x^2, x > 0$$

Solución:
Obteniendo las derivadas:

$$y' = c_1 + c_2 \ln x + c_2 + 8x$$

$$y'' = c_2 \frac{1}{x} + 8$$

$$y''' = -c_2 \frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo:

$$-c_2 \frac{x^3}{x^2} + 2c_2 \frac{x^2}{x} + 16x^2 - xc_1 - xc_2 \ln x - xc_2 - 8x^2 + c_1 x + c_2 x \ln x + 4x^2 = 12x^2$$

$$12x^2 = 12x^2$$

$\therefore$ Si es solución.

Problema 21.

$$xy' - 2y = 0$$

$$y = \begin{cases} -x^2, x < 0 \\ x^2, x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:
Derivando:

$$y' = \begin{cases} -2x, x < 0 \\ 2x, x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, sustituimos en la ecuación:

$$x(-2x) - 2(-x^2) = 0$$

$$-2x^2 + 2x^2 = 0$$

$$0 = 0$$

Si $x > 0$, sustituimos en la ecuación:

$$x(2x) - 2(x^2) = 0$$

$$2x^2 - 2x^2 = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto, si es solución.

Problema 22.

$$(y')^2 = 9xy$$

Donde

$$y = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^3, x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:
Derivando:
$y' = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 3x^2, x \geq 0 \end{cases}$
Obviamente si $y = 0$, la ecuación se satisface. En el caso de que $y = x^3$ (cuando $x \geq 0$)

$$y' = 3x^2$$

y haciendo la sustitución:

$$(3x^2)^2 = 9x(x^3)$$

$$9x^4 = 9x^4$$

Por lo tanto si es solución.

Problema 23. Determine valores de m tales que $y = e^{mx}$sea una solución de la ecuación diferencial respectiva.

a)

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Donde:

$$y = e^{mx}$$

Solución:

Al derivar dos veces:

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2e^{mx}$$

Sustitución:

$$m^2e^{mx} - 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 - 5m + 6) = 0$$

$$e^{mx}(m - 2)(m - 3) = 0$$

Por lo tanto $y = e^{mx}$ es solución sólo cuando:

$m = 2$

$m = 3$
Esto puede comprobarse:
Para $m = 2$

$$4e^{4x} - 10e^{4x} + 6e^{4x} = 0$$

$$10e^{4x} - 10e^{4x} = 0$$

$$0 = 0$$

Para $m = 3$

$$9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0$$

$$15e^{3x} - 15e^{3x} = 0$$

$$0 = 0$$

b)

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

Donde:

$$y = e^{mx}$$

Sustitución:

$$m^2e^{mx} + 10me^{mx} + 25e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + 10m + 25) = 0$$

$$e^{mx}(m + 5)^2 = 0$$

Por lo tanto:
$m = -5$
Comprobación:
para $m = -5$

$$25e^{5x} - 50e^{5x} + 25e^{5x} = 0$$

$$50e^{5x} - 50e^{5x} = 0$$

$$0 = 0$$

Problema 24. Encuentre los valores de m tales que $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial.

$$x^2y'' - y = 0$$

Solución:
Derivando dos veces:

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m^2x^{m-2} - mx^{m-2}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x^2m^2x^{m-2} - x^2mx^{m-2} - x^m = 0$$

$$x^m(m^2 - m - 1) = 0$$

Por lo tanto:

$$m_1 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$m_2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Chapter 2

Ecuaciones de primer orden

2.1 Separación de variables

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

se dice que es separable o que tiene variables separables. Usualmente tal ecuación se escribe como:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

e integrando se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por separacion de variables. Todas las ecuaciones se pueden comprobar como en la sección anterior.

Problema 1.

$$\frac{dy}{dx} = sen5x$$

Solución:

Multiplicando la ecuación por dx:

$$dy = sen5xdx$$

integramos ambas partes:

$$\int dy = \int sen5xdx$$

resolvemos:

$$y = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$$

Problema 2.

$$dx + e^{3x}dy = 0$$

Solución:
Dividimos entre e^{3x} y despejamos dy :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{e^{3x}} + dy &= 0 \\ dy &= -\frac{dx}{e^{3x}} \end{aligned}$$

integramos:

$$\begin{aligned} \int dy &= -\int \frac{dx}{e^{3x}} \\ y &= -\int e^{-3x}dx \\ y &= -\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} + c \\ y &= \frac{1}{3}e^{-3x} + c \end{aligned}$$

Problema 3.

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x + 6$$

Solución:
Multiplicamos por dx y dividimos entre $(x+1)$:

$$dy = \frac{x+6}{x+1}dx$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int dy &= \int \frac{x+6}{x+1}dx \\
y &= \int \frac{x+1+5}{x+1}dx \\
y &= \int \left(1+\frac{5}{x+1}\right)dx \\
y &= x+5\ln|x+1|+c
\end{aligned}$$

Problema 4.

$$xy' = 4y$$

Recordemos que $y' = \frac{dy}{dx}$
Dividimos entre xy y multiplicamos por dx:

$$\frac{dy}{y} = \frac{4}{x}dx$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{4}{x}dx \\
\ln|y| &= 4\ln|x| + \ln c \\
\ln|y| &= \ln\left|cx^4\right|
\end{aligned}$$

despejando y:

$$\begin{aligned}
e^{\ln|y|} &= e^{\ln\left|cx^4\right|} \\
y &= cx^4
\end{aligned}$$

Problema 5.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y^2}{1+x}$$

Multiplicamos por $(1+x)$ y por dy:

$$(x+1)\,dx = x^2y^2dy$$

divimos entre x^2:

$$\frac{(x+1)\,dx}{x^2} = y^2dy$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)}{x^2}dx &= \int y^2dy \\
-\frac{1}{x} + \ln|x| &= \frac{y^3}{3} + c'
\end{aligned}$$

multiplicamos por x y por 3:

$$-3 + 3x\ln|x| = y^3x + cx$$

Problema 6.

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$$

Solución:
Recordemos que $e^{3x+2y} = e^{3x}e^{2y}$
entonces:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x}e^{2y}$$

dividimos entre e^{2y} y multiplicamos por dx:

$$\frac{dy}{e^{2y}} = e^{3x}dx$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{e^{2y}} &= \int e^{3x}dx \\
\int e^{-2y}dy &= \frac{1}{3}e^{3x} + c \\
-\frac{1}{2}e^{-2y} &= \frac{1}{3}e^{3x} + c_1
\end{aligned}$$

multiplicamos por -2:

$$e^{-2y} = -\frac{2}{3}e^{3x} + c$$

aplicamos logaritmo en ambos lados:

$$\begin{aligned} \ln e^{-2y} &= \ln\left|-\frac{2}{3}e^{3x} + c\right| \\ -2y &= \ln\left|-\frac{2}{3}e^{3x} + c\right| \\ y &= -\frac{1}{2}\ln\left|-\frac{2}{3}e^{3x} + c\right| \end{aligned}$$

Problema 7.

$$\left(4y + yx^2\right)dy - \left(2x + xy^2\right)dx = 0$$

Solución:
Factorizamos y y x:

$$y\left(4 + x^2\right)dy - x(2 + y^2)dx = 0$$

dividimos entre $(4 + x^2)$ y $(2 + y^2)$:

$$\frac{ydy}{2 + y^2} = \frac{xdx}{4 + x^2}$$

integramos:

$$\int \frac{ydy}{2 + y^2} = \int \frac{xdx}{4 + x^2}$$

por cambio de variable:

$$\begin{aligned} u &= 2 + y^2, w = 4 + x^2 \\ du &= 2ydy, dw = 2xdx \\ \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} &= \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln u &= \frac{1}{2}\ln w + c \\
\frac{1}{2}\ln\left|2+y^2\right| &= \frac{1}{2}\ln\left|4+x^2\right| + \ln c_1 \\
\ln\left|2+y^2\right| &= \ln c\left|4+x^2\right|
\end{aligned}
$$

aplicamos la función exponecial:

$$
\begin{aligned}
e^{\ln\left|2+y^2\right|} &= e^{\ln c\left|4+x^2\right|} \\
2+y^2 &= c\left(4+x^2\right) \\
y^2 &= c\left(4+x^2\right) - 2 \\
y &= \sqrt{c\left(4+x^2\right) - 2}
\end{aligned}
$$

Problema 8.

$$2y\left(x+1\right)dy = xdx$$

Solución:
Dividimos entre $(x+1)$:

$$2ydy = \frac{xdx}{x+1}$$

integramos:

$$
\begin{aligned}
\int 2ydy &= \int \frac{xdx}{x+1} \\
y^2 &= \int \frac{x+1-1}{x+1}dx \\
y^2 &= \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx \\
y^2 &= x - \ln|x+1| + c \\
y &= \sqrt{x - \ln|x+1| + c}
\end{aligned}
$$

Problema 9.

$$y\ln x\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$$

Solución:
Multiplcamos por dy y por x^2 y dividimos entre y:

$$x^2 \ln x dx = \frac{(y+1)^2}{y}$$

integramos:

$$\int x^2 \ln x dx = \int \frac{(y+1)^2}{y} dy$$

integrando por partes:

$$\begin{aligned}
u &= \ln x, du = \frac{1}{x} dx \\
dv &= x^2 dx, v = \frac{x^3}{3} \\
\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx &= \int \frac{(y+1)^2}{y} dy \\
\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx &= \int \frac{y^2+2y+1}{y} dy \\
\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 &= \frac{y^2}{2} + 2y + \ln y + c \\
\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 &= \frac{y^2}{2} + 2y + \ln y + c
\end{aligned}$$

Problema 10.

$$\sec^2 x dy + \csc y dx = 0$$

Solución.
Dividimos entre $\sec^2 x$ y $\csc y$:

$$\frac{dy}{\csc y} + \frac{dx}{\sec^2 x} = 0$$

despejamos $\frac{dy}{\csc y}$ e integramos:

$$\int \frac{dy}{\csc y} = -\int \frac{dx}{\sec^2 x}$$

usando las identidades

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\csc y} &= seny \\
\frac{1}{\sec^2 x} &= \cos^2 x \\
\cos^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\
\int senydy &= -\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\
-\cos y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} sen2x + c
\end{aligned}$$

Problema 11.

$$e^y sen2xdx + \cos x\left(e^{2y} - y\right) dy = 0$$

Solución:
Dividimos entre e^y y entre $\cos x$:

$$\frac{sen2xdx}{\cos x} + \frac{\left(e^{2y} - y\right) dy}{e^y} = 0$$

despejamos $\frac{sen2xdx}{\cos x}$ e integramos:

$$\int \frac{sen2x}{\cos x} dx = -\int \frac{\left(e^{2y} - y\right)}{e^y} dy$$

se usa la identidad:

$$sen2x = 2senx \cos x$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2senx \cos x}{\cos x} dx &= -\int \frac{\left(e^{2y} - y\right)}{e^y} dy \\
\int 2senxdx &= -\int e^y dy + \int \frac{y}{e^y} dy \\
-2\cos x &= -e^y + \int ye^{-y} dy
\end{aligned}$$

esta integral se resuelve por partes:

$$\begin{aligned} u &= y \\ du &= dy \\ dv &= e^{-y}dy \\ v &= -e^{-y} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} -2\cos x &= -e^{y} + \left[-ye^{-y} - \int -e^{-y}dy\right] \\ -2\cos x &= -e^{y} - ye^{-y} - e^{-y} + c \end{aligned}$$

$$-2\cos x + e^{y} + ye^{-y} + e^{-y} = c$$

Problema 12.

$$\left(e^{y}+1\right)^{2} e^{-y}dx + \left(e^{x}+1\right)^{3} e^{-x}dy = 0$$

Solución:
Dividimos entre $\left(e^{y}+1\right)^{2} e^{-y}$ y entre $\left(e^{x}+1\right)^{3} e^{-x}$

$$\frac{dx}{\left(e^{x}+1\right)^{3} e^{-x}} + \frac{dy}{\left(e^{y}+1\right)^{2} e^{-y}} = 0$$

despejamos e integramos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\left(e^{x}+1\right)^{3} e^{-x}} &= -\int \frac{dy}{(e^{y}+1)e^{-y}} \\ \int \frac{e^{x}dx}{(e^{x}+1)^{3}} &= -\int \frac{e^{y}dy}{(e^{y}+1)^{2}} \\ u &= e^{x}+1 \\ du &= e^{x}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= e^y + 1 \\
dw &= e^y dy \\
\int \frac{du}{u^3} &= -\int \frac{dw}{w^2} \\
-\frac{1}{2u} &= \frac{1}{u} \\
-\frac{1}{2(e^x+1)} &= \frac{1}{e^y+1} + c
\end{aligned}$$

Problema 13.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

Solución:
Factorizamos por agrupamiento:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y\left(x-1\right) + 3\left(x-1\right)}{y\left(x+4\right) - 2\left(x+4\right)} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(y+3\right)\left(x-1\right)}{\left(y-2\right)\left(x+4\right)}
\end{aligned}$$

separamos variables:

$$\frac{(y-2)}{(y+3)}dy = \frac{(x-1)}{(x+4)}dx$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(y-2)}{(y+3)}dy &= \int \frac{(x-1)}{(x+4)}dx \\
\int \frac{y+3-5}{y+3}dy &= \int \frac{x+4-5}{x+4}dx \\
\int \left(1 - \frac{5}{y+3}\right) dy &= \int \left(1 - \frac{5}{x+4}\right) dx \\
y - 5\ln\left(y+3\right) &= x - 5\ln\left(x+4\right) + c
\end{aligned}$$

Problema 14.

$$\frac{dy}{dx} = senx\left(\cos 2y - \cos^2 y\right)$$

Solución:
Multiplicamos por dx y dividimos entre $(\cos 2y - \cos^2 y)$:

$$\frac{dy}{\cos 2y - \cos^2 y} = senxdx$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\cos 2y - \cos^2 y} &= \int senxdx \\
\int \frac{dy}{(2\cos^2 y - 1) - \cos^2 y} &= -\cos x + c \\
\int \frac{dy}{\cos^2 y - 1} &= -\cos x + c \\
-\int \frac{dy}{\sin^2 y} &= -\cos x + c \\
\int \csc^2 ydy &= \cos x + c \\
-\cot y &= \cos x + c
\end{aligned}$$

Problema 15.

$$\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{dy}{dx} = y^2$$

Dividimos entre y^2 y $(e^x + e^{-x})$ multiplicamos por dx:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

multiplicamos el denominador y el numerador del lado derecho por e^x e integramos:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

en la integral del lado derecho se hace el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
u &= e^x \\
du &= e^x dx \\
-\frac{1}{y} &= \int \frac{du}{u^2+1} \\
-\frac{1}{y} &= \arctan u + c = \arctan e^x + c
\end{aligned}$$

En las siguintes ecuaciones diferenciales, encuentre la solución de las mismas sujetas a la condición inicial respectiva.

Problema 16.

$$ydy = 4x\left(y^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad y\left(1\right) = 0$$

Solución:
Dividimos entre $(y^2+1)^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{ydy}{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}} = 4xdx$$

integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{ydy}{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}} &= \int 4xdx \\
u &= y^2+1 \\
du &= 2ydy \\
\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} &= 2x^2+c \\
\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du &= 2x^2+c \\
u^{\frac{1}{2}} &= 2x^2+c \\
\sqrt{y^2+1} &= 2x^2+c \\
y^2+1 &= \left(2x^2+c\right)^2 \\
y &= \sqrt{(2x^2+c)^2-1}
\end{aligned}$$

aplicamos la condicion inicial $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \\ 1 &= \sqrt{\left(2(0)^2 + c\right)^2 - 1} \\ 1 &= \sqrt{c^2 - 1} \\ c &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

regresamos a la integral anterior:

$$y = \sqrt{\left(2x^2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1}$$

Problema 17.

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(x^2 + 1\right), \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Solución:

Multiplicamos por dx:

$$dy = 4\left(x^2 + 1\right) dx$$

integramos:

$$\begin{aligned} \int dy &= \int 4\left(x^2 + 1\right) dx \\ y &= \frac{4x^3}{3} + 4x + c \end{aligned}$$

aplicamos la condición inicial:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} &= 4\left(\frac{1}{3}\right) + 4(1) + c \\ \frac{\pi}{4} - \frac{4}{3} - 4 &= c \\ c &= \frac{\pi}{4} - \frac{16}{3} \end{aligned}$$

sustituimos en la solución general:

$$y = \frac{4x^3}{3} + 4x + \frac{\pi}{4} - \frac{16}{3}$$

2.2 Ecuaciones exactas

Una expresión de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencial de alguna función $f(x, y)$. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta, si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ con derivadas parciales continuas en una región rectangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una diferencial exacta es que:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

En los siguientes problemas, determine si la ecuación respectiva es exacta. Si lo es, resuélvala.

Problema 1.

$$(2x - 1)\, dx + (3y + 7)\, dy = 0$$

Solución:
$M(x, y) = 2x - 1$
$N(x, y) = 3y + 7$

Para saber si son exactas se debe de cumplir la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Se deriva $M(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

Se deriva $N(x, y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

La ecuación es exacta. Entonces debe existir $f(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y + 7$$

Integrando la primera:

$$f(x, y) = \int (2x - 1)\, dx = x^2 - x + g(y)$$

Derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y)$$

$$3y + 7 = g'(y)$$

Se integra para obtener $g(y)$:

$$g(y) = \int (3y + 7y)dy = \frac{3}{2}y^2 + 7y + c$$

Sustituyendo $g(y)$ en la expresión de $f(x, y)$:

$$f(x, y) = x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y + c$$

La solución de la ecuación es:

$$x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y + c = 0$$

Problema 2.

$$(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$$

Solución:
$M(x, y) = 2x + y$
$N(x, y) = -(x + 6y)$
Derivando $M(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

Derivando $N(x, y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

La ecuación no es exacta. Para resolverla se debería utilizar otro método.

Problema 3.

$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

Solución:
$M(x, y) = 5x + 4y$
$N(x, y) = 4x - 8y^3$
Para cumplir con la condición de exactitud se deriva $M(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4$$

Se deriva $N(x, y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4$$

La ecuación es exacta. Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 8y^3$$

Escogiendo una de las derivadas parciales, integramos:

$$f(x,y) = \int (5x+4y)dx = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + g(y)$$

Derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + g'(y)$$

$$4x - 8y^3 = 4x + g'(x)$$

$$g'(y) = -8y^3$$

Para obtener a $g(y)$ se integra con respecto a y:

$$g(y) = -8\int y^3 dy = -2y^4 + c$$

Sustituyendo a $g(y)$:

$$f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 + c$$

La solución de la ecuación es:

$$\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 + c = 0$$

Problema 4.

$$\left(2y^2x - 3\right) dx + \left(2yx^2 + 4\right) dy = 0$$

Solución: Derivando $M(x,y)$ con respecto a y, $N(x,y)$ con respecto a x.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4yx, \ \frac{\partial N}{\partial x} = 4yx$$

La ecuación es exacta, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4$$

Integramos $M(x,y)$ con respecto a x, para determinar $f(x,y)$

$$f(x,y) = \int \left(2y^2x - 3\right) dx = y^2x^2 - 3x + g(y)$$

derivamos con respecto a y, e igualamos con $N(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + g'(y) = 2yx^2 + 4$$

$$g'(y) = 4$$

integramos $g'(y)$ con respecto a y.

$$g(y) = 4\int dy = 4y + c$$

sustituimos $g(y)$ en $f(x,y)$, y el resultado es:

$$f(x,y) = y^2x^2 - 3x + 4y + c$$

La solución se escribe como:

$$y^2x^2 - 3x + 4y + c = 0$$

Problema 5.

$$(x+y)(x-y)\,dx + x(x-2y)\,dy = 0$$

Solución:

Resolvemos la factorización, y derivamos $M(x,y)$ con respecto a y, $N(x,y)$ con respecto a x,

$$\left(x^2 - y^2\right) dx + \left(x^2 - 2xy\right) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \qquad \neq \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y$$

$\therefore$ La ecuación no es exacta, puede resolverse utilizando el método para las ecuaciones homogéneas que se revisará después.

Problema 6.

$$x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$$

Solución: Igualamos la ecuación a cero, para dejarla en la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\left(2xe^x - y + 6x^2\right) dx - xdy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$\therefore$ La ecuación es exacta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^x - y + 6x^2 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

Integramos $N(x,y)$ con respecto a y, el resultado obtenido, lo derivamos parcialmente con respecto a x, e igualamos con $M(x,y)$.

$$f(x,y) = \int -xdy = -xy + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y + g'(x) = 2xe^x - y + 6x^2$$

$$g'(x) = 2xe^x + 6x^2$$

integramos $g'(x)$

$$g(x) = \int \left(2xe^x + 6x^2\right) dx = 2\int xe^x dx + 6\int x^2 dx$$

La primera integral se resuelve por partes haciendo:
$u = x$ $\quad dv = e^x dx$
$du = dx$ $\quad v = e^x$

$$g(x) = 2\left(xe^x - e^x\right) + 2x^3 + c$$

Sustituimos $g(x)$ en $f(x, y)$, teniendo como resultado:

$$f(x, y) = -xy + 2xe^x - 2e^x + 2x^3 + c = 0$$

Problema 7.

$$\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$$

Solución: Separamos dy, e igualamos la ecuación, derivando $M(x, y)$ con respecto a y, $N(x, y)$ con respecto a x.

$$\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right)dx + \quad x^3y^2 dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2$$

La ecuación es exacta, por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \; x^3y^2$$

Considerando que es más sencillo integrar $N(x, y)$ con respecto a y, luego se deriva con respecto a x

$$f(x, y) = \int \; x^3y^2 dy = \frac{1}{3}x^3y^3 + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \; x^2y^3 + g'(x) = \; x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{1+9x^2}$$

$$g(x) = -\int \frac{1}{1+9x^2} = -\frac{1}{3}\tan^{-1} 3x + c$$

Sustituyendo en $f(x, y)$, tenemos como resultado:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3 - \frac{1}{3}\tan^{-1} 3x + c = 0$$

Problema 8.

$$(\tan x - senxseny)\,dx + \cos x \cos y dy = 0$$

Solución:
$M(x,y) = \tan x - senxseny$
$N(x,y) = \cos x \cos y$
Veamos si cumple con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -senx \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -senx \cos y$$

La ecuación es exacta, por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tan x - senxseny$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \cos y$$

Escogiendo una de las derivadas parciales, integramos:

$$f(x,y) = \int (\tan x - senxseny)\,dx = -\ln|\cos x| + seny \cos y + h(y)$$

Para obtener $h(y)$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \cos y + h'(y)$$

$$\cos x \cos y = \cos x \cos y + h'(y)$$

$$h(y) = c$$

Sustituyendo $h(y)$:

$$f(x, y) = -\ln|\cos x| + seny \cos y + c$$

la solución de la ecuación es:

$$-\ln|\cos x| + seny \cos y + c = 0$$

Problema 9.

$$\left(4x^3y - 15x^2 - y\right) dx + \left(x^4 + 3y^2 - x\right) dy = 0$$

Solución:
$M(x, y) = 4x^3y - 15x^2 - y$
$N(x, y) = x^4 + 3y^2 - x$
Se verifica si se cumple con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 - 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 - 1$$

La ecuación es exacta, por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y - 15x^2 - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 3y^2 - x$$

Escogiendo una de las derivadas parciales integramos:

$$f(x,y) = \int \left(4x^3y - 15x^2 - y\right) dx = x^4y - 5x^3 - yx + m(y)$$

Para obtener $m(y)$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 - x + m'(y)$$

$$x^4 + 3y^2 - x = x^4 - x + m'(y)$$

$$m(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + c$$

Sustituyendo a $m(y)$:

$$f(x,y) = x^4y - 5x^3 - yx + y^3 + c$$

la solución de la ecuación es:

$$x^4y - 5x^3 - yx + y^3 + c = 0$$

Problema 10.

$$\left(y^2\cos x - 3x^2y - 2x\right) dx + \left(2ysenx - x^3 + \ln y\right) dy = 0, y(0) = e$$

$M(x,y) = y^2\cos x - 3x^2y - 2x$
$N(x,y) = 2ysenx - x^3 + \ln y$
Cumpliendo con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\cos x - 3x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y\cos x - 3x^2$$

La ecuación es exacta por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ysenx - x^3 + \ln y$$

Escogiendo una de las derivadas parciales integramos:

$$f(x,y) = \int \left(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x\right) dx = y^2 senx - x^3 y - x^2 + h(y)$$

Para obtener $h(y)$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ysenx - x^3 + h'(y)$$

$$2ysenx - x^3 + \ln y = 2ysenx - x^3 + h'(y)$$

$$h(y) = \int \ln y dy = y \ln y - y + c$$

Sustituyendo a $h(y)$:

$$f(x,y) = y^2 senx - x^3 y - x^2 + y \ln y - y + c = 0$$

Tomando la condición inicial de $y(0) = e$ se tiene que:
$e^2 sen0 - 0^3 e - 0^2 + e \ln e - e + c = 0$
$c = 0$
Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$y^2 senx - x^3 y - x^2 + y \ln y - y = 0$$

Determine el valor de k para que la ecuación diferencial correspondiente sea exacta.

Problema 11.

$$\left(y^3 + kxy^4 - 2x\right) dx + \left(3xy^2 + 20x^2 y^3\right) dy = 0$$

Solución:
$M(x,y) = y^3 + kxy^4 - 2x$
$N(x,y) = 3xy^2 + 20x^2y^3$
Derivando con respecto a x y y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 4kxy^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 + 40xy^3$$

Igualando las derivadas parciales:

$$3y^2 + 4kxy^3 = 3y^2 + 40xy^3$$

Despejando a k se tiene que:

$$k = 10$$

Por lo tanto k se sustituye en la ecuación diferencial para que sea exacta.

Resuelva la ecuación respectiva comprobando que la función indicada, $\mu(x,y)$, sea un factor integrante.

Problema 12.

$$6xydx + \left(4y + 9x^2\right) dy = 0,\ \mu(x,y) = y^2$$

Solución:
Puede verificarse que la ecuación no es exacta, pero si se multiplica por el factor integrante queda:

$$6xy^3dx + \left(4y^3 + 9x^2y^2\right) dy = 0$$

$M(x,y) = 6xy^3$
$N(x,y) = 4y^3 + 9x^2y^2$
Y ahora sí cumple con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 18xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 9x^2y^2$$

Escogiendo una de las derivadas parciales integramos:

$$f(x,y) = \int 6xy^3 dx = 3x^2y^3 + h(y)$$

Para obtener $h(y)$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 + h'(y)$$

$$4y^3 + 9x^2y^2 = 9x^2y^2 + h'(y)$$

$$h(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + c$$

Sustituyendo a $h(y)$:

$$f(x,y) = 3x^2y^3 + y^4 + c$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$3x^2y^3 + y^4 + c = 0$$

Problema 13.

$$\left(2y^2 + 3x\right) dx + 2xydy = 0, \ \ \mu(x,y) = x$$

Solución:

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante queda:

$$\left(2xy^2+3x^2\right)dx+2x^2ydy=0$$

$M\left(x,y\right)=2xy^2+3x^2$
$N\left(x,y\right)=2x^2y$
Verificando la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=4xy$$

La ecuación es exacta, por lo tanto se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2+3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y$$

Escogiendo una de las derivadas parciales integramos:

$$f\left(x,y\right)=\int\left(2xy^2+3x^2\right)dx=x^2y^2+x^3+l\left(y\right)$$

Para obtener $l(y)$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+l'\left(y\right)$$

$$2x^2y=2x^2y+l'\left(y\right)$$

$$l\left(y\right)=c$$

Sustituyendo a $l(y)$:

$$f\left(x,y\right)=x^2y^2+x^3+c$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$x^2y^2+x^3+c=0$$

2.3 Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)$$

es una ecuación lineal.

Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

1) Para resolver una ecuación lineal de primer orden, primero se reescribe de tal manera que el
coeficiente de dy/dx sea la unidad

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)$$

2) Hay que identificar $p(x)$ y definir el factor integrante,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

3) La ecuación obtenida en el paso 1 se multiplica por el factor integrante:

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = e^{\int p(x)dx}f(x)$$

4) El lado izquierdo de la ecuación obtenida en el paso 3 es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente y; esto es:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]e^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)dx}f(x)$$

5) Se integran ambos lados de la ecuación obtenida en el paso 4.

Problema 1.

$$3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$$

Solución:

Dividimos la ecuación entre 3 para ponerla en la forma general

$$\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{4}{3}$$

$$p\left(x\right) = 4$$

Calculamos el factor integrante y lo multiplicamos por la ecuación

$$\mu\left(x\right) = e^{\int p\ (x)dx} = e^{\int 4dx} = e^{4x}$$

$$\left(e^{4x}\right)\left(\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{4}{3}\right)$$

Integramos y despejamos a y

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{4x}\right) = \int \frac{4}{3}e^{4x}dx$$

$$ye^{4x} = \frac{1}{3}e^{4x} + c$$

$$y = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{4x}}$$

Problema 2.

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

$p(x) = 1$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int p\ (x)dx} = e^{x}$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$(e^{x})\left(\frac{dy}{dx} + y\right) = e^{3x}(e^{x})$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int d[ye^{x}] = \int e^{4x}dx$$

$$ye^{x} = \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = \frac{1}{4}\frac{e^{4x}}{e^{x}} + \frac{c}{e^{x}}$$

$$y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$$

Problema 3.

$$y' + 3x^{2}y = x^{2}$$

Solución:

$p(x) = 3x^2$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$\left(e^{x^3}\right)\left(y' + 3x^2 y\right) = x^2 e^{x^3}$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}\left[ye^{x^3}\right] = \int x^2 e^{x^3}$$

$$ye^{x^3} = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{x^3}}$$

Problema 4.

$$xdy = (xsenx - y)\,dx$$

Solución:
La ecuación se lleva a la forma de las ecuaciones lineales:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{(xsenx - y)}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = senx$$

Determinamos el valor de $p(x)$
$p(x) = x^{-1}$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$x\left(\frac{dy}{dx}-y\left(\frac{1}{x}\right)=senx\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[xy\right]=xsenx$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int\frac{d}{dx}\left[xy\right]=\int xsenxdx$$

Integramos por partes $\int xsenxdx$
$u=x \qquad dv=senxdx$
$du=dx \qquad v=-\cos x$

$$xy=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+senx+c$$

Despejamos el valor de y

$$y=\frac{-x\cos x+senx+c}{x}$$

Problema 5.

$$\cos x\frac{dy}{dx}+ysenx=1$$

Solución:
La ecuación se lleva a la forma de las lineales:

$$\frac{dy}{dx}+y\frac{senx}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\tan x\right)y=\sec x$$

$p\left(x\right)=\tan x$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu\left(x\right)$

$$\mu\left(x\right)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\tan xdx}=e^{-\ln(\cos x)}=\sec x$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$\sec x\left(\frac{dy}{dx}+(\tan x)\,y=\sec x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[y\sec x\right]=\sec^2 x dx$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int\frac{d}{dx}\left[y\sec x\right]=\int\sec^2 x dx$$

$$y\sec x=\tan x+c$$

Despejamos el valor de y

$$y=\frac{\tan x+c}{\sec x}=senx+c\cos x$$

Problema 6.

$$x\frac{dy}{dx}+4y=x^3-x$$

Solución:
La ecuación se lleva a la forma:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y=x^2-1$$

$p\,(x)=\frac{4}{x}$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu\,(x)$

$$\mu\,(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{4}{x}dx}=e^{4\ln(x)}=x^4$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$x^4\left(\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y=x^2-1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[yx^4\right]=x^6-x^4$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}\left[yx^4\right] = \int \left(x^6 - x^4\right) dx$$

$$yx^4 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + \frac{c}{x^4}$$

Problema 7.

$$\cos^2 x senx dy + \left(y\cos^3 x - 1\right) dx = 0$$

Solución:
La ecuación se lleva a la forma de las lineales:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y\cos^3 x - 1}{\cos^2 x senx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{senx}y = \frac{1}{\cos^2 x senx}$$

$p\left(x\right) = \cot x$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu\left(x\right)$

$$\mu\left(x\right) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln(senx)} = senx$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$senx\left(\frac{dy}{dx} + \left(\cot x\ y\right) = \frac{1}{\cos^2 x senx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[ysenx\right] = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}[ysenx] = \int \left(\sec^2 x\right) dx$$

$$ysenx = \tan x + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = \frac{\tan x + c}{senx}$$

$$y = \sec x + c \csc x$$

Problema 8.

$$x\frac{dy}{dx} + (3x+1)\, y = e^{-3x}$$

Solución:
La ecuación se lleva a la forma:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x+1}{x} y = \frac{e^{-3x}}{x}$$

$p(x) = \frac{3x+1}{x}$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3x+1}{x}dx} = e^{3x}e^{\ln(x)} = xe^{3x}$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$xe^{3x}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{3x+1}{x} y = \frac{e^{-3x}}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[yxe^{3x}\right] = 1$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}\left[yxe^{3x}\right] = \int dx$$

$$yxe^{3x} = x + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = \frac{x+c}{xe^{3x}} = e^{-3x} + \frac{ce^{-3x}}{x}$$

Problema 9.

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Solución:
$p(x) = 1$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$
$\mu(x) = e^{\int dx} = e^{x}$
Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$e^{x}\left(\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{x}\right] = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}\left[ye^{x}\right] = \int \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right) dx$$

$$ye^{x} = \ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = e^{-x}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) + ce^{-x}$$

Problema 10.

$$(x+2)^{2}\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$$

Solución:

La ecuación se lleva a la forma de las lineales:

$$(x+2)^2\frac{dy}{dx} = 5 - 4(x+2)y$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x+2}y = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$p\,(x) = \frac{4}{x+2}$$

Calculamos el valor del factor integrante $\mu\,(x)$

$$\mu\,(x) = e^{\int \frac{4}{x+2}dx} = e^{4\ln(x+2)} = (x+2)^4$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$(x+2)^4\left(\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x+2}y = \frac{5}{(x+2)^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x+2)^4\,y\right] = 5\,(x+2)^2$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int\frac{d}{dx}\left[(x+2)^4\,y\right] = \int 5\,(x+2)^2\,dx$$

$$(x+2)^4\,y = \frac{5}{3}\,(x+2)^3 + c$$

Despejamos el valor de y

$$y = \frac{5}{3\,(x+2)} + \frac{c}{(x+2)^4}$$

Problema 11.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 20, \qquad\qquad y\,(0) = 2$$

Solución:

$p(x) = 5$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int 5dx} = e^{5x}$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$e^{5x}\left(\frac{dy}{dx} + 5y = 20\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{5x}\right] = 20e^{5x}$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}\left[ye^{5x}\right] = \int \left(20e^{5x}\right) dx$$

$$ye^{5x} = 4e^{5x} + c$$

Calculamos el valor de c

$$(2)\, e^{5(0)} = 4e^{5(0)} + c$$

$$2 = 4 + c$$

$$c = -2$$

Despejamos el valor de y y sustituimos el valor de c

$$y = 4 - 2e^{-5x}$$

Problema 12.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \qquad\qquad L, R \text{ y } E \text{ son constantes, } i(0) = i_0$$

Solución:

La ecuación se lleva a la forma de las lineales:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}$$

$p\left(t\right)=\frac{R}{L}$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu\left(t\right)$

$$\mu\left(t\right)=e^{\int\frac{R}{L}dt}=e^{\frac{R}{L}t}$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[ie^{\frac{R}{L}t}\right]=\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

Integramos para calcular el valor de i

$$\int\frac{d}{dt}\left[ie^{\frac{R}{L}t}\right]=\int\left(\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\right)dt$$

$$ie^{\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}+c$$

Calculamos el valor de c

$$i_0e^{\frac{R}{L}(0)}=\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}(0)}+c$$

$$i_0=\frac{E}{R}+c$$

$$c=i_0-\frac{E}{R}$$

Despejamos el valor de i y sustituimos el valor de c

$$ie^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)$$

$$i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Problema 13.

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - 50\right) \qquad k \text{ es constante, } T\left(0\right) = 200$$

Solución:

La ecuación se lleva a la forma:

$$\frac{dT}{dt} - kT = -50k$$

Determinamos el valor de $p\left(t\right)$
$p\left(t\right) = -k$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu\left(t\right)$

$$\mu\left(t\right) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$e^{-kt}\left(\frac{dT}{dt} - kT = -50k\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[Te^{-kt}\right] = -50ke^{-kt}$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dt}\left[Te^{-kt}\right] = -\int \left(50ke^{-kt}\right)dt$$

$$Te^{-kt} = 50e^{-kt} + c$$

Calculamos el valor de c

$$200e^{-k(0)} = 50e^{-k(0)} + c$$

$$200 = 50 + c$$

$$c = 150$$

Despejamos el valor de T y sustituimos el valor de c

$$Te^{-kt} = 50e^{-kt} + 150$$

$$T = 50 + 150e^{kt}$$

Problema 14.

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x \qquad\qquad y(1) = 10$$

Solución:

La ecuación se lleva a la forma:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x+1)}y = \frac{\ln x}{x+1}$$

Determinamos el valor de $p(x)$
$p(x) = \frac{1}{(x+1)}$
Calculamos el valor del factor integrante $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{(x+1)}dx} = e^{\ln(x+1)} = x + 1$$

Se multiplica el factor integrante por la ecuación

$$(x+1)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x+1)}y = \frac{\ln x}{x+1}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x+1)y\right] = \ln x$$

Integramos para calcular el valor de y

$$\int \frac{d}{dx}\left[(x+1)\, y\right] = \int \ln x dx$$

Integramos por partes $\int \ln x dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$$(x+1)\, y = x \ln x - \int dx$$

$$(x+1)\, y = x \ln x - x + c$$

Calculamos el valor de c

$$(1+1)\, 10 = (1) \ln (1) - 1 + c$$

$$20 = -1 + c$$

$$c = 21$$

Despejamos el valor de y y sustituimos el valor de c

$$(x+1)\, y = x \ln x - x + 21$$

$$y = \frac{x \ln x - x + 21}{(x+1)}$$

2.4 Sustituciones diversas

2.4.1 Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se dice que es homogénea si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son ambas funciones homogéneas del mismo grado, en otras palabras la ecuación es homogénea si

$$M(tx,ty)=t^{\alpha}M(x,y),\ N(tx,ty)=t^{\alpha}N(x,y)$$

Una ecuación diferencial homogénea puede resolverse por medio de las sustituciones algebraicas:

$$y=ux,\ \text{o}\ x=vy$$

éstas sustituciones reducirán la ecuación a una de variables separables de primer orden.

Resuelva cada una de las ecuaciones homogéneas con la sustitución apropiada:

Problema 1.

$$(x-y)\,dx+xdy=0$$

Solución:
Hacemos un cambio de variable y derivamos:

$$\begin{aligned} y &= ux \\ dy &= udx+xdu \end{aligned}$$

sustituimos en la ecuación y desarrollamos:

$$\begin{aligned} (x-ux)\,dx+x\,(udx+xdu) &= 0 \\ xdx-uxdx+uxdx+x^2dx &= 0 \\ xdx+x^2du &= 0 \end{aligned}$$

dividimos entre x^2 e integramos toda la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x}+du &= 0 \\ & \int\left(\frac{dx}{x}+du=0\right) \\ \ln x+u &= c \end{aligned}$$

regresamos a la variable original:

$$\begin{aligned} y &= ux \\ u &= \frac{y}{x} \\ \ln x + \frac{y}{x} &= c \end{aligned}$$

multiplicamos toda la ecuación por x:

$$x \ln x + y = cx$$

Problema 2.

$$xdx + (y - 2x)\, dy = 0$$

Solución:
Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= vy \\ dx &= vdy + ydv \end{aligned}$$

sustituimos en la ecuación y desarrollamos:

$$\begin{aligned} vy\,(vdy + ydv) + (y - 2vy)\, dy &= 0 \\ v^2ydy + vy^2dv + ydy - 2vydy &= 0 \\ y\left(v^2 - 2v + 1\right) dy + vy^2dv &= 0 \end{aligned}$$

dividimos entre y^2 y $(v^2 - 2v + 1)$ e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} + \frac{vdv}{v^2 - 2v + 1} &= 0 \\ \frac{dy}{y} + \frac{vdv}{(v-1)^2} = 0, \qquad & \int \left(\frac{dy}{y} + \frac{vdv}{(v-1)^2} = 0 \right) \\ \text{si } z &= v - 1,\ \nu = z + 1,\ d\nu = dz \\ & \int \left(\frac{dy}{y} + \frac{(z+1)dz}{z^2} = 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln y + \ln z - \frac{1}{z} &= c \\
\ln y + \ln(\nu - 1) - \frac{1}{(\nu - 1)} &= c \\
\nu &= x/y \\
\ln y + \ln(\frac{x}{y} - 1) - \frac{1}{(\frac{x}{y} - 1)} &= c
\end{aligned}$$

Problema 3.

$$\left(y^2 + yx\right) dx - x^2 dy = 0$$

Solución:
Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
y &= ux \\
dy &= udx + xdu
\end{aligned}$$

sustituimos en la ecuación y desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\left(u^2x^2 + ux^2\right) dx - x^2 \left(udx + xdu\right) &= 0 \\
u^2x^2dx + ux^2dx - ux^2dx + x^3du &= 0 \\
u^2x^2dx + x^3du &= 0
\end{aligned}$$

dividimos entre u^2 y x^3e integramos:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2} &= 0 \\
& \int \left(\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2} = 0\right) \\
\ln x - \frac{1}{u} &= c
\end{aligned}$$

regresamos a la variable original:

$$\begin{aligned}
y &= ux \\
u &= \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln x - \frac{1}{\frac{y}{x}} &= c \\ \ln x - \frac{x}{y} &= c \end{aligned}$$

multiplicamos por y:

$$y \ln x - x = cy$$

Resuelva la ecuación homogénea sujeta a la condición inicial respectiva:

Problema 4.

$$\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right) dx - xe^{\frac{y}{x}} dy = 0, y\left(1\right) = 0$$

Solución:
Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} y &= ux \\ dy &= udx + xdu \end{aligned}$$

sustituimos en la ecuación y desarrollamos:

$$\begin{aligned} \left(x + uxe^{\frac{ux}{y}}\right) dx - xe^{\frac{ux}{x}} \left(udx + xdu\right) &= 0 \\ xdx + uxe^{u}dx - uxe^{u}dx - x^2e^{u}du &= 0 \\ xdx - x^2e^{u}du &= 0 \end{aligned}$$

dividimos entre x^2 e integramos:

$$\frac{dx}{x} - e^{u}du = 0$$

$$\int \left(\frac{dx}{x} - e^{u}du = 0\right)$$

$$\ln x - e^{u} = c$$

regresamos a la variable original:

$$\begin{aligned} y &= ux \\ u &= \frac{y}{x} \\ \ln y - e^{\frac{y}{x}} &= c \end{aligned}$$

aplicamos la condición inicial $y(1) = 0$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ \ln 1 - e^{\frac{0}{x}} &= c \\ \ln 1 - 1 &= c \\ -1 &= c \end{aligned}$$

regresamos a la ecuación:

$$\ln x - e^{\frac{y}{x}} = -1$$

Problema 5.

$$xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$$

Solución:
Dividimos entre dx e igualamos a cero:

$$xy^2 dy - \left(y^3 - x^3\right) dx = 0$$

hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= vy \\ dx &= vdy + ydv \end{aligned}$$

sistituimos y desarrollamos:

$$\begin{aligned}
vy^3dy - \left(y^3 - v^3y^3\right)(vdy + ydv) &= 0 \\
vy^3dy - \left(vy^3dy - v^4y^3dy + y^4dv - v^3y^4dv\right) &= 0 \\
v^4y^3dy - y^4dv + v^3y^4dv &= 0 \\
v^4y^3dy - y^4\left(1 - v^3\right) &= 0
\end{aligned}$$

diviimos entre v^4 y y^4 e integramos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} - \frac{(1 - v^3)\, dv}{v^4} &= 0 \\
&\int \left(\frac{dy}{y} - \frac{(1 - v^3)\, dv}{v^4} = 0\right) \\
\ln y - \frac{1}{v^3} - \ln v &= c
\end{aligned}$$

regresamos a la variable original:

$$\begin{aligned}
x &= vy \\
v &= \frac{x}{y} \\
\ln y - \frac{1}{\frac{x}{y}} - \ln\frac{x}{y} &= c \\
\ln y - \frac{y}{x} - \ln\frac{x}{y} &= c
\end{aligned}$$

aplicamos la condición inicial:

$$\begin{aligned}
y(1) &= 2 \\
x &= 1 \\
y &= 2 \\
\ln 2 - 2 - \ln\frac{1}{2} &= c \\
-0.61 &= c
\end{aligned}$$

regresamos a la ecuación:

$$\ln y - \frac{y}{x} - \ln\frac{x}{y} = -0.61$$

2.4.2 Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

donde n es cualquier número real, se llama ecuación de Bernoulli. Para $n = 0$ y $n = 1$ la ecuación es lineal. En el caso de que $n \neq 0$ y $n \neq 1$ la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal.

Resuelva la ecuación respectiva de Bernoulli empleando una sustitución adecuada:

Problema 6.

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$$

Solución:

Llevamos la ecuación a la forma de Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy^4 - y \\ \frac{dy}{dx} + y &= xy^4 \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} w &= y^{1-4} = y^{-3} \\ y &= w^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{3}w^{-\frac{4}{3}}\frac{dw}{dx} \end{aligned}$$

sustituimos:

$$-\frac{1}{3}w^{-\frac{4}{3}}\frac{dw}{dx} + w^{-\frac{1}{3}} = xw^{-\frac{4}{3}}$$

multiplicamos por $-3w^{\frac{4}{3}}$:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} - 3w &= -3x \\ p(x) &= -3 \\ \mu(x) &= e^{\int -3dx} = e^{-3x} \end{aligned}$$

multiplicamos la ecuación anterior por e^{-3x}:

$$e^{-3x}\frac{dw}{dx} - 3we^{-3x} = -3e^{-3x}$$

agrupamos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(we^{-3x}\right) &= -3xe^{-3x} \\
d\left(we^{-3x}\right) &= -3xe^{-3x}dx \\
&\int \left[\left(d\left(we^{-3x}\right) = -3xe^{-3x}dx\right)\right] \\
we^{-3x} &= -3\int xe^{-3x}dx
\end{aligned}$$

resolviendo la integral por partes:

$$\begin{aligned}
u &= x \\
du &= dx \\
dv &= e^{-3x} \\
v &= -\frac{1}{3}e^{-3x} \\
we^{-3x} &= -3\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx\right] \\
we^{-3x} &= -3\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right] + c \\
we^{-3x} &= xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c
\end{aligned}$$

multiplicamos por e^{3x}:

$$w = x + \frac{1}{3} + ce^{-3x}$$

regresamos a la variable original:

$$y = w^{-\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} w &= y^{-3} \\ y^{-3} &= x + \frac{1}{3} + ce^{3x} \\ y &= \left(x + \frac{1}{3} + ce^{3x} \right)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Problema 7.

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = xy$$

Solución:

Dividimos entre x^2 y hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} &= \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} &= -\frac{y^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= y^{1-2} = y^{-1} \\ y &= w^{-1} \\ \frac{dy}{dx} &= -w^{-2} \frac{dw}{dx} \end{aligned}$$

sustituimos:

$$-w^{-2} \frac{dw}{dx} - \frac{w^{-1}}{x} = \frac{-w^{-2}}{x^2}$$

multiplicamos por $-w^2$:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + \frac{w}{x} &= \frac{1}{x^2} \\ p(x) &= \frac{1}{x} \\ \mu(x) &= e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x \end{aligned}$$

multiplicamos la ecuación por x:

$$x\frac{dw}{dx} + w = \frac{1}{x}$$

agrupamos e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(wx) &= \frac{1}{x} \\ d(wx) &= \frac{1}{x}dx \\ & \int \left[d(wx) = \frac{1}{x}dx \right] \\ wx &= \ln x + c \end{aligned}$$

dividimos entre x:

$$w = \frac{\ln x}{x} + \frac{c}{x}$$

regresamos a la variable original:

$$\begin{aligned} w &= y^{-1} \\ y^{-1} &= \frac{\ln x}{x} + \frac{c}{x} \\ y &= \frac{x}{\ln x + c} \end{aligned}$$

2.4.3 Sustituciones para reducir a variables separables ecuaciones del tipo $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

puede reducirse a una ecuación de variables separables por medio de la sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$.

Problema 8.

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$$

Solución:
Hacemos:

$$\begin{aligned} u &= x + y + 1 \\ \frac{du}{dx} &= 1 + \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - 1 &= u^2 \\ \frac{du}{dx} &= u^2 + 1 \\ \frac{du}{u^2 + 1} &= dx \end{aligned}$$

integramos:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2 + 1} &= \int dx \\ \arctan u &= x + c \end{aligned}$$

pero:

$$\begin{aligned} u &= x + y + 1 \\ \arctan (x + y + 1) &= x + c \end{aligned}$$

$$x + y + 1 = \tan(x + c)$$

$$y = \tan(x + c) - x - 1$$

Problema 9.

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y), y(0) = \frac{\pi}{4}$$

Solución:
Hacemos:

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ \frac{du}{dx} &= 1+\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx}-1 \end{aligned}$$

sustituimos:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}-1 &= \cos u \\ \frac{du}{dx} &= 1+\cos u \\ \frac{du}{1+\cos u} &= dx \end{aligned}$$

integramos:

$$\int \frac{du}{1+\cos u} = \int dx$$

multiplicamos el lado izquierdo por $(1-\cos u)$ en el denominador y en el numerador:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\cos u}{(1+\cos u)(1-\cos u)}du &= x+c \\ \int \frac{1-\cos u}{1-\cos^2 u}du &= x+c \\ \int \frac{1-\cos u}{\sin^2 u}du &= x+c \\ \int \frac{1}{\sin^2 u}du - \int \frac{\cos u}{\sin^2 u}du &= x+c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \csc^2 u du - \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du &= x + c \\
-\cot u + \frac{1}{\sin u} &= x + c \\
-\cot u + \csc u &= c
\end{aligned}
$$

pero:

$$
\begin{aligned}
u &= x + y \\
-\cot (x + y) + \frac{1}{\sin (x + y)} &= x + c
\end{aligned}
$$

aplicamos la condición inicial:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= \frac{\pi}{4} \\
x &= 0 \\
y &= \frac{\pi}{4} \\
-\cot \left(0 + \frac{\pi}{4}\right) + \csc \left(0 + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 + c \\
-\cot \frac{\pi}{4} + \csc \frac{\pi}{4} &= c \\
-1 + \sqrt{2} &= c
\end{aligned}
$$

regresamos a la ecuación:

$$
\csc (x + y) - \cot (x + y) = x + \sqrt{2} - 1
$$

Chapter 3

Aplicaciones de ecuaciones de primer orden

Problema 1. La población de una comunidad crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial es 500 y aumenta el 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años?

Solución:
N = población de la comunidad en cuestión.
N_0 = Población inicial de la comunidad.
$N(0) = N_0 = 500$
$N(10) = 575$
$N(10) = 1.15N_0$
Basándonos en la ecuación diferencial del módelo básico de crecimiento:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

cuya solución se encuentra fácilmente usando variables separables:

$$N = Noe^{kt}$$

Para encontrar k aplicamos la condición:

$$N(10) = 1.15N_0$$

Sustituyendo en la solución:

$$1.15N_0 = N_0 e^{10k}$$

Despejando k

$$\frac{\ln 1.15}{10} = k$$

$$k = 0.014$$

Sustituyendo:

$$N = N_0 e^{0.014t} = 500e^{0.014t}$$

Finalmente se calcula la población de la comunidad después de 30 años.

$$N(30) = 500e^{0.014(30)}$$

$$N(30) = 760$$

Problema 2. El Pb-209, isótopo radioactivo del plomo, se desintegra con una razón poporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un período medio de vida de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90%?

Solución:

C = Cantidad presente del isótopo a cualquier tiempo

τ = Periodo de vida media = 3.3 horas

C_0 = Cantidad inicial presente del isótopo = 1 gramo

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dC}{dt} = kC$$

la cual es igual a la del problema anterior.

La solución es:

$$C = C_0 e^{kt}$$

Se sabe que

$$C(3.3) = \frac{1}{2} C_0$$

Por lo que:

$$\frac{1}{2} C_0 = C_0 e^{3.3k}$$

$$k = \frac{ln 0.5}{3.3}$$

es decir $k = -0.21$
Sustituyendo:

$$C = C_0 e^{-0.21t}$$

Finalmente, obtenemos el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre el 90% del isótopo:

$$C_0(0.1) = C_0 e^{-0.21t}$$

$$\ln 0.1 = -0.21t$$

$$t = \frac{\ln 0.1}{-0.21}$$

$$t = 11 \; horas$$

Problema 3. Cuando pasa un rayo vertical de luz por una sustancia transparente, la razón con que decrece su intensidad I es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a 3 ft bajo la superficie, es el 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 ft bajo la superficie?

Solución:
I = intensidad
t = espesor del medio

$$\frac{dI}{dt} = kI$$

$$I = I_0 e^{kt}$$

$$I_0(0.25) = I_0 e^{3k}$$

$$k = \frac{\ln 0.25}{3}$$

$$k = -0.462$$

Finalmente, procedemos a calcular la intensidad del rayo a 15 ft bajo la superficie

$$I(15) = I_0 e^{-0.462(15)}$$

$$I(15) = 0.00098 I_0$$

Aproximadamente 0.1% de I_0.

Problema 4. En un trozo de madera quemada o carbón vegetal se determinó que el 85.5% de su C-14 se había desintegrado. Con la información siguiente determine la edad aproximadama de la madera. Estos son precisamente los datos que usaron los arqueólogos para fechar los murales prehistóricos de una caverna de Lascaux, Francia.

Solución:
k = constante de decaimiento

Vida media C-14 $\tau = 5{,}600$ años

$$A = A_0 e^{kt}$$

Sustituyendo:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5{,}600t}$$

$$\ln \frac{1}{2} = 5,600k$$

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5,600}$$

$$k = -0.00012378$$

Por último, procedemos a determinar la edad aproximada del trozo de madera

$$A_0(0.145) = A_0 e^{-0.00012378t}$$

$$t = \frac{\ln 0.145}{-0.00012378}$$

$$t = 15,600 \text{ } \textit{años}$$

Problema 5. Un tanque contiene 200 l de agua en que se han disuelto 30 g de sal y le entran 4 L/min de solución con 1 g de sal por litro; está bien mezclado, y de él sale líquido con el mismo flujo (4 L/min). Calcule la cantidad A(t) de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

Solución:

A = cantidad de gramos de sal

t = momento (tiempo)
V_0 = volumen inicial del tanque
v_1 = flujo de entrada
v_2 = flujo de salida
C_1 = Concentración de entrada (masa/volumen)
C_2 = Concentración de salida (masa/volumen)
R_1 = Razón o ritmo con el que entra
R_2 = Razón o ritmo con el que sale
$V_0 = 200$ l
$v_1 = 4$ L/min
$v_2 = 4$ L/min
$C_1 =$1 g/L
$C_2 = \frac{A}{V_0}$
Como hay conservación de masa:
$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$
$R_1 = C_1 v_1$
$R_2 = C_2 v_2$

$$\frac{dA}{dt} = C_1 v_1 - C_2 v_2$$

$$\frac{dA}{dt} = 1\frac{g}{l}\left(4\frac{l}{\min}\right) - \frac{A}{200}\frac{g}{l}\left(4\frac{l}{\min}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 - \frac{4A}{200}$$

$$\frac{dA}{A} = 4 - \frac{1}{50}A$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{1}{50}A = 4$$

$$p(t) = \frac{1}{50}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50}dt} = e^{\frac{t}{50}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{\frac{t}{50}}\right) = 4e^{\frac{t}{50}}$$

$$Ae^{\frac{t}{50}} = 4\int e^{\frac{t}{50}}dt$$

$$Ae^{\frac{t}{50}} = 200e^{\frac{t}{50}} + c$$

$$A = 200 + ce^{-\frac{t}{50}}$$

Considerando la condición inicial:
$A(0) = 30$
$30 = 200 + c$
$c = -170$
Finalmente:

$$A(t) = 200 - 170e^{-\frac{t}{50}}$$

Problema 6. Un tanque tiene 500 gal de agua pura y le entra salmuera con 2 lb de sal por galón a un flujo de 5 gal/min. El tanque esta bien mezclado, y sale de él el mismo flujo de solución. Calcule la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

Solución:
$V_0 = 500$ gal
$\upsilon_1 = 5$ gal/min
$\upsilon_2 = 5$ gal/min
$C_1 = 2$ lb/gal
$C_2 = \frac{A}{Vo} = \frac{A}{500}$

$$\frac{dA}{A} = C_1\upsilon_1 - C_2\upsilon_2$$

$$\frac{dA}{A} = 2\frac{lb}{gal}\left(5\frac{gal}{\text{min}}\right) - \frac{A}{500}\frac{lb}{gal}\left(5\frac{gal}{\text{min}}\right)$$

$$\frac{dA}{A} = 10 - \frac{A}{100}$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{1}{100}A = 10$$

$$p(t) = \frac{1}{100}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{\frac{t}{100}}\right) = 10e^{\frac{t}{100}}$$

$$Ae^{\frac{t}{100}} = 10\int e^{\frac{t}{100}}dt$$

$$Ae^{\frac{t}{50}} = 1000e^{\frac{t}{100}} + c$$

$$A = 1000 + ce^{-\frac{t}{100}}$$

Considerando las condiciones iniciales:
$A(0) = 0$
$0 = 1000 + c$
$c = -1000$
Finalmente:

$$A(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{t}{100}}$$

Problema 7. En un modelo demográfico de la población P(t) de una comunidad, se supone que:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$$

en donde dB/dt y dD/dt son las tasas de natalidad y mortantad, respectivamente.

a) Determine $P(t)$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 P$$

$$\frac{dD}{dt} = k_2 P$$

b)Analice los casos $k_1 > k_2, k_1 < k_2, k_1 = k_2$

Solución:

$\frac{dB}{dt}$ = Natalidad

$\frac{dD}{dt}$ = Mortandad

$P(t)$ = Natalidad-Mortantad

a)

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P$$

$$\frac{dP}{dt} = (k_1 - k_2)P$$

$$\int \frac{dP}{P} = (k_1 - k_2) \int dt$$

$$lnP = (k_1 - k_2)t + \ln c$$

$$lnP - lnc = (k_1 - k_2)t$$

$$\frac{P}{c} = e^{(k_1 - k_2)t}$$

$$P = ce^{(k_1 - k_2)t}$$

Considerando la condición inicial:

$P(0) = P_0$

$$P = P_0 e^{(k_1 - k_2)t}$$

b)

$k_1 > k_2$

La tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad, por lo tanto la población aumenta. Esto se observa en la gráfica ya que en tal caso $k_1 - k_2 > 0$ y la gráfica corresponde a una exponencial creciente.

$k_1 < k_2$

La tasa de natalidad es menor que la de mortalidad, provocando la disminución de la población. En la gráfica se tiene una exponencial decreciente cuando $k_1 - k_2 < 0$.

$k_1 = k_2$

La tasa de natalidad es igual a la de mortalidad, por ello la población se mantiene estable. En tal caso $P = P_0$.

Problema 8.

Cuando se tiene en cuenta lo olvidadizo de un individuo, la rapidez con que memoriza está definida por

$$\frac{dA}{dt} = k_1 (M - A) - k_2 A,$$

en que $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $A(t)$ es la cantidad de material memorizado por el tiempo t, M es la cantidad total para memorizar y $M - A$ es la cantidad que resta por memorizar. Halle $A(t)$ y grafique la solución. Suponga que $A(0) = 0$. Determine el valor límite de A cuando $t \to \infty$ e interprete el resultado.

Solución: Proponemos la ecuación diferencial y la despejamos:

$$\frac{dA}{dt} = kM - k_1 A - k_2 A$$

$$\frac{dA}{dt} = k_1 M - A(k_1 + k_2)$$

$$\frac{dA}{dt} + A(k_1 + k_2) = k_1 M$$

Definimos el factor integrante, lo sustituimos en la ecuación diferencial, y la integramos.

$$\mu(t) = e^{\int (k_1+k_2)dt} = e^{(k_1+k_2)t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{(k_1+k_2)t}\right) = \int k_1 M e^{(k_1+k_2)t}$$

$$Ae^{(k_1+k_2)t} = \frac{k_1 M}{(k_1+k_2)} e^{(k_1+k_2)t} + C$$

Despejamos A, y el resultado es:

$$A = \frac{k_1 M}{(k_1+k_2)} + Ce^{-(k_1+k_2)t}$$

Aplicamos la condición inicial $A(0) = 0$

$$0 = \frac{k_1 M}{(k_1+k_2)} + C$$

o sea

$$C = -\frac{k_1 M}{(k_1+k_2)}$$

Por lo tanto la solución queda como

$$A = \frac{k_1 M}{(k_1+k_2)}(1 - e^{-(k_1+k_2)t})$$

tal como se observa cuando $t \to \infty$ en esta expresión queda que $A = \frac{k_1 M}{(k_1+k_2)}$, lo cual siempre es menor que M, es decir, no se memoriza al 100%, por ejemplo en la siguiente gráfica se muestra que después de un cierto tiempo el individuo a lo más memorizará el 80%.

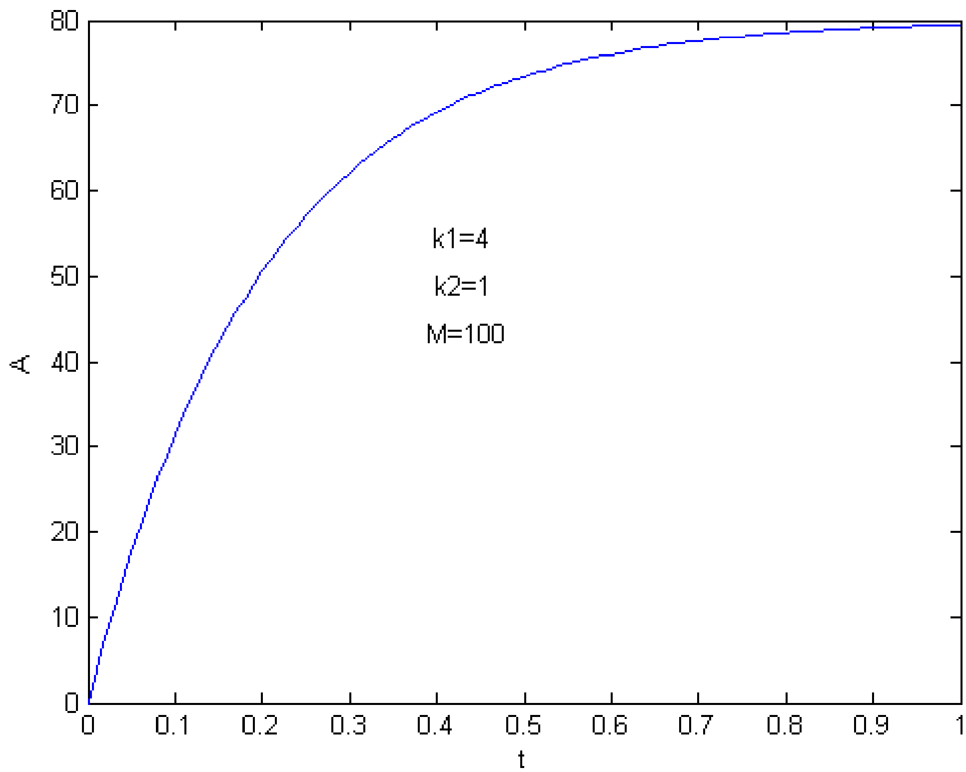


Figure 3.1: Cantidad de material memorizado en el tiempo

Chapter 4

Ecuaciones de segundo orden

4.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de este tipo tiene la forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a,b y c son constantes. Para resolverla se propone una solución de la forma $y = e^{mx}$ y al sustituir en la ecuación se obtiene la ecuación auxiliar

$$am^2 + bm + c = 0$$

la cual se resuelve para encontrar los valores de m, dependiendo de estos valores se obtienen tres casos:

Caso I: Raíces reales y distintas $m_1 \neq m_2$, en cuyo caso la solución se escribe como

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso II. Raíces reales repetidas $m_1 = m_2 = m$

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

Caso III. Raíces complejas de la forma $m = \alpha \pm i\beta x$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 sen\beta x)$$

Resolver los siguientes problemas

Problema 1.

$$4y^{''} + y^{'} = 0$$

Solución:

La ecuacion auxiliar es

$$4m^2 + m = 0$$

factorizando.

$$m(4m + 1) = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -\frac{1}{4}$$

Así la fórmula general aplicada para este problema queda de la siguiente manera.

$$y = c_1 e^{(0)x} + c_2 e^{(-\frac{1}{4})x}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-\frac{x}{4}}$$

Problema 2.

$$y'' - 36y = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 36 = 0$$

factorizando

$$(m+6)(m-6)=0$$

Las raíces de la ecuación auxiliar son:
$m_1 = 6$
$m_2 = -6$
Así la solución general es:

$$y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-6x}$$

Problema 3.

$$y'' + 9 = 0$$

Solución:
La ecuación auxiliar es

$$m^2 + 9 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:
$m = \pm 3i$
Como las raíces son complejas y la parte real es cero, la solución se escribe como:

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 sen 3x$$

Problema 4.

$$y'' - y' - 6y = 0$$

Solución:
La ecuación auxiliar es

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m-3)(m+2) = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:
$m_1 = 3$
$m_2 = -2$

La solución general es:.

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Problema 5.

$$y'' + 3y' - 5y = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^2 + 3m - 5 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-5)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$m_1 = 1.19, \; m_2 = -4.19$$

Así la fórmula general aplicada para este problema queda de la siguiente manera.

$$y = c_1 e^{1.19x} + c_2 e^{-4.19x}$$

Problema 6.

$$12y'' - 5y' - 2y = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$12m^2 - 5m - 2 = 0$$

la cual se factoriza como

$$(3m - 2)(4m + 1) = 0$$

Las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$m_1 = \frac{2}{3}, \; m_2 = -\frac{1}{4}$$

Así la solución es:

$$y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{-\frac{1}{4}x}$$

Problema 7.

$$3y'' + 2y + y = 0$$

Solución:
La ecuación auxiliar es

$$3m^2 + 2m + 1 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{2}i}{3} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}i}{3}$$

Así la fórmula general aplicada para este problema queda de la siguiente manera.

$$y = e^{-\frac{x}{3}}(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}x}{3} + c_2 sen\frac{\sqrt{2}x}{3})$$

Problema 8.

$$y''' - 4y'' - 5y' = 0$$

Solución:
La ecuación auxiliar es

$$m^3 - 4m^2 - 5m = 0$$

factorizando

$$m(m+1)(m-5) = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$m_1 = 0,\ m_2 = -1,\ m_3 = 5$$

Así la fórmula general aplicada para este problema queda de la siguiente manera.

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{5x}$$

Problema 9.

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^3 - 5m^2 + 3m + 9 = 0$$

Al utilizar división sintetica se encontraron las siguientes raíces

$$m_1 = 3,\ m_2 = -1,\ m_3 = 3$$

La raíz 3 está repetida, por ello la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + c_3 e^{-x}$$

Problema 10.

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^4 + m^3 + m^2 = 0$$

factorizando.

$$m^2(m^2 + m + 1) = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m = 0 \text{ (raíz doble)}, m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Así la solución general se escribe de la siguiente forma:

$$y = c_1 e^0 + c_2 x e^0 + e^{-\frac{x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

$$y = c_1 + c_2 x + e^{-\frac{x}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Problema 11.

$$y'' + 16y = 0 \qquad\qquad y(0) = 2;\ y'(0) = -2$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^2 + 16 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m_1 = 4i,\ m_2 = -4i$$

La solución general es:

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 sen4x$$

Para aplicar las condiciones iniciales es necesario derivar

$$y' = -4c_1 sen4x + 4c_2 \cos 4x$$

Al sustituir las condiciones iniciales se obtiene:

$$y(0) = 2 = c_1$$

$$y'(0) = -2 = 4c_2$$

Resolviendo:

$$c_1 = 2,\ c_2 = -\frac{1}{2}$$

De tal manera que la solución al problema de valor inicial es:

$$y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x$$

Problema 12.

$$2y'' - 2y' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = -1;\ y'(0) = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$2m^2 - 2m + 1 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

La solución general es:

$$y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 \cos\frac{1}{2}x + c_2 sen\frac{1}{2}x)$$

Derivando:

$$y' = e^{\frac{1}{2}x}(-\frac{1}{2}c_1 sen\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c_2\cos\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{1}{2}x + c_2 sen\frac{1}{2}x)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$y(0) = -1 = c_1$$

$$y'(0) = 0 = \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_1$$

Resolviendo:

$$c_1 = -1,\ c_2 = 1$$

La solución al problema de valor inicial es:

$$y = e^{\frac{1}{2}x}(-\cos\frac{1}{2}x + sen\frac{1}{2}x)$$

Problema 13.

$$y'' + y' + 2y = 0 \qquad\qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^2 + m + 2 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2}$$

La solución general se escribe como:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 sen \frac{\sqrt{7}}{2}x)$$

Derivando:

$$y' = e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{\sqrt{7}}{2}c_1 sen \frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{\sqrt{7}}{2}c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x) - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 sen \frac{\sqrt{7}}{2}x)$$

Al sustituir las condiciones iniciales da el siguiente resultado:

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$y'(0) = 0 = \frac{\sqrt{7}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_1$$

es decir:

$$c_1 = c_2 = 0$$

La única solución que es compatible con estas condiciones es:

$$y = 0$$

Problema 14.

$$y''' + 12y'' + 36y' = 0 \qquad y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ y''(0) = -7$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^3 + 12m^2 + 36m = 0$$

factorizando.

$$m(m+6)^2 = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m_1 = 0,\ m_2 = -6 \text{ de doble multiplicidad}$$

La solución general es:

$$y = c_1 + c_2 e^{-6x} + c_3 x e^{-6x}$$

Derivando:

$$y' = -6c_2 e^{-6x} - 6c_3 x e^{-6x} + c_3 e^{-6x}$$

$$y'' = 36c_2 e^{-6x} + 36c_3 x e^{-6x} - 12c_3 e^{-6x}$$

Sustituyendo las condiciones:

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 1 = -6c_2 + c_3$$

$$y''(0) = -7 = 36c_2 - 12c_3$$

Resolviendo el sistema:

$$c_1 = \frac{5}{36},\ c_2 = -\frac{5}{36},\ c_3 = \frac{1}{6}$$

La solución al problema de valor inicial es:

$$y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} c_2 e^{-6x} + \frac{1}{6} c_3 x e^{-6x}$$

Problema 15.

$$y'' - 10y' + 25 = 0 \qquad\qquad y(0) = 1;\ y(1) = 0$$

Solución:

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

factorizando.

$$(m-5)^2 = 0$$

La única raíz es doble:

$$m = 5$$

la solución general se escribe como:

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

Al sustituir las condiciones iniciales en la ecuación nos da el siguiente resultado

$$c_1 = 1, c_2 = -1$$

El resultado final es:

$$y = e^{5x} - xe^{5x}$$

4.2 Método de los coeficientes indeterminados

Una ecuación diferencial de orden n se puede escribir como:

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + ... + a_1 Dy + a_0 y = g(x)$$

en donde $D^k y = d^k y/dx^k, k = 0, 1, ..., n.$

Es conveniente a veces representar también esta ecuación en la forma $L(y) = g(x)$. donde L representa el operador diferencial lineal de orden n:

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + ao$$

La aplicación de los operadores diferenciales permite llegar a una solución particular de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

OPERADOR ANULADOR: Si L_1 es un operador diferencial con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que:

$$L_1(f(x)) = 0,$$

se dice que L_1 es un anulador de la función.

El operador diferencial D^n anula cada una de las siguientes funciones:

$$1, x, x^2, ..., x^{n-1}$$

El operador diferencial $(D - a)^n$ anula cada una de las siguientes funciones:

$$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, ..., x^{n-1}e^{ax}$$

El operador diferencial $[(D^2 - 2aD + (a^2 + B^2)]^n$ anula a las siguientes funciones:

$$e^{ax}\cos\beta x, xe^{ax}cos\beta x, x^2e^{ax}\cos\beta x, ..., x^{n-1}e^{ax}\cos\beta x,$$

$$e^{ax}sen\beta x, xe^{ax}sen\beta x, x^2e^{ax}sen\beta x, ..., x^{n-1}e^{ax}sen\beta x,$$

Para resolver la ecuación $L(y) = g(x)$ se busca el operador anulador de la función $g(x)$ y luego se aplica en ambos lados de la ecuación: $L_1L(y) = L_1(g(x)) = 0$, de tal forma que la ecuación diferencial aumenta de orden pero se convierte en una ecuación homogénea, la cual ya puede ser resuelta.

La solución se expresa como $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ donde $y_c(x)$ se llama la solución complementaria y es la solución de la ecuación homogénea y $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea que se encuentra usando el método de los coeficientes indeterminados, tal como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Problema 1. Escriba las siguientes ecuaciones diferenciales en la forma $L(y) = g(x)$, donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes.

a)

$$y'' - 4y' - 12y = x - 6$$

Solución:

En notación de operadores esto se puede escribir como:

$$(D^2 - 4D - 12)y = x - 6$$

factorizando, el resultado es:

$$(D - 6)(D - 2)y = x - 6$$

b)

$$y''' + 10y'' + 25y' = e^x$$

Solución:

En notación de operadores esto se puede escribir como:

$$(D^2 + 10D + 25)y = e^x$$

Factorizando:

$$(D+5)(D+5)y = e^x$$

c)

$$y''' + 2y'' - 13y' + 10y = xe^{-x}$$

Solución:
En notación de operadores esto se puede escribir como:

$$(D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y = xe^{-x}$$

Factorizando:

$$(D-1)(D-2)(D+5)y = xe^{-x}$$

Problema 2. Compruebe que el operador diferencial mencionado anula la función indicada.

a)

$$D^4, \ y = 10x^3 - 2x$$

Solución:
Esto se comprueba al calcular el número de derivaciones necesarias para obtener el anulador adecuado:

$$Dy = 30x^2 - 2$$

$$D^2y = 60x$$

$$D^3y = 60$$

$$D^4y = 0$$

Por lo tanto el anulador es D^4 ya que aquí se hace cero la función.

b)

$$(D-2)(D+5);\ y = e^{2x} + 3e^{-5x}$$

Solución:

Como

$$(D-2)e^{2x} = 0$$

y

$$(D+5)e^{-5x}$$

entonces el producto anula a la función $y = e^{2x} + 3e^{-5x}$

Problema 3. Determine un operador diferencial lineal que anule la función dada:

a)

$$1 + 7e^{2x}$$

Solución:
El anulador para 1 es D.
El anulador para e^{2x} es $(D-2)$.
Por lo tanto el operador anulador es:

$$(D-2)D$$

b)

$$\cos 2x$$

Solución:

El eperador anulador es: (D^2+4)
lo cual se comprueba fácilmente porque $(D^2+4)\cos 2x = D^2 \cos 2x + 4\cos 2x = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$

c)

$$e^{-x} + 2xe^{x} - x^2e^{x}$$

Solución:
El anulador de e^{-x} es $D+1$
El anulador de $2xe^{x}$ es $(D-1)^2$

El anulador de x^2e^x es $(D-1)^3$, pero este también anula a la función $2xe^x$, por lo tanto el operador anulador de la función $e^{-x}+2xe^x-x^2e^x$ es

$$(D+1)(D-1)^3$$

En los siguientes problemas resuelva la ecuación diferencial respectiva por el método de los coeficientes indeterminados.

Problema 1.

$$y''+y'=3$$

Solución:
Se resuelve primero la ecuación homogénea

$$y''+y'=0$$

Nuestra ecuación auxiliar es:

$$m^2+m=0$$

$$m(m+1)=0$$

Por lo tanto nuestra solución complementaria y_c es:

$$y_c=c_1+c_2e^{-x}$$

El anulador para el lado derecho de la función es D por lo tanto nuestra solución particular Y_p es :

$$y_p=Ax$$

Para obtener el valor de A, se calculan la primera y segunda derivada de Y_p :

$$y_p'=A;\ y_p''=0$$

Se sustituye en la función original, se despeja a A y así se obtiene el valor:

$$A = 3$$

por lo tanto

$$y_p = 3x$$

Como la solución general es la suma de la complementaria y la particular

$$y = y_c + y_p$$

la solución es:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + 3x$$

Problema 2.

$$y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$$

Solución:
El operador D^2 anula a la función $2x + 6$
Aplicando el operador diferencial en ambos lados de la ecuación diferencial:

$$D^2(D^2 + 4D + 4)y = D^2(2x + 6) = 0$$

Por lo que la ecuación que queda es homogénea:

$$D^2(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

La ecuación auxiliar es:

$$m^2(m^2 + 4m + 4) = 0$$

$$m^2(m + 2)^2 = 0$$

El término $(m+2)^2 = 0$ corresponde a la ecuación homogénea, por lo que la solución complementaria es:

$$y_c = c_1^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

A partir del término $m^2 = 0$, se obtiene la solución particular:

$$Y_p = Ax + B$$

Para calcular los valores de A y B se calculan la primera y la segunda derivada:

$$Y_p' = A; \; Y_p'' = 0$$

Al sustituir estos valores en la ecuación original:

$$4A + 4(Ax + B) = 2x + 6$$

$$4Ax + 4A + 4B = 2x + 6$$

igualando términos:

$$4A = 2, \; A = \frac{1}{2}$$

$$4A + 4B = 6, \; B = 1$$

Por lo tanto la solución es:

$$y(x) = c_1^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$$

Problema 3.

$$y'' + 25y = 6senx$$

Solución:

El operador anulador de la función $senx$ es D^2+1. Aplicando el operador en ambos lados de la ecuación:

$$\left(D^2 + 1\right)\left(D^2 + 25\right) y = \left(D^2 + 1\right) 6senx = 0$$

$$\left(D^2 + 1\right)\left(D^2 + 25\right) y = 0$$

La ecuación auxuliar es:

$$\left(m^2+1\right)\left(m^2+25\right)=0$$

La solución complementaria es:

$$y_c = c_1 cos5x + c_2 sen5x$$

Y la solución particular es:

$$y_p = Acosx + Bsenx$$

Derivando y_p:

$$y_p' = -Asenx + Bcosx$$

$$y_p'' = -Acosx - Bsenx$$

Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$$-Acosx - Bsenx + 25Acosx + 25Bsenx = 6senx$$

$$24A\cos x + 24Bsenx = 6senx$$

de donde se obtiene:

$$A = 0,\ B = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{4}senx$$

La solución general queda:

$$y(x) = c_1 cos5x + c_2 sen5x + \frac{1}{4}senx$$

Problema 4.

$$y'' - y = x^2 e^x + 5$$

Solución:

El operador $D(D-1)^3$ anula a x^2e^x+5, si se aplica en ambos lados de la ecuación:

$$D(D-1)^3(D^2-1)y=0$$

cuya ecuación característica es:

$$m(m-1)^3(m^2-1)=0,\ m(m-1)^4(m+1)=0$$

cuyas raíces son

$$m_1=-1,\ m_2=1 \text{ de multiplicidad } 4,\ m_3=0$$

La solución complementaria es

$$y_c=c_1e^{-x}+c_2e^x$$

La solución particular y_p es:

$$y_p=Axe^x+Bx^2e^x+Cx^3e^x+E$$

Derivando:
$y_p'=Axe^x+Ae^x+Bx^2e^x+2Bxe^x+Cx^3e^x+3Cx^2e^x$
$y_p''=Axe^x+2Ae^x+Bx^2e^x+4Bxe^x+2Be^x+Cx^3e^x+6Cx^2e^x+6Cxe^x$
Sustituyendo:
$Axe^x+2Ae^x+Bx^2e^x+4Bxe^x+2Be^x+Cx^3e^x+6Cx^2e^x+6Cxe^x-Axe^x-Bx^2e^x-Cx^3e^x-E=x^2e^x+5$
$(2A+2B)e^x+(4B+6C)xe^x+6Cx^2e^x-E=x^2e^x+5$
De donde se obtiene: $2A+2B=0, 4B+6C=0, 6C=1, -E=5$
Resolviendo el sistema:

$$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{6}, E=-5$$

La solución general es:

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^x+\frac{1}{4}xe^x-\frac{1}{4}x^2e^x+\frac{1}{6}x^3e^x-5$$

Problema 5:

$$y''' + y'' = 8x^2$$

Solución:
La ecuación tiene la forma:

$$(D^3 + D^2)y = 8x^2$$

Como D^3 es el operador de la función de la derecha:
Igualando la ecuación a cero queda de la siguiente manera

$$D^3(D^3 + D^2) = 0$$

La ecuacion auxiliar es

$$m^3[m^2(m+1)] = 0$$

Las raíces de la ecuación auxiliar son:
$m_1 = -1$
$m_2 = 0$ (multiplicidad5)

Así la fórmula para y_c queda de la siguiente manera

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2 + c_3x$$

Y la solución particular y_p queda de la siguiente forma

$$y_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$$

Derivando:

$$y_p' = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$$

$$y_p'' = 2A + 6Bx + 12Cx^2$$

$$y_p''' = 6B + 24Cx$$

Sustituyendo:

$$6B + 24cx + 2A + 6Bx + 12Cx^2 = 8x^2$$

esto nos da el siguiente resultado

$$A = 8,\ B = -\frac{8}{3},\ C = \frac{2}{3}$$

O sea que la solución particular queda como:

$$y_p = 8x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$$

La solución genral es

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 x + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$$

Problema 6:

$$y'' - 5y' = x - 2 \qquad\qquad y(0) = 0;\ y'(0) = 2$$

Solución:
La ecuación tiene la forma

$$(D^2 - 5D)y = x - 2$$

El operador anulador de la parte derecha de la ecuación es:

$$D^2(x-2) = 0$$

Igualando la ecuación a cero queda de la siguiente manera.

$$D^2(D^2 - 5D)y = 0$$

La ecuacion auxiliar es

$$m^2[m(m-5)] = 0$$

Por lo consiguiente las raíces de la ecuación auxiliar son:
$m_1 = 5$
$m_2 = 0$ multiplicidad 3

Así la solución complementaria y_c queda de la siguiente manera

$$y_c = c_1 + c_2 e^{5x}$$

Y la solución particular y_p tiene la forma

$$y_p = Ax + Bx^2$$

$y_p' = A + 2Bx$
$y_p'' = 2B$
Sustituyendo en la ecuación original:

$$2B - 5A - 10Bx = x - 2$$

esto nos da el siguiente resultado

$$A = \frac{9}{25},\ B = -\frac{1}{10}$$

Al sustituir en la ecuación general nos da como resultado

$$y = c_1 + c_2 e^{5x} - \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x$$

Para aplicar las condiciones iniciales se deriva primero:

$$y' = 5c_2 e^{5x} - \frac{1}{5}x + \frac{9}{25}$$

Al aplicar las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$ da el resultado
$y(0) = 0 = c_1 + c_2$
$y'(0) = 2 = 5c_2 + \frac{9}{25}$

$$c_1 = -\frac{41}{125},\ c_2 = \frac{41}{125}$$

Para finalizar se sustituyen las c en la ecuacion final y se obtiene el resultado.

$$y = -\frac{41}{125} + \frac{41}{125}e^{5x} - \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x$$

Problema 7.

$$y'' - 4y' + 8y = x^3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$$

Solución:
Como el operador anulador es D^4, la ecuación se escribe como:

$$D^4(D^2 - 4D + 8)y = 0$$

La ecuación auxiliar es:

$$m^4(m^2 - 4m + 8) = 0$$

Las raíces son:

$$m_1 = 2 + 2i,\ m_2 = 2 - 2i,\ m_3 = 0 \text{ (multiplicidad 4)}$$

La solución complementaria es:

$$y_c = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 sen 2x)$$

y la solución particular es de la forma:

$$y_p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

$$y_p' = B + 2Cx + 3Dx^2$$

$$y_p'' = 2C + 6Dx$$

Sustituyendo:

$$2C + 6Dx - 4B - 8Cx - 12Dx^2 + 8A + 8Bx + 8Cx^2 + 8Dx^3 = x^3$$

Resolviendo:
$8D = 1$
$8C - 12D = 0$
$8B - 8C + 6D = 0$
$8A - 4B + 2C = 0$
Es decir:

$$A = 0,\ B = \frac{3}{32},\ C = \frac{3}{16},\ D = \frac{1}{8}$$

$$y_p = \frac{3}{32}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x^3$$

Y la solución general se escribe como:

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 sen2x) + \frac{3}{32}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x^3$$

Para aplicar las condiciones iniciales derivamos primero:

$$y'(x) = e^{2x}(-2c_1 sen2x + 2c_2 \cos 2x) + 2e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 sen2x) + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{32}$$

$y(0) = 2 = c_1$
$y'(0) = 4 = 2c_2 + 2c_1 + \frac{3}{32}$

$$c_2 = -\frac{3}{64} \qquad c_1 = 2$$

$$y(x) = e^{2x}(2\cos 2x - \frac{3}{64} sen2x) + \frac{3}{32}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x^3$$

4.3 Variación de parámetros

El procedimiento para llegar a una solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = f\,(x)$$

En un intervalo se aplica también a ecuaciones lineales de orden superior. Para adaptar el método de variación de parámetros a una ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$$

Para ello, se lleva primero la ecuación diferencial a su forma reducida dividiéndola por el primer coeficiente $a_2(x)$

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

Donde se supone que $p(x)\,, q(x)$ y $f(x)$ son continuas en algún intervalo I. Se encuentra la solución complementaria de la forma:

$$y_c = c_1 y_1(x) + \ c_2 y_2(x)$$

y se propone una solución particular como:

$$y_c = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

2)Se calcula el Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

3) Y aplicando la Regla de Cramer, se tiene que:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} ; W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Donde:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \frac{W_2}{W}$$

4) Se integran u_1' y u_2' para obtener u_1 y u_2.
5) Finalmente la solución general será:

$$y = y_c + y_p$$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por variación de parámetros.

Problema 1.

$$y'' + y = secx$$

Solución:
La ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 1 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = i,\ m_2 = -i$$

Por lo tanto la solución complementaria será:

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 senx$$

Susitituyendo tenemos que:

$$y_1 = \cos x,\ y_2 = senx$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W\left(cosx, senx\right) = \begin{vmatrix} \cos x & senx \\ -senx & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

Se calcula W_1 y W_2 :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & senx \\ secx & cosx \end{vmatrix} = -\frac{senx}{cosx} = \tan x \qquad W_2 = \begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -senx & secx \end{vmatrix} = 1$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = \tan x \qquad y \qquad u_2' = 1$$

Integrando ambos, y aplicando en u_1' la fórmula $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ tenemos que:

$$u_1 = -\ln|cosx| \qquad \text{y} \qquad u_2 = x$$

Por lo tanto la solución particular es:

$$y_p = xsenx - (cosx)\ln|cosx|$$

Por lo que la solución general es:

$$y = c_1 cosx + c_2 senx + xsenx - (cosx)\ln|cosx|$$

Problema 2.

$$y'' + y = cos^2 x$$

Solución:
La ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 1 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = i,\ m_2 = -i$$

La solución complementaria será:

$$y_c = c_1 cosx + c_2 senx$$

Se tiene que:

$$y_1 = cosx,\ y_2 = senx$$

Se calcula el Wronskiano:

$$W\left(cosx, senx\right) = \begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix} = 1$$

Así mismo W_1y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & senx \\ cos^2x & cosx \end{vmatrix} = -senxcos^2x \qquad W_2 = \begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -senx & cos^2x \end{vmatrix} = cos^3x$$

Por lo que u_1'y u_2' son:

$$u_1' = -senxcos^2x \qquad y \qquad u_2' = cos^3x$$

Integrando ambos por separado:

$$u_1 = \tfrac{1}{3} cos^3 x \qquad \text{y} \qquad u_2 = senx - \tfrac{1}{3} sen^3 x$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = \tfrac{1}{3}\cos^4 x + sen^2 x - \tfrac{1}{3} sen^4 x$$

Por lo que la solución general es:

$$y = c_1 cosx + c_2 senx + \frac{1}{3}\cos^4 x + sen^2 x - \frac{1}{3} sen^4 x$$

Problema 3.

$$y'' - y = coshx$$

Solución:
Identificamos la ecuación auxiliar, siendo esta:

$$m^2 - 1 = (m-1)(m+1) = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = 1,\ m_2 = -1$$

Por lo tanto la solución complementaria será:

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Susitituyendo tenemos que:

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W\left(e^{x}, e^{-x}\right) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

Así mismo W_1y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ coshx & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}coshx$$
$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & coshx \end{vmatrix} = e^{x}coshx$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = \frac{1}{2}e^{-x}coshx \qquad\qquad y \qquad u_2' = -\frac{1}{2}e^{x}coshx$$

Integrando ambos por partes y por separado tenemos que:

$$u_1 = \int \frac{1}{2}e^{-x}\cos hxdx = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2})dx = \frac{1}{4}\int \left(1+e^{-2x}\right)dx = \frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}e^{-2x})$$

$$u_2 = -\int \frac{1}{2}e^{x}\cos hxdx = -\frac{1}{2}\int e^{x}(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2})dx = -\frac{1}{4}\int \left(e^{2x}+1\right)dx = -\frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2x}+x)$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = \frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}e^{-2x})e^{x} - \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2x}+x)e^{-x} = \frac{1}{4}xe^{x} - \frac{1}{8}e^{-x} - \frac{1}{8}e^{x} - \frac{1}{4}xe^{-x}$$

Por lo que la solución general será:

$$y = c_1' e^x + c_2' e^{-x} + \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{8} e^{-x} - \frac{1}{8} e^x - \frac{1}{4} x e^{-x}$$

$$\boxed{y = y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tfrac{1}{4} x e^x - \tfrac{1}{4} x e^{-x}}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x (\frac{e^x - e^{-x}}{2}) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x senhx$$

Problema 4.

$$y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

Solución:
Identificamos la ecuación auxiliar, siendo ésta:

$$m^2 - 4 = (m-2)(m+2) = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = 2, \; m_2 = -2$$

Por lo tanto la solución complementaria es:

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

Se tiene que:

$$y_1 = e^{2x}, \; y_2 = e^{-2x}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

Se calculamos el Wronskiano:

$$W\left(e^{2x}, e^{-2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

Así mismo W_1 y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{e^{2x}}{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{x} \qquad\qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{2x}}{x} \end{vmatrix} = \tfrac{e^{4x}}{x}$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = \frac{1}{4x} \qquad y \qquad u_2' = -\frac{1}{4}\frac{e^{4x}}{x}$$

Integrando ambos por separado, pero como u_2' no se puede expresar en términos de funciones elementales; en consecuencia escribimos:

$$u_1' = \frac{1}{4}\ln|x| \qquad y \qquad u_2' = -\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = \frac{1}{4}e^{2x}\ln|x| - \frac{1}{4}e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt$$

Por lo que la solución general se puede expresar como:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\ln|x| - \frac{1}{4}e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt$$

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt\right)$$

Problema 5.

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

Solución:
La ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2) = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = -1,\ m_2 = -2$$

Por lo tanto la solución complementaria será:

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Se tiene que:

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{-2x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W\left(e^{-x}, e^{-2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

Así mismo W_1 y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^x} \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = -\frac{e^{-2x}}{e^{-3x}\left(1+e^x\right)} = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad y \qquad u_2' = \frac{e^{-x}}{e^{-3x}\left(1+e^x\right)} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Integrando ambos por separado, tenemos que:

$$u_1 = \ln\left|1+e^x\right| \qquad y \qquad u_2 = 1+e^x - \ln\left|1+e^x\right|$$

Por lo tanto la solución particular será:

$y_p = e^{-x}\ln|1+e^x| + e^{-2x}(1+e^x-\ln|1+e^x|) = e^{-x}\ln|1+e^x| + e^{-2x} + e^{-x} - e^{-2x}\ln|1+e^x|)$

Por lo que la solución general será:

$$y = c_1'e^{-x} + c_2'e^{-2x} + e^{-x}\ln|1+e^x| + e^{-2x} + e^{-x} - e^{-2x}\ln|1+e^x|)$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)\ln|1+e^x|$$

Problema 6.

$$y'' + 3y' + 2y = sene^x$$

Solución:

La ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 3m + 2 = (m+2)(m+1) = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = -2, m_2 = -1$$

Por lo tanto la función complementaria será:

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

Susitituyendo tenemos que:

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{-x}$$

$$f(x) = sene^x$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W\left(e^{-2x}, e^{-x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$$

Así mismo W_1 y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ sene^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} sene^x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & sene^x \end{vmatrix} = e^{-2x} sene^x$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = -e^{2x} sene^x \qquad \text{y} \qquad u_2' = e^x sene^x$$

Integrando ambos por separado, tenemos que:

$$u_1 = -e^x sene^x + sene^x \qquad \text{y} \qquad u_2 = sene^x$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = -e^{-x} sene^x + e^{-2x} sene^x + e^{-x} sene^x = e^{-2x} sene^x$$

Por lo que la solución general será:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} sene^x$$

Problema 8.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

Solución:
La ecuación auxiliar es:

$$m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m = 1 \text{ multiplicidad } 2$$

Por lo tanto la solución complementaria será:

$$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Se tiene que:

$$y_1 = e^x, \; y_2 = x e^x$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W\left(e^x, e^x\right) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

Así mismo W_1 y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{1+x^2} \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = -\frac{x}{1+x^2} \qquad y \qquad u_2' = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrando se tiene que:

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| \qquad \text{y} \qquad u_2 = \tan^{-1} x$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = -\tfrac{1}{2}e^x \ln\left|1+x^2\right| + xe^x \tan^{-1} x$$

Por lo que la solución general es:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}e^x \ln\left|1+x^2\right| + xe^x \tan^{-1} x$$

Problema 9.

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$$

Solución:
La ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$$

Tiene una sola raíz:

$$m = -1 \text{ multiplicidad } 2$$

Por lo tanto la función complementaria será:

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Susitituyendo tenemos que:

$$y_1 = e^{-x}, \; y_2 = x e^{-x}$$

$$f(x) = e^{-x} \ln x$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W\left(e^{-x}, e^{-x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & -x e^{-x} + e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

Así mismo W_1 y W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{-x} \ln x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-2x} \ln x$$
$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x} \ln x \end{vmatrix} = e^{-2x} \ln x$$

Por lo que u_1'y u_2' son:

$$u_1' = \tfrac{-e^{-2x} \ln x}{-2e^{-2x}} = \tfrac{e^{-2x} \ln x}{2e^{2x}} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \tfrac{e^{-2x} \ln x}{-2e^{-2x}} = -\tfrac{e^{-2x} \ln x}{2e^{-2x}}$$

Integrando ambos por separado, tenemos que:

$$u_1' = \tfrac{1}{2} x^2 \ln |x| \qquad \text{y} \qquad u_2' = -\tfrac{3}{4} x^2$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = \tfrac{1}{2}x^2 \ln|x| \left(e^{-x}\right) - \tfrac{3}{4}x^2 \left(e^{-x}\right)$$

Por lo que la solución general es:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \ln x - \frac{3}{4}x^2 e^{-x}$$

Problema 10.

$$3y'' - 6y' + 30y = e^x tan3x$$

SOLUCION:
Identificamos la ecuación auxiliar, siendo esta:

$$3m^2 - 6m + 30 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = 1 + 3i$$
$$m_2 = 1 - 3i$$

Por lo tanto la función complementaria será:

$$y_c = c_1 e^x cos3x + c_2 e^x sen3x$$

Sustituyendo tenemos que:

$$y_1 = e^x \cos 3x$$
$$y_2 = e^x sen3x$$
$$f(x) = e^x tan3x$$

Calculamos el wronskiano:

$$W\left(e^x cos3x, e^x sen3x\right) = \begin{vmatrix} e^x cos3x & e^x sen3x \\ -3e^x sen3x & 3e^x cos3x \end{vmatrix} = 3e^{2x}$$

Así mismo W_1y W_2 si sabemos que $\tan x = \frac{senx}{cosx}$:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x sen 3x \\ e^x \tan 3x & 3e^x \cos 3x \end{vmatrix} = -e^{2x} \frac{sen^2 3x}{\cos 3x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x \cos 3x & 0 \\ -3e^x sen 3x & e^x \tan 3x \end{vmatrix} = e^{2x} sen 3x$$

Por lo que u_1' y u_2' son:

$$u_1' = \frac{-e^{2x} \frac{sen^2 3x}{\cos 3x}}{3e^{2x}} = -\frac{e^{2x} sen^2 3x}{3e^{2x} \cos 3x} = -\frac{sen^2 3x}{3 \cos 3x}$$

y

$$u_2' = \frac{e^{2x} sen 3x}{3e^{2x}} = \frac{sen 3x}{3}$$

Integrando ambos por separado, tenemos que:

$$u_1 = -\tfrac{1}{9} \ln |\sec 3x + \tan 3x| + \tfrac{1}{9} sen 3x \qquad \text{y} \qquad u_2 = -\tfrac{1}{9} \cos 3x$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p = -\tfrac{1}{9} e^x \cos 3x \ln |\sec 3x + \tan 3x| + \tfrac{1}{9} e^x sen 3x \cos 3x - \tfrac{1}{9} e^x \cos 3x sen 3x = -\tfrac{1}{9} e^x \cos 3x \ln |\sec 3x + \tan 3x|$$

Por lo que la solución general es:

$$y = c_1 e^x \cos 3x + c_2 e^x sen 3x - \frac{1}{9} e^x \cos 3x \ln |\sec 3x + \tan 3x|$$

Chapter 5

Transformada de Laplace

Definición: Sea una función f definida para $t \geq 0$. Entonces la integral

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

se dice que es la transformada de Laplace de f, siempre y cuando la integral converja.

La transformada de Laplace es una transformación lineal:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right]dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

es decir:

$$\pounds\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha \pounds\left\{f(t)\right\} + \beta \pounds\left\{g(t)\right\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Se puede aplicar la definición para obtener las transformadas de algunas funciones básicas, por ejemplo:

$$\pounds\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\pounds\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\pounds\left\{senkt\right\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

$$\pounds\left\{\cos kt\right\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$\pounds\left\{senhkt\right\} = \frac{k}{s^2-k^2}$$

$$\pounds\left\{\cosh kt\right\} = \frac{s}{s^2-k^2}$$

En los problemas 1 y 2 use la definición para encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

Problema 1.

$$f\left(t\right) = e^{t+7}$$

Solución:

$$\pounds\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{t+7}dt = \int_0^\infty e^{-st+t+7}dt = \int_0^\infty e^{(-s+1)t}e^7dt = e^7\int^\infty e^{(-s+1)t}dt$$

Realizando un cambio de variable

$$u = \left(-s+1\right)t$$

$$du = (-s+1)dt$$

$$dt = \frac{du}{-s+1}$$

$$\pounds\left\{f\left(t\right)\right\} = e^7\int^\infty \frac{e^u}{-s+1}du$$

$$e^7\int^\infty \frac{e^u}{-s+1}du = \frac{e^7}{-s+1}\left[e^{-st}\right]_0^\infty$$

Evaluando tenemos:

$$\pounds\left\{f\left(t\right)\right\}=\frac{e^{7}}{-s+1}\left[0-1\right]=\frac{e^{7}}{s-1}$$

Problema 2.

$$f\left(t\right)=te^{4t}$$

Solución:

$$\pounds\left\{f\left(t\right)\right\}=\int^{\infty}e^{-st}\left(te^{4t}\right)dt=\int^{\infty}te^{(4-s)t}dt=\left|\frac{te^{\left(4-s\right)t}}{-\left(s-4\right)}\right|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(4-s)t}}{\left(s-4\right)}dt$$

$$\pounds\left\{f\left(t\right)\right\}=\left|\frac{te^{(4-s)t}}{-\left(s-4\right)}\right|_{0}^{\infty}-\left|\frac{1}{\left(s-4\right)^{2}}e^{(4-s)t}\right|_{0}^{\infty}$$

Evaluando tenemos:

$$\pounds\left\{f\left(t\right)\right\}=0-\left[0-\frac{1}{\left(s-4\right)^{2}}\right]=\frac{1}{\left(s-4\right)^{2}}$$

5.1 Transformada inversa

La transformada inversa puede encontrarse fácilmente si se tiene en cuenta que

$$f(t)=\pounds^{-1}\left\{s\right\}$$

En los siguientes problemas determinar la transformada inversa que se pide.

Problema 1.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3}}\right\}$$

Solución:
Rescordando que

$$\pounds\left\{t^{n}\right\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Se completa la transformada multiplicando y dividiendo entre 2

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}=\frac{1}{2}t^2$$

Problema 2.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$$

Solución:
Se separa la transformada:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\pounds^{-1}\left\{\frac{48}{s^5}\right\}$$

La primera se resuelve directamente y para la segunda se completa de la siguente manera:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}=t-2\pounds^{-1}\left\{\frac{48}{2s^5}\right\}=t-2\pounds^{-1}\left\{\frac{24}{s^5}\right\}=t-2t^4$$

Problema 3.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$$

Solución:
Se desarrolla el binomio:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{s^3+3s+3s^2+1}{s^4}\right\}$$

Se separa la transformada:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s^3}{s^4}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s^3}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

Se completa la segunda y cuarta transformada

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s^3}{s^4}\right\}+\frac{3}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}\right\}+\frac{1}{6}\pounds^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\}$$

El resultado es:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\} = 1 + \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{1}{6}t^3$$

Problema 4.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$$

Solución:

Se resuelve de forma directa usando las fórmulas:

$$\pounds\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^3}$$

y

$$\pounds\left\{\frac{1}{t-a}\right\} = e^{as}$$

Por lo tanto el resultado es:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\} = t + 1 + e^{2t}$$

Problema 5.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$$

Solución: Por la fórmula $\pounds\left\{senat\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, se completa la transformada

$$\frac{5}{7}\pounds^{-1}\left\{\frac{7}{s^2+49}\right\} = \frac{7}{5}sen7t$$

Problema 6.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$$

Solución:

Se divide entre 4 para que se pueda resolver por la transformada del coseno

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\right\} = \cos\frac{1}{2}t$$

Problema 7.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$$

Se separa la transformada

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9}\right\}-\pounds^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+9}\right\}$$

Se completa la transformada

$$2\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}-2\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}=2\cos 3t-2sen3t$$

Problema 8.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}$$

Solución:
Se resuelve por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s^2\left(s^2+4\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+4\right)}$$

$$1=A(s)(s^2+4)+B(s^2+4)+Cs(s^2)+D(s^2)$$

$$1=As^3+4A+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2$$

$$1=s^3\left(A+C\right)+s^2\left(B+D\right)+4\left(A+B\right)$$

$$B=\frac{1}{4},\ C=0,\ A=0,\ D=\frac{1}{4}$$

Se sustituyen los valores y se completa la transformada para obtener el resultado.

$$\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}sen2t$$

Problema 9.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$$

Solución:
Se realizan fracciones parciales

$$\frac{s}{(s^2+4)(s+2)}=\frac{As+B}{(s^2+4)}+\frac{C}{(s+2)}$$

$$s=As^2+Bs+2As+2B+Cs^2+4C$$

$$s=s^2(A+C)+s(B+2A)+2B+4C$$

$$B=\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{4},\ A=-\frac{1}{4}$$

Se sustituyen los valores y se resuelve:

$$-\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\}+\frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)}\right\}+\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}=-\frac{1}{4}\cos 4t+\frac{1}{4}sen2t+\frac{1}{4}e^{-2t}$$

Problema 10.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$$

Solución: Se factoriza el denominador, y se realizan fracciones parciales.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\}$$

$$\frac{1}{s(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}=\frac{A(s+3)+B(s)}{s(s+3)}$$

$$1=A(s+3)+B(s)=(A+B)s+3A$$

$$3A=1$$

$\therefore$

$$A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3}$$

Se sustituyen los valores en las tranformadas, y se aplica la inversa a cada una de ellas.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}=\frac{1}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t}$$

Problema 11.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$$

Solución: Se aplican fracciones parciales, una vez obtenidos los valores, se sustituyen y se aplica a cada una su transformada.

$$\frac{0.9s}{(s-0.1)(s-0.2)}=\frac{A}{s-0.1}+\frac{B}{s+0.2}$$

$$0.9=(A+B)s+0.2A-0.1B$$

$$A=0.3,\ B=0.6$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}=0.3\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-0.1}\right\}+0.6\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.2}\right\}=0.3e^{0.1t}+0.6e^{-0.2t}$$

Problema 12.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}$$

Solución: Se realizan fracciones parciales.

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$1=A(s)\left(s^2+4\right)+B\left(s^2+4\right)+(Cs+D)\left(s^2\right)$$

$$A=0,\ B=\frac{1}{4},\ C=0,\ D=-\frac{1}{4}$$

Una vez encontrados los valores, se sustituyen en las transformadas, y se aplica la transformada inversa

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}=\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}sen2t$$

5.2 Teoremas de traslación y derivadas

Primer teorema de traslación

Si $F(s)=\pounds\{f(t)\}$ y a es cualquier número real, entonces

$$\pounds\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$$

La función escalón unitario $u(t-a)$ se define como

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & si \quad o\leq t<a\\ 1 & si \quad t\geq a\end{cases}$$

Segundo teorema de traslación

Si $F(s)=\pounds\{f(t)\}$ y $a>0$, entonces

$$\pounds\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

Adicionalmente se puede usar una forma alternativa del segundo teorema

$$\pounds\{g(t)u(t-a)\}=e^{-as}\pounds\{g(t+a)\}$$

Derivadas de una transformada

Si $F(s)=\pounds\{f(t)\}$ y $a>0$, entonces

$$\pounds\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

En los siguientes problemas encuentre la transformada de Laplace.

Problema 1.

$$\pounds\left\{te^{10t}\right\}$$

Solución: En el primer teorema de traslación:

$$a=10, \text{ y } f(t)=t$$

$$F(s)=\pounds\{f(t)\}=\pounds\{t\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$F(s-a) = \frac{1}{(s-10)^2}$$

$$\therefore \pounds\left\{te^{10t}\right\} = \frac{1}{(s-10)^2}$$

Problema 2.

$$\pounds\left\{te^{-6t}\right\}$$

Solución: Del primer teorema de traslación:

$$a = -6, \; f(t) = t$$

$$F(s) = \pounds\{f(t)\} = \pounds\{t\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$F(s-a) = \frac{1}{(s+6)^2}$$

$$\therefore \pounds\left\{te^{-6t}\right\} = \frac{1}{(s+6)^2}$$

Problema 3.

$$\pounds\left\{t^3e^{-2t}\right\}$$

Solución:

$$a = -2, \; f(t) = t^3$$

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{t^3\right\}$$

$$F(s) = \frac{6}{s^4}$$

$$F(s-a) = \frac{6}{(s+2)^4}$$

$$\therefore \pounds\left\{t^3 e^{-2t}\right\} = \frac{6}{(s+2)^4}$$

Problema 4.

$$\pounds\left\{e^t sen3t\right\}$$

Solución:

$$a = 1$$

$$f(t) = sen3t$$

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{sen3t\right\}$$

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$F(s-a) = \frac{3}{(s-1)^2+9}$$

$$\therefore \pounds\left\{e^t sen3t\right\} = \frac{3}{(s-1)^2+9}$$

Problema 5.

$$\pounds\left\{e^{5t} senh3t\right\}$$

Solución:

$$a = 5,\ f(t) = senh3t$$

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{senh3t\right\} = \frac{3}{s^2 - 9}$$

$$F(s-a) = \frac{3}{(s-5)^2 - 9}$$

$$\therefore \pounds\left\{e^{5t} senh3t\right\} = \frac{3}{(s-5)^2 - 9}$$

Problema 6.

$$\pounds\left\{e^{-t} sen^2 t\right\}$$

Solución: A partir del primer teorema de traslación:

$$a = -1,\ f(t) = sen^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$$

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right\} = \frac{1}{2}\pounds\left\{1\right\} - \frac{1}{2}\pounds\left\{\cos 2t\right\}$$

$$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$F(s-a) = \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]$$

$$\therefore \pounds\left\{e^{5t} senh3t\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]$$

Problema 7.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}$$

Solución:
Recordando que:

$$\pounds^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at}f(t)$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\mid_{s\to s+2}\right\} = \frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\mid_{s\to s+2}\right\}$$

$$\therefore \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$

Problema 8.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$$

Solución:

Es necesario completar el trinomio cuadradro perfecto:

$$\frac{s}{(s^2+4s)+5} = \frac{s}{(s^2+4s+4)+1} = \frac{s}{(s+2)^2+1}$$

Sustituyendo:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{s+2-2}{(s+2)^2+1}\right\} =$$

$$= \pounds^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\mid_{s\to s-2}\right\} - 2\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\mid_{s\to s+2}\right\}$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 2\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}sent$$

Problema 9.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}$$

Solución:

Utilizando fracciones parciales:

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2}$$

$$s = As + A + B$$

Por lo que se obtiene:

$$A = 1$$

$$B = -1$$

Sustituyendo:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\ |_{s\to s+1}\right\} = e^{-t} - te^{-t}$$

Problema 10.

$$\pounds\left\{(t-1)u(t-1)\right\}$$

Solución: En el segundo teorema de traslación:

$$a = 1$$

$$f(t-1) = t-1$$

$$f(t) = t$$

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}$$

Finalmente:

$$\pounds\left\{(t-1)u(t-1)\right\} = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

Problema 11.

$$\pounds\left\{(t-1)^3 e^{t-1} u(t-1)\right\}$$

Solución: Se usa el segundo teorema de traslación.

$$a = 1,\ f(t-1) = (t-1)^3 e^{t-1}$$

$$f(t) = t^3 e^t$$

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{t^3 e^t\right\}$$

Como:
$\pounds\left\{t^3\right\} = \frac{6}{s^4}$
$F(s-a) = \frac{6}{(s-1)^4}$
Finalmente:

$$\pounds\left\{(t-1)^3 e^{t-1} u(t-1)\right\} = \frac{6e^{-s}}{(s-1)^4}$$

Problema 12.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} e^{-2s}\right\}$$

Solución: Usando el segundo teorema de traslación en su forma inversa:

$$a = 2$$

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2$$

$$f(t-a) = \frac{(t-2)^2}{2}$$

Por lo que finalmente:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\} = \frac{(t-2)^2}{2}u(t-2)$$

Problema 13.

$$\pounds\left\{t\cos 2t\right\}$$

Solución:

Recordando que:

$$\pounds\left\{tf(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Donde:

$$f(t) = \cos 2t$$

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{\cos 2t\right\} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\pounds\left\{tf(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = -\left(\frac{(s^2+4)-s(2s)}{(s^2+4)^2}\right) = -\left(\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}\right) =$$

$$\pounds\left\{tf(t)\right\} = -\left(\frac{-s^2+4}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

Finalmente:

$$\pounds\left\{t\cos 2t\right\} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

Problema 14.

$$\pounds\left\{te^{2t}sen6t\right\}$$

Solución:

Recordando que:

$$\pounds\left\{tf(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$f(t) = e^{2t}sen6t$$

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{e^{2t}sen6t\right\}$$

Si $f(t) = sen6t$

$$F(s) = \frac{6}{s^2+36}$$

$$F(s-a) = \frac{6}{(s-2)^2+36}$$

Sustituyendo:

$$\pounds\left\{te^{2t}sen6t\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{(s-2)^2+36}\right) = \frac{6(2s-4)}{\left[(s-2)^2+36\right]^2}$$

Finalmente:

$$\pounds\left\{te^{2t}sen6t\right\} = \frac{12s-24}{\left[(s-2)^2+36\right]^2}$$

Problema 15.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

Solución: Usando el mismo argumento que en el problema anterior:

$$\pounds\left\{tf(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\pounds^{-1}\left\{\tfrac{dF(s)}{ds}\right\} = -tf(t)$$

Como:

$$\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = -\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \pounds^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})\right\} = -\frac{1}{2}(-tsent) = \frac{1}{2}tsent$$

Problema 16. Exprese cada función en términos de funciones escalón unitario. Determine la transformada de Laplace de la función respectiva.

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{c} 2, \text{si } 0 \leq t < 3 \\ -2, \text{si } t \geq 3 \end{array} \right\}$$

Solución:
En términos de la función escalón unitario la función se escribe como:

$$f(t) = 2 - 4u(t-3)$$

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{2 - 4u(t-3)\right\} = 2\pounds\left\{1\right\} - 4\pounds\left\{u(t-3)\right\}$$

Recordando que:

$$\pounds\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

Finalmente:

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \frac{2}{s} - \frac{4e^{-3s}}{s}$$

Problema 17. Exprese cada función en términos de funciones escalón unitario. Determine la transformada de Laplace de la función respectiva.

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t^2, \text{si } t \geq 1 \end{array} \right\}$$

Solución:
Recordando:

$$\pounds\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

Por lo tanto hay que completar la expresión de la función de la siguiente forma:

$$f(t) = t^2u(t-1) = (t-1)^2u(t-1) + 2tu(t-1) - u(t-1)$$

$$f(t) = (t-1)^2u(t-1) + 2(t-1)u(t-1) + u(t-1)$$

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{(t-1)^2u(t-1) + 2(t-1)u(t-1) + u(t-1)\right\}$$

Aplicando el segundo teorema de traslación se tiene:

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = e^{-s}\left[\pounds\left\{(t)^2\right\} + 2\pounds\left\{t\right\} + \pounds\left\{1\right\}\right] = e^{-s}\pounds\left\{t^2+2t+1\right\} = e^{-s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right]$$

Problema 18.

$$f(t) = u(t-a) - u(t-b)$$

Solución:

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \pounds\left\{u(t-a)\right\} - \pounds\left\{u(t-b)\right\}$$

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}$$

Problema 19.

$$f(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right\}$$

Solución:

$$f(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s^2}\right\}$$

Por lo tanto:

$$f(t) = t - (t-1)u(t-1)$$

Problema 20. Aplicar la propiedad $f(t) = -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$ para evaluar la transformada inversa

$$\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\}$$

Solución:

$$\pounds^{-1}\left\{\ln(s-3)-\ln(s+1)\right\}$$

Por lo que:

$$\frac{d}{ds}\left(\ln(s-3)\right)=\frac{1}{s-3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\ln(s+1)\right)=\frac{1}{s+1}$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}\left[\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{1}{s-3}\right\}-\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{1}{s+1}\right\}\right]$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}\left[e^{3t}-e^{-t}\right]$$

$$f(t)=-\frac{e^{3t}}{t}+\frac{e^{-t}}{t}$$

$$f(t)=\frac{e^{-t}-e^{3t}}{t}$$

Problema 21. Determinar

$$\pounds\left\{(t^2-3t)u(t-2)\right\}$$

reescribiéndolo en términos de potencias de $t-2$.

Solución:

Si

$$g(t)=t^2-3t=(t-2)^2-3(t-2)+4t-4-6$$

$$g(t)=(t-2)^2-3(t-2)+4(t-2)-10+8$$

$$g(t)=(t-2)^2+(t-2)-2$$

$$\pounds\left\{(t^2-3t)u(t-2)\right\}=\pounds\left\{\left[(t-2)^2+(t-2)-2\right]u(t-2)\right\}=e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}\right]$$

5.3 Derivadas, integrales y funciones periódicas

Transformada de una derivada

Si $f(t)$, $f'(t)$, ...,$f^{(n-1)}(t)$ son funciones continuas sobre $[0,\infty)$ entonces

$$\pounds\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}$

La convolución de dos funciones se define como

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones seccionalmente continuas en $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\pounds\{f * g\} = \pounds\{f(t)\}\,\pounds\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es una función seccionalmente continua en $[0,\infty)$, de orden exponencial y periodo T, entonces

$$\pounds\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Problema 1. Aplique el resultado $\left(\frac{d}{dt}\right)e^t = e^t$ y la ecuación $\pounds\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ para evaluar $\pounds\{e^t\}$

Solución:

Se sabe que

$$\pounds\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1}$$

Si $f(t) = e^t$, $f(0) = 1$

Por lo tanto:

$$\pounds\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$£\{f(t)\} = sF(s) - 1$$

$$F(s) = sF(s) - 1$$

$$F(s)(s-1) = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\therefore £\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1}$$

Problema 2. Aplique el resultado $\left(\frac{d}{dt}\right)\cos^2 t = -sen2t$ y la ecuación $£\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ para evaluar $£\{\cos^2 t\}$.

Solución:

Si $F(s) = £\{\cos^2 t\}$, $f(0) = \cos^2(0) = 1$

$$£\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$£\{-sen2t\} = sF(s) - 1$$

$$-\frac{2}{s^2+4} = sF(s) - 1$$

$$sF(s) = 1 - \frac{2}{s^2+4} = \frac{s^2+2}{s^2+4}$$

$$F(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

Problema 3. Suponga que una función y(t) cuenta con las propiedades y(0) = 1 y y'(0) = -1. Determine la transformada Laplace de la siguiente expresión.

$$y'' + 3y'$$

Solución: Se aplica la expresión para la derivada de una tranformada y las condiciones, de lo que queda, factorizamos $Y(S)$, y a lo demás lo despejamos.

$$s^2Y(s) - sy\,(0) - y'(0) + 3\,(sY\,(s) - y\,(0)) = 0$$

$$Y\,(s)\left(s^2 + 3s\right) - s + 1 - 3 = 0$$

$$Y\,(s)\left(s^2 + 3s\right) - s - 2 = 0$$

$$Y\,(s)\left(s^2 + 3s\right) = s + 2$$

$$Y\,(s) = \frac{s+2}{s^2+3s}$$

Aplicamos fracciones parciales, y a los valores encontrados los sustituimos, aplicando la transformada inversa.

$$\frac{s+2}{s^2+3s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

$$s + 2 = A\,(s+3) + B(s)$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{1}{3}$$

$$y\,(t) = \pounds^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \frac{2}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Problema 4. Suponga que una función $y(t)$ tiene las propiedades $y(0) = 2$ y $y'(0) = 3$. Despeje la transformada de Laplace $\pounds\left\{y(t)\right\} = Y(s)$.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Solución: Se aplica la fórmula de la derivada de una tranformada y las condiciones iniciales, de lo que queda, factorizamos $Y(S)$, y a lo demás lo despejamos.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = 0$$

$$Y(s)\left(s^2 - 2s + 1\right) - 2s - 3 + 4 = 0$$

$$Y(s)(s-1)^2 = 2s - 1$$

$$Y(s) = \frac{2s-1}{(s-1)^2}$$

Problema 5.

$$\pounds\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\}$$

Solución:
Se utiliza la fórmula de la derivada de una integral:

$$\pounds\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

en este caso $f(\tau) = e^\tau$, $F(s) = \frac{1}{s-1}$, por lo tanto:

$$\pounds\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\} = \frac{1}{s(s-1)}$$

Problema 6.

$$\pounds\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\right\}$$

Solución: Utilizamos la transformada de la convolución:

$$\pounds\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}$ y $G(s) = \pounds\{g(t)\}$

$$\pounds\{t\} = \frac{1}{s^2}, \pounds\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1}$$

Por lo tanto:

$$\pounds\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau}d\tau\right\} = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

Problema 7.

$$\pounds\left\{t^2 * t^4\right\}$$

Solución: La transformada de la convolución es el producto de las transformadas:

$$\pounds\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\pounds\left\{t^4\right\} = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$$

$$\pounds\left\{t^2 * t^4\right\} = \frac{48}{s^8}$$

Problema 8.

$$\pounds\left\{e^{-t} * e^t \cos t\right\}$$

Solución: Al igual que en el problema anterior:

$$\pounds\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}$$

Para encontrar $\pounds\{e^t \cos t\}$ se hace una traslación:

$$\pounds\left\{e^t \cos t\right\} = \frac{s}{s^2+1}\,|_{s\to s-1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$\pounds\left\{e^{-t} * e^{t}\cos t\right\} = \frac{s-1}{(s+1)\left[(s-1)^{2}+1\right]}$$

Problema 9.

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\}$$

Solución: Se utiliza el teorema de convolución en su forma inversa:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\right\} = t * e^{-t}$$

Problema 10. Halle la transformada de Laplace de la función periódica.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < 0 \\ -1 & si \quad a \le t \le 2a \end{cases} \quad T = 2a$$

Solución: Para obtener la transformada de una función periódica se procede de la siguiente forma:

$$\pounds\left\{f\,(t)\right\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\int_{0}^{2a} e^{-st} f\,(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2as}}\left(\int_{0}^{a} e^{-st}dt + \int_{a}^{2a} e^{-st}\,(-1)\,dt\right)$$

$$\pounds\left\{f\,(t)\right\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)_{0}^{a} + \left(\frac{1}{s}e^{-st}\right)_{a}^{2a}\right]$$

$$\pounds\left\{f\,(t)\right\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\left(-\frac{1}{s}e^{-as} + \frac{1}{s}\right) + \left(\frac{1}{s}e^{-2as} - \frac{1}{s}e^{-as}\right)\right]$$

$$\pounds\left\{f\,(t)\right\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + \frac{1}{s}e^{-2as}\right) = \frac{\left(1-2e^{-as}+e^{-2as}\right)}{s\left(1-e^{-2as}\right)}$$

$$\pounds\left\{f\,(t)\right\} = \frac{\left(1-e^{-as}\right)\left(1-e^{-as}\right)}{s\left(1-e^{-as}\right)\left(1+e^{-as}\right)} = \frac{1-e^{-as}}{s\left(1-e^{-as}\right)}$$

5.4 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

En los siguientes problemas use la transformada de Laplace para resolver la ecuación dferencial respectiva, sujeta a las condiciones iniciales indicadas. Cuando sea apropiado, exprese f en términos de funciones escalón unitario.

Problema 1.

$$\frac{dy}{dx} - y = 1, \; y(0) = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0) - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) - 0 - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) - Y(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

factorizamos $Y(s)$ y la despejamos:

$$\begin{aligned} Y(s)(s-1) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

aplicamos la transformada inversa:

$$\begin{aligned} & \pounds^{-1}\left\{Y(s) = \frac{1}{s(s-1)}\right\} \\ y(t) &= e^t - 1 \end{aligned}$$

Problema 2.

$$\frac{dy}{dt} + 2y = t, \; y\,(0) = -1$$

Solución:

$$\pounds\left\{\frac{dy}{dt} + 2y = t\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Aplicando la condición inicial

$$sY(s) + 1 + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$:

$$Y(s)(s+2) = \frac{1}{s^2} - 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} - \frac{1}{s+2}$$

Realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y(t) = \pounds^{-1}\{Y(s)\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+2)}$$

Encontrando los valores de A, B, y C:

$$A = -\frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo los valores:

$$y(t) = -\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$y\left(t\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^{-2t}$$

$$y\left(t\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}$$

Problema 3.

$$y'+4y=e^{-4t},\ y(0)=2$$

Solución:

$$\pounds\left\{y'+4y=e^{-4t}\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$sY\left(s\right)-y(0)+4Y\left(s\right)=\frac{1}{s+4}$$

Aplicando la condición:

$$sY\left(s\right)-2+4Y\left(s\right)=\frac{1}{s+4}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$:

$$Y\left(s\right)\left(s+4\right)=\frac{1}{s+4}+2$$

$$Y\left(s\right)=\frac{1}{\left(s+4\right)^{2}}+\frac{2}{s+4}$$

Realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y\left(t\right)=\pounds^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+4\right)^{2}}\right\}+2\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$y\left(t\right)=\pounds^{-1}\left\{\left|\frac{1}{s^{2}}\right|_{s\to s+4}\right\}+2e^{-4t}$$

$$y(t) = te^{-4t} + 2e^{-4t}$$

Problema 4.

$$y'' + 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Solución:

$$\pounds\left\{.y'' + 5y' + 4y = 0\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = 0$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^2Y(s) - s + 5sY(s) - 5 + 4Y(s) = 0$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$:

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 4\right) = s + 5$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s+4)(s+1)} + \frac{5}{(s+4)(s+1)}$$

Realizando la inversa para obtener $y(t)$:

$$y(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s+4)(s+1)}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{5}{(s+4)(s+1)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{s}{(s+4)(s+1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \frac{4}{3}$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{(s+4)(s+1)} = \frac{C}{s+4} + \frac{D}{s+1}$$

$$C = -\frac{5}{3}$$

$$D = \frac{5}{3}$$

Sustituyendo los valores y realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y(t) = \frac{4}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - \frac{1}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{5}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \frac{5}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{-4t} + \frac{5}{3}e^{-t} = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}$$

Problema 5.

$$y'' - 6y' + 9y = t, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solución:

$$\pounds\{y'' - 6y' + 9y = t\}$$

Resolviendo la transformada:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9sY(s) = \frac{1}{s^2}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^2Y(s) - 1 - 6sY(s) + 9sY(s) = \frac{1}{s^2}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$:

$$Y\left(s\right)\left(s^{2}-6s+9\right)=\frac{1}{s^{2}}+1$$

$$Y\left(s\right)=\frac{1}{s^{2}\left(s-3\right)^{2}}+\frac{1}{\left(s-3\right)^{2}}$$

Realizando la inversa para obtener $y(t)$:

$$y\left(t\right)=\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2}\left(s-3\right)^{2}}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-3\right)^{2}}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s^{2}\left(s-3\right)^{2}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^{2}}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{\left(s-3\right)^{2}}$$

Obteniendo los valores:

$$A=\frac{2}{27},\ B=\frac{1}{9},\ C=-\frac{2}{27},\ D=\frac{1}{9}$$

Sustituyendo los valores y realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y\left(t\right)=\frac{2}{27}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{9}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2}}\right\}-\frac{2}{27}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+\frac{1}{9}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-3\right)^{2}}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-3\right)^{2}}\right\}$$

$$y\left(t\right)=\frac{2}{27}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{27}e^{3t}+\frac{1}{9}\pounds^{-1}\left\{\left|\frac{1}{s^{2}}\right|_{s\rightarrow s-3}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\left|\frac{1}{s^{2}}\right|_{s\rightarrow s-3}\right\}$$

$$y\left(t\right)=\frac{2}{27}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{27}e^{3t}+\frac{1}{9}te^{3t}+te^{3t}=\frac{2}{27}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{27}e^{3t}+\frac{10}{9}te^{3t}$$

Problema 6.

$$y''+y=\sin t,\ y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=-1$$

Solución:

$$\pounds\left\{.y'' + y = \sin t\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^2Y(s) - s + 1 + Y\left(s\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

Despejando y factorizando a $Y(S)$:

$$Y(s)\left(s^2+1\right) = \frac{1}{s^2+1} + s - 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

Realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y\left(t\right) = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

Para poder realizar la inversa : $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$ se requiere realizar una convolución como sigue:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t * \sin t$$

$$\sin t * \sin t = \int_0^t \sin\tau \sin\left(t-\tau\right) d\tau = \int_0^t \sin\tau\left(\sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau\right) d\tau$$

Resolviendo la integral se tiene:

$$\sin t * \sin t = \frac{\sin^3 t}{2} - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin\cos^2 t$$

Sustituyendo para obtener $y(t)$ y resolviendo las transformadas inversas restantes:

$$y(t) = \frac{\sin^3 t}{2} - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin \cos^2 t + \cos t - \sin t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t + \cos t - \sin t$$

$$y(t) = \cos t - \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t$$

Problema 7.

$$y'' - y' = e^t \cos t, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{y'' - y' = e^t\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0)) = \left| \frac{s}{s^2+1} \right|_{s \to s-1}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^2 Y(s) - sY(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$ se tiene que:

$$Y(s)\left(s^2 - s\right) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2 - 2s + 2\right)}$$

Realizando la inversa para obtener a $y(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-2s+2)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2-2s+2)}$$

Obteniendo valores:

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 1$$

Sustituyendo los valores y realizando la inversa de la transformada para obtener y(t) tenemos que:

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1+1}{(s-1)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left|\frac{1}{s^2+1}\right|_{s\to s-1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\}_{s\to s-1} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}\right) + e^t\sin t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}_{s\to s-1} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left|\frac{1}{s^2+1}\right|_{s\to s-1}\right\}\right) + e^t\sin t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t\cos t - \frac{1}{2}e^t\sin t + e^t\sin t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t\cos t + \frac{1}{2}e^t\sin t$$

Problema 8.

$$y^{(4)} - y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 0$$

Solución:

$$\pounds\left\{y^{(4)}-y=0\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)-Y(s)=0$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^4Y(s)-s^3+s-Y(s)=0$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$ se tiene que:

$$Y(s)\left(s^4-1\right)=s^3-s$$

$$Y(s)=\frac{s\left(s^2-1\right)}{\left(s^2-1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{s}{\left(s^2+1\right)}$$

$$Y(s)=\frac{s}{\left(s^2+1\right)}$$

Realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y(t)=\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)}\right\}$$

$$y(t)=\cos t$$

Problema 9.

$$y'+y=f(t),\ y(0)=0,\ \text{en donde } f(t)=\left\{\begin{array}{c}0,\ 0\leq t<1\\ 5,\ t\geq 1\end{array}\right\}$$

Solución:
Tomando en cuenta la condicion inicial se sabe que $f(t)$ es:

$$f(t)=5u(t-1)$$

$$\pounds\left\{y' + y = 5u(t-1)\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = 5\frac{e^{-s}}{s}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$sY(s) + Y(s) = 5\frac{e^{-s}}{s}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$ se tiene que:

$$Y(s)\,(s+1) = 5\frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = 5\frac{e^{-s}}{s\,(s+1)}$$

Realizando la inversa para obtener a $y(t)$:

$$y(t) = 5\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s\,(s+1)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s\,(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

Obteniendo valores:

$$A = 1,\ B = -1$$

Sustituyendo los valores y realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y\,(t) = 5\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} - 5\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\}$$

$$y\left(t\right)=5u\left(t-1\right)-5e^{-\left(t-1\right)}u\left(t-1\right)$$

$$y\left(t\right)=5u\left(t-1\right)\left(1-e^{-\left(t-1\right)}\right)$$

Problema 10.

$$y''+4y=sentu\left(t-2\pi\right),\ y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=0$$

Solución:

$$\pounds\left\{y''+4y=sentu\left(t-2\pi\right)\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$s^2Y\left(s\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)+4Y\left(s\right)=\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^2Y\left(s\right)-s+4Y\left(s\right)=\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$ se tiene que:

$$Y\left(s\right)\left(s^2+4\right)=\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}+s$$

$$Y\left(s\right)=\frac{e^{-2\pi s}}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}+\frac{s}{\left(s^2+4\right)}$$

Realizando la inversa obtenemos a $y(t)$:

$$y\left(t\right)=\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+4\right)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}=\frac{As+B}{\left(s^2+4\right)}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+1\right)}$$

Obteniendo los valores:

$$A = 0,\ B = -\frac{1}{3},\ C = 0,\ D = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo los valores y realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$y\left(t\right) = -\frac{1}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+4)}\right\} + \frac{1}{3}\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\}$$

$$y\left(t\right) = -\frac{1}{6}sen2\left(t-2\pi\right)u\left(t-2\pi\right) + \frac{1}{3}sen\left(t-2\pi\right)u\left(t-2\pi\right) + \cos 2t$$

En los siguientes problemas resuelva la ecuación integral o integrodiferencial respectiva con la transformada de Laplace.

Problema 11.

$$f\left(t\right) + \int_0^t \left(t-\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau = t$$

Solución:

$$\pounds\left\{f\left(t\right) + \int_0^t \left(t-\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau = t\right\}$$

Realizando la transformada:

$$F(s) + \frac{1}{s^2}F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Factorizando y despejando a $F(S)$:

$$F(s)\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$F(s)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2(s^2+1)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Realizando la inversa obtenemos $f(t)$:

$$f(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$f(t) = \sin t$$

Problema 12.

$$f\left(t\right) = te^t + \int_0^t \tau f\left(t-\tau\right) d\tau$$

Solución:

$$\pounds\left\{f\left(t\right) = te^t + \int_0^t \tau f\left(t-\tau\right) d\tau\right\}$$

Realizando la transformada:

$$F(s) = \frac{1}{\left(s-1\right)^2} + \frac{F(s)}{s^2}$$

Despejando y factorizando a $F(S)$:

$$F(s) - \frac{F(s)}{s^2} = \frac{1}{\left(s-1\right)^2}$$

$$F(s)\left(1-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{\left(s-1\right)^2}$$

$$F(s) = \frac{s^2}{\left(s^2-1\right)\left(s-1\right)^2} = \frac{s^2}{\left(s+1\right)\left(s-1\right)^3}$$

Realizando la inversa obtenemos $f(t)$:

$$y(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+1)(s-1)^3}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{s^2}{(s-1)(s-1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3}$$

Obteniendo los valores:

$$A = -\frac{1}{8},\ B = \frac{1}{8},\ C = \frac{3}{4},\ D = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo los valores y realizando la inversa de la transformada para obtener $y(t)$ tenemos que:

$$f(t) = -\frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + \frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{D}{(s-1)^3}\right\}$$

$$f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^{t} + \frac{3}{4}te^{t} + \frac{1}{8}t^2e^{t}$$

Problema 13.

$$y'(t) = t - \sin t - \int_0^t y(\tau)\, d\tau, y(0) = 0$$

Solución:

$$\pounds\left\{y'(t) = t - \sin t - \int_0^t y(\tau)\, d\tau\right\}$$

Resolviendo la transformada:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{Y(s)}{s}$$

Aplicando la condición inicial:

$$sY(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{Y(s)}{s}$$

Factorizando y despejando a $Y(S)$:

$$sY(s) + \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(s + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(\frac{s^2+1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Realizando la inversa, obtenemos a $y(t)$:

$$y(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$$

Para la inversa de $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ se requiere realizar una convolución:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\frac{1}{(s^2+1)}\right\} = \cos t * \sin t$$

$$\cos t * \sin t = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}t\sin t$$

Sustituyendo y resolviendo la transformada inversa restante:

$$y(t) = \sin t - \frac{1}{2}t\sin t$$

Problema 14. Determine la corriente $i(t)$ en un circuito LRC en serie, cuando $L = 0.005H$, $R = 1\Omega$, $C = 0.02F$, $E(t) = 100\left[1 - u(t-1)\right]\ V$ e $i(0) = 0$.

Solución:

La suma del voltaje total en todo el circuito está dado por:

$$E(t) = V_R + V_L + V_C$$

Cada voltaje es igual a:

$$V_R = iR,\ V_C = \frac{q}{C},\ V_L = L\frac{di}{dt}$$

Sustituyendo los valores de los voltajes en el voltaje total:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

Pero se sabe que la corriente está dada por:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Para despejar a q y encontrar su valor:

$$dq = idt,\ q = \int_0^t i\,(\tau)\,d\tau$$

Por lo tanto sustituyendo el valor de q y los valores iniciales en el voltaje total se tiene que:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,(\tau)\,d\tau = E(t)$$

$$0.005\frac{di}{dt} + i + \frac{1}{0.02}\int_0^t i\,(\tau)\,d\tau = 100\,[1 - u\,(t-1)]$$

Dividiendo entre 0.005:

$$\frac{di}{dt} + 200i + 1000\int_0^t i\,(\tau)\,d\tau = 20000\,[1 - u\,(t-1)]$$

Aplicando la transformada y resolviendo:

$$L\left\{\frac{di}{dt} + 200i + 1000\int_0^t i\,(\tau)\,d\tau = 20000\,[1 - u\,(t-1)]\right\}$$

$$sI(s) - i(s) + 200I(s) + 10000\frac{I(s)}{s} = 2000\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}\right)$$

Factorizando y despejando $I(S)$:

$$I(s)\left(\frac{s + 200s + 10000}{s}\right) = \frac{2000}{s} - \frac{2000e^{-s}}{s}$$

$$I(s) = \left(\frac{s}{s + 200s + 10000}\right)\left[\left(\frac{2000}{s}\right) - \left(\frac{2000e^{-s}}{s}\right)\right]$$

$$I(s) = \frac{20000}{s + 200s + 10000} - \frac{200000e^{-s}}{s + 200s + 10000}$$

Realizando la inversa para obtener $i(t)$:

$$i(t) = 20000L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 200s + 10000}\right\} - 20000L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s + 200s + 10000}\right\}$$

$$i(t) = 20000L^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 100)^2}\right\} - 20000L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s + 100)^2}\right\}$$

$$i(t) = 20000L^{-1}\left\{\left|\frac{1}{s^2}\right|_{s \to s+100}\right\} - 20000L^{-1}\left\{\left|\frac{e^{-s}}{s^2}\right|_{s \to s+100}\right\}$$

$$i(t) = 20000te^{-100t} - 20000\,(t-1)\,e^{-100(t-1)}u\,(t-1)$$

Problema 15. Recuerde que la ecuación diferencial que describe la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito RC en serie es:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado. Emplee la transformada de Laplace para determinar la carga, $q(t)$, cuando $q(0) = 0$ y $E(t) = E_0e^{-kt}, k > 0$.

Solución:

Tomando en cuenta que R, C, E_0 y k son constantes:

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E_0e^{-kt}$$

Dividiendo la ecuación entre la resistencia:

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=\frac{E_0e^{-kt}}{R}$$

Resolviendo la transformada:

$$\pounds\left\{\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=\frac{E_0e^{-kt}}{R}\right\}$$

$$sQ(s)-q(0)+\frac{1}{RC}Q\left(s\right)=\frac{E_0}{R\left(s+k\right)}$$

Factorizando y despejando a $Q(S)$:

$$Q(s)\left(s+\frac{1}{RC}\right)=\frac{E_0}{R\left(s+k\right)}$$

$$Q(s)\left(\frac{sRC+1}{RC}\right)=\frac{E_0}{R\left(s+k\right)}$$

$$Q(s)=\frac{E_0RC}{R\left(s+k\right)\left(RCs+1\right)}$$

$$Q(s)=\frac{E_0C}{\left(s+k\right)\left(RCs+1\right)}$$

Realizando la transformada inversa para obtener $q(t)$:

$$q(t)=\pounds^{-1}\left\{\frac{E_0C}{\left(s+k\right)\left(RCs+1\right)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{EoC}{(s+k)\,(RCs+1)} = \frac{A}{(s-k)} + \frac{B}{(RCs+1)}$$

Obteniendo valores:

$$A = \frac{EoC}{1-kRC},\ B = -\frac{EoC^2R}{(1-kRC)}$$

Sustituyendo los valores y resolviendo la inversa:

$$q(t) = \frac{EoC}{1-kRC}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-k)}\right\} - \frac{EoC^2R}{(1-kRC)}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(RCs+1)}\right\}$$

$$q(t) = \frac{EoC}{1-kRC}e^{-kt} - \frac{EoC^2R}{(1-kRC)}\frac{1}{RC}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right\}$$

$$q(t) = \frac{EoC}{1-kRC}e^{-kt} - \frac{EoC}{(1-kRC)}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = \frac{EoC}{1-kRC}\left(e^{-kt} - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Problema 16. Use la transformada de Laplace para determinar la carga en el capacitor de un circuito en serie RC, cuando $q(0) = 0, R = 2.5\Omega, C = 0.008F$ y $E(t) = 5u\,(t-3)$.

Solución:

Se sabe que el voltaje total es igual a:

$$E(t) = V_R + V_C$$

De donde:

$$V_R = Ri,\ V_C = \frac{q}{C},\ i = \frac{dq}{dt}$$

El voltaje total es:

$$E\,(t) = 5u\,(t-3)$$

Sustituyendo valores:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 5u\,(t-3)$$

$$2.5\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.08}q = 5u\,(t-3)$$

Dividiendo la ecuación entre la resistencia:

$$\frac{dq}{dt} + 5q = 2u\,(t-3)$$

Aplicando la transformada y resolviendo:

$$\pounds\left\{\frac{dq}{dt} + 5q = 2u\,(t-3)\right\}$$

$$sQ(s) - q(0) + 5Q(s) = 2\frac{e^{-3s}}{s}$$

Aplicando la condición inicial:

$$sQ(s) + 5Q(s) = 2\frac{e^{-3s}}{s}$$

Factorizando y despejando a $Q(S)$:

$$Q(s)\,(s+5) = 2\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$Q(s) = 2\frac{e^{-3s}}{s\,(s+5)}$$

Realizando la transformada inversa para obtener $q(t)$:

$$q(t) = 2\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s\,(s+5)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s\,(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

Obteniendo valores:

$$A = \frac{1}{5},\ B = -\frac{1}{5}$$

Sustituyendo los valores en la transformada inversa:

$$q(t) = 2\left[\frac{1}{5}\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\} - \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+5)}\right\}\right]$$

$$q(t) = \frac{2}{5}u\,(t-3) - \frac{2}{5}e^{-5(t-3)}u\,(t-3)$$

Problema 17. Determine la carga, $q(t)$, y la corriente, $i(t)$, en un circuito en serie, en el que $L = 1H$, $R = 20\Omega$, $C = 0.01F$, $E(t) = 120\sin 10t$ V, $q(0) = 0\ C$ e $i(0) = 0\ A$. ¿Cuál es la corriente de estado estable?

Solución:

Se sabe que el voltaje total es igual a:

$$E(t) = V_R + V_L + V_C$$

$$E(t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$E(t) = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$$

Sustituyendo valores:

$$120\sin 10t = 20\frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{0.01}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 100q = 120\sin 10t$$

Aplicando la transformada y resolviendo:

$$\pounds\left\{\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 100q = 120\sin 10t\right\}$$

$$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 20sQ(s) - 20q(0) + 100Q(s) = \frac{1200}{s^2+100}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$s^2Q(s) + 20sQ(s) + 100Q(s) = \frac{1200}{s^2+100}$$

Factorizando y despejando a $Q(S)$:

$$Q(s)\left(s^2+20s+100\right) = \frac{1200}{s^2+100}$$

$$Q(s)\left(s+10\right)^2 = \frac{1200}{s^2+100}$$

$$Q(s) = \frac{1200}{\left(s+10\right)^2\left(s^2+100\right)}$$

Realizando la transformada inversa para obtener a $q(t)$:

$$q(t) = 1200\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+10\right)^2\left(s^2+100\right)}\right\}$$

Resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{\left(s+10\right)^2\left(s^2+100\right)} = \frac{As+B}{s^2+100} + \frac{C}{s+10} + \frac{D}{\left(s+10\right)^2}$$

Obteniendo valores:

$$A = -\frac{3}{5},\ B = 0,\ C = \frac{3}{5},\ D = 6$$

Sustituyendo los valores en la transformada inversa:

$$q(t) = -\frac{3}{5}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+100}\right\} + \frac{3}{5}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\} + 6\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+10)^2}\right\}$$

$$q(t) = -\frac{3}{10}\sin 10t + \frac{3}{5}e^{-10t} + 6te^{-10t}$$

Aplicando la condición inicial de $i(0) = 0$:

$$i(t) = -\frac{3}{5}\cos 10t - 6e^{-10t} - 60te^{-10t} + 6e^{-10t}$$

$$i(t) = -\frac{3}{5}\cos 10t - 60te^{-10t}$$

Chapter 6

SERIES DE FOURIER

6.1 Funciones pares e impares

Una función es par si $f(x) = f(-x)$ y es impar si $f(-x) = -f(x)$. Gráficamente esto significa que una función par es simétrica con respecto al eje y, mientras que una función impar es antisimétrica. También es importante considerar que si se integra una función par en un intervalo simétrico entonces se cumple lo siguiente:

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = 2\int_{0}^{a/2} f(x)dx \tag{6.1}$$

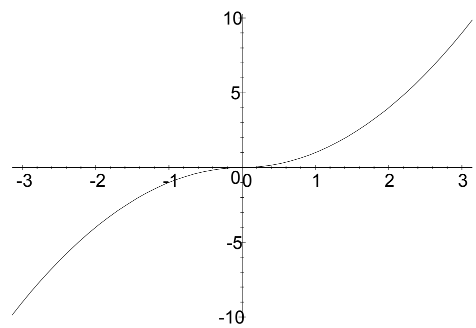
Mientras que si $f(x)$ es una función impar, entonces

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x)dx = 0 \tag{6.2}$$

Problema 1: En la siguiente función que se supone es periódica, de periodo 2π, indique si es función par, impar o ninguno de estos dos tipos.

$f(x) = x\,|x| \qquad (-\pi < x < \pi)$

Solución: La gráfica de la función en el intervalo $(-\pi < x < \pi)$ se muestra a continuación:



A partir de la gráfica se observa que la función es impar. Para demostrarlo se calcula $f(-x)$.

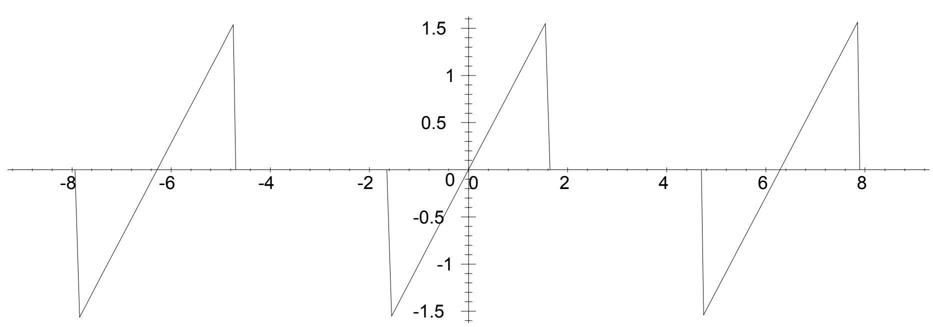
$f(-x) = -x| -x |= -x \mid x \mid= -f(x)$

Efectivamente, $f(x) = x \mid x \mid$ es una función impar.♠

Problema 2: Diga si la siguiente función es par o impar y explique porqué:

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{cases} \quad \text{con periodo } T = 2\pi$$

Solución: La función no está definida en un intervalo simétrico, pero como es periódica se repite cada $T = 2\pi$, la gráfica se ilustra en la siguiente figura:



A partir de la gráfica de la función se concluye que la función puede reescribirse en forma equivalente como:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<-\pi/2\\ x & -\pi/2<x<\pi/2\\ 0 & \pi/2<x<\pi\end{cases}$$

Se observa en la gráfica que la función es impar, a continuación se procede a realizar la demostración.

Se sabe que para funciones impares debe cumplirse $f(-x)=-f(x)$

Si cambiamos x por $-x$ en $f(x)$, obtenemos:

$$f(-x)=\begin{cases}0 & (-\pi<-x<-\pi/2) & \text{o sea } (\pi>x>\pi/2)\\ -x & (-\pi/2<-x<\pi/2) & \text{o sea } (-\pi/2>x>\pi/2)\\ 0 & (\pi/2<-x<\pi) & \text{o sea } (-\pi/2>x>-\pi)\end{cases}$$

o sea $f(-x)$ es equivalente a:

$$f(-x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x<-\pi/2)\\ -x & (-\pi/2<x<\pi/2)\\ 0 & (\pi/2<x<\pi)\end{cases}$$

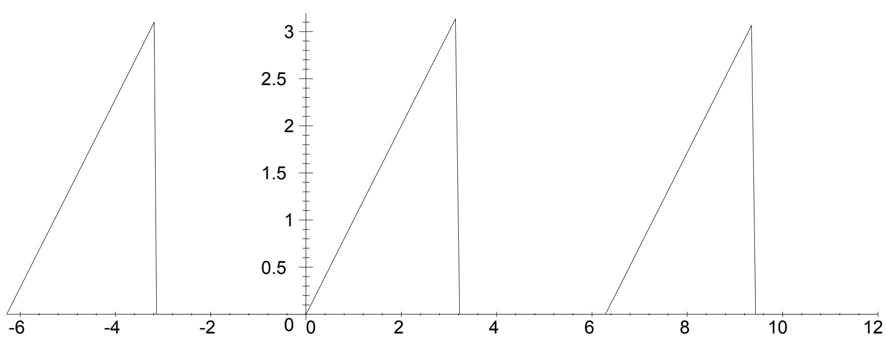
Y esta es precisamente $-f(x)$

Por lo tanto la función es impar.♠

Problema 3: Diga si la siguiente función es par o impar:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases} \quad \text{con periodo } T=2\pi$$

Solución: En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función:



A partir de la gráfica se observa que la función no es par ni impar. Sin embargo esto puede demostrarse de la siguiente forma:

$$f(-x)=\begin{cases}-x & 0>x>-\pi\\ 0 & -\pi>x>-2\pi\end{cases} \quad \text{o sea:}$$

$$f(-x) = \begin{cases} 0 & -2\pi < x < -\pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = -\begin{cases} 0 & -2\pi < x < -\pi \\ x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$ lo cual no es ni $f(x)$ ni $-f(x)$, por lo tanto la función no es par ni tampoco impar.♠

6.2 Funciones con periodo $T = 2\pi$

La serie de Fourier para una función periódica con periodo $T = 2\pi$ tiene la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{6.3}$$

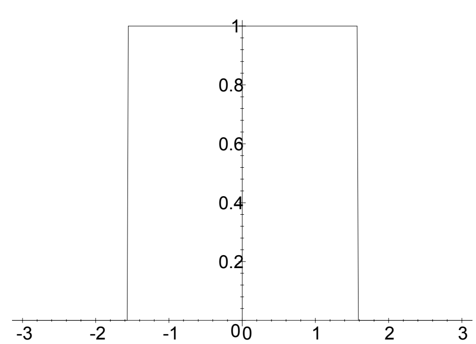
donde los coeficientes se calculan a partir de las fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx \tag{6.4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nxdx, n = 1, 2, 3, ... \tag{6.5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nxdx, n = 1, 2, 3, ... \tag{6.6}$$

Problema 1: Encontrar la serie de Fourier de la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, la cual se supone que tiene el periodo 2π.



Solución: La función puede escribirse en la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

En la serie de Fourier (6.3) $b_n = 0$ porque la función es par. Solo hay que calcular a_0 y a_n, a partir de las ecuaciones (6.4) y (6.5) usando el hecho de que la función es par se obtiene:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} dx \ = \ \frac{1}{2\pi} \ x \ |_0^{+\pi} \ = \ \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

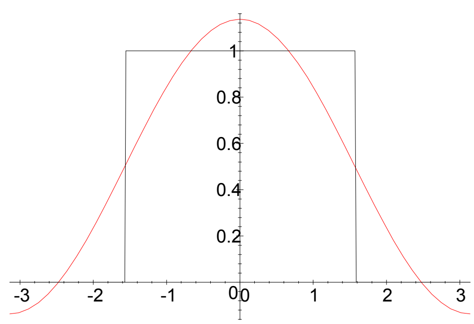
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(\frac{n\pi x}{2\pi}) \ dx \ = \ \frac{1}{\pi} \ \left[\frac{2}{n} \ \sin \ (\frac{nx}{2}) \right]_0^{+\pi} \ = \frac{2}{n\pi} \ \sin \ (\frac{n\pi}{2})$$

Por lo tanto la serie de Fourier queda como:

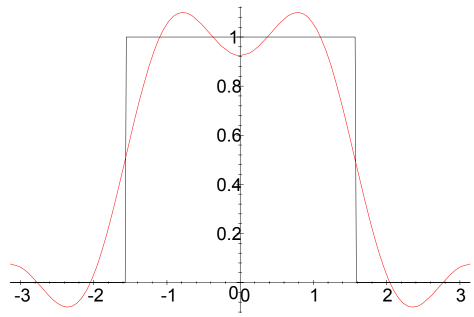
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \ \cos nx$$

La aproximación de la serie de Fourier a la función se muestra en pasos sucesivos en las siguientes figuras, se ilustran hasta seis sumas parciales de Fourier:

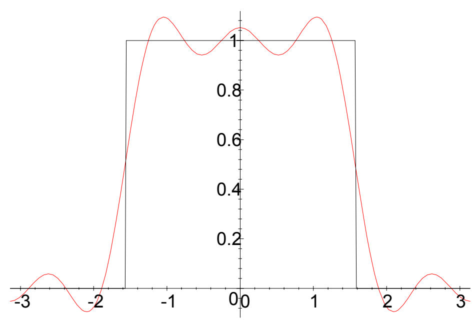
$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x$



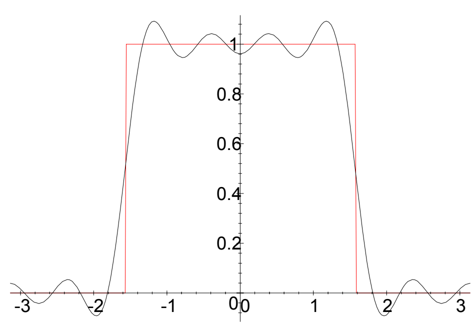
$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x)$



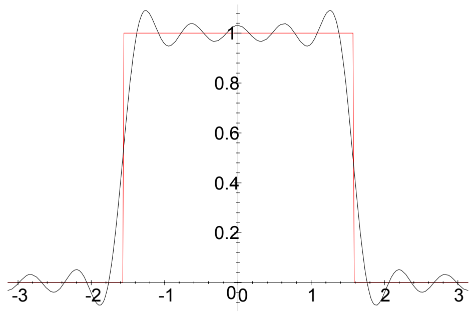
$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x)$



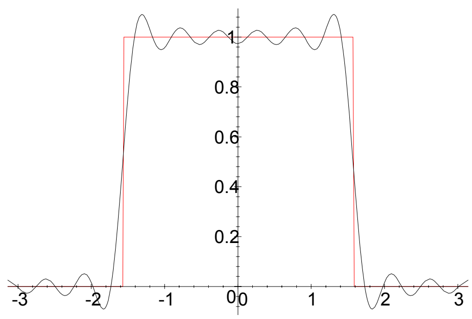
$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x)$



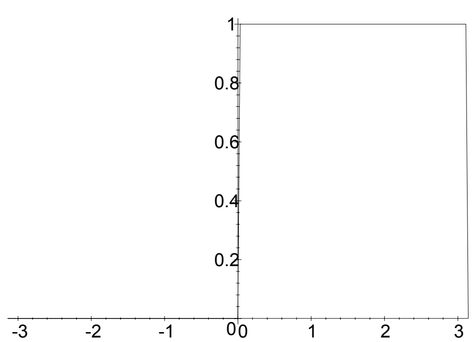
$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{9}\cos 9x)$



$$S_6 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{9}\cos 9x - \frac{1}{11}\cos 11x)$$



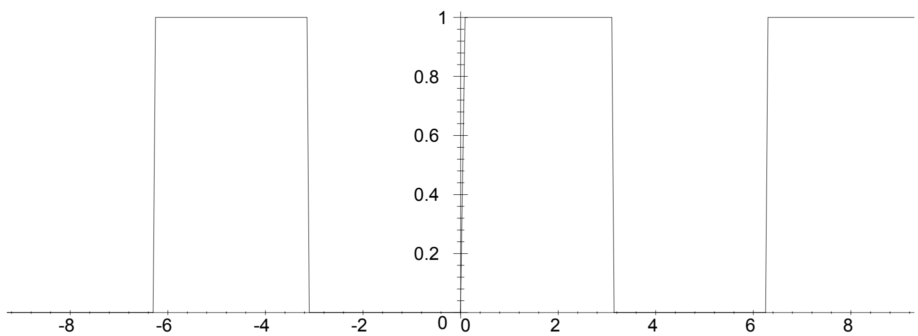
Problema 2: Encontrar la serie de Fourier de la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, la cual se supone que tiene el periodo $T = 2\pi$.



La función se escribe de la siguiente forma:

$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$; $T = 2\pi$

Como la función es periódica, en general la gráfica tiene la forma que se muestra en la siguiente figura:



Se procede a calcular los coeficientes de la serie de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\pi} 1dx\right] = \frac{1}{2\pi}x \mid_0^{+\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{+\pi} \cos nxdx\right] = \frac{1}{n\pi}\sin nx \mid_0^{+\pi} = 0$$

$$bn = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{+\pi} \sin nxdx\right] = -\frac{1}{n\pi}\cos nx \mid_0^{+\pi}$$

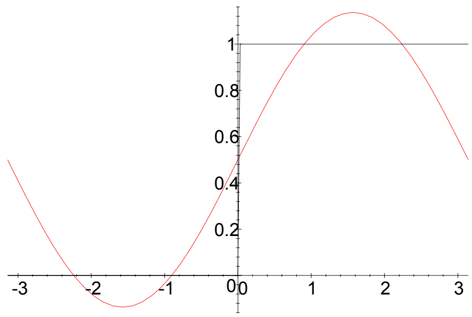
$$bn = \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Por lo tanto

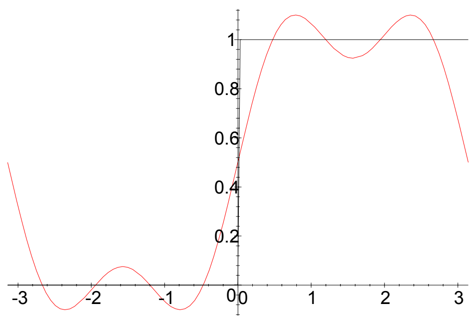
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n} \sin nx$$

La aproximación de la función por medio de la serie de Fourier se muestra en las siguientes figuras, se muestra la comparación de la función $f(x)$ con varias sumas parciales en el intervalo $(-\pi, \pi)$:

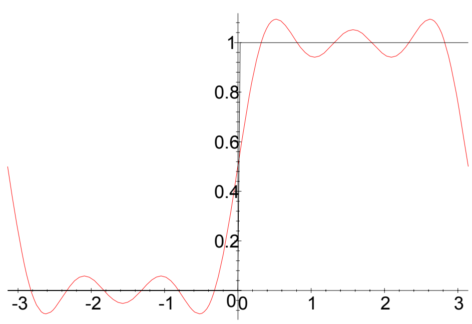
$S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x$, cuando $n = 2$ el coeficiente $a_2 = 0$, por lo tanto $S_1(x) = S_2(x)$



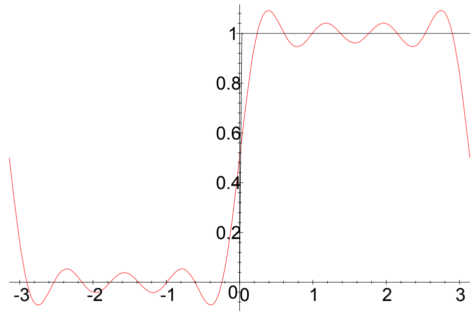
$S_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x)$



$S_5(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x)$



$S_7(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x)$

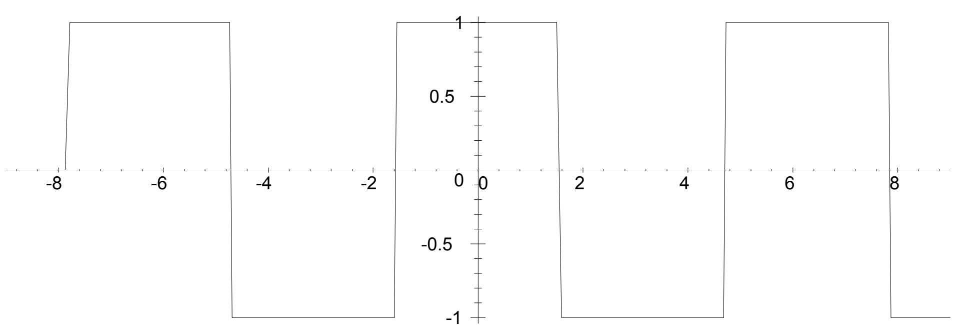


♠

Problema 3: Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función con periodo $T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

Solución: La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura:



Rescribiendo la función se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \text{ ; si } T = 2\pi$$

A partir de la gráfica se observa que esta es una función par, por lo tanto $b_n = 0$

Se procede a calcular los demás coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\pi} dx\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[-\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos nx dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\pi} \cos nx dx\right] =$$

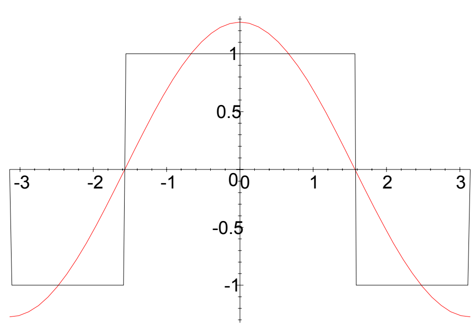
$$\frac{1}{n\pi}\left[-\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(-n\pi\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(\pi x\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

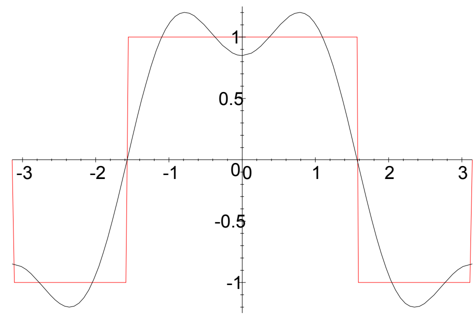
$$a_n = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

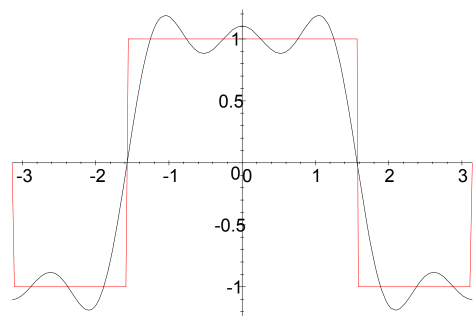
Por lo tanto la serie de Fourier es:

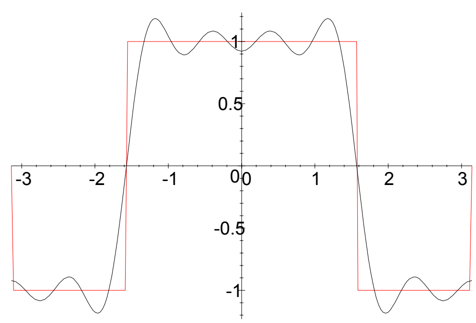
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right)\cos nx$$

En las siguientes gráficas se muestran las sumas parciales de Fourier con uno, dos, tres y cuatro términos, es decir: $S_1(x) = \frac{4}{\pi}\cos x$, $S_2(x) = \frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x)$, $S_3(x) = \frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x)$, $S_4(x) = \frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x)$ y como la serie va aproximando a la función.







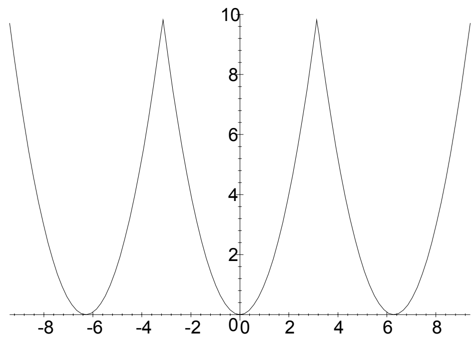


♠

Problema 4: Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función:

$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$, $T = 2\pi$

Solución: La gráfica se muestra en la siguiente figura, obviamente es una función par, por lo tanto $b_n = 0$.



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos nx dx$$

Integrando por partes

$u = x^2 \qquad dv = \sin nx dx$

$du = 2x dx \qquad v = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n} sennx - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} xsennxdx\right]$$

Integrando nuevamente por partes

$u = x \qquad dv = sennxdx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n} sennx - \frac{2}{n}[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx dx]\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n} sennx + \frac{2}{n}\left(\frac{x}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2} sennx\right)\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

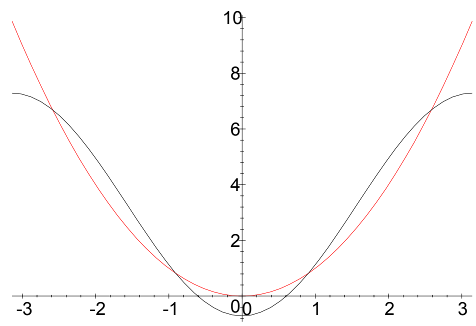
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{\pi^2}{n} senn\pi + \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^3} senn\pi\right] - \\ \left[\frac{\pi^2}{n} sen(-n\pi) - \frac{2\pi}{n^2}\cos(-n\pi) - \frac{2}{n^3} sen(-n\pi)\right]\end{array}\right\}$$

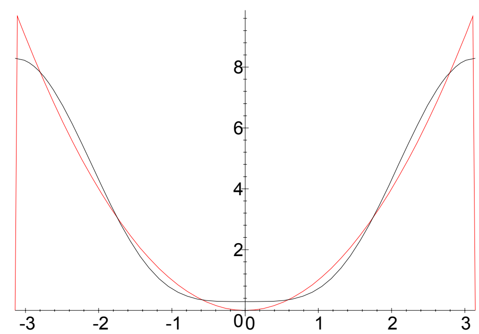
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right\} = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^{n.}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Se muestran ahora dos sumas parciales de Fourier: $S_1(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x$ y $S_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$:

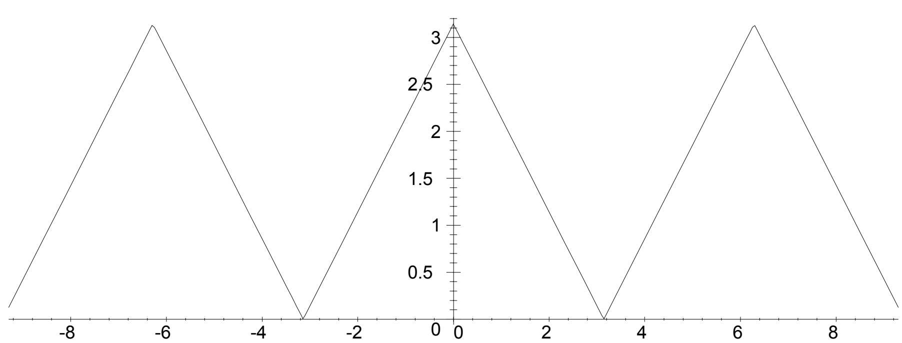




Problema 5. Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función, la cual tiene el periodo $T = 2\pi$:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura:



Como se observa $f(x)$ es una función par, por lo tanto solo hay que calcular a_0 y a_1:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)dx + \int_{0}^{+\pi}(\pi - x)dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[(\pi x + \frac{x^2}{2})\mid_{-\pi}^{0} + (\pi x - \frac{x^2}{2})\mid_{0}^{+\pi}\right] =$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2})\right] =$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(\pi^2) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx dx + \int_{0}^{+\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right]$$

Se realiza primero por partes la integral $\int x \cos nx dx$:
$u = x; du = dx$
$dv = \cos nx;\ v = \frac{1}{n}\sin nx$

$$\int x \cos nx dx = \frac{x}{n}\sin nx - \frac{1}{n}\int \sin nx dx = \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

Luego se sustituye en a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx + \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{0} +$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx - \frac{x}{n}\sin nx - \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{0}^{+\pi}$$

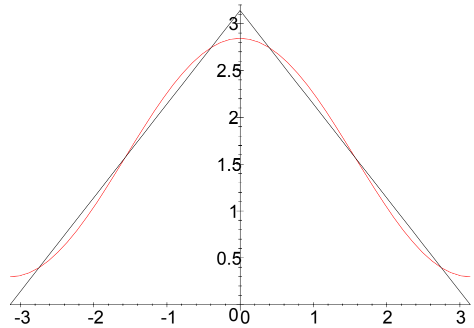
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right] + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi)$$

Por lo tanto la serie de Fourier queda como:

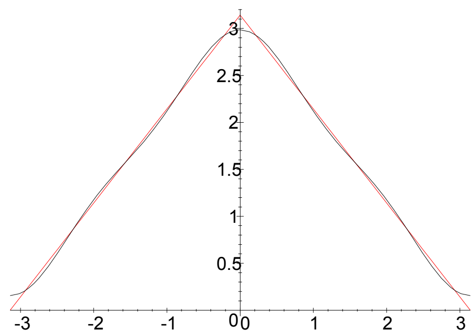
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1 - (-1)^n)\cos nx$$

Se muestran cuatro sumas parciales que ilustran el proceso de aproximación a la función:

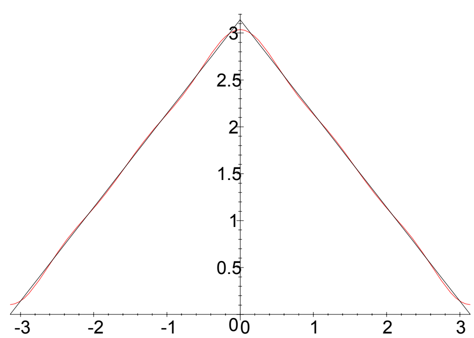
$$S_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(2\cos x)$$



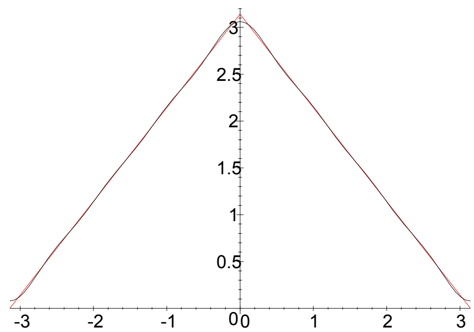
$$S_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(2\cos x + \frac{2}{9}\cos 3x)$$



$$S_5(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(2\cos x + \frac{2}{9}\cos 3x + \frac{2}{25}\cos 5x)$$



$$S_7(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(2\cos x + \frac{2}{9}\cos 3x + \frac{2}{25}\cos 5x + \frac{2}{49}\cos 7x)$$

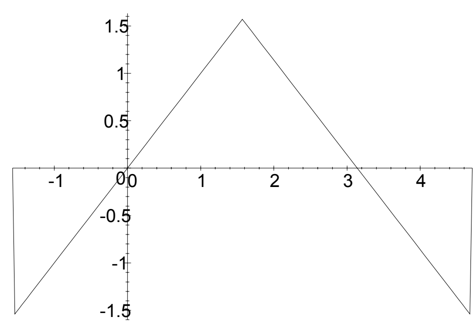


♠

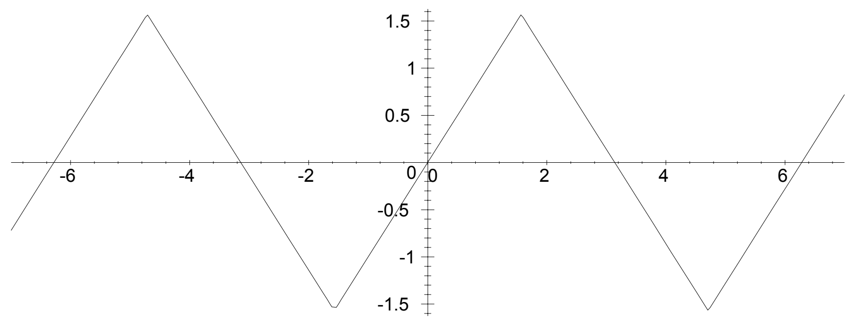
Problema 6. Encuentre la serie de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi/2, \pi/2) \\ \pi - x & (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \quad \text{con periodo } T = 2\pi$$

Solución: La gráfica de la función en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ se muestra a continuación:



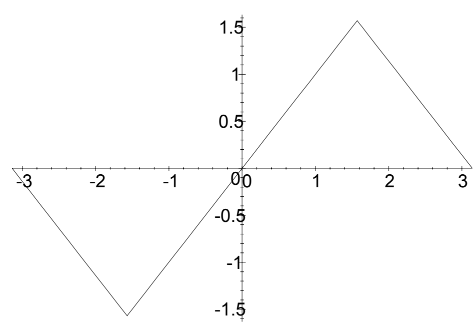
Como la función es periódica, en general la función tiene la forma siguiente:



Si se observa con cuidado la gráfica, se concluye que la función se puede escribir en forma equivalente en la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & (-\pi, -\pi/2) \\ x & (-\pi/2, \pi/2) \\ \pi - x & (\pi/2, \pi) \end{cases} \quad \text{con periodo } T = 2\pi$$

De esta forma se logra que la función esté definida en un intervalo simétrico. Para mayor claridad en la siguiente figura se muestra la gráfica en el intervalo $(-\pi, \pi)$:



Se observa también que la función es impar, por lo que se tiene que $a_0 = a_n = 0$. Por lo tanto solo es necesario calcular el coeficiente b_n en la expresión de la serie de Fourier.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\pi \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin nx dx - \int_{-\pi}^{-\pi/2} x \sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx dx +$$

$$+\pi \int_{\pi/2}^{+\pi} \sin nx dx - \int_{\pi/2}^{+\pi} x \sin nx dx] = \frac{1}{\pi}[\frac{\pi}{n} \cos nx \mid_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{\pi}{n} \cos nx \mid_{\pi/2}^{+\pi} -$$

$$- \int_{-\pi}^{-\pi/2} x \sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx dx - \int_{\pi/2}^{+\pi} x \sin nx dx]$$

La integral $\int x \sin nx dx$ se resuelve por partes:

$u = x \qquad dv = \sin x dx$

$du = dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx$

Por lo tanto:

$$\int x \sin nx dx = -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \int \cos nx dx = -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx$$

Sustituyendo y evaluando:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\{\frac{\pi}{n} \cos nx \mid_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{\pi}{n} \cos nx \mid_{\pi/2}^{+\pi} - \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx\right)_{-\pi}^{-\pi/2} +$$

$$+ \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx\right)_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx\right)_{\pi/2}^{+\pi} \} =$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\{\frac{\pi}{n} \left(\cos(-\frac{n\pi}{2}) - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(\frac{n\pi}{2})\right) - -\frac{\pi}{2n} \cos(-n\pi/2) -$$

$$-\frac{1}{n^2} \sin(-n\pi/2) + \frac{\pi}{n} \cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(-n\pi) - \frac{\pi}{2n} \cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2} \sin(n\pi/2) -$$

$$-\frac{\pi}{2n}\cos(-n\pi/2)-\frac{1}{n^2}\sin(-n\pi/2)+\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\sin(n\pi)-\frac{\pi}{2n}\cos(n\pi/2)+\frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2)\}$$

Simplificando todos los términos, tenemos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\right)\cos n\pi+\left(\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

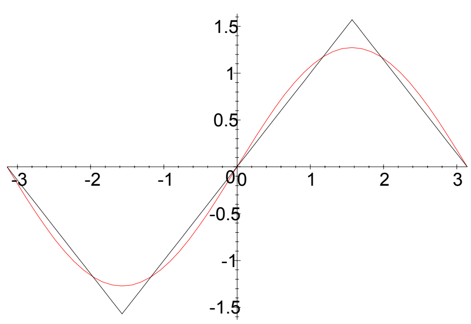
si n es par $\sin\frac{n\pi}{2}=0$, por lo tanto b_n es cero si n es par,
si n es impar $\sin\frac{n\pi}{2}=1,-1,1,...$

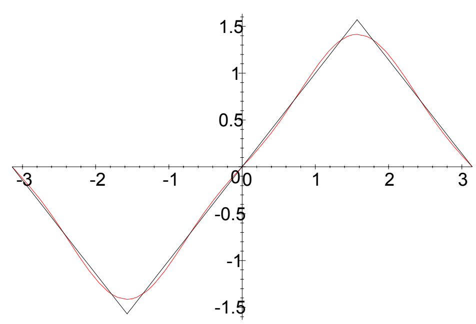
Finalmente la serie de Fourier queda:

$$f(x)=\sum_{n=impar}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=impar}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx =$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{9}\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5x-...\right)$$

La aproximación a la función en el intervalo $(-\pi,\pi)$ con uno y dos términos se observa en las siguientes figuras:





6.3 Funciones con periodo arbitrario

La serie de Fourier para funciones con periodo T arbitrario es:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x \tag{6.7}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx \tag{6.8}$$

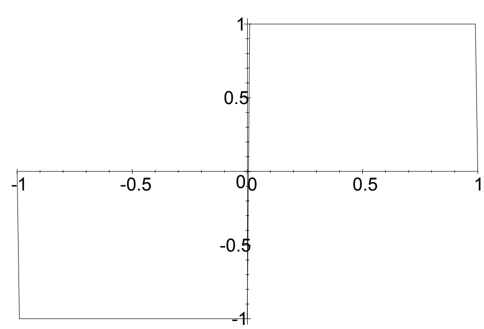
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}xdx \tag{6.9}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}xdx \tag{6.10}$$

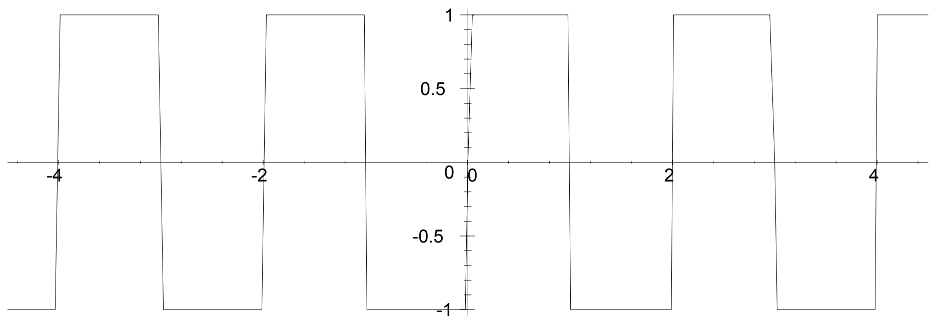
Problema 1. Encuentre la serie de Fourier de la siguiente función periódica:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \; ; \; T = 2$$

Solución: La gráfica en el intervalo $(-1, 1)$ es la siguiente:



Como la función es periódica, ésta se repite cada $T = 2$, la gráfica se muestra en la siguiente figura en un intervalo más amplio. No obstante los cálculos se realizan para aproximar a la función solamente en el intervalo $(-1, 1)$. En los demás puntos la aproximación es equivalente.



Dado que es una función impar, $a_n = a_0 = 0$; por lo tanto solo calculamos b_n:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}\right)dx$$

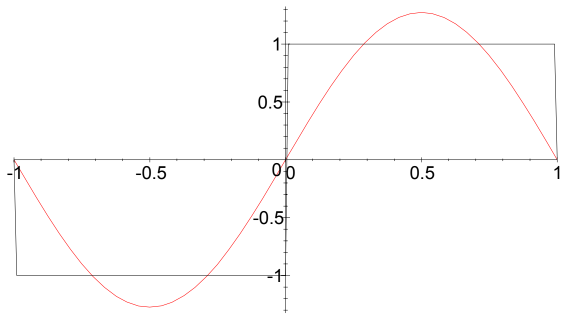
$$b_n = \frac{4}{2}\int_0^{2/2}\sin\left(\frac{2n\pi}{2}x\right)dx = 2\int_0^1 \sin\left(n\pi x\right)dx = 2\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$$

Por lo tanto la serie de Fourier queda:

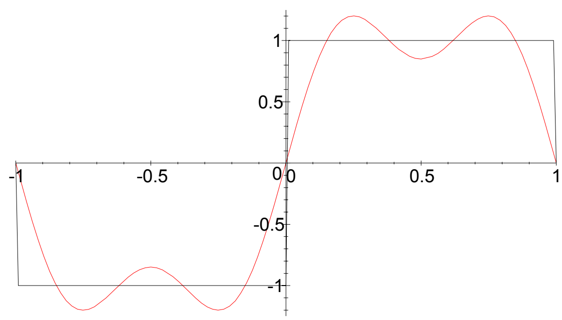
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\sin\left(n\pi x\right)\right)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + ...)$$

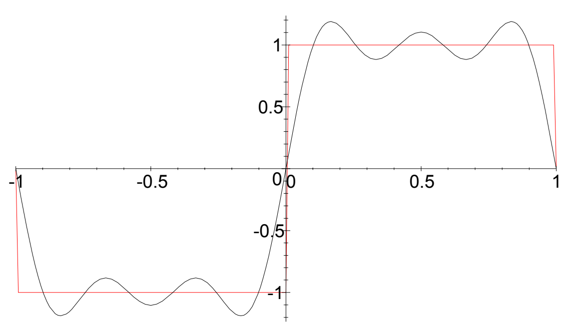
En la siguiente figura se ilustra el primer término de la serie de Fourier y como es que aproxima a la función. Obviamente la aproximación no parece muy buena, pero al tomar sucesivamente más términos la aproximación mejora.



Con dos términos en la suma la aproximación se muestra a continuación:

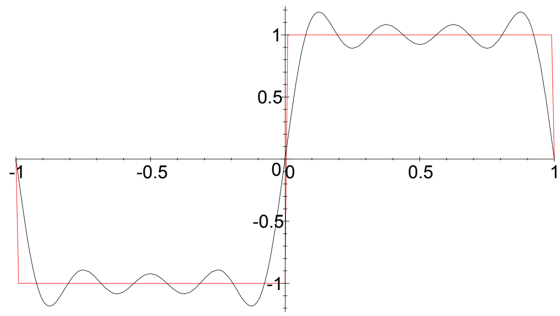


Con tres términos:

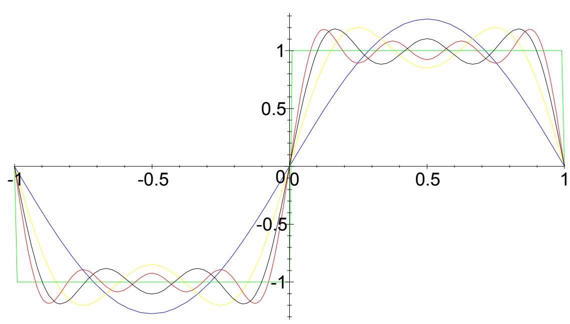


Por último con cuatro términos, es decir:

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi}(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \frac{\sin(7\pi x)}{7})$$



El proceso que muestra como la aproximación se mejora al tomar una mayor cantidad de términos se hace evidente, tanto al observar cada gráfica por separado como viendo el proceso en una sola gráfica como en la siguiente figura:

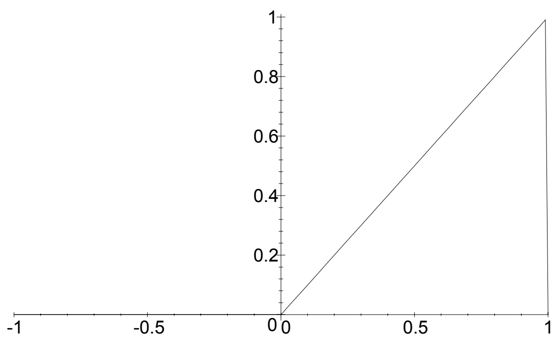


♠

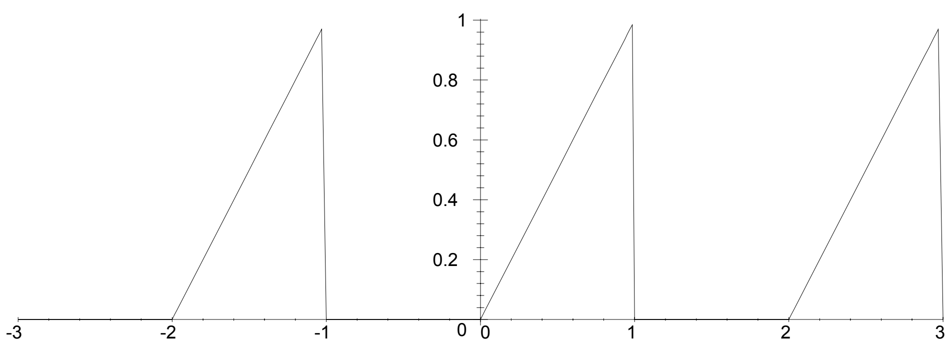
Problema 2: Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función con periodo $T = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Solución: La gráfica de la función se muestra a continuación en el intervalo $(-1, 1)$:



En general dado que la función es periódica, la gráfica tiene la siguiente forma:



La función no tiene paridad, por lo tanto hay que calcular todos los coeficientes de la serie de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} xdx\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

$$a_0 = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \left[\int_{-1}^{0} 0\cos n\pi x dx + \int_{0}^{1} x\cos n\pi x dx\right]$$

$u = x$; $du = dx$

$dv = \cos n\pi x; v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$

$$a_n = \left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_0^1$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \left[\int_{-1}^{0} 0\sin n\pi x dx + \int_0^1 x\sin n\pi x dx\right]$$

$u = x;\ du = dx$
$dv = \sin n\pi x;\ v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$

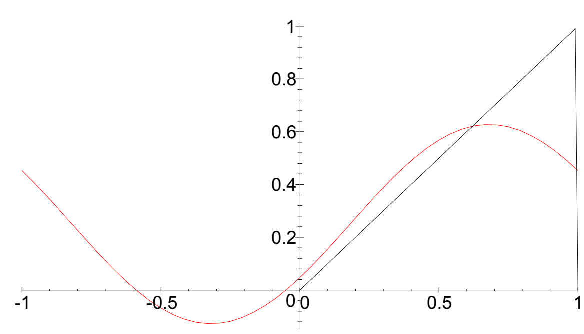
$$b_n = \left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1$$

$$b_n = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

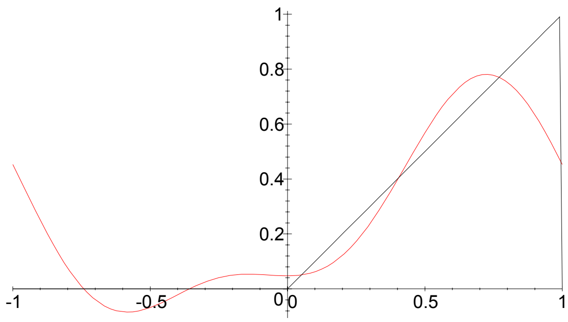
$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos n\pi x\right] - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x$$

Se muestran acontinuación cinco sumas sumas parciales y como estas van aproximando a la función.

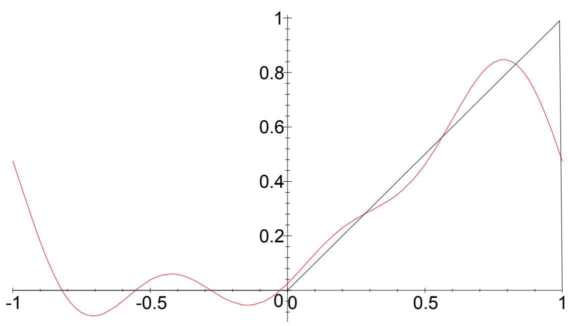
$S_1(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x$



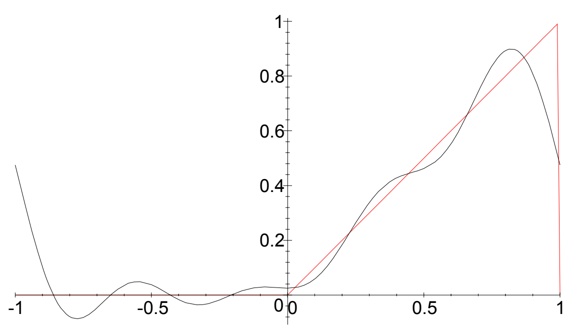
$S_2(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{1}{\pi}(-\sin \pi x + \frac{1}{2}\sin 2\pi x)$



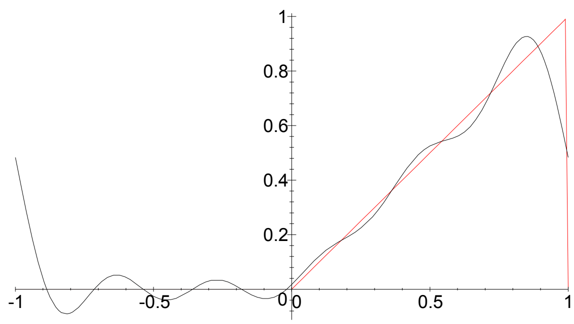
$S_3(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{1}{\pi}(-\sin \pi x + \frac{1}{2}\sin 2\pi x - \frac{1}{3}\sin 3\pi x)$



$S_4(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{1}{\pi}(-\sin \pi x + \frac{1}{2}\sin 2\pi x - \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 4\pi x)$



$S_5(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{2}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \frac{1}{\pi}(-\sin\pi x + \frac{1}{2}\sin 2\pi x - \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 4\pi x - \frac{1}{5}\sin 5\pi x)$

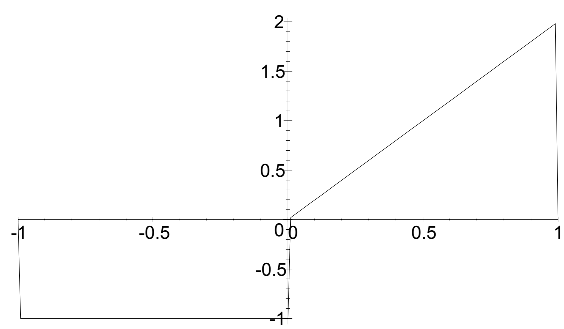


♠

Problema 3: Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función, con periodo $T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Solución: La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura:



La función no es par ni impar, es necesario calcular todos los coeficientes en la serie de Fourier:

$$f(x) = a_0 \ + \sum \ a_n \ \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \ + \sum \ b_n \ \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f\ (x)\ dx \ = \frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{0} dx + 2\int_0^1 xdx\right] =$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[-x|_{-1}^{0} + 2\frac{x^2}{2}|_0^1\right] = \frac{1}{2}\left[-1+1\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f\ (x)\ \cos\ n\pi x\ dx = -\int_{-1}^{0} \cos n\pi x dx + 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

se realiza una integración por partes: $u = x$; $du = dx$; $dv = \cos n\pi x dx$; $v = \frac{1}{n\pi}\ \sin n\pi x$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\ |_{-1}^{0}\ + 2\ \left[\frac{x}{n\pi} sen(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_0^1 =$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f\ (x)\sin(n\pi x)\ dx = -\int_{-1}^{0}\sin(n\pi x)dx + 2\int_0^1 x\ \sin(n\pi x)dx$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\ |_{-1}^{0}\ + 2\ \left[-\frac{x}{n\pi}\cos\ (n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right]_0^1$$

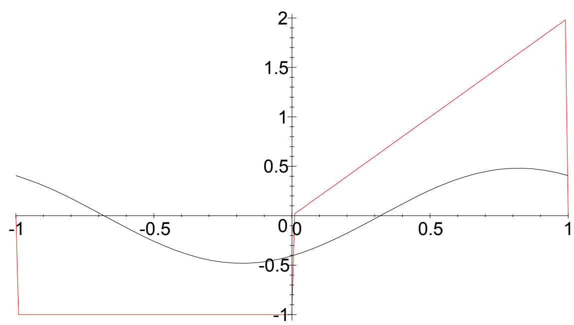
$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\ \right] + \frac{2}{n\pi}\left[-(-1)^n\ \right] = \frac{1}{n\pi}\left[1 - 3(-1)^n\ \right]$$

Por lo tanto la serie de Fourier se escribe como:

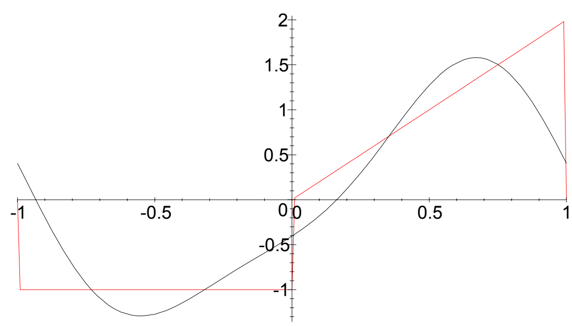
$$f\ (x) = \ \frac{2}{\pi^2}\sum \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2}\cos n\pi x + \frac{1}{\pi}\sum \frac{[1 - 3(-1)^n\ ]}{n}\sin n\pi x$$

En las siguientes figuras se muestran cuatro sumas parciales que muestran como la serie aproxima a la función.

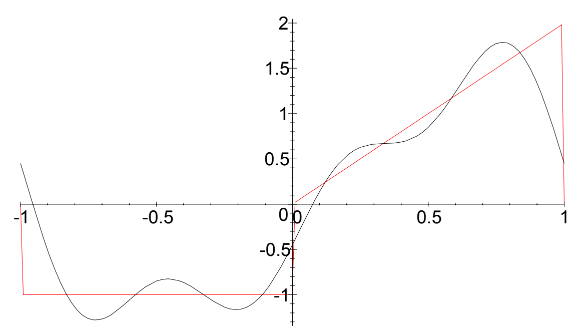
$S_1(x) = \frac{2}{\pi^2}(-2\cos(\pi x) + \frac{4}{\pi}\sin(\pi x))$



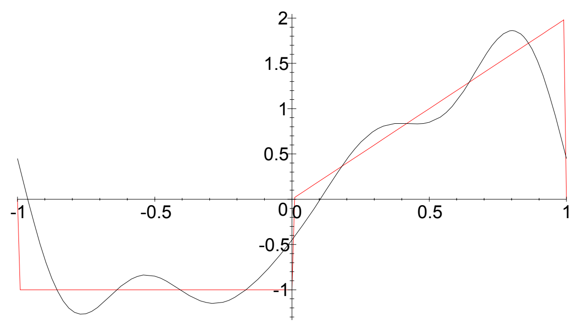
$S_2(x) = \frac{2}{\pi^2}(-2\cos(\pi x)) + \frac{2}{\pi}(2\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x))$



$S_3(x) = \frac{2}{\pi^2}(-2\cos(\pi x) - \frac{2}{9}\cos 3\pi x) + \frac{2}{\pi}(2\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{2}{3}\sin(3\pi x))$



$S_4(x) = \frac{2}{\pi^2}(-2\cos(\pi x) - \frac{2}{9}\cos 3\pi x) + \frac{2}{\pi}(2\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{2}{3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin 4\pi x)$



♠

6.4 Series de Fourier de funciones pares e impares

Aunque ya se ha aplicado, es conveniente recordar que si una función es par o impar entonces el trabajo para determinar la serie de Fourier puede simplificarse.

Si $f(x)$ es una función par, entonces la serie de Fourier es una serie cosenoidal de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x, n = 1, 2, ... \tag{6.11}$$

donde los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx \tag{6.12}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi}{T} x dx, n = 1, 2, ... \tag{6.13}$$

De la misma forma si $f(x)$ es una función impar, entonces la serie de Fourier es una serie senoidal de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x, n = 1, 2, ... \tag{6.14}$$

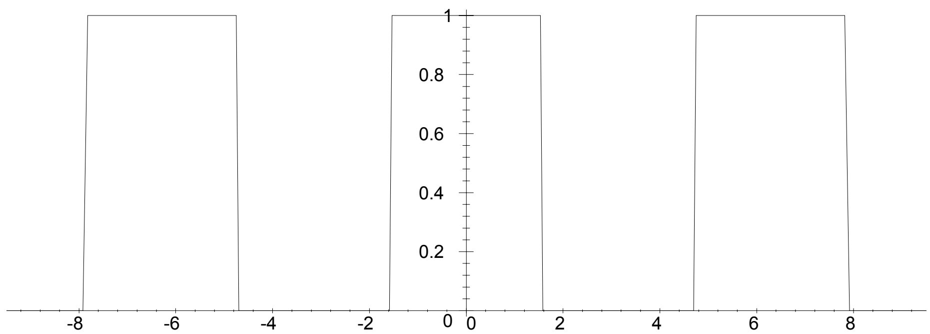
donde los coeficientes son:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}xdx, n = 1, 2, ... \tag{6.15}$$

Problema 1. Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad ; T = 2\pi$$

Solución: La función periódica se muestra en la figura siguiente, como se observa hay simetría con respecto al eje y.



A partir de la gráfica se observa que la función es equivalente a la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi, -\pi/2) \\ 1 & (-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & (\pi/2, \pi) \end{cases} \quad \text{con periodo } T = 2\pi$$

Esta función es par, por lo tanto $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(nx)\, dx = \frac{2}{n\pi}\left(\sin(nx)\right|_0^{\pi/2}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

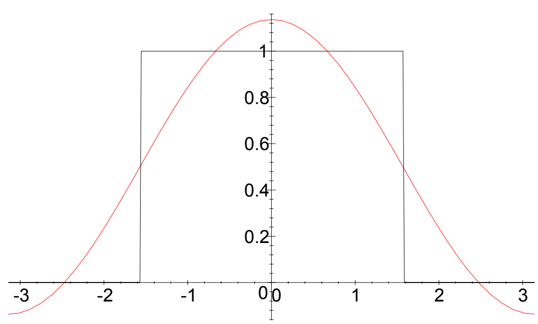
Por lo tanto la serie de Fourier para $f(x)$ queda de la siguiente forma:

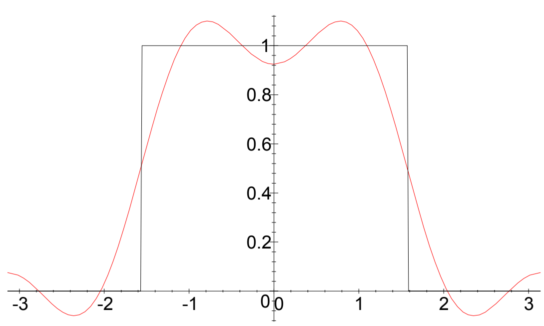
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\cos(nx)$$

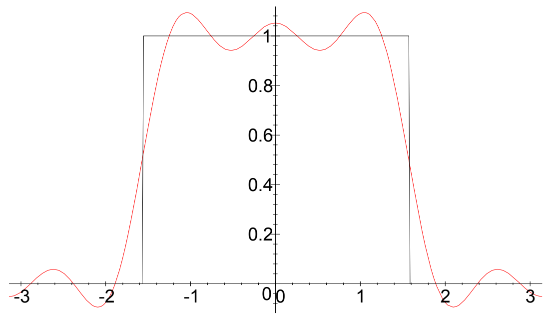
Que se puede escribir de forma equivalente como:

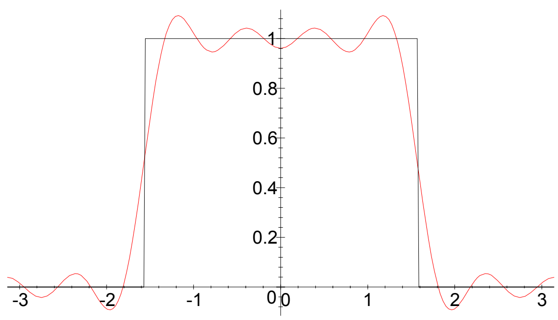
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cos(2k+1)\,x$$

En las siguientes gráficas se observa como la serie aproxima a la función, se grafican sumas parciales con uno, dos, tres y cuatro términos:







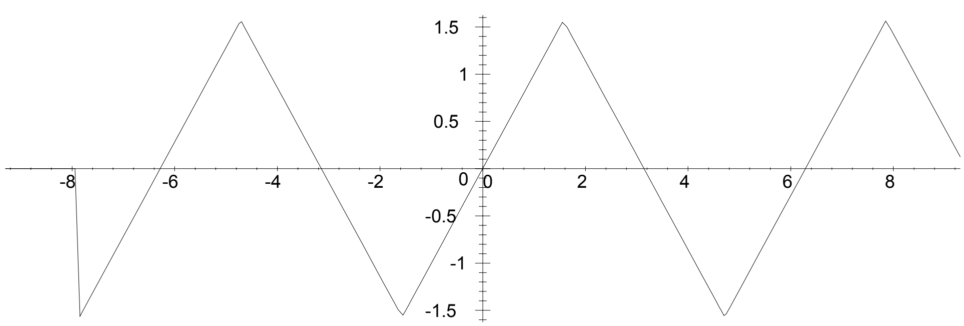


♠

Problema 2. Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función, la cual tiene el periodo $T = 2\pi$.

$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Solución: La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura:



A partir de la gráfica de la función esta puede reescribirse como:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < -\pi/2 \\ x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Este función es impar por lo que $a_n = a_0 = 0$
$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}} \pi \left(\pi - x\right) \sin nx dx\right]$, integrando por partes:
$u = x$
$du = dx$
$dv = \sin nx dx$
$v = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}} \pi \sin nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}} \pi x \sin nx dx\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{n}\left[\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}} \pi - \left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{\frac{\pi}{2}} \pi\right\}$$

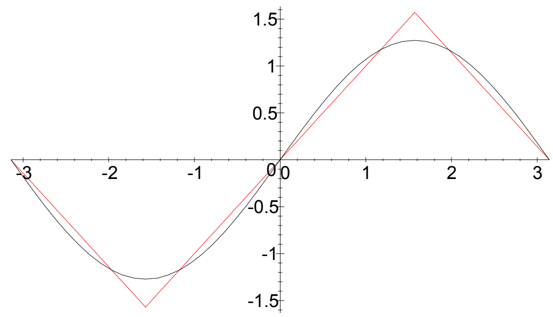
$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\begin{array}{c} \left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - \\ \left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) \end{array}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

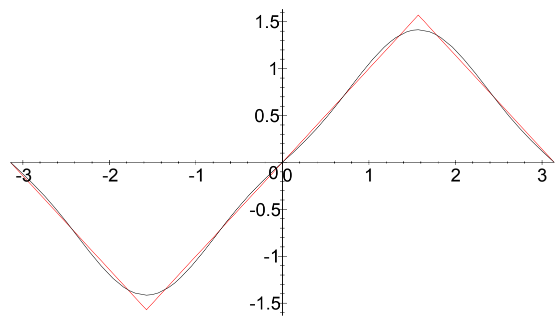
Por lo tanto la serie de Fourier se escribe como:

$$f\left(x\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx$$

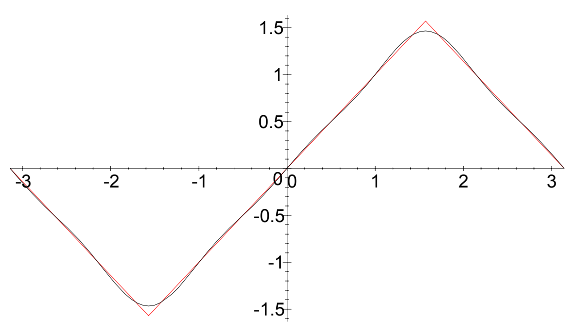
En este caso la serie converge muy rápido hacia la función, tal como se muestra en las siguientes figuras en las cuales se ilustran tres sumas parciales:
$S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$



$S_3(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x)$



$S_5(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x)$

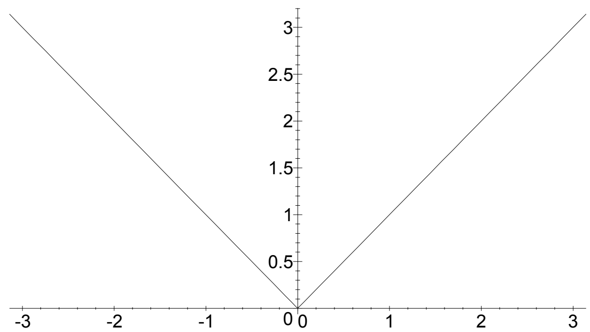


♠

Problema 3: Encontrar la serie de Fourier de la función siguiente, la cual tiene el periodo $T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: La gráfica se muestra en la siguiente figura:



Se procede a calcular la serie de Fourier, pero $b_n = 0$ porque $f(x)$ es una función par.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{+\pi} x dx \ = \ \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \ |_0^{+\pi} \right) = \ \frac{1}{\pi} \ \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} x \cos nx dx$$

realizamos una integración por partes: $u = x$; $du = dx$; $dv = \cos nx dx$; $v = \frac{1}{n} \sin nx$

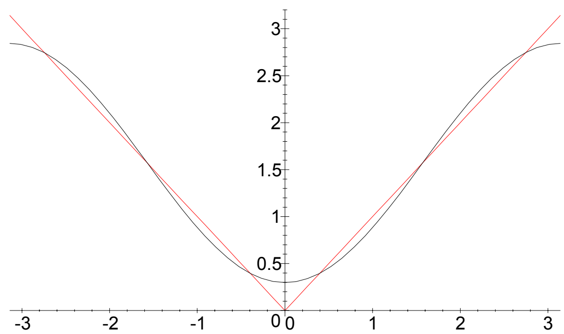
$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx|_0^{+\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{+\pi} \sin nx dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \left((-1^n) - 1 \right) \right] =$$

$$a_n = \frac{2}{\pi \ n^2} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

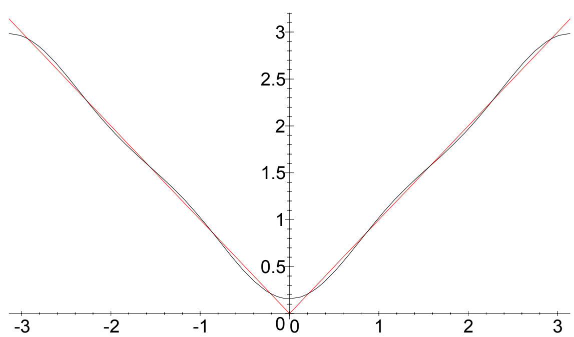
$$f \ (x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\left[(-1)^n - 1 \right]}{n^2} \cos nx$$

En este caso la aproximación con uno y dos términos se muestra a continuación, la convergencia se realiza rápidamente según se puede observar.

$S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$



$S_2(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(-2\cos x - \frac{2}{9}\cos 3x)$

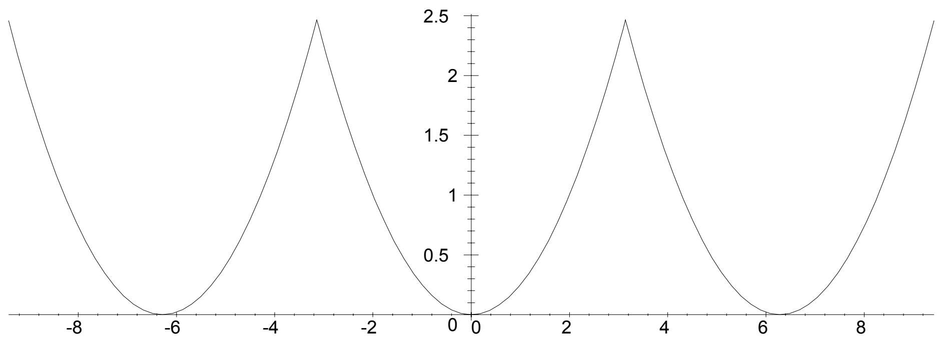


♠

Problema 4. Encontrar la serie de Fourier de la función, la cual se supone que tiene el periodo $T = 2\pi$.

$f(x) = \frac{x^2}{4}\ (-\pi < x < \pi)$

Solución: La gráfica de la función se muestra a continuación:



Como es una función par, $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0 \pi \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{4\pi}\frac{x^3}{3} \mid_0 \pi = \frac{\pi^2}{12}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0 \pi \frac{x^2}{4} \cos nx dx$$

Ya se había encontrado que
$\int x^2 \cos nx dx = \frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx$, por lo tanto:

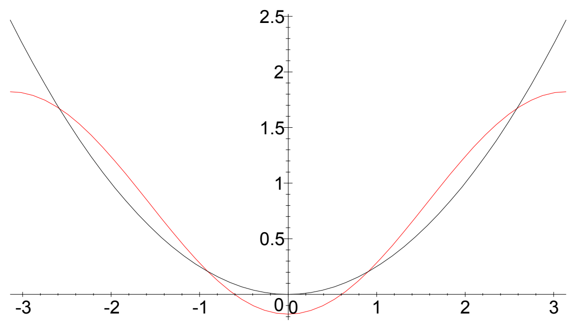
$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0 \pi x^2 \cos nx dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx\right]_0 \pi =$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi\right] = \frac{1}{n^2} \cos n\pi$$

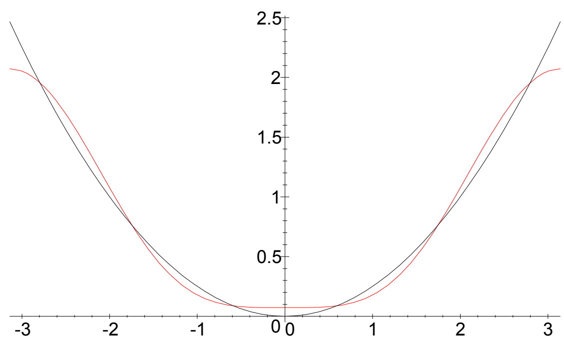
Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

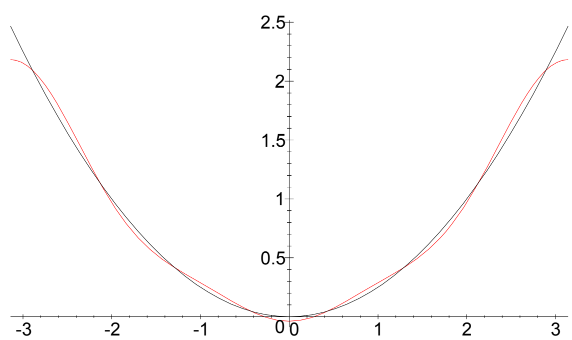
En las siguientes figuras se muestran tres sumas parciales en donde se observa como la serie de Fourier aproxima a la función:
$S_1(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x$



$S_2(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x$



$S_3(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x$



♠

Problema 5. Demostrar que $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}$

Solución: Se encontró en el problema 1 de esta sección que si $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$,entonces la serie de Fourier para esta función está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\cos nx$$

si se hace $x = 0$ en esta expresión

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...)$$

De donde se obtiene lo que se pide, es decir,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\spadesuit$$

Problema 6. Demostrar que $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ... = \frac{\pi^2}{12}$

Solución: Se tiene que si $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \in (-\pi, \pi)$, ya se demostró en el problema 4 de esta sección que la serie de Fourier para esta función está dada por:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

si se hace $x = 0$ en esta expresión

$$0 = \frac{\pi^2}{12} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - ...$$

De donde se obtiene lo que se pide, o sea,

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ...\spadesuit$$

6.5 Desarrollos de medio rango

Si una función está solamente definida sobre un intervalo finito $[0, l]$ de cualquier forma puede obtenerse su serie de Fourier realizando una extensión periódica, la cual puede ser par o impar. Se escribe $T = 2l$ en las ecuaciones de la serie de Fourier para funciones pares e impares. Por ejemplo, si se hace una extensión par se obtiene la siguiente serie cosenoidal,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \tag{6.16}$$

y los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)dx \tag{6.17}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} xdx, n = 1, 2, ... \tag{6.18}$$

Para una extensión impar se obtiene una serie senoidal,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{6.19}$$

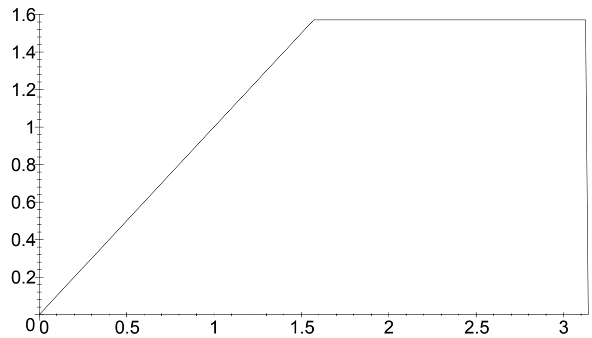
y los coeficientes son:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} xdx, n = 1, 2, ... \tag{6.20}$$

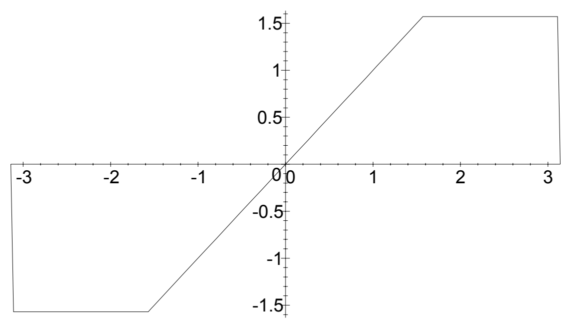
Problema 1. Halle la serie senoidal de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & (0, \pi/2) \\ \frac{\pi}{2} & (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Solución: La gráfica de esta función se muestra a continuación.



Para poder obtener la serie de Fourier se puede realizar una extensión par o una extensión impar. Como se pide calcular una serie senoidal se necesita realizar una extensión impar, según se muestra en la siguiente figura:



Por lo tanto, para obtener la serie senoidal se necesita solamente calcular b_n, para ello se elige $l = \pi$ en la fórmula para b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0 \pi f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} x \sin nx dx + \frac{\pi}{2} \int_{\pi/2} \pi \sin nx dx \right]$$

Hay que hacer una integración por partes: $\begin{matrix} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{matrix}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\{\left(-\frac{x}{n}\cos nx\,|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos nx dx\right) + \left(-\frac{\pi}{2n}\cos nx\,|_{\pi/2}^{+\pi}\right)\}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\{\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)_0^{\pi/2} + \left(-\frac{\pi}{2n}\cos nx\,|_{\pi/2}^{+\pi}\right)\}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\{-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\cos n\pi + \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\}$$

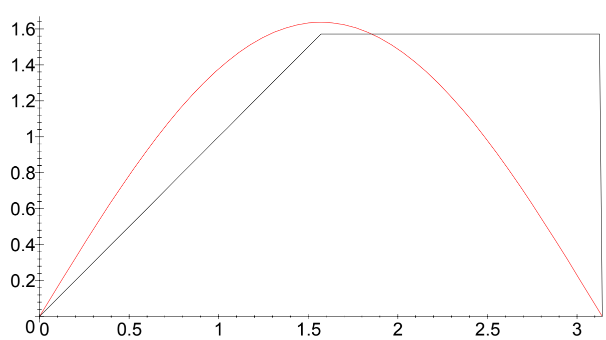
$$b_n = \frac{2}{\pi}\{\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\cos n\pi\}$$

Finalmente la serie de Fourier queda:

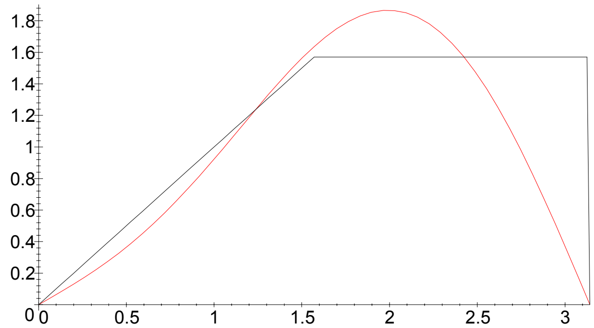
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}(-1)^n)\sin nx$$

La aproximación con varias sumas parciales se muestra a continuación. La aproximación va mejorando conforme se toma una mayor cantidad de términos.

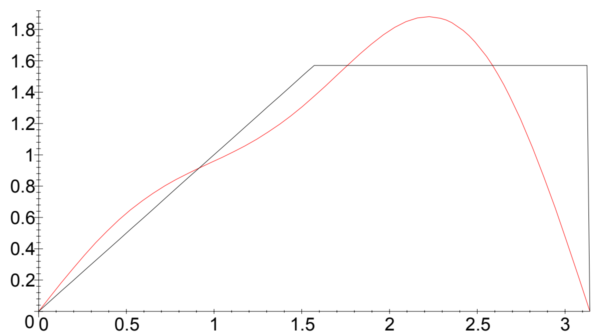
$S_1(x) = \frac{2}{\pi}(1 + \frac{\pi}{2})\sin x$



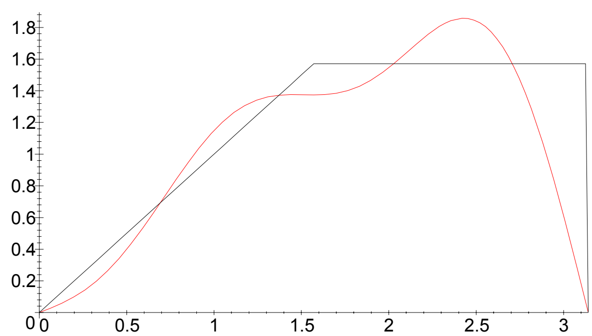
$S_2(x) = \frac{2}{\pi}((1 + \frac{\pi}{2})\sin x + (-\frac{\pi}{4})\sin 2x))$



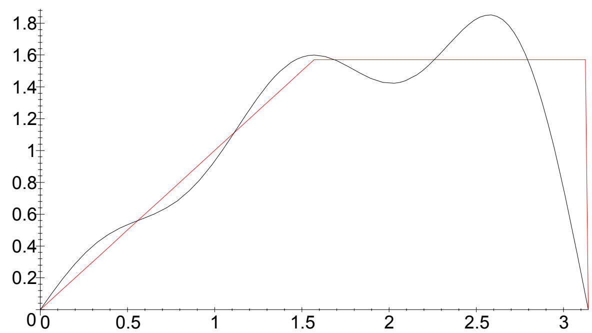
$S_3(x) = \frac{2}{\pi}((1+\frac{\pi}{2})\sin x + (-\frac{\pi}{4})\sin 2x + (-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{6})\sin 3x)$



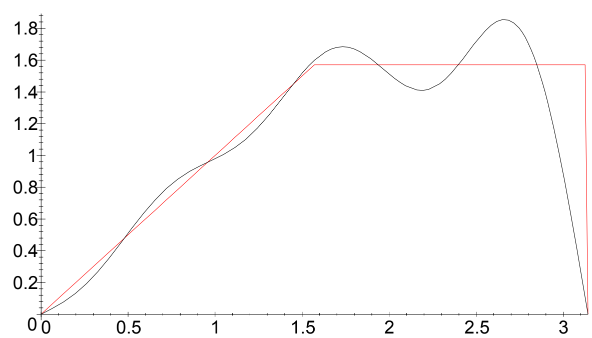
$S_4(x) = \frac{2}{\pi}((1+\frac{\pi}{2})\sin x + (-\frac{\pi}{4})\sin 2x + (-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{6})\sin 3x + (-\frac{\pi}{8})\sin 4x)$



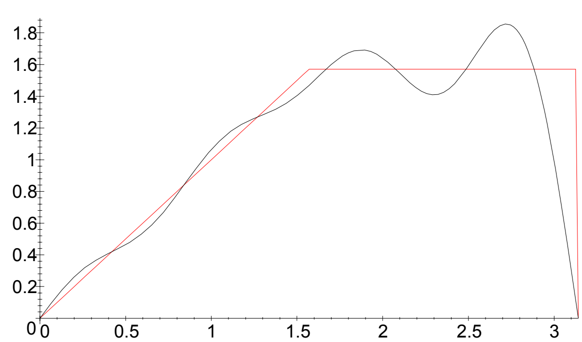
$S_5(x) = \frac{2}{\pi}((1+\frac{\pi}{2})\sin x + (-\frac{\pi}{4})\sin 2x + (-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{6})\sin 3x + (-\frac{\pi}{8})\sin 4x + (\frac{1}{25}+\frac{\pi}{10})\sin 5x)$



$S_6(x) = \frac{2}{\pi}((1+\frac{\pi}{2})\sin x + (-\frac{\pi}{4})\sin 2x + (-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{6})\sin 3x + (-\frac{\pi}{8})\sin 4x + (\frac{1}{25}+\frac{\pi}{10})\sin 5x + (-\frac{\pi}{12})\sin 6x)$



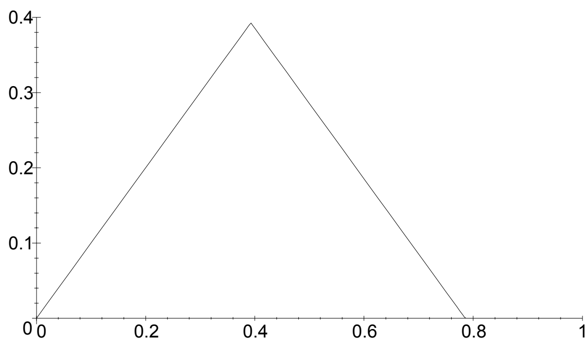
$S_7(x) = \frac{2}{\pi}((1+\frac{\pi}{2})\sin x + (-\frac{\pi}{4})\sin 2x + (-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{6})\sin 3x + (-\frac{\pi}{8})\sin 4x + (\frac{1}{25}+\frac{\pi}{10})\sin 5x + (-\frac{\pi}{12})\sin 6x + (-\frac{1}{49}+\frac{\pi}{14})\sin 7x)$



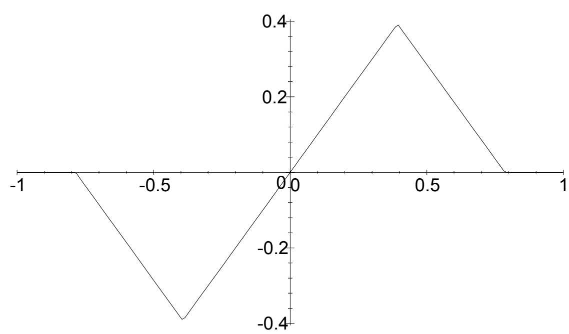
Problema 2. Halle la serie senoidal de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & (0, \pi/8) \\ \frac{\pi}{4} - x & (\pi/8, \pi/4) \end{cases}$$

Solución: La gráfica de esta función se muestra a continuación.



Para poder obtener la serie de Fourier se puede realizar una extensión par o una extensión impar. Como se pide calcular una serie senoidal se necesita realizar una extensión impar, según se muestra en la siguiente figura:



Por lo tanto, para obtener la serie senoidal se necesita solamente calcular b_n, para ello se elige $l = \frac{\pi}{4}$ en la fórmula:

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ realizando el cálculo:

$$b_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} f(x)\sin 4nx dx$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\int_0^{\pi/8} x\sin 4nxdx + \frac{\pi}{4}\int_{\pi/8}^{\pi/4}\sin 4nxdx - \int_{\pi/8}^{\pi/4} x\sin 4nxdx\right]$$

Hay que hacer una integración por partes: $\begin{array}{cc} u = x & dv = \sin(4nx)dx \\ du = dx & v = -(4n)^{-1}\cos(4nx) \end{array}$

$b_n = \frac{8}{\pi}\{\left(-\frac{x}{4n}\cos 4nx\mid_0^{\pi/8} + \frac{1}{4n}\int_0^{\pi/8}\cos 4nxdx\right) + \left(-\frac{\pi}{16n}\cos 4nx\mid_{\pi/8}^{\pi/4}\right)$
$-\left(-\frac{x}{4n}\cos 4nx\mid_{\pi/8}^{\pi/4} + \frac{1}{4n}\int_{\pi/8}^{\pi/4}\cos 4nxdx\right)\}$

$b_n = \frac{8}{\pi}\{-\frac{x}{4n}\cos 4nx\mid_0^{\pi/8} + \frac{1}{16n^2}\sin 4nx\mid_0^{\pi/8} - \frac{\pi}{16n}\cos 4nx\mid_{\pi/8}^{\pi/4} + \frac{x}{4n}\cos 4nx\mid_{\pi/8}^{\pi/4}$
$-\frac{1}{16n^2}\sin 4nx\mid_{\pi/8}^{\pi/4}\}$

$b_n = \frac{8}{\pi}\{-\frac{\pi}{32n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{16n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{16n}\cos n\pi + \frac{\pi}{16n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{16n}\cos n\pi -$
$\frac{\pi}{32n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{16n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\}$

$b_n = \frac{8}{\pi}\{\left(-\frac{\pi}{32n} + \frac{\pi}{16n} - \frac{\pi}{32n}\right)\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{1}{16n^2} + \frac{1}{16n^2}\right)\sin\frac{n\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{16n} + \frac{\pi}{16n}\right)\cos n\pi\}$

$$b_n = (\frac{8}{\pi})\frac{2}{16n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Debe tomarse en cuenta que:

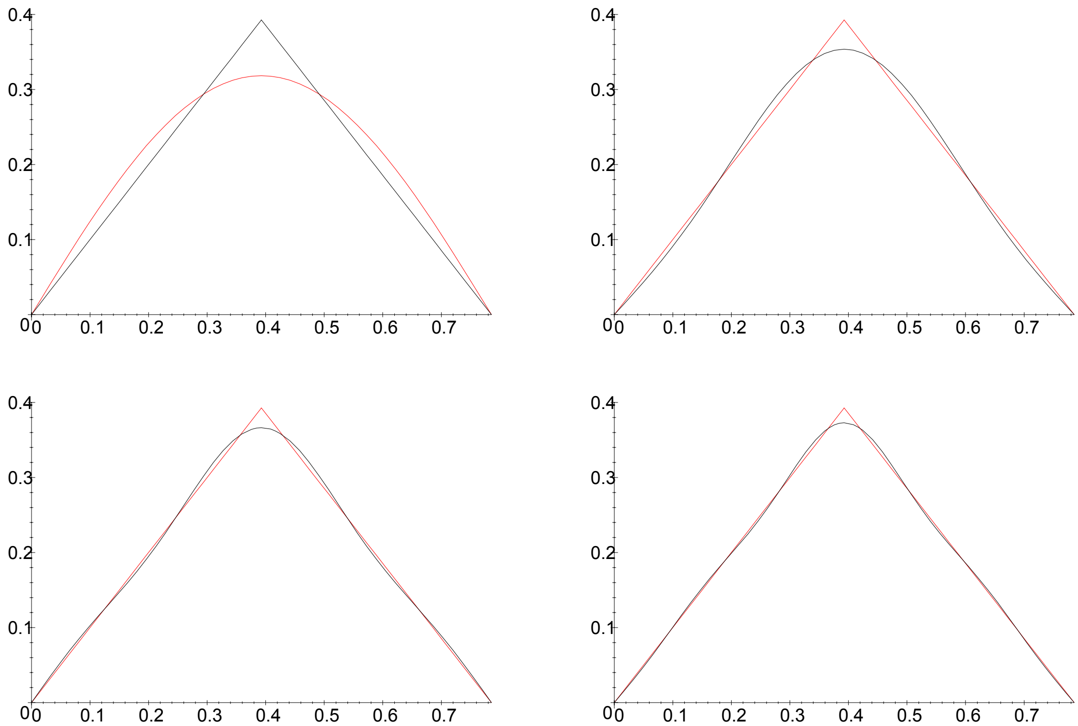
si n es par $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$
si n es impar $\sin\frac{n\pi}{2} = 1, -1, 1, ...$

Finalmente la serie de Fourier queda:

$$f(x) = \sum_{n=impar}^{\infty} b_n \sin 4nx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=impar}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin 4nx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\sin 4x - \frac{1}{9}\sin 12x + \frac{1}{25}\sin 20x - ...\right)$$

La aproximación con uno, dos, tres y cuatro términos se muestra a continuación. La aproximación va mejorando conforme se toma una mayor cantidad de términos.



♠

Problema 3. Representar la función $f(x)$ que se da, mediante una serie cosenoidal de Fourier.

$f(x) = x^2 \qquad\qquad (0 < x < l)$

Solución: Se hace una extensión par, de tal forma que $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{1}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3}l^2$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Hacemos la integración por partes: $\begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos(\frac{n\pi x}{l})dx \\ du = 2xdx & v = \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} \end{matrix}$

$$a_n = \frac{2}{l}\left[\frac{l}{n\pi}x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \frac{2l}{\grave{n}\pi}\int x\sin(\frac{n\pi x}{l})\right]_0^l$$

Hacemos otra vez integración por partes: $\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\ du = dx & v = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} \end{array}$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - 2\left(\frac{-l}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \int \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right)\right]_0^l$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - 2\left(\frac{-l}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^l$$

$$a_n = 2\left[\frac{l^2}{n\pi}\sin n\pi + \frac{2l^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{2l^2}{n^3\pi^3}\sin n\pi\right] = l^2\frac{4\cos n\pi}{n^2\pi^2}$$

Por lo tanto la serie de Fourier queda como:

$$f(x) = \frac{1}{3}l^2 + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}l^2 - \frac{4l^2}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) - \frac{1}{16}\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + ...\right] \spadesuit$$

Problema 4. Encontrar una serie cosenoidal de Fourier para la siguiente función:

$f(x) = \sin\frac{\pi}{l}x$, $(0 < x < l)$

Solución: Se hace una extensión par, de tal forma que solamente hay que calcular los coeficientes a_0 y a_n:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi}{l}xdx = \frac{-1}{l}\left[\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi}{l}x\right]_0^l = -\frac{1}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{l}x\right]_0^l$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

Para encontrar $a_n$usamos la identidad
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right) + \sin(a-b)\right]$

$$a_n = \frac{2}{l}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^l \sin\left(\frac{\pi x}{l} + \frac{n\pi x}{l}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{l} - \frac{n\pi x}{l}\right) dx =$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[\sin\frac{(n+1)\pi}{l}x + \sin\frac{(1-n)\pi}{l}x\right] dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\left[-\frac{l}{(n+1)\pi}\cos(n+1)\frac{\pi x}{l} - \frac{l}{(1-n)\pi}\cos(1-n)\frac{\pi x}{l}\right]_0^l$$

$$a_n = \frac{1}{l}\left[\frac{-l}{(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi - \frac{l}{(1-n)\pi}\cos(1-n)\pi + \frac{l}{(n+1)\pi} + \frac{l}{(1-n)\pi}\right]$$

esto es válido solamente si $n \neq 1$

Por esto el a_n queda como

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(n+1)}\left(1-(-1)^{n+1}\right) - \frac{1}{(n-1)}\left(1-(-1)^{1-n}\right)\right], n = 2, 3, 4...$$

Para encontrar a_1:

$$a_1 = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi}{l}xdx = \frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi x}{l}dx = -\frac{1}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{l}\ |_0^l = 0$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)}(1-(-1)^{n+1}) - \frac{1}{(n-1)}(1-(-1)^{1-n})\right]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)}(1-(-1)^{n+1}) - \frac{1}{(n-1)}(1-(-1)^{1-n})\right]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{l}x + \frac{1}{15}\cos\frac{4\pi}{l}x + \frac{1}{35}\cos\frac{6\pi}{l}x + ...)\spadesuit$$

Chapter 7

Las funciones de Bessel

Antes de proceder a la resolución de problemas se revisarán algunos antecedentes de las funciones de Bessel.

7.1 La función gamma

La función gamma se define como:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u} du \tag{7.1}$$

tiene la propiedad:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{7.2}$$

la cual se demuestra fácilmente usando integración por partes. La ecuación (7.1) es una relación de recurrencia para la función gamma.

Como:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u} du = -e^{-u}\Big|_0^\infty = 1$$

se tiene

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!, \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

Por lo tanto

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{7.3}$$

La función gamma es una generalización del factorial, por ejemplo, a continuación se demuestra que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Sea

$$I = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du$$

si se hace $u = x^2$ se obtiene:

$$I = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Entonces

$$I^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

usando coordenadas polares para evaluar esta integral

$$I^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \pi$$

de donde fácilmente se obtiene lo que se quería demostrar.

Con este resultado y usando la ecuación (7.2) se obtiene:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \cdots$$

Por lo tanto, para determinar la función gamma de cualquier número positivo es suficiente conocer sus valores en el intervalo $(0, 1)$. En cualquier manual de tablas matemáticas están tabulados estos valores.

A partir de la ecuación (7.2) se puede extender el rango de definición de la función gamma para $n < 0$, así por ejemplo:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}, \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}, \cdots$$

Si en la ecuación (7.2) se coloca $n = 0$, se tiene $1 = 0\Gamma(0)$, de donde se tiene $1/\Gamma(0) = 0$, por lo tanto $\Gamma(0)$ es infinito. Igualmente al colocar $n = -1$, se obtiene $\Gamma(0) = -1\Gamma(-1)$ o $1/\Gamma(-1) = 0$. De tal forma que se encuentra:

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0, \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0, \frac{1}{\Gamma(-2)} = 0, \frac{1}{\Gamma(-3)} = 0, \cdots$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función gamma:

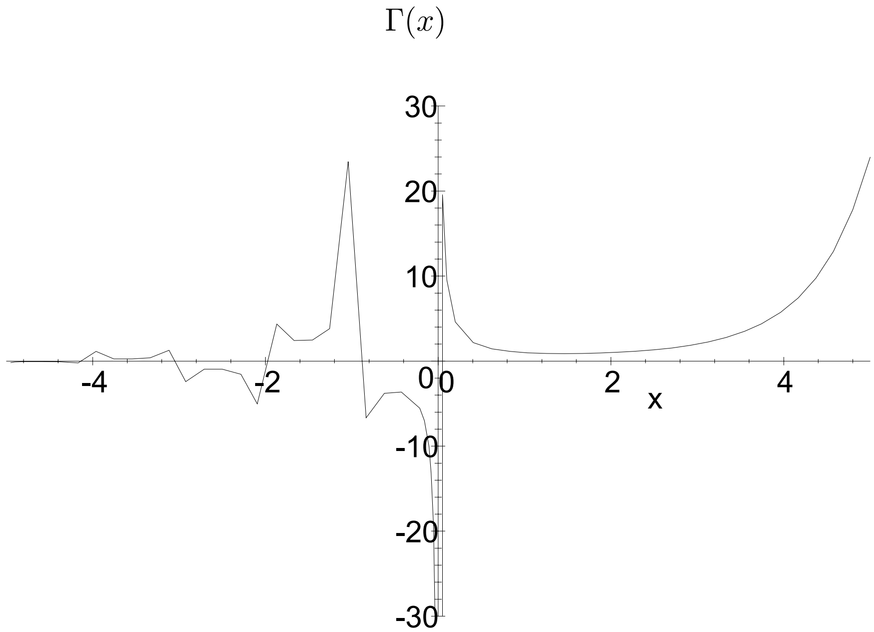


Figura 1. Gráfica de la función gamma.

7.2 La ecuación y las funciones de Bessel

La ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{7.4}$$

se llama la ecuación de Bessel de orden n. Esta ecuación puede resolverse usando el método de Frobenius en el cual se supone una solución de la forma:

$$y = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} a_j x^{j+c}$$

con $a_j = 0$ para $j < 0$

Se obtienen y y sus derivadas y se sustituyen en la ecuación de Bessel:
$x^2 \sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c-2} + x \sum (j+c) a_j x^{j+c-1} + x^2 \sum a_j x^{j+c} - n^2 \sum a_j x^{j+c} = 0$

$$\sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c} + \sum (j+c) a_j x^{j+c} + \sum a_j x^{j+c+2} - n^2 \sum a_j x^{j+c} = 0$$

Cambiando j por $j-2$ en la tercera sumatoria, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\sum \left\{ (j+c)(j+c-1)a_j + (j+c)a_j + a_{j-2} - n^2 a_j \right\} x^{j+c} = 0$$

$$\sum \left\{ \left[(j+c)^2 - n^2 \right] a_j + a_{j-2} \right\} x^{j+c} = 0$$

Igualando el coeficiente de x^{j+c} a cero:

$$\left[(j+c)^2 - n^2 \right] a_j + a_{j-2} = 0 \tag{7.5}$$

Si en esta ecuación se toma $j = 0$ y como $a_{-2} = 0$, mientras que $a_0 \neq 0$, esto se reduce a:

$$\left[c^2 - n^2 \right] a_0 = 0 \text{ o } c^2 - n^2 = 0 \tag{7.6}$$

Esta ecuación se llama la ecuación indicial, a partir de ella se requiere $c = \pm n$. Por lo tanto se tienen dos casos a considerar:

Caso 1, $c = n$, $n \geq 0$. En este caso la ecuación (7.5) se convierte en $j(2n+j)a_j + a_{j-2} = 0$ esto es

$$a_j = \frac{-a_{j-2}}{j(2n+j)}$$

A partir de esta ecuación si $j = 1$ se obtiene $a_1 = 0$ ya que $a_{-1} = 0$. También $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$

Con $j = 2, 4, 6, ...$ se obtiene:

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+2)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(2n+6)} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}, \cdots$$

Por lo tanto la solución en serie se escribe como:

$$y = \sum a_j x^{j+n}$$

$$y = a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \cdots \right]$$

$$y = a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 1 \cdot 2(n+1)(n+2)} - \frac{x^6}{2^6 1 \cdot 2 \cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right]$$

$$y = a_0 x^n \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right]$$

Para simplificar esta expresión se toma $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$

$$y = (x/2)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+3)!} + \cdots \right]$$

Para generalizar de tal forma que n sea cualquier número positivo se puede usar la función gamma, la cual como ya se mencionó es una generalización del factorial:

$$y = (x/2)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{(x/2)^2}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^4}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(x/2)^6}{3!\Gamma(n+4)} + \cdots \right]$$

esta es una solución de la ecuación de Bessel para $n \geq 0$, esta función se llama la función de Bessel de orden n:

$$J_n(x) = \frac{(x/2)^n}{\Gamma(n+1)} - \frac{(x/2)^{n+2}}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^{n+4}}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(x/2)^{n+6}}{3!\Gamma(n+4)} + \cdots \tag{7.7}$$

Caso 2, $c = -n$, $n \geq 0$. Lo único que hay que hacer para no repetir el procedimiento es cambiar n por $-n$ en la expresión de $J_n(x)$:

$$J_{-n}(x) = \frac{(x/2)^{-n}}{\Gamma(-n+1)} - \frac{(x/2)^{-n+2}}{1!\Gamma(-n+2)} + \frac{(x/2)^{-n+4}}{2!\Gamma(-n+3)} - \frac{(x/2)^{-n+6}}{3!\Gamma(-n+4)} + \cdots \quad (7.8)$$

En el caso de que n no sea entero la solución general de la ecuación de Bessel se escribe como:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), n \neq 0, 1, 2, 3, ... \quad (7.9)$$

Pero si n es un entero, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes, de hecho se puede verificar sin problema que:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), n = 0, 1, 2, 3, ... \quad (7.10)$$

Para encontrar una segunda solución se observa que si n no es un entero la siguiente función también es solución de la ecuación de Bessel:

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

y es linealmente independiente de $J_n(x)$. Si n es un entero se obtiene una indeterminación de la forma 0/0 pero entonces el límite si debe existir, por lo que se puede considerar como una solución si n es un entero a la función:

$$Y_n(x) = lím_{p \to n} \frac{\cos n\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \quad (7.11)$$

A esta solución se le llama la función de Bessel de segunda clase de orden n. De tal forma que la solución general de la ecuación de Bessel para todo n se puede escribir como:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad (7.12)$$

7.2.1 Gráficas de las funciones de Bessel

Si $n = 0$, la función de Bessel de primera clase está dada por:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + ...$$

Se puede evaluar esta función para cualquier valor de x tomando un número apropiado de términos. Por ejemplo:

$$J_0(0) = 1, J_0(1) = 0.7652, J_0(2) = 0.22389, J_0(3) = -0.26005, J_0(4) = -0.39715, ...$$

La gráfica de $J_0(x)$ se muestra a continuación:

$J_0(x)$

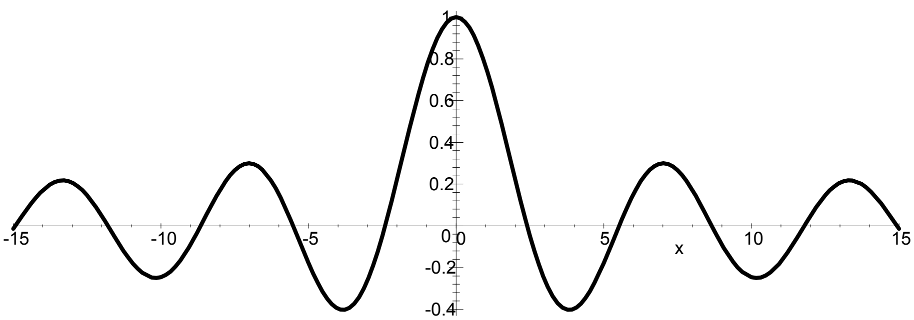


Figura 2. Gráfica de la función $J_0(x)$.

También se muestran $J_1(x)$, $J_2(x)$ y $J_3(x)$

$J_1(x)$

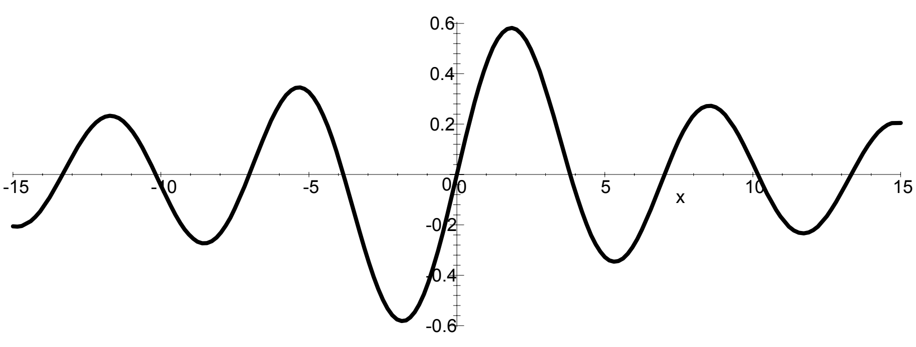


Figura 3. Gráfica de la función $J_1(x)$.

$J_2(x)$

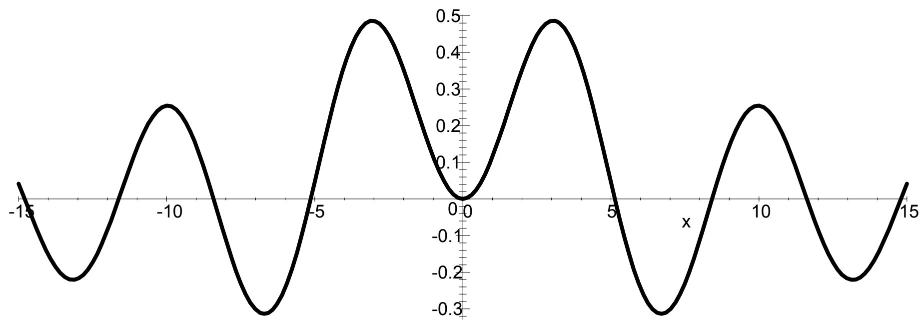


Figura 4. Gráfica de la función $J_2(x)$.

$J_3(x)$

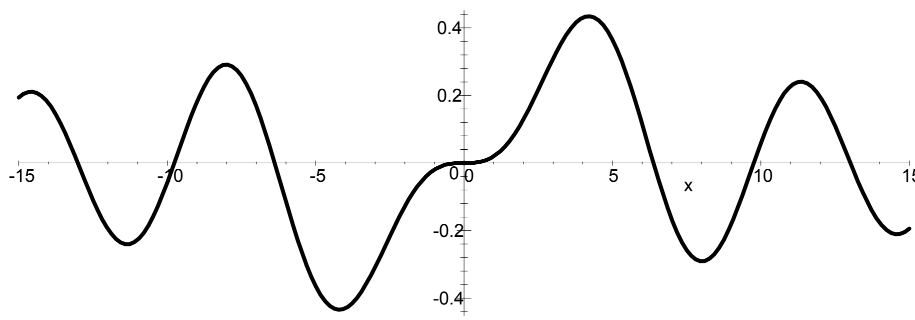


Figura 5. Gráfica de la función $J_3(x)$.

Estas gráficas muestran que las funciones Bessel de orden n con n par son pares y si n es impar la función es impar. Tienen carácter oscilatorio y para $x > 0$ son decrecientes, sus raíces pueden encontrarse de forma aproximada. Por ejemplo:

Raíces de	1	2	3	4	5
$J_0(x)$	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
$J_1(x)$	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
$J_2(x)$	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
$J_3(x)$	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094

Es interesante notar que las diferencias entre raíces consecutivas de cualquier $J_n(x)$ se aproximan a π según $n \to \infty$ (veáse la demostración más adelante).

Las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ se muestran a continuación. Tal como se observa las funciones $Y_n(x)$ no están definidas en $x = 0$, es decir, no están acotadas en $x = 0$.

$Y_0(x)$

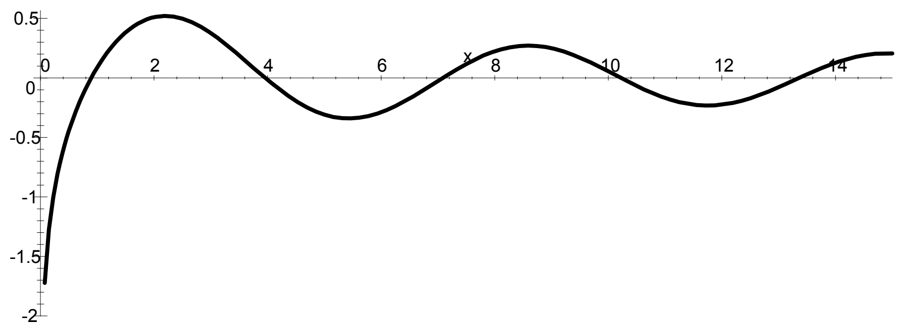


Figura 6. Gráfica de la función $Y_0(x)$.

$Y_1(x)$

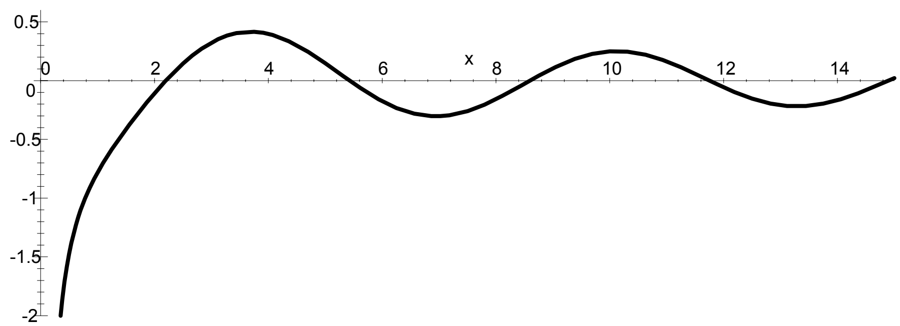


Figura 7. Gráfica de la función $Y_1(x)$.

Por otro lado, si se coloca $n = \frac{1}{2}$ y $n = -\frac{1}{2}$ en las expresiones de $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ en las ecuaciones (7.7) y (7.8) se encuentra que:

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!\Gamma(5/2)} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!\Gamma(7/2)} - \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

es decir

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{7.13}$$

$$J_{-1/2}(x) = \frac{(x/2)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} - \frac{(x/2)^{3/2}}{1!\Gamma(3/2)} + \frac{(x/2)^{7/2}}{2!\Gamma(5/2)} - \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

o sea

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{7.14}$$

Las funciones de Bessel pueden obtenerse también a partir de la función generatriz:

$$f(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} \tag{7.15}$$

de hecho se tiene que:

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \tag{7.16}$$

Esto puede demostrarse de la siguiente forma:

$$f(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = e^{xt/2} e^{-x/2t}$$

Usando la fórmula de Taylor MacLaurin para la expansión en serie de e^u:

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

$$f(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xt/2)^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x/2t)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xt/2)^m}{m!}\frac{(-x/2t)^k}{k!}$$

$$f(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{m+k} t^{m-k}}{m!k!2^{m+k}}$$

Esta expresión es válida desde $-\infty$ hasta $+\infty$, ya que si se usa la función gamma como una generalización del factorial, los inversos de los factoriales para números enteros negativos es igual a cero, por lo tanto no hay contribución de tales términos. Entonces:

$$f(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{m+k} t^{m-k}}{m!k!2^{m+k}}$$

Haciendo el cambio $m - k = n$

$$f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k} t^n}{(n+k)!k!2^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{(n+k)!k!2^{n+2k}} \right) t^n$$

de donde se obtiene

$$f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

Problema 1. Muestre a partir de la función generatriz las siguientes relaciones de recurrencia:

(a)

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \tag{7.17}$$

(b)

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \tag{7.18}$$

Solución:

(a) A partir de la función generatriz

$$f(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

se derivan ambos miembros de la ecuación con respecto a t

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) n t^{n-1}$$

$$e^{(x/2)(t-1/t)} + \frac{1}{t^2} e^{(x/2)(t-1/t)} = \frac{2}{x} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) n t^{n-1}$$

Usando nuevamente la función generatriz

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n + \frac{1}{t^2}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \frac{2}{x}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)nt^{n-1}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n + \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-2} = \frac{2}{x}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)nt^{n-1}$$

cambiando n por $n-1$ en la primera sumatoria y n por $n+1$ en la segunda

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x)t^{n-1} + \sum_{-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)t^{n-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x}J_n(x)t^{n-1}$$

Igualando los coeficientes de t^{n-1} se obtiene

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)$$

(b) Derivamos ambos lados de la función generatriz con respecto a x

$$\frac{1}{2}(t-1/t)e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n$$

$$te^{(x/2)(t-1/t)} - \frac{1}{t}e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} 2J_n'(x)t^n$$

Usando nuevamente la función generatriz

$$t\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n - \frac{1}{t}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{-\infty}^{\infty} 2J_n'(x)t^n$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n+1} - \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} 2J_n'(x)t^n$$

cambiando n por $n-1$ en la primera sumatoria y n por $n+1$ en la segunda

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x)t^n - \sum_{-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x)t^n = \sum_{-\infty}^{\infty} 2J_n'(x)t^n$$

Igualando los coeficientes de t^n se obtiene

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$$

Por ejemplo si $n = 0$ se tiene que

$$J_{-1}(x) - J_1(x) = 2J_0'(x)$$

$$-J_1(x) - J_1(x) = 2J_0'(x)$$

de donde se obtiene

$$J_0'(x) = -J_1(x) \tag{7.19}$$

Problema 2. Muestre que (a) $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$**, (b)** $J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right)$

Solución: Si en la fórmula de recurrencia (7.17) hacemos $n = \frac{1}{2}$**:**

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x}J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

Si hacemos en la fórmula de recurrencia (7.17) $n = -\frac{1}{2}$:

$$J_{1/2}(x) = -\frac{1}{x}J_{-1/2}(x) - J_{-3/2}(x)$$

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{1}{x}J_{-1/2}(x) - J_{1/2}(x) = -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x =$$

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

Problema 3. A partir de la definición de $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ demuestre las siguientes identidades:

a)

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x) \tag{7.20}$$

o en forma equivalente:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

b)

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_n(x) \tag{7.21}$$

o en forma equivalente:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Solución: a) La función de Bessel de orden n (ec. 7.7) se puede escribir como:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)} \tag{7.22}$$

A partir de esta relación:

$$J_{n-1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}}{r!\Gamma(n+r)}$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = \int x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}}{r!\Gamma(n+r)} dx = \sum_{r=0}^{\infty} \int x^n \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}}{r!\Gamma(n+r)} dx =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n+2r}}{r!\Gamma(n+r)(2n+2r)(2^{n+2r-1})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n+2r}}{r!\Gamma(n+r)(n+r)(2^{n+2r})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2r}}{r!\Gamma(n+r)(n+r)} =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r)(n+r)} x^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)} x^n = x^n J_n(x)$$

b)

$$J_{n+1}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{n+2r+1}}{r!\Gamma(n+r+2)}$$

$\int x^{-n}J_{n+1}(x)dx=\int x^{-n}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{n+2r+1}}{r!\Gamma(n+r+2)}dx=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\int x^{-n}\frac{(-1)^r(x)^{n+2r+1}}{r!\Gamma(n+r+2)2^{n+2r+1}}dx=$
$\sum\limits_{r=0}^{\infty}\int\frac{(-1)^r(x)^{2r+1}}{r!\Gamma(n+r+2)2^{n+2r+1}}dx=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x)^{2r+2}}{r!\Gamma(n+r+2)(2r+2)2^{n+2r+1}}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x)^{n+2r+2}}{r!\Gamma(n+r+2)(r+1)2^{n+2r+2}}x^{-n}=$
$-\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}(x)^{n+2r+2}}{(r+1)!\Gamma(n+r+2)2^{n+2r+2}}x^{-n}$, si se hace el cambio $r\to r-1$
$\int x^{-n}J_{n+1}(x)dx=-\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x)^{n+2r}}{(r)!\Gamma(n+r+1)2^{n+2r}}x^{-n}=-\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{n+2r}}{(r)!\Gamma(n+r+1)}x^{-n}$
Por lo tanto

$$\int x^{-n}J_{n+1}(x)dx=-x^{-n}J_n(x)$$

Problema 4. Muestre que:

$$J_n''(x)=\frac{1}{4}\left[J_{n-2}(x)-2J_n(x)+J_{n+2}(x)\right]$$

Solución:
Se sabe que:

$$J_n'=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\right]$$

Con $n\to n-1$ $\quad J_{n-1}'(x)=\frac{1}{2}\left[J_{n-2}(x)-J_n(x)\right]$
Con $n\to n+1$ $\quad J_{n+1}'(x)=\frac{1}{2}\left[J_n(x)-J_{n+2}(x)\right]$
Entonces como:

$$J_n''(x)=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}'(x)-J_{n+1}'(x)\right]$$

se pueden sustituir las expresiones de $J_{n-1}'(x)$ y $J_{n+1}'(x)$:

$$J_n''(x)=\frac{1}{4}\left[J_{n-2}(x)-J_n(x)-J_n(x)+J_{n+2}(x)\right]$$

$$J_n''(x)=\frac{1}{4}\left[J_{n-2}(x)-2J_n(x)+J_{n+2}(x)\right]$$

Problema 5. Evalúe las siguientes integrales

a) $\int xJ_0(x)\,dx$
b) $\int x^3 J_2(x)\,dx$
c) $\int x^{-4} J_5(x)\,dx$
d) $\int x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\,dx$
e) $\int x^3 J_0(x)\,dx$
f) $\int x^3 J_1(x)dx$

Solución: Para realizar estas integrales se usan las relaciones (7.20) y (7.21)

a) $\int xJo(x)dx = \int \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]\,dx = xJ_1(x) + c$
b) $\int x^3 J_2(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[x^3 J_3(x)]\,dx = x^3 J_3(x) + c$
c) $\int x^{-4} J_5(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[x^{-4} J_4(x)]\,dx = x^{-4} J_4(x) + c$

d) En la integral $\int x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\,dx$ se usa la expresión de $J_{\frac{1}{2}}(x)$ en la ecuación (7.13)

$\int x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \sin x dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x + c$

e) $\int x^3 J_0(x)\,dx$
$\int x^3 J_0(x)\,dx = \int x^2 x\ J_0(x)\,dx$
Integrando por partes $\quad u = x^2 \quad du = 2x$
$dv = xJ_0(x)\,dx \quad v = xJ_1(x)$

y usando el resultado del inciso (a):

$$\int x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2\ (x)$$

si se usa la relación de recurrencia (7.17) con $n = 1$

$J_2(x) + J_0(x) = \frac{2}{x}\ J_1(x)$
$J_2(x) = -J_0(x) + \frac{2}{x}\ J_1(x)$
$\int x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] =$

$$\int x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 4x\ J_1(x) + 2x^2 J_0(x)$$

f) En este problema se ilustrará que si una integral queda en términos de $J_0(x)$, ésta se deja indicada.

Para realizar la integral $\int x^3 J_1(x)dx$ se hace integración por partes tomando $u = x$, $du = dx$

$dv = x^2 J_1(x)dx$, $v = x^2 J_2(x)dx$
Por lo tanto

$$\int x^3 J_1(x)dx = x^3 J_2(x) - \int x^2 J_2(x)dx$$

Para usar la integral $\int x^2 J_2(x)dx$ se parte de la relación de recurrencia (7.17)
$J_2(x) + J_0(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$
$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$
por lo tanto

$$\int x^2 J_2(x)dx = 2\int xJ_1(x)dx - \int x^2 J_0(x)dx$$

es decir

$$\int x^3 J_1(x)dx = x^3 J_2(x) - 2\int xJ_1(x)dx + \int x^2 J_0(x)dx$$

También se usa integración por partes para evaluar la integral $\int x^2 J_0 dx$, haciendo:
$u = x$, $du = dx$
$dv = xJ_0 dx$, $v = xJ_1(x)$
de donde se obtiene

$$\int x^2 J_0 dx = x^2 J_1(x) - \int xJ_1(x)dx$$

o sea

$$\int x^3 J_1(x)dx = x^3 J_2(x) - 2\int xJ_1(x)dx + x^2 J_1(x) - \int xJ_1(x)dx$$

$$\int x^3 J_1(x)dx = x^3 J_2(x) + x^2 J_1(x) - 3\int xJ_1(x)dx$$

Para la última integral se vuelve a integrar por partes
$u = x$, $du = dx$
$dv = J_1 dx$, $v = -J_0(x)$
Sustituyendo

$\int x^3 J_1(x)dx = x^3 J_2(x) + x^2 J_1(x) - 3(-xJ_0(x) + \int J_o(x)dx) =$
$x^3 J_2(x) + x^2 J_1(x) + 3xJ_0(x) - 3\int J_o(x)dx =$
$x^3 \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] + x^2 J_1(x) + 3xJ_0(x) - 3\int J_o(x)dx =$
$2x^2 J_1(x) - x^3 J_0(x) + x^2 J_1(x) + 3xJ_0(x) - 3\int J_o(x)dx =$

$$\int x^3 J_1(x)dx = 3x^2 J_1(x) - x^3 J_0(x) + 3xJ_0(x) - 3\int J_o(x)dx$$

Problema 6. Pruebe que

$$\int x^k J_o(x)dx = x^k J_1(x) + (k-1)x^{k-1} J_o(x) - (k-1)^2 \int x^{k-2} J_o(x)dx$$

y así encuentre $\int x^5 J_o(x)dx$
Solución: Integrando por partes
$u = x^{k-1}$, $du = (k-1)x^{k-2}$
$dv = xJ_0(x)$, $v = xJ_1(x)$

$$\int x^5 J_o(x)dx = x^k J_1(x) - (k-1)\int x^{k-1} J_1(x)dx$$

Volviendo a integrar por partes
$u = x^{k-1}$, $du = (k-1)x^{k-2}$
$dv = J_1(x)$, $v = \int J_1(x)dx = -\int J_0'(x)dx = -J_0(x)$
$\int x^5 J_o(x)dx = x^k J_1(x) - (k-1)\left[-x^{k-1} J_0(x) + (k-1)\int x^{k-2} J_0(x)dx\right]$

$$\int x^5 J_o(x)dx = x^k J_1(x) + (k-1)x^{k-1} J_0(x) - (k-1)^2 \int x^{k-2} J_0(x)dx$$

Ahora, para encontrar la integral $\int x^5 J_o(x)dx$ simplemente aplicamos la fórmula ya demostrada:

$$\int x^5 J_o(x)dx = x^5 J_1(x) + 4x^4 J_0(x) - 16\int x^3 J_0(x)dx$$

y otra vez aplicamos la fórmula:
$\int x^3 J_0(x)dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4\int xJ_0(x)dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x)$
Por lo tanto
$\int x^5 J_o(x)dx = x^5 J_1(x) + 4x^4 J_0(x) - 16(x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x)$

$$\int x^5 J_o(x)dx = x^5 J_1(x) + 4x^4 J_0(x) - 16x^3 J_1(x) - 32x^2 J_0(x) + 64xJ_1(x)$$

7.2.2 Solución de ecuaciones de Bessel

Problema 7. Escriba la solución general de

a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$

b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 8)y = 0$

Solución: Las dos ecuaciones son de Bessel, por lo tanto la solución se escribe como

a) $y(x) = c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)$, donde se ha usado $Y_3(x)$ porque $J_3(x)$ y $J_{-3}(x)$ no son linealmente independientes entre sí.

b) $y(x) = c_1 J_{\sqrt{8}}(x) + c_2 J_{-\sqrt{8}}(x)$.

Problemas más complejos pueden resolverse de la siguiente forma. Se sabe que si se reemplaza x por λx, donde λ es una constante, entonces la ecuación de Bessel se convierte en

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0 \tag{7.23}$$

Para ver como escribir la solución en este caso, se recuerda que la ecuación de Bessel tiene la forma siguiente:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Si $u = \lambda x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \lambda \frac{dy}{du}$$

de la misma forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 \frac{d^2y}{du^2},$$

sustituyendo en la ecuación de Bessel se obtiene:

$$\frac{u^2}{\lambda^2}\left(\lambda^2 \frac{d^2y}{du^2}\right) + \frac{u}{\lambda}\left(\lambda \frac{dy}{du}\right) + (u^2 - n^2)y = 0$$

o sea

$$u^2 \frac{d^2y}{du^2} + u\frac{dy}{du} + (u^2 - n^2)y = 0$$

cuya solución es

$$y = AJ_n(u) + BY_n(u) = AJ_n(\ \lambda x) + BY_n(\ \lambda x)$$

Por ejemplo, la solución de la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4) = 0$$

es

$$y(x) = C_1J_2(\sqrt{3}x) + C_2Y_2(\sqrt{3}x)$$

y la solución de la ecuación

$$4x^2y" + 4xy' + (2x^2 - 1)y = 0$$

Dividiendo ambos miembros por 4 :
$x^2y" - xy' + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4})y = 0$
de tal forma que la solución es

$$y(x) = C_1J_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}x) + C_2J_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$$

Problema 8. Encuentre la solución de $x^2y" + xy' + (4x^2 - 1)y = 0$**, la cual está acotada en** $x = 0$ **y satisface la condición** $y(2) = 5$.

Solución: La solución de la ecuación está dada por:

$$y(x) = c_1J_1(2x) + c_2Y_1(2x)$$

como $y(x)$ debe estar acotada en $x = 0$ y como Y_1 es una función no acotada en $x = 0$ entonces debe tenerse necesariamente $c_2 = 0$, de tal forma que

$$y(x) = c_1J_1(2x)$$

Aplicando la condición inicial $y(2) = 5$:
$5 = c_1J_1(4)$
$c_1 = \frac{5}{J_1(4)}$
Por lo tanto la solución es:

$$y(x) = \frac{5}{J_1(4)}J_1(2x)$$

7.2.3 Ecuaciones reducibles a la ecuación de Bessel

Muchas ecuaciones de segundo orden tienen la forma:

$$x^2 y" + axy' + (b + cx^m)y = 0 \tag{7.24}$$

Donde a, b, c, m son constantes ($c > 0$ y $m \neq 0$). Estas ecuaciones se reducen a una ecuación de Bessel mediante las siguientes sustituciones:

$$x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}$$

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u$$

donde

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \beta = \frac{m}{2}, \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m}$$

La ecuación queda como:

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + \left(t^2 - \nu^2\right) u = 0$$

en esta ecuación:

$$\nu^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}$$

Problema 9. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a)

$$xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$$

b)

$$y'' + xy = 0$$

c)

$$x^2 y'' - 2xy' + (4x^4 - 4)y = 0$$

Solución: (a) La ecuación se puede escribir en la forma:

$$x^2 y'' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{4}xy = 0$$

A partir de la ecuación en la forma (7.24) se tiene que $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{4}$ y $m = 1$

por lo tanto

$\alpha = -\frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ y $\nu^2 = \frac{1}{4}$

$x = t^2$

$y = t^{1/2}u = \left(x^{1/2}\right)^{1/2} u = x^{1/4}u$

de tal forma que la ecuación queda

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) u = 0$$

La solución queda como:

$$u(t) = c_1 J_{1/2}(t) + c_2 J_{-1/2}(t)$$

$$yx^{-1/4} = c_1 J_{1/2}(x^{1/2}) + c_2 J_{-1/2}(x^{1/2})$$

$$y(x) = x^{1/4}\left[c_1 J_{1/2}(x^{1/2}) + c_2 J_{-1/2}(x^{1/2})\right]$$

b) La ecuación

$$y'' + xy = 0$$

se conoce como la ecuación de Airy.

Solución: la ecuación se puede escribir en la forma:

$$x^2y'' + x^3y = 0$$

A partir de la ecuación en la forma (7.24) se tiene que $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ y $m = 3$

por lo tanto

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = \frac{2}{3}$ y $\nu^2 = \frac{1}{9}$

$x = \left(\frac{3t}{2}\right)^{2/3}$

$y = \left(\frac{3t}{2}\right)^{1/3} u = x^{1/2}u$

de tal forma que la ecuación puede escribirse como

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right) u = 0$$

Por lo tanto la solución es

$$u(t) = c_1 J_{1/3}(t) + c_2 J_{-1/3}(t)$$

$$yx^{-1/2} = c_1 J_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + c_2 J_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})$$

$$y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + c_2 J_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})\right]$$

c) **Solución:** A partir de la ecuación en la forma (7.24) se tiene que $a = -2$, $b = -4$, $c = 4$ y $m = 4$
por lo tanto
$\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ y $\nu^2 = \frac{25}{16}$
$x = t^{1/2}$
$y = t^{3/4}u = \left(x^2\right)^{3/4} u = x^{3/2}u$
de tal forma que la ecuación queda

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + \left(t^2 - \frac{25}{16}\right)u = 0$$

y la solución es

$$u(t) = c_1 J_{5/4}(t) + c_2 J_{-5/4}(t)$$

$$yx^{-3/2} = c_1 J_{5/4}(x^2) + c_2 J_{-5/4}(x^2)$$

$$y(x) = x^{3/2}\left[c_1 J_{5/4}(x^2) + c_2 J_{-5/4}(x^2)\right]$$

Problema 10. Muestre que mediante el cambio de variable dado por $y = x^{-1/2}v$, la ecuación de Bessel se convierte en

$$v'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right)v = 0 \tag{7.25}$$

Use el resultado para resolver la ecuación de Bessel para el caso $n = \frac{1}{2}$.

Solución: Si $y = x^{-1/2}v$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}v' - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}v$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-1/2}v'' - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}v' + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}v - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}v'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-1/2}v'' - x^{-\frac{3}{2}}v' + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}v$$

Sustituyendo en la fórmula de la ecuación de Bessel

$$x^{3/2}v'' - x^{1/2}v' + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}v + x^{-1/2}v' - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}v + (x^2 - n^2)x^{-1/2}v = 0$$

$$x^{3/2}v'' + \frac{1}{4}x^{-1/2}v + (x^2 - n^2)x^{-1/2}v = 0$$

$$x^{3/2}v'' + x^{-1/2}v(\frac{1}{4} + x^2 - n^2) = 0$$

$$v'' + v(\frac{1 + 4x^2 - 4n^2}{4x^2}) = 0$$

por lo tanto

$$v'' + v(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}) = 0$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.

Si $n = \frac{1}{2}$, la ecuación se reduce a

$$v'' + v = 0$$

Cuya solución es de la forma

$$v(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

como $v = x^{1/2}y$ entonces

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

este resultado está de acuerdo con la solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$, la cual es $y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$, como se puede ver con la ayuda de las ecuaciones (7.13) y (7.14) los resultados coinciden.

Problema 11. Muestre que para valores grandes de x las soluciones de la ecuación de Bessel tienen la forma

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{x}}$$

Explique cómo esto se puede usar para demostrar que las diferencias de ceros sucesivos de $J_n(x)$ tienden a π.

Solución: A partir de la ecuación (7.25) se observa que cuando x es muy grande la ecuación se reduce a

$$v'' + v = 0$$

Cuya solución es de la forma

$$v(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

entonces

$$y(x) = \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{x}}$$

Por lo tanto cuando x es grande

$$J_n(x) \simeq \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{x}}$$

Para encontrar las raíces se iguala la función a cero

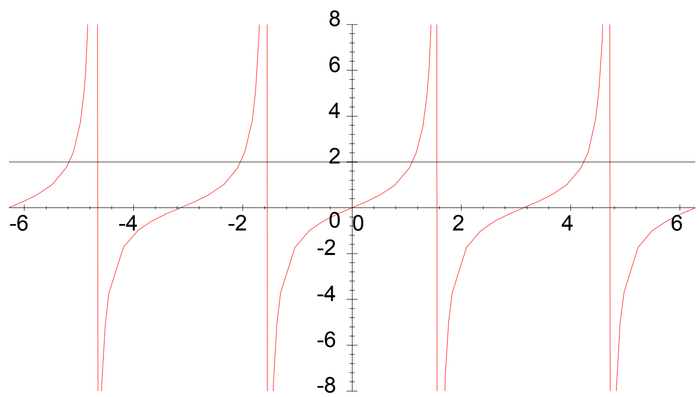
$$\frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0$$

$$c_1 + c_2 \tan x = 0$$

$$\tan x = -\frac{c_1}{c_2} = k$$

Las raíces de $J_n(x)$ para x grande entonces coinciden con los puntos de intersección de las funciones $y(x) = \tan x$ y $y(x) = k$. En la siguiente gráfica se ilustra el comportamiento para un cierto valor de k.



y como la tangente tiene periodo $T = \pi$ entonces, tal como se ve en la gráfica, la distancia entre puntos sucesivos de cruce es siempre igual a π.

7.2.4 El problema de valor a la frontera de Sturm-Liouville

Partiendo de la ecuación

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = -\lambda y \tag{7.26}$$

si suponemos que $a_0 \neq 0$, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{a_2}{a_0} + \frac{\lambda}{a_0}\right) y = 0$$

Multiplicando esta ecuación por $e^{\int (a_1/a_0)dx}$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int (a_1/a_0)dx}\frac{dy}{dx}\right]+\left(\frac{a_2}{a_0}+\frac{\lambda}{a_0}\right)e^{\int (a_1/a_0)dx}y=0$$

si se escribe

$$P(x)=e^{\int (a_1/a_0)dx}, Q(x)=\frac{a_2}{a_0}e^{\int (a_1/a_0)dx}, R(x)=\frac{e^{\int (a_1/a_0)dx}}{a_0}$$

entonces la ecuación (7.26) se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left(Q(x)+\lambda R(x)\right)y=0 \tag{7.27}$$

esta ecuación diferencial se llama de Sturm-Liouville

Las soluciones de esta ecuación se llaman eigenfunciones, las correspondientes constantes λ se llaman eigenvalores.

Si se supone que dos eigenfunciones diferentes y_j y y_k las cuales satisfacen (7.27) con los correspondientes eigenvalores λ_j y λ_k, respectivamente, sustituyendo en la ecuación (7.27)

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)y_j'\right]+\left(Q(x)+\lambda_j R(x)\right)y_j=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)y_k'\right]+\left(Q(x)+\lambda_k R(x)\right)y_k=0$$

Si se multiplica la primera ecuación por y_k y la segunda por y_j y luego restando una de la otra

$$y_k\frac{d}{dx}\left[P(x)y_j'\right]-y_j\frac{d}{dx}\left[P(x)y_k'\right]+\left(\lambda_j-\lambda_k\right)R(x)y_jy_k=0$$

o en forma equivalente como

$$\left(\lambda_j-\lambda_k\right)R(x)y_jy_k=y_j\frac{d}{dx}\left[P(x)y_k'\right]-y_k\frac{d}{dx}\left[P(x)y_j'\right]$$

o también

$$\left(\lambda_j-\lambda_k\right)R(x)y_jy_k=\frac{d}{dx}\left[P(x)\left(y_jy_k'-y_ky_j'\right)\right]$$

integrando desde a hasta b

$$(\lambda_j - \lambda_k) \int_a^b R(x) y_j y_k dx =$$

$$P(b) \left(y_j(b) y_k'(b) - y_k(b) y_j'(b) \right) - P(a) \left(y_j(a) y_k'(a) - y_k(a) y_j'(a) \right) \tag{7.28a}$$

Si el lado derecho fuera cero entonces se tendría

$$\int_a^b R(x) y_j y_k dx = 0, j \neq k$$

o si $R(x) \geq 0$

$$\int_a^b \left[\sqrt{R(x)} y_j \right] \left[\sqrt{R(x)} y_k \right] dx = 0, j \neq k$$

es decir, las eigenfunciones $\sqrt{R(x)} y_j$ y $\sqrt{R(x)} y_j$ son ortogonales en el intervalo $[a, b]$, o en forma equivalente y_j y y_j son ortogonales con respecto a la función de peso $R(x) \geq 0$. Examinando los diferentes casos para los cuales el lado derecho de la ecuación (7.28a) se tienen cuatro condiciones de frontera:

A. Caso ordinario

$$P(a) \neq 0, P(b) \neq 0$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

B. Caso de un punto singular

$$P(a) = 0$$

$$y \text{ y } y' \text{ acotadas en } x = a,\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

C. Caso de dos puntos singulares

$$P(a) = P(b) = 0$$

$$y \text{ y } y' \text{ acotadas en } x = a \text{ y } x = b$$

D. Caso ordinario

$$P(a) = P(b) \neq 0$$

$$y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$$

Ortogonalidad de las funciones de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel se puede escribir en la forma

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda x^2-n^2)y=0$$

La ecuación tiene la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+(\lambda x-\frac{n^2}{x})y=0$$

Esto corresponde a la ecuación (7.27) con
$P(x)=x$, $Q(x)=-\frac{n^2}{x}$, $R(x)=x$

De las cuatro condiciones de frontera que corresponden al problema de Sturm-Liouville y dado que $x=0$ es el único valor para el que $P(x)=0$, se observa que se deben usar las condiciones de frontera para el caso de un punto singular

y y y' acotadas en $x=0$, y

$$b_1y(1)+b_2y'(1)=0$$

por simplicidad se ha elegido $b=1$

Las eigenfunciones deben ser ortogonales en el intervalo $[0,1]$ con respecto a la función de peso $R(x)=x$. En el caso especial $b_1=1$ y $b_2=0$ se obtiene

$$y(1)=0$$

Por lo tanto en este caso la solución se escribe solamente como

$$y=AJ_n(\sqrt{\lambda}x)$$

debido a que tanto Y_n y J_{-n} no están acotadas en $x=0$. Para satisfacer la condición de frontera en la ecuación anterior se tiene

$J_n(\sqrt{\lambda})=0$

Por lo tanto

$\sqrt{\lambda}=r_1,\, r_2,\, r_3,\, \cdots$ o bien $\lambda=r_1^2,\, r_2^2,\, r_3^2,\, \cdots$

donde las r_j son las raíces de $J_n(x)=0$

y las correspondientes eigenfunciones son

$J_n(r_1x),\, J_n(r_2x),\, J_n(r_3x),\, \cdots$

es importante considerar que de acuerdo con la ecuación (7.28a) las funciones $\sqrt{x}J_n(r_1x)$, $\sqrt{x}J_n(r_2x)$, $\sqrt{x}J_n(r_3x)$, $\cdots$

son mutuamente ortogonales en el intervalo $[0,1]$

Este conjunto de funciones puede hacerse ortonormal normalizando cada función. Para ello se consideran las funciones

$$\phi_k(x) = c_k\sqrt{x}J_n(r_kx)$$

y se debe determinar el valor de las constantes c_k tal que

$$\int_0^1 [\phi_k(x)]^2\,dx = \int_0^1 \left[c_k\sqrt{x}J_n(r_kx)\right]^2 dx = 1 \tag{7.29}$$

de donde se obtiene

$$c_k = \left[\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx\right]^{-1/2} \tag{7.30}$$

para obtener esta integral se resuelve primero la siguiente

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx$$

Si suponemos que α es variable y β es constante y se hace tender α a β. Se obtendrá

$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx$$

y en esta integral se pone $\beta = r_k$

A partir de la ecuación (7.28a) poniendo $P(x) = x$, $R(x) = x$, $a = 1$, $b = 1$, $y = J_n(\sqrt{\lambda}x)$

se obtiene

$(\lambda_j - \lambda_k)\int_0^1 xJ_n(\sqrt{\lambda_j}x)J_n(\sqrt{\lambda_k}x)dx =$

$J_n(\sqrt{\lambda_j})\left[\sqrt{\lambda_k}J_n'(\sqrt{\lambda_k})\right] - J_n(\sqrt{\lambda_k})\left[\sqrt{\lambda_j}J_n'(\sqrt{\lambda_j})\right]$

Escribiendo $\lambda_j = \alpha^2$, $\lambda_k = \beta^2$ se encuentra

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{\beta J_n(\alpha)J_n'(\beta) - \alpha J_n(\beta)J_n'(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Al tomar el límite cuando $\alpha \to \beta$, el lado derecho tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que puede usarse la regla de L'Hôpital

$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx = \lim_{\alpha\to\beta} \frac{\beta J_n'(\alpha)J_n'(\beta) - \alpha J_n(\beta)J_n''(\alpha) - J_n(\beta)J_n'(\alpha)}{2\alpha}$$

$$\int_0^1 xJ_n^2(\beta x)dx = \frac{\beta J_n'^2(\beta) - \beta J_n(\beta)J_n''(\alpha) - J_n(\beta)J_n'(\beta)}{2\beta}$$

Si $\beta = r_k$ donde r_k es una raíz de $J_n(x) = 0$ la expresión anterior se reduce a

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_k x)dx = \frac{1}{2}J_n'^2(r_k) \tag{7.31}$$

de esto se sigue que el conjunto de funciones $\phi_k(x)$ es igual a

$$\phi_k(x) = \frac{\sqrt{2x}J_n(r_k x)}{J_n'(r_k)}, k = 1, 2, 3, \cdots \tag{7.32}$$

Si las r_k son las raíces de $J_n'(x) = 0$ entonces

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_k x)dx = \frac{(r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2} \tag{7.33}$$

o sea

$$\phi_k(x) = \frac{\sqrt{2x}r_k J_n(r_k x)}{(r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)} \tag{7.34}$$

si se considera ahora el caso con $b_1 = \mu$ y $b_2 = 1$ donde μ es una constante positiva. Y la condición de frontera queda

$$\mu y(1) + y'(1) = 0$$

La solución está dada por

$$y = AJ_n(\sqrt{\lambda}x)$$

y se debe cumplirse la condición

$$\mu J_n(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}) = 0$$

también r_k son las raíces de

$$\mu J_n(x) + xJ_n'(x) = 0$$

y se tiene también

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_k x)dx = \frac{(\mu^2 + r_k^2 - n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2} \tag{7.35}$$

como se tiene que $\mu J_n(r_k) + xJ_n'(r_k) = 0$

$$\phi_k(x) = \frac{\sqrt{2x} r_k J_n(r_k x)}{\sqrt{\mu^2 + r_k^2 - n^2} J_n(r_k)} \tag{7.36}$$

Tales resultados se resumen en la siguiente tabla

Ecuaciones con raíces de r_k	Valores de $\int_0^1 xJ_n^2(r_k x)dx$
$J_n(x) = 0$	$\frac{1}{2}J_n'^2(r_k)$
$J_n'(x) = 0$	$\frac{(r_k^2-n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2}$
$\mu J_n(x) + xJ_n'(x) = 0$	$\frac{(\mu^2+r_k^2-n^2)J_n^2(r_k)}{2r_k^2}$

Tabla I. Valores de la integral $\int_0^1 xJ_n^2(r_k x)dx$ para diferentes condiciones de frontera.

Problema 12. Escriba cada una de las siguientes ecuaciones en la forma de Sturm-Liouville.

a)

$$xy'' + 2y' + (\lambda + x)y = 0$$

b)

$$y'' - y' + (\lambda + e^{-x})y = 0$$

c)

$$y'' + (3 + \lambda \cos x)y = 0$$

d)

$$y'' - (\tan x)y' + (1 + \lambda \tan x)y = 0$$

Solución:

a) Se tiene que la ecuación de Sturm-Liouville es

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [Q(x) + \lambda R(x)]\, y = 0$$

Dividiendo la ecuación original por x, se obtiene

$$y'' + \frac{2}{x}y' + (\frac{\lambda}{x} + 1)y = 0$$

$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$
Multiplicando la ecuación anterior por x^2

$$x^2y'' + 2xy' + (\lambda x + x)y = 0$$

agrupando los dos primeros términos, se obtiene la ecuación en la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{dy}{dx}\right] + (\lambda x + x)y = 0$$

donde
$P(x) = x^2,\ Q(x) = x^2,\ R(x) = x$
b) $y'' - y' + (\lambda + e^{-x})y = 0$
$\mu(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$
Multiplicando la ecuación por e^{-x}

$$e^{-x}y'' - e^{-x}y' + (\lambda e^{-x} + e^{-2x)} = 0$$

y se obtiene la ecuación en la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dy}\left[e^{-x}\frac{dy}{dx}\right] + (e^{-2x} + \lambda e^{-x})y = 0$$

donde
$P(x) = e^{-x},\ Q(x) = e^{-2x},\ R(x) = e^{-x}$
c) $y'' + (3 + \lambda\cos x)y = 0$
En esta ecuación si $P(x) = 1,\ Q(x) = 3,\ R(x) = \cos x$ se observa fácilmente que tiene la forma de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] + (3 + \lambda\cos x)y = 0$$

d) $y'' - (\tan x)y' + (1 + \lambda \tan x)y = 0$

$$\mu(x) = e^{-\int \tan x dx} = e^{-(-\ln \cos x)} = e^{\ln \cos x} = \cos x$$

Multiplicando la ecuación por $\cos x$,y sustituyendo $\tan x$ por $\frac{\sin x}{\cos x}$

$$y'' \cos x - \left[\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \cos x\right] y' + \left[\cos x + \lambda \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \cos x\right] y = 0$$

$$y'' \cos x - y' \sin x + (\cos x + \lambda \sin x)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos x \frac{dy}{dx}\right] + (\cos x + \lambda \sin x)y = 0$$

Problema 13. Muestre que cada uno de los siguientes son problemas de valor de frontera de Sturm-Liouville. En cada caso encuentre (i) los eigenvalores y las eigenfunciones, (ii) un conjunto de funciones mutuamente ortogonales en el intervalo (verifique la ortogonalidad por integración directa), y (iii) un conjunto ortonormal de funciones en el intervalo . (a) $y'' + \lambda y = 0$**;** $y(0) = 0$**,** $y(4) = 0$**. (b)** $y'' + \lambda y = 0$**;** $y''(0) = 0$**,** $y(\pi) = 0$**. (c)** $y'' + \lambda y = 0$**;** $y'(0) = 0$**,** $y'(2) = 0$**.**

Solución: En todos los casos se trata de la ecuación

$$y'' + \lambda y = 0, \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0$$

la cual tiene la forma de Sturm-Liouville con $p(x) = 1$, solo resta verificar que las condiciones a la frontera coinciden con alguno de los casos del problema de valor de frontera de Sturm-Liouville.

La solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

(a) Las condiciones a la frontera $y(0) = 0$, $y(4) = 0$ coinciden con el caso ordinario con $a = 0$, $b = 4$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 0$ y $b_2 = 0$

Aplicando las condiciones de frontera:

$y(0) = 0 = c_1$

$y(4) = 0 = c_2 \sin 4\sqrt{\lambda}$, como $c_2 \neq 0$, se obtiene

$\sin 4\sqrt{\lambda} = 0,\ 4\sqrt{\lambda} = n\pi,\ \lambda = \frac{n^2\pi^2}{16}$
Por lo tanto
$y(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{4} x$
por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16}$$

y las eigenfunciones

$$y_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi}{4} x$$

Como se trata de un problema de valor a la frontera de Sturm-Liouville las eigenfunciones forman un conjunto ortogonal en el intervalo [0,4], esto puede verificarse por integración directa:

$$\int_0^4 \left(a_n \sin \frac{n\pi}{4} x\right)\left(a_m \sin \frac{m\pi}{4} x\right) dx = a_n a_m \int_0^4 \left(\sin \frac{n\pi}{4} x\right)\left(\sin \frac{m\pi}{4} x\right) dx$$

Usando la identidad

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) - \cos(u-v)\right] \tag{7.37}$$

$$\int_0^4 \left(a_n \sin \frac{n\pi}{4} x\right)\left(a_m \sin \frac{m\pi}{4} x\right) dx = \frac{a_n a_m}{2} \int_0^4 \left(\cos(\frac{(n+m)\pi}{4} x) - \cos(\frac{(n-m)\pi}{4} x)\right) dx =$$

$$\frac{a_n a_m}{2} \left\{ \left(\frac{4}{(m+n)\pi} \sin(\frac{(n+m)\pi}{4} x\right) - \left(\frac{4}{(m-n)\pi} \sin(\frac{(n+m)\pi}{4} x\right) \right\}_0^4 = 0$$

siempre y cuando $m \neq n$. Efectivamente son ortogonales.

Para determinar el conjunto de funciones ortonormales:

$$\int_0^4 a_n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{4} x dx = 1$$

$$a_n^2 \int_0^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{n\pi}{2} x\right) dx = 1$$

$$a_n^2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right)_0^4=1$$

$a_n^2\,(2)=1$, es decir $a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$
por lo tanto

$$\phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{n\pi}{4}x$$

es un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[0,4]$

(b) Las condiciones a la frontera $y'(0)=0$, $y(\pi)=0$ coinciden con el caso ordinario con $a=0$, $b=\pi$, $a_1=0$, $b_1=1$, $a_2=1$ y $b_2=0$

Derivando la solución:

$$y'(x)=-\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

Aplicando las condiciones de frontera:
$y'(0)=0=\sqrt{\lambda}c_2$ por lo tanto $c_2=0$, es decir $y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x$
$y(\pi)=0=c_1\cos\sqrt{\lambda}\pi$, como $c_1\neq 0$, se obtiene
$\cos\sqrt{\lambda}\pi=0$, $\sqrt{\lambda}\pi=(2n+1)\,\frac{\pi}{2}$, $\lambda=\frac{(2n+1)^2}{4}$
Por lo tanto
$y(x)=c_1\cos\frac{2n+1}{2}x$
por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)^2}{4}$$

y las eigenfunciones

$$y_n(x)=a_n\cos\frac{2n+1}{2}x$$

Como se trata de un problema de valor a la frontera de Sturm-Liouville las eigenfunciones forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[0,\pi]$, no obstante, esto puede verificarse por integración directa:

$$\int_0^{+\pi}\left(a_n\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\left(a_m\cos\frac{2m+1}{2}x\right)dx=$$

$$= a_n a_m \int_0^{+\pi} \left(\cos \frac{2n+1}{2} x\right) \left(\cos \frac{2m+1}{2} x\right) dx$$

Usando la identidad

$$cosu \cos v = \frac{1}{2} \left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right] \tag{7.38}$$

$$\int_0^{+\pi} \left(a_n \cos \frac{2n+1}{2} x\right) \left(a_m \cos \frac{2m+1}{2} x\right) dx =$$

$$\frac{a_n a_m}{2} \int_0^{+\pi} \left(\cos(n+m+1)x - \cos(n-m)x\right) dx =$$

$$\frac{a_n a_m}{2} \left\{ \frac{1}{m+n+1} \sin\left(m+n+1\right) x + \left(\frac{1}{m-n} \sin\left(m-n\right) x \right) \right\}_0^{+\pi} = 0$$

siempre y cuando $m \neq n$. Efectivamente son ortogonales.

Para determinar el conjunto de funciones ortonormales:

$$\int_0^{+\pi} a_n^2 \cos^2 \frac{2n+1}{2} x dx = 1$$

$$a_n^2 \int_0^{+\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2n+1\right) x \right) dx = 1$$

$$a_n^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2n+1} \sin\left(2n+1\right) x \right)_0^{+\pi} = 1$$

$a_n^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, es decir $a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

por lo tanto

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) x$$

es un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[0, \pi]$

(c) Las condiciones a la frontera $y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$ coinciden con el caso ordinario con $a = 0$, $b = 2$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $b_2 = 1$

Derivando la solución:

$y'(x) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} c_2 \cos \sqrt{\lambda} x$

Aplicando las condiciones de frontera:

$y'(0) = 0 = \sqrt{\lambda} c_2$ por lo tanto $c_2 = 0$, es decir $y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x$

$y'(2) = 0 = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin 2\sqrt{\lambda}$, como $c_1 \neq 0$, se obtiene

$\sin 2\sqrt{\lambda} = 0$, $2\sqrt{\lambda} = n\pi$, $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{4}$

Por lo tanto

$$y(x) = c_1 \cos \frac{n\pi}{2} x$$

por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}$$

y las eigenfunciones

$$y_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi}{2} x$$

Como se trata de un problema de valor a la frontera de Sturm-Liouville las eigenfunciones forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[0, 2]$, no obstante, esto puede verificarse por integración directa:

$$\int_0^2 \left(a_n \cos \frac{n\pi}{2} x\right) \left(a_m \cos \frac{m\pi}{2} x\right) dx = a_n a_m \int_0^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2} x\right) \left(\cos \frac{m\pi}{2} x\right) dx$$

Usando la identidad de la ecuación (7.38)

$$\frac{a_n a_m}{2} \int_0^2 \left(a_n \cos \frac{(m+n)\,\pi}{2} x\right) \left(a_m \cos \frac{(m-n)\pi}{2} x\right) dx =$$

$$\frac{a_n a_m}{2} \left\{ \frac{2}{m+n} \sin \left(\frac{(m+n)\,\pi}{2} \right) x + \left(\frac{2}{m-n} \sin \left(\frac{(m-n)\,\pi}{2} \right) x \right) \right\}_0^2 = 0$$

siempre y cuando $m \neq n$. Efectivamente son ortogonales.

Para determinar el conjunto de funciones ortonormales:

$$\int_0^2 a_n^2 \cos^2 \frac{n\pi}{2} x dx = 1$$

$$a_n^2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos n\pi x \right) dx = 1$$

$$a_n^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right)_0^2 = 1$$

$a_n^2 (1) = 1$, es decir $a_n = 1$
por lo tanto

$$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x$$

es un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[0, 2]$.

Problema 14. Dado el problema de valor de frontera $y'' + \lambda y = 0$**;** $y(-1) = y(1)$**,** $y'(-1) = y'(1)$**.**

a) Muestre que es un problema de Sturm-Liouville y clasifíquelo de acuerdo al tipo.

b) Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones.

c) Verifique que las eigenfunciones son mutuamente ortogonales en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

d) Encuentre un correspondiente conjunto ortonormal de funciones.

Solución:

Tal como se dijo en el ejercicio anterior la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ tiene la forma de Sturm-Liouville. Corresponde al caso periódico, puesto que:
$y(a) = y(b) \quad y'(a) = y'(b)$

Con $a = -1; \qquad b = 1$
$y(-1) = y(1) \quad y'(-1) = y'(1)$

La solución general es:

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$

a) Aplicando condiciones a la frontera:

$$y(-1) = c_1\cos\sqrt{\lambda}(-1) + c_2\sin\sqrt{\lambda}(-1) = c_1\cos\sqrt{\lambda} - c_2\sin\sqrt{\lambda}$$

$$y(1) = c_1\cos\sqrt{\lambda} + c_2\sin\sqrt{\lambda}$$

Como $y(-1) = y(1)$

$$c_1\cos\sqrt{\lambda} - c_2\sin\sqrt{\lambda} = c_1\cos\sqrt{\lambda} + c_2\sin\sqrt{\lambda}$$

$0 = 2c_2\sin\sqrt{\lambda}$ como $c_2 \neq 0$ se obtiene que
$\sqrt{\lambda} = n\pi$
O sea los eigenvalores son

$$\lambda = n^2\pi^2$$

De la segunda condición se tiene:

$$y'(-1) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(-1)+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}(-1) = c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$$

$$y'(1) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$$

Como $y'(-1) = y'(1)$

$$c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$$

$0 = 2c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}$ como $c_1 \neq 0$
se tiene

$$\sqrt{\lambda} = n\pi$$

se confirma nuevamente que los eigenvalores son $\lambda = n^2\pi^2$
Por lo tanto las eigenfunciones se pueden escribir como:

$$y_n(x) = a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x)$$

para verificar que forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[-1,1]$ se calcula la integral

$$\int_{-1}^{1} \left(a_m \cos(m\pi x) + b_m \sin(m\pi x)\right) \left(a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right) dx =$$

$$a_m a_n \int_{-1}^{1} (\cos m\pi x)(\cos n\pi x)\, dx + a_m b_n \int_{-1}^{1} (\cos m\pi x)(\sin n\pi x)\, dx +$$

$$a_n b_m \int_{-1}^{1} (\sin m\pi x)(\cos n\pi x)\, dx + b_m b_n \int_{-1}^{1} (\sin m\pi x)(\sin n\pi x)\, dx$$

Usando la identidad siguiente junto con las de las ecuaciones (7.37) y 7.38)

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}\left[\sin(u+v) + \sin(u-v)\right] \tag{7.39}$$

$\frac{a_m a_n}{2} \int_{-1}^{1} (\cos(m+n)\pi x + \cos(m-n)\pi x)\, dx +$
$\frac{a_m b_n}{2} \int_{-1}^{1} (\sin(m+n)\pi x - \sin(m-n)\pi x)\, dx +$
$\frac{a_n b_m}{2} \int_{-1}^{1} (\sin(m+n)\pi x + \sin(m-n)\pi x)\, dx +$
$\frac{b_m b_n}{2} \int_{-1}^{1} (\cos(m+n)\pi x - \cos(m-n)\pi x)\, dx =$
$\frac{a_m a_n}{2} \left(\frac{1}{(m+n)\pi} \sin(m+n)\pi x + \frac{1}{(m-n)\pi} \sin(m-n)\pi x\right)_{-1}^{1} +$
$\frac{a_m b_n}{2} \left(-\frac{1}{(m+n)\pi} \cos(m+n)\pi x + \frac{1}{(m-n)\pi} \cos(m-n)\pi x\right)_{-1}^{1} +$
$\frac{a_n b_m}{2} \left(-\frac{1}{(m+n)\pi} \cos(m+n)\pi x - \frac{1}{(m-n)\pi} \cos(m-n)\pi x\right)_{-1}^{1} +$
$\frac{b_m b_n}{2} \left(\frac{1}{(m+n)\pi} \sin(m+n)\pi x - \frac{1}{(m-n)\pi} \sin(m-n)\pi x\right) dx = 0$ siempre y cuando $m \neq n$ porque todos los términos con seno se hacen cero; además, al evaluar los términos de coseno en los límites superiores e inferiores se cancelan.

Se procede ahora a encontrar el conjunto de funciones ortonormales:
$\int_{-1}^{1} \left[a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\right]^2 =$
$\int_{-1}^{1} \left[a_n^2 \cos^2 n\pi x + 2a_n b_n \cos n\pi x \sin n\pi x + b_n \sin^2 n\pi x\right] dx =$
$a_n^2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2n\pi x\right) dx + \frac{2a_n b_n}{n\pi} \frac{sen^2 n\pi x}{2} \,|_{-1}^{1} + b_n^2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2n\pi x\right) dx =$
$\left[a_n^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4n\pi}\sin 2n\pi x\right) + \frac{a_n b_n}{n\pi} sen^2 n\pi x + b_n^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4n\pi}\sin 2n\pi x\right)\right]_{-1}^{1} =$

$\left[\frac{a_n^2}{2}(1-(-1))+\frac{b_n^2}{2}(1-(-1))\right]=a_n^2+b_n^2$
Es decir la norma del conjunto de funciones es igual a $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$
Por lo tanto el conjunto de funciones ortonormales es:

$$\phi_n=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$

Problema 15. Discuta el problema de valor de frontera $y''+\lambda y=0$; $y(0)+y(1)=0$, $y'(0)=0$, **respondiendo en particular a las siguientes preguntas a) ¿Es un problema de Sturm-Liouville? b) ¿Tiene eigenvalores y eigenfunciones? c) ¿Si las eigenfunciones existen, son ellas mutuamente ortogonales?**

Solución:

a) No es un problema de Sturm-Liouville. Aunque la ecuación tiene la forma adecuada, las condiciones de frontera no coinciden con ninguno de los cuatro casos mencionados.

b) La solución general es:

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$y'(x)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$

Aplicando condiciones a la frontera:
$y(0)=c_1$
$y(1)=c_1\cos\sqrt{\lambda}+c_2\sin\sqrt{\lambda}$
Si $y(0)+y(1)=0$, se tiene que:
$c_1+c_1\cos\sqrt{\lambda}+c_2\sin\sqrt{\lambda}=0$
Ahora se usa la condición $y'(0)=0$
$0=c_2\sqrt{\lambda}$
$\therefore\quad c_2=0$
Retomando la primera condición
$c_1+c_1\cos\sqrt{\lambda}=0$
$c_1\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right)=0$
como $c_1$no puede ser cero, se tiene que:
$\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right)=0$
$\cos\sqrt{\lambda}=-1$

$\sqrt{\lambda} = (2n-1)\,\pi$
O sea los eigenvalores son

$$\lambda = (2n-1)^2\,\pi^2$$

Y las eigenfunciones pueden escribirse como

$$y_n\,(x) = a_n \cos\,(2n-1)\,\pi x$$

c) Si el problema fuera de Sturm-Liouville si se podría asegurar la ortogonalidad de la eigenfunciones. Aunque el problema tiene eigenvalores y eigenfunciones éstas no son necesariamente ortogonales en el intervalo $(0,1)$.

Problema 16. El problema de valor de frontera $y''+\lambda y = 0$; $y(-1) = -y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$. **a) ¿Es un problema de Sturm-Liouville? b) ¿Tiene eigenvalores y eigenfunciones? c) ¿Si las eigenfunciones existen, son ellas mutuamente ortogonales?**

Solución:

a) Este problema no es de Sturm-Liouville porque las condiciones de frontera no coinciden con ninguno de los cuatro casos.

b) Aun así, se puede resolver. La solución general es
$y\,(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ derivando
$y'\,(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$
Aplicando la condición a la frontera $y\,(-1) = -y(1)$

$$y\,(-1) = c_1 \cos\sqrt{\lambda} - c_2 \sin\sqrt{\lambda}$$

$$y\,(1) = c_1 \cos\sqrt{\lambda} + c_2 \sin\sqrt{\lambda}$$

$c_1 \cos\sqrt{\lambda} - c_2 \sin\sqrt{\lambda} = -c_1 \cos\sqrt{\lambda} - c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$
$0 = 2c_1 \cos\sqrt{\lambda}$
hay dos posibilidades $c_1 = 0$ o $\cos\sqrt{\lambda} = 0$ lo cual llevaría a $\sqrt{\lambda} = (2n-1)\,\frac{\pi}{2}$
Aplicando la otra condición de frontera $y'\,(-1) = -y'(1)$
$y\prime\,(-1) = c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2 \cos\sqrt{\lambda}$
$c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$
$0 = 2c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$
también hay dos posibilidades $c_2 = 0$ o $\cos\sqrt{\lambda} = 0$

Como c_1 y c_2 no pueden ser cero al mismo tiempo la solución más general se escribe como

$$y\,(x) = c_1 \cos{(2n-1)}\,\frac{\pi}{2}x + c_2 \sin{(2n-1)}\,\frac{\pi}{2}x$$

las cuales son las eigenfunciones.

c) La respuesta a este inciso se contesta analógamente al problema anterior.

Problema 17. Determine las eigenfunciones normalizadas y la ecuación que define los eigenvalores para el problema de valor de frontera $xy'' + y' + xy = 0$ con condiciones a la frontera: y acotada en $x = 0$ y (a) $y(1) = 0$; (b) $y'(1) = 0$; (c) $y(1) + 2y'(1) = 0$.

a) La ecuación tiene la forma

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

esta es la ecuación de Bessel con $n = 0$ cuya solución general es

$$y\,(x) = AJ_0(\sqrt{\lambda}x) + BY_0(\sqrt{\lambda}x)$$

A partir de las condiciones a la frontera se obtiene que $B = 0$ por que $y(x)$ debe estar acotada en $x = 0$ y la función $Y_0(\ x)$ no está acotada en $x = 0$. Por lo tanto

$$y\,(x) \ = AJ_0(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando la condición de frontera $y(1) = 0$

$0 = A\ J_0\sqrt{\lambda}$ o sea $J_0\sqrt{\lambda} = 0$, por lo que los eigenvalores son

$$\lambda_n = r_n^2$$

con $n = 0, 1, 2, \cdots$, r_n son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$

Por lo que las eigenfunciones son

$$y_n\,(x) \ = A_nJ_0(r_nx)$$

como el problema es de Sturm-Liouville, caso de un punto singular, tales funciones son mutuamente ortogonales en el intervalo $(0,1)$ con respecto a la función de peso $R(x)=x$. Para obtener las eigenfunciones normalizadas se sigue el siguiente proceso

$$\int_0^1 \quad A_n^2 \; xJ_0^2(r_n x)dx = 1$$

$$A_n^2 \int_0^1 xJ_0^2(r_n x)dx = 1$$

Como r_n son las raíces positivas de $J_0(x)=0$entonces la integral indicada se puede evaluar facilmente, consultando la tabla I.

$$A_n^2 \left(\frac{J_0'^2(r_n)}{2} \right) = 1$$

por lo tanto

$$A_n^2 = \frac{2}{\left(J_0'(r_n)\right)^2} = \frac{2}{J_1^2(r_n)}$$

Por lo que las correspondientes funciones normalizadas son

$$y_n\left(x\right) \;=\; \frac{\sqrt{2x}}{J_1(r_n)}\; J_0(r_n x)$$

b) De la misma forma que en el inciso anterior

$$y\left(x\right) \;=\; A\; J_0(\sqrt{\lambda}x)$$

derivando
$y'\left(x\right) = \; A\sqrt{\lambda}J_0'\left(\sqrt{\lambda}x\right)$
Aplicando la condición de frontera $y'(1)=0$
$A\sqrt{\lambda}J_0'\sqrt{\lambda}=0$ por lo tanto $J'_0\sqrt{\lambda}=0$ y los eigenvalores son

$$\lambda_n = r_n^2$$

con $n = 0, 1, 2, \cdots$, r_n son las raíces positivas $J_0'(x) = 0$

Por lo que las eigenfunciones son

$$y_n(x) = A_n J_0(r_n x)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para normalizar que en el inciso anterior

$$A_n^2 = \frac{1}{\int_0^1 x J_0^2(r_n x) dx}$$

la integral se obtiene de la tabla I recordando que las r_n son las raíces positivas $J_0'(x) = 0$

$$\int_0^1 x J_0^2(r_n x) dx = \frac{J_0^2(r_n)}{2}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{J_0(r_n)}$$

Por lo que las funciones normalizadas son

$$y_n(x) = \frac{\sqrt{2x}}{J_0(r_n)} J_0(r_n x)$$

c) Aplicando la condición de frontera

$$y(1) + 2y'(1) = 0$$

$$AJ_0\left(\sqrt{\lambda}\right) + 2A\sqrt{\lambda}J_0'\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$$

$$J_0\left(\sqrt{\lambda}\right) + 2\sqrt{\lambda}J_0'\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$$

Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = r_n^2$$

con $n = 0, 1, 2, \cdots$, r_n son las raíces positivasde $J_0(x) + 2xJ_0'(x) = 0$

Y las eigenfunciones son

$$y_n(x) = AJ_0(r_n x)$$

con r_n las raíces positivasde $J_0(x) + 2xJ_0'(x) = 0$

Para obtener las funciones normalizadas se hace uso del tercer renglón de la tabla I con $\mu = \frac{1}{2}$

$$y_n(x) = \frac{\sqrt{2x}r_n}{\left(\frac{1}{4} + r_n^2\right) J_0(r_n)} J_0(r_n x)$$

Problema 18. Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones para los problemas de valor de frontera:

(a) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 4)\, y = 0$; **donde** y **está acotada en** $x = 0$ **y** $y'(1) = 0$.

(b) $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 25)\, y = 0$; **donde** y **está acotada en** $x = 0$ **y** $2y(1) + 3y'(1) = 0$.

Solución: **(a)** La solución de la ecuación $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 4)\, y = 0$ está dada por

$$y(x) = AJ_2(\sqrt{\lambda}x) + BY_2(\sqrt{\lambda}x)$$

la función $Y_2(x)$ no está acotada en $x = 0$ por lo tanto $B = 0$ y

$$y(x) = AJ_2(\sqrt{\lambda}x)$$

Derivando

$y'(x) = A\sqrt{\lambda}J_2'(\sqrt{\lambda}x)$

Aplicando la condición de frontera $y'(1) = 0$

$A\sqrt{\lambda}J_2'(\sqrt{\lambda}) = 0$ de donde se obtiene que $\sqrt{\lambda} = r_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ donde r_n son las raíces de $J_2'(x) = 0$

Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = r_n^2$$

y las correspondientes eigenfunciones

$$y_n(x) = A_n J_2(r_n x)$$

(b) La solución de la ecuación $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 25)\, y = 0$ está dada por

$$y(x) = AJ_5(\sqrt{\lambda}x) + BY_5(\sqrt{\lambda}x)$$

al igual que en el inciso anterior la función $Y_5(x)$ no está acotada en $x = 0$ por lo tanto $B = 0$ y

$$y(x) = AJ_5(\sqrt{\lambda}x)$$

Derivando
$y'(x) = A\sqrt{\lambda}J_5'(\sqrt{\lambda}x)$
Aplicando la condición de frontera

$$2y(1) + 3y'(1) = 0$$

$$2AJ_5(\sqrt{\lambda}) + 3A\sqrt{\lambda}J_5'(\sqrt{\lambda}) = 0$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{2}{3}J_5(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}J_5'(\sqrt{\lambda}) = 0$$

de donde se obtiene que $\sqrt{\lambda} = r_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ donde r_n son las raíces de $\frac{2}{3}J_5(x) + xJ_5'(x) = 0$

Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = r_n^2$$

y las correspondientes eigenfunciones

$$y_n(x) = A_n J_5(r_n x)$$

Problema 19. Encuentre los eigenvalores y eigenfunciones para el problema de valor de frontera: consistente de la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$ **con la condición de que** y **está acotada en** $x = 0$ **y** (a) $y(1) = 0$; (b) $y'(1) = 0$; (c) $y(1) + 5y'(1) = 0$.

Solución: **(a)** La solución de la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ está dada por

$$y(x) = AJ_{1/2}(\sqrt{\lambda}x) + BJ_{-1/2}(\sqrt{\lambda}x)$$

la cual se puede escribir como

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x))$$

la función $y(x)$ debe estar acotada en $x = 0$, para ver lo que sucede en $x = 0$ calculamos el límite
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x))\right] = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}}\right) + B\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}}\right)$
aunque el primer límite puede evaluarse usando la regla de L'Hôpital el segundo límite se va a ∞, por lo tanto en $x = 0$ $y(x)$ no está acotada debido al segundo término, por lo tanto debe tomarse $B = 0$.

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}A\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando la condición de frontera $y(1) = 0$
$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ de donde se obtiene que $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \cdots$
Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

y las correspondientes eigenfunciones

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}A_n\sin(n\pi x)$$

(b) La solución de la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ está dada por

$$y(x) = AJ_{1/2}(\sqrt{\lambda}x) + BJ_{-1/2}(\sqrt{\lambda}x)$$

la cual se puede escribir como

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x))$$

la función $y(x)$ debe estar acotada en $x = 0$, para ver lo que sucede en $x = 0$ calculamos el límite

$$\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x))\right] =$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}}\right) + B\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}}\right)$$

aunque el primer límite puede evaluarse usando la regla de L'Hôpital el segundo límite se va a ∞, por lo tanto en $x = 0$ $y(x)$ no está acotada debido al segundo término, por lo tanto debe tomarse $B = 0$.

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}A\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando la condición de frontera $y(1) = 0$
$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ de donde se obtiene que $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \cdots$
Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

y las correspondientes eigenfunciones

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}A_n\sin(n\pi x)$$

(b) Según el inciso anterior la solución acotada en $x = 0$ es

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}A\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando la condición de frontera $y'(1) = 0$

$$y'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}A\left(\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}} - \frac{x^{-3/2}}{2}\sin(\sqrt{\lambda}x)\right)$$

$$0 = \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2}\sin(\sqrt{\lambda})$$

o sea $\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \tan(\sqrt{\lambda}) = 2\sqrt{\lambda}$

por lo tanto $\sqrt{\lambda} = r_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ donde r_n son las raíces de la ecuación $\tan x = 2x$

Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = r_n^2$$

donde r_n son las raíces $\tan x = 2x$

y las correspondientes eigenfunciones son

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} A_n \sin(r_n x)$$

(c) La solución acotada en $x = 0$ es

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} A \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Aplicando la condición de frontera $y(1) + 2y'(1) = 0$

$$y'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A \left(\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}} - \frac{x^{-3/2}}{2}\sin(\sqrt{\lambda}x) \right)$$

$$0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A \left[\sin(\sqrt{\lambda}) + 2\left(\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2}\sin(\sqrt{\lambda}) \right) \right]$$

$$0 = \left[2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) \right]$$

o sea $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}) = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

Por lo tanto los eigenvalores son

$$\lambda_n = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

y las correspondientes eigenfunciones son

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} A_n \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} x$$

7.2.5 Series de Bessel

Como las funciones de Bessel son mutuamente ortogonales en el intervalo $[0,1]$ con respecto a la función de peso x entonces es posible expander una función $f(x)$ en serie de las funciones de Bessel de la forma

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jJ_n(r_jx) \tag{7.40}$$

los coeficientes se calculan como

$$a_k=\frac{\int_0^1 xf(x)J_n(r_kx)dx}{\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)dx} \tag{7.41}$$

donde la integral en el denominador se encuentra fácilmente usando la tabla I.

Problema 20.

a) Expanda $f(x)=x$, $0<x<1$, en una serie de funciones de Bessel $J_1(r_kx)$, donde r_k, $k=1,2,3,...$, son las raíces positivas de $J_1(x)=0$, para obtener

$$x=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{J_1(r_kx)}{r_kJ_2(r_k)}$$

b) Muestre que la serie en a) converge a $f(x)$ si $-1\leq x\leq 1$

Solución:

$f(x)=x=\sum_{k=1}^{+\infty}a_kJ\ _1(r_kx)$

$$a_k=\frac{\int_0^1 x^2J\ _1(r_kx)dx}{\int_0^1 xJ_1^2(r_kx)dx}$$

Como r_k son las raíces positivas de $J_1(x)=0$, a partir de la tabla I la integral del denominador se encuentra fácilmente

$$\int_0^1 xJ_1^2(r_kx)dx=\frac{1}{2}J_1'^2(r_k)$$

Para evaluar la integral $\int_0^1 x^2J\ _1(r_kx)dx$ se hace un cambio de variable

$u=r_kx \qquad du=r_kdx$

$dx = \frac{du}{r_k}$

$$\int_0^1 x^2 J_{\,1}(r_k x)dx = \int_0^{r_k} \frac{u^2}{{r_k}^2} J_1\left(u\right)\frac{du}{r_k} = \frac{1}{r_k^3} u^2 J_2(u)\mid_0^{r_k} = \frac{1}{r_k^3}\left[r_k^2 J_2(r_k)\right] = \frac{J_2(r_k)}{r_k}$$

Por lo tanto

$$a_k = \frac{\frac{J_2(r_k)}{r_k}}{\frac{1}{2}J_1'^2(r_k)} = \frac{2J_2(r_k)}{r_k J_1'^2(r_k)}$$

Si en la relación de recurrencia

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n^{'}(x)$$

se pone $n = 1$
$J_0(x) - \ J_2(x) = 2J_1^{'}(x)$

$$J_1^{'}(x) = \frac{J_0(x) - \ J_2(x)}{2} \tag{7.42}$$

Usando también la relación de recurrencia

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

también con $n = 1$
$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$
de donde

$$J_0(x) = \frac{2}{x} J_1(x) \ - J_2(x) \tag{7.43}$$

al sustituir en la ecuación (7.42) se obtiene

$$J_1^{'}(x) = \frac{1}{x} J_1(x) - J_2(x) \tag{7.44}$$

al poner $x = r_k$ en la ecuación (7.44) hay que considerar que $J_1(r_k) = 0$, por lo tanto
$J_1^{'}(r_k) = -J_2(r_k)$
Sustituyendo en la expresión para a_k

$$a_k = \frac{2J_2(r_k)}{r_k J_2^2(r_k)} = \frac{2}{r_k J_2(r_k)}$$

Por lo tanto, sustituyendo a_k

$$f(x) = x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{r_k J_2(r_k)} J\ _1(r_k x)$$

que es precisamente lo que se deseaba demostrar.

b) La aproximación anterior es válida para $x \in [0,1]$. Para demostrar que la serie converge a $f(x)$ si $x \in [-1,1]$ cambiamos en la serie x por $-x$

$$-x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k J_2(r_k)} J_1(-r_k x)$$

$J_1(x)$ es una función impar, por lo que
$J_1(-x) = -J_1(x)$. Por lo tanto se obtiene el mismo resultado

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k J_2(r_k)} J_1(r_k x)$$

Y se concluye que la aproximación es válida también en el intervalo $[-1,0]$. Por lo tanto la serie converge a $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$.▲

Problema 21. Expanda $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$ en una serie de funciones de Bessel $J_2(r_k x)$, donde r_k, $k = 1, 2, ...$, son las raíces positivas de $J_2(x) = 0$, y muestre que la serie resultante también converge a $f(x)$ donde $-1 \leq x \leq 1$.

Solución:

$$a_k = \frac{\int_0^1 x^3 J_2(r_k x)dx}{\int_0^1 x J_2^2(r_k x)dx}$$

La solución de la integral del denominador se encuentra en la tabla I y es:

$$\int_0^1 x J_2^2(r_k x)dx = \frac{1}{2} J_2'(r_k)$$

Para encontrar la integral

$$\int_0^1 x^3 J_2(r_k x)dx$$

se hace:

$$\begin{array}{ll} u = r_k x & du = r_k dx \\ x = \frac{u}{r_k} & dx = \frac{du}{r_k} \end{array}$$

$$\int_0^1 x^3 J_2(r_k x) dx = \int_0^{r_k} \frac{u^3}{r_k^3} J_2(u) \frac{du}{r_k} = \frac{1}{r_k^4} \int_0^{r_k} u^3 J_2(u) du = \frac{1}{r_k^4} \left(u^3 J_3(u) \mid_0^{r_k} \right)$$

$$\int_0^1 x^3 J_2(r_k x) dx = \frac{1}{r_k} J_3(r_k)$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$a_k = \frac{\frac{J_3(r_k)}{r_k}}{\frac{J_2'^2(r_k)}{2}} = \frac{2J_3(r_k)}{r_k J_2'^2(r_k)}$$

De la relación de recurrencia (7.18) con $n = 2$

$$J_2'(x) = \frac{1}{2} \left(J_1(x) - J_3(x) \right)$$

Ahora de la relación de recurrencia (7.17); con $n = 2$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x)$$

Al evaluar en $x = r_k$

$$J_3(r_k) = \frac{4}{r_k} J_2(r_k) - J_1(r_k)$$

Pero como $J_2(r_k) = 0$

$$J_1(r_k) = -J_3(r_k)$$

Sustituyendo en la ecuación para $J_2'(x)$

$$J_2'(r_k) = \frac{1}{2} \left(-J_3(r_k) - J_3(r_k) \right) = -J_3(r_k)$$

$$\left(J_2'(r_k) \right)^2 = J_3^2(r_k)$$

Entonces a_k es

$$a_k = \frac{2J_3(r_k)}{r_k J_3^2(r_k)} = \frac{2}{r_k J_3(r_k)}$$

Por lo tanto

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(r_k x)}{r_k J_3(r_k)}$$

o sea

$$x^2 = 2\left(\frac{J_2(r_1 x)}{r_1 J_3(r_1)} + \frac{J_2(r_2 x)}{r_2 J_3(r_2)} + \frac{J_2(r_3 x)}{r_3 J_3(r_3)} + ...\right)$$

Esta aproximación es válida para el intervalo $[0,1]$, para ver que es válida en el intervalo $[-1,1]$ se cambia x por $-x$ en la serie

$(-x)^2 = x^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(-r_k x)}{r_k J_3(r_k)}$ y como $J_2(-r_k x) = J_2(r_k x)$ se obtiene la misma serie, por lo tanto la serie converge a $f(x)$ en todo el intervalo $[-1,1]$.▲

Problema 22. Expanda $f(x) = 1$, $0 < x < 1$, en una serie de funciones de Bessel $J_0(r_k x)$, donde r_k, $k = 1, 2, ...$, son las raíces positivas de $xJo'(x) + J_0(x) = 0$.

Solución:

$$a_k = \frac{\int_0^1 xJ_0(r_k x)dx}{\int_0^1 xJ_0^2(r_k x)dx}$$

La integral del denominador se encuentra utilizando la tabla I (tercer renglón) con $\mu = 1$

$$\int_0^1 xJ_0^2(r_k x)dx = \frac{\left(r_k^2 + 1\right) J_0^2(r_k)}{2r_k^2}$$

y la del denominador se resuelve haciendo $u = r_k x$ es
$\int_0^1 xJ_0(r_k x)dx = \int_0^{r_k} \frac{u}{r_k^2} J_0(u)du = \left[\frac{uJ_1(u)}{r_k^2}\right]_0^{r_k} = \frac{J_1(r_k)}{r_k}$
por lo tanto

$$a_k = \frac{\frac{J_1(r_k)}{r_k}}{\frac{\left(r_k^2+1\right)J_0^2(r_k)}{2r_k^2}} = \frac{2r_k J_1(r_k)}{\left(r_k^2 + 1\right) J_0^2(r_k)}$$

por lo tanto

$$f(x) = 1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k J_1(r_k)}{\left(r_k^2+1\right) J_0^2(r_k)} J_0(r_k x)$$

Problema 23. Muestre que para $-1 \le x \le 1$

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k J_2\left(r_k\right) J_1\left(r_k x\right)}{\left(r_k^2-1\right) J_1^2\left(r_k\right)}$$

donde $r_k,\ k = 1, 2, ..,$ **son las raíces positivas de** $J_1'(x) = 0$.
Solución:

$$a_k = \frac{\int_0^1 x\left(\frac{x}{2}\right) J_1\left(r_k x\right) dx}{\int_0^1 x J_1^2\left(r_k x\right) dx}$$

La integral del denominador se encuentra usando el segundo renglón de la tabla I

$$\int_0^1 x J_1^2\left(r_k x\right) dx = \frac{\left(r_k^2-1\right) J_1^2(r_k)}{2r_k^2}$$

En la integral del numerador se hace $u = r_k x$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} J_1\left(r_k x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{r_k} \frac{u^2}{r_k^3} J_1\left(u\right) du = \frac{1}{2r_k^3}\left[u^2 J_2\left(u\right)\right]_0^{r_k} = \frac{J_2\left(r_k\right)}{2r_k}$$

Por lo tanto

$$a_k = \frac{\frac{J_2(r_k)}{2r_k}}{\frac{\left(r_k^2-1\right)J_1^2(r_k)}{2r_k^2}} = \frac{r_k J_2\left(r_k\right)}{\left(r_k^2-1\right) J_1^2(r_k)}$$

Es decir

$$f(x) = \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k J_2\left(r_k\right)}{\left(r_k^2-1\right) J_1^2\left(r_k\right)} J_1\left(r_k x\right)$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.▲

Problema 24. Usando la identidad de Parseval en el problema 20, muestre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1'^2(r_k)}{r_k^2 J_2^2(r_k)} = \frac{1}{8}$$

Solución:

La identidad de Parseval establece que

$$\int_0^1 x\,[f(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} d_k a_k^2 \tag{7.45}$$

donde a_k se encuentra usando la ecuación (7.41) y d_k se determina a partir de

$$d_k = \int_0^1 x J_n^2(r_k x) dx \tag{7.46}$$

En el problema 20 se obtuvo que

$$f(x) = x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(r_k x)}{r_k J_2(r_k)}$$

al calcular a_k se obtuvo

$$a_k = \frac{2}{r_k J_2(r_k)}$$

$$d_k = \int_0^1 x J_1^2(r_k x) dx = \frac{1}{2} J_1'^2(r_k)$$

Entonces la identidad de Parseval se escribe como

$$\int_0^1 x^3 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} J_1'^2(r_k) \frac{4}{r_k^2 J_2^2(r_k)}$$

$$\frac{1}{4} = \sum \frac{2 J_1'^2(r_k)}{r_k^2 J_2^2(r_k)}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{8} = \sum \frac{J_1'^2(r_k)}{r_k^2 J_2^2(r_k)}$$

Problema 25. (a) Si r_k**,** $k = 1, 2, \ldots,$ **son las raíces positivas de** $J_3(x) = 0$**, muestre que para** $0 \leq x \leq 1$

$$x^3 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_3(r_k x)}{r_k J_4(r_k)}$$

(b) Escriba la identidad de Parseval correspondiente al resultado en (a).

Solución:

(a)

$$x^3 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_3(r_k x)$$

donde

$$a_k = \frac{\int_0^1 x^4 J_3(r_k x)dx}{\int_0^1 x {J_3}^2(r_k x)dx}$$

la integral del denominador es:

$$\int_0^1 x {J_3}^2(r_k x)dx = \frac{1}{2}{J_3'}^2(r_k)$$

y la integral del numerador es:

$$\int_0^1 x^4 J_3(r_k x)dx = \frac{J_4(r_k)}{r_k}$$

A partir de las relaciones de recurrencia (7.16) y (7.17) con $n = 3$

$$J_2(x) - J_4(x) = 2J_3'(x)$$

$$J_2(x) + J_4(x) = \frac{6}{x} J_3(x)$$

al poner $x = r_k$, donde r_k son las raíces de $J_3(x) = 0$ en la segunda ecuación

$$J_2(r_k) = -J_4(r_k)$$

y sustituyendo en la primera se obtiene

$$J_3'(r_k) = -J_4(r_k)$$

por lo tanto

$$a_k = \frac{J_4(r_k)}{\frac{1}{2} r_k J_3'^{\,2}(r_k)} = \frac{2J_4(r_k)}{r_k J_4^2(r_k)} = \frac{2}{r_k J_4(r_k)}$$

y se obtiene justo lo que se deseaba mostrar

$$x^3 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_3(r_k x)}{r_k J_4(r_k)}$$

(b) Se calculan los coeficientes d_k en la identidad de Parseval, ecuaciones (7.45) y (7.46)

$$d_k = \int_0^1 x J_3^2(r_k x) dx = \frac{1}{2} J_3'^{\,2}(r_k)$$

Por lo que la identidad de Parseval queda como

$$\int_0^1 x^7 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} J_3'^{\,2}(r_k) \right] \left[\frac{2}{r_k J_4(r_k)} \right]^2$$

$$\frac{1}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} J_4^2(r_k) \quad \left[\frac{2}{r_k^2 J_4^2(r_k)} \right] = \; 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^2}$$

o bien

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \dots$$

Problema 26. (a) Si r_k, $k = 1, 2, \dots,$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$, muestre que para $0 \le x \le 1$

$$x^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r_k^2 - 4)\, J_0(r_k x)}{r_k^3 J_1(r_k)}$$

(b) Escriba la identidad de Parseval correspondiente al resultado en (a).

Solución:

(a)

$$x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(r_k x)$$

donde

$$a_k = \frac{\int_0^1 x^3 J_0(r_k x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(r_k x) dx}$$

la integral del denominador es:

$$\int_0^1 x J_0^2(r_k x) dx = \frac{1}{2} J_0'^{\,2}(r_k) = \frac{1}{2} J_1^2(r_k)$$

para la integral del numerador hacemos:

$w = r_k x$, $dw = r_k dx$

$$\int_0^1 x^3 J_0(r_k x) dx = \frac{1}{r_k^4} \int_0^{r_k} w^3 J_0(w) dw$$

integrando por partes

$u = w^2$

$du = 2w dw$

$dv = w J_0(w) dw$

$v = w J_1(w)$

$\int_0^1 x^3 J_0(r_k x) dx = \frac{1}{r_k^4} \left(w^3 J_1(w) \mid_0^{r_k} -2 \int_0^{r_k} w^2 J_1(w) dw \right) =$

$\frac{1}{r_k^4}\left(w^3J_1(w)-2w^2J_2(w)\right)_0^{r_k}=\frac{1}{r_k^4}\left(r_k^3J_1(r_k)-2r_k^2J_2(r_k)\right)=$
$\frac{1}{r_k^2}\left(r_kJ_1(r_k)-2J_2(r_k)\right)$

$$\int_0^1 x^3J_0(r_kx)dx=\frac{r_kJ_1(r_k)-2J_2(r_k)}{r_k^2}$$

A partir de la relación de recurrencia (7.16) $n=1$

$$J_0(x)+J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)$$

al poner $x=r_k$, donde r_k son las raíces de $J_0(x)=0$

$$J_2(r_k)=\frac{2}{r_k}J_1(r_k)$$

se obtiene
$\int_0^1 x^3J_0(r_kx)dx=\frac{r_kJ_1(r_k)-2\left(\frac{2}{r_k}J_1(r_k)\right)}{r_k^2}=\frac{J_1(r_k)(r_k^2-4)}{r_k^3}$
por lo tanto

$$a_k=\frac{\frac{J_1(r_k)(r_k^2-4)}{r_k^3}}{\frac{1}{2}J_1^2(r_k)}=\frac{2(r_k^2-4)}{r_k^3J_1(r_k)}$$

y se obtiene justo lo que se deseaba mostrar
$$x^2=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(r_k^2-4)}{r_k^3J_1(r_k)}J_0(r_kx)$$

(b) Se calculan los coeficientes d_k en la identidad de Parseval, ecuaciones (7.45) y (7.46)

$$d_k=\int_0^1 xJ_0^2(r_kx)dx=\frac{1}{2}J_0'^2(r_k)=\frac{1}{2}J_1^2(r_k)$$

Por lo que la identidad de Parseval queda como

$$\int_0^1 x^5dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}J_1^2(r_k)\right]\left[\frac{2(r_k^2-4)}{r_k^3J_1(r_k)}\right]^2$$

$$\frac{1}{6} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(r_k^2-4)^2}{r_k^6}\right]$$

o bien

$$\frac{1}{12} = \frac{(r_1^2-4)^2}{r_1^6} + \frac{(r_2^2-4)^2}{r_2^6} + \frac{(r_3^2-4)^2}{r_3^6} + \ldots$$

Problema 27. (a) Si r_k, $k = 1, 2, \ldots$, son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$, muestre que para $-1 < x < 1$

$$\frac{1-x^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(r_k x)}{r_k^3 J_1(r_k)}$$

(b) Muestre que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k^3 J_1(r_k)} = \frac{1}{8}$$

Solución:
(a)

$$\frac{1-x^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(r_k x)$$

donde

$$a_k = \frac{\int_0^1 x\left(\frac{1-x^2}{8}\right)J_0(r_k x)dx}{\int_0^1 x J_0^2(r_k x)dx}$$

la integral del denominador es:

$$\int_0^1 x J_0^2(r_k x)dx = \frac{1}{2}{J_0'}^2(r_k) = \frac{1}{2}J_1^2(r_k)$$

para la integral del numerador hacemos:
$w = r_k x$, $dw = r_k dx$
$\int_0^1 x\left(\frac{1-x^2}{8}\right)J_0(r_k x)dx = \frac{1}{8r_k^2}\int_0^{r_k} wJ_0(w)dw - \frac{1}{8r_4^2}\int_0^{r_k} w^3 J_0(w)dw$

integrando por partes la segunda integral
$u = w^2$
$du = 2wdw$
$dv = wJ_0(w)dw$
$v = wJ_1(w)$

$$\int_0^1 x\left(\frac{1-x^2}{8}\right)J_0(r_kx)dx = \frac{1}{8r_k^2}wJ_1(w)\mid_0^{r_k} - \frac{1}{8r_k^4}\left(w^3J_1(w)\mid_0^{r_k} - 2\int_0^{r_k} w^2J_1(w)dw\right) =$$

$$\frac{1}{8r_k}J_1(r_k) - \frac{1}{8r_k^4}\left(r_k^3J_1(r_k) - 2r_k^2J_2(r_k)\right) = \frac{J_2(r_k)}{4r_k^2}$$

$$\int_0^1 x\left(\frac{1-x^2}{8}\right)J_0(r_kx)dx = \frac{J_2(r_k)}{4r_k^2}$$

A partir de la relación de recurrencia (7.16) $n = 1$

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x)$$

al poner $x = r_k$, donde r_k son las raíces de $J_0(x) = 0$

$$J_2(r_k) = \frac{2}{r_k}J_1(r_k)$$

se obtiene

$$\int_0^1 x\left(\frac{1-x^2}{8}\right)J_0(r_kx)dx = \frac{\frac{2}{r_k}J_1(r_k)}{4r_k^2} = \frac{J_1(r_k)}{2r_k^3}$$

por lo tanto

$$a_k = \frac{\frac{J_1(r_k)}{2r_k^3}}{\frac{1}{2}J_1^2(r_k)} = \frac{1}{r_k^3J_1(r_k)}$$

y se obtiene justo lo que se deseaba mostrar

$$\frac{1-x^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(r_kx)}{r_k^3J_1(r_k)}$$

al cambiar en esta expresión x por $-x$ se muestra fácilmente que esta aproximación es válida para $x \in (-1, 1)$

(b) Si en el resultado anterior hacemos $x = 0$ y recordando que $J_0(0) = 1$

$$\frac{1}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^3 J_1(r_k)}$$

Problema 28. a) Muestre que para $-1 \leq x \leq 1$,

$$\frac{x^3 - x}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(r_k x)}{r_k^3 J_0(r_k)}$$

donde r_k **son las raíces positivas de** $J_1(x) = 0$
b) Deduzca que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(r_k/2\right)}{r_k^3 J_0(r_k)} = -\frac{3}{128}$$

Solución:
(a)

$$a_k = \frac{\int_0^1 x \left(\frac{x^3 - x}{16}\right) J_1(r_k x) dx}{\int_0^1 x J_1^2(r_k) dx}$$

$\int_0^1 x Jo^2(r_k) dx = \frac{1}{2} J_1'^2(r_k)$
$\int_0^1 x \left(\frac{x^3 - x}{16}\right) J_1(r_k x) dx = \frac{1}{16} \int_0^1 x^4 J_1(r_k x) dx - \frac{1}{16} \int_0^1 x^2 J_1(r_k x) dx$
Haciendo $u = r_k x \quad du = r_k dx \quad dx = \frac{du}{r_k}$

$$\int_0^1 x^2 J_1(r_k x) dx = \frac{1}{r_k^3} \int_0^{r_k} u^2 J_1(u) du = \frac{1}{r_k^3} \left(u^2 J_2(u) du\right) |_0^{r_k} = \frac{J_2(r_{k)}}{r_k}$$

$$\int_0^1 x^4 J_1(r_k x) dx = \frac{1}{r_k^5} \int_0^{r_k} u^4 J_1(u) du = \frac{1}{r_k^5} \int_0^1 u^4 J_1(u) du$$

$w = u^2 \qquad dv = u^2 J_1\left(u\right) dx$
$dw = 2u du \qquad v = u^2 J_2\left(u\right)$

$$\frac{1}{r_k^5}\int_0^1 x^4 J_1(r_k x)dx = \frac{1}{r_k^5}\left(u^4 J_2\left(u\right) - 2\int_0^1 u^3 J_2\left(u\right)du\right) =$$

$$\frac{1}{r_k^5}\left[u^4 J_2\left(u\right) - 2u^3 J_3\left(u\right)\right]_0^{r_k} = \frac{1}{r_k^5}\left[u^4 J_2(x) - 2u^3\left[\frac{4}{u}J_2\left(u\right) - J_1\left(u\right)\right]\right]_0^{r_k} =$$

$$\frac{1}{r_k^5}\left[u^4 J_2(u) - 8u^2 J_2(u) - 2u^3 J_1\left(u\right)\right]_0^{r_k} = \frac{1}{r_k^5}\left[r_k^4 J_2(r_k) - 8r_k^2 J_2(r_k) - 2r_k^3 J_1\left(r_k\right)\right] =$$

$$\frac{1}{r_k^5}\left[r_k^4 J_2(r_k) - 8r_k^2 J_2(r_k)\right]$$

pero

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x)$$

si $x = r_k$ son las raíces de $J_1(x) = 0$

$$J_2(r_k) = -J_0(r_k)$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 x^4 J_1(r_k x)dx = \frac{1}{r_k^5}\left[-r_k^4 J_0(r_k) + 8r_k^2 J_0(r_k)\right] = \frac{J_0(r_k)}{r_k^3}\left[8 - r_k^2\right]$$

Regresando a la integral original

$$\int_0^1 x\left(\frac{x^3 - x}{16}\right)J_1(r_k x)dx = \frac{1}{16}\left[\frac{J_0(r_k)}{r_k^3}\left[8 - r_k^2\right] + \frac{J_0(r_k)}{r_k}\right] = \frac{1}{2}\frac{J_0\left(r_k\right)}{r_k^3}$$

Por lo tanto

$$a_k = \frac{\frac{1}{2}\frac{J_0(r_k)}{r_k^3}}{\frac{1}{2}J_0^2(r_k)} = \frac{1}{r_k^3 J_0\left(r_k\right)}$$

Por lo tanto

$$\frac{x^3 - x}{16} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(r_k x\right)}{r_k^3 J_0(r_k)}$$

b) Si $x = \frac{1}{2}$ en esta expresión

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(r_k/2)}{r_k^3 J_0(r_k)} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2}}{16} = -\frac{6}{256} = -\frac{3}{128}$$

Problema 29. Encuentre la serie de Bessel de $f(x) = \ln x$ para $0 < x \leq 1$ en términos de $J_0(r_k x)$
donde r_k, $k = 1, 2, ...$, son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$.
Solución:

$$a_k = \frac{\int_0^1 x \ln x J_0(r_k x)dx}{\int_0^1 x J_0^2(r_k x)dx}$$

$$\int_0^1 x J_0^2(r_k x)dx = \frac{1}{2} J_0'^2(r_k)$$

En la integral $\int_0^1 x \ln x J_0(r_k x)dx$ se hace:
$u = r_k x \quad du = r_k dx$
$x = \frac{u}{r_k} \qquad dx = \frac{du}{r_k}$
$\int_0^1 x \ln x J_0(r_k x)\, dx = \int_0^{r_k} \frac{u}{r_k} \ln(\frac{u}{r_k}) J_0(u) \frac{du}{r_k} = \frac{1}{r_k^2} \int_0^{r_k} u \ln(\frac{u}{r_k}) J_0(u)\, du$
Integrando por partes
$\alpha = \ln(\frac{u}{r_k}) \qquad db = uJ_0(u)du$
$d\alpha = \frac{r_k}{u}\frac{du}{r_k} = \frac{du}{u} \qquad b = uJ_1(u)$
$= \frac{1}{r_k^2} \left(uJ_1(u) \ln(\frac{u}{r_k}) \mid_0^{r_k} - \int_0^{r_k} J_1(u)du \right)$
$\frac{1}{r_k^2} \left(uJ_1(u) \ln(\frac{u}{r_k}) + J_0(u) \right)_0^{r_k} = \frac{1}{r_k^2} \left(r_k J_1(r_k) + J_0(r_k) - J_0(0) \right) = \frac{1}{r_k^2} (r_k J_1(r_k) - 1)$

$$a_k = \frac{2\,(r_k J_1(r_k) - 1)}{r_k^2 J_0'^2(r_k)}$$

Como

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

$$(J_0'(x))^2 = (-J_1(x))^2 = J_1^2(x)$$

$$a_k = \frac{2\,(r_k J_1(r_k) - 1)}{r_k^2 J_1^2(r_k)}$$

$$f(x) = \ln x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r_k J_1(r_k) - 1)}{r_k^2 J_1^2(r_k)} J_0(r_k x)$$

Chapter 8

Ecuaciones diferenciales parciales

En la primera parte se ilustra el método de separación de variables, tal método no requiere mayor explicación, se ilustra con todo detalle en los problemas.

8.1 El método de separación de variables

Problema 1. Use el método de separación de variables para obtener la solución del siguiente problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=U$$

$$U\left(0,y\right)=2e^{-y}+3e^{-2y}$$

Solución: Se propone una solución de la forma:

$$Y\left(x,t\right)=X\left(x\right)Y\ \left(y\right)$$

$$\frac{dY}{dy}=XY';\ \frac{dY}{dx}=X'Y$$

Sustituyendo en la ecuación y dividiendo entre XY:

$$\frac{XY'}{XY} + \frac{X'Y}{XY} = XY \;\; ; \;\; \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 1; \;\; \frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y}$$

La única forma en que una función de x es igual a una función de y es cuando son iguales a una constante:

$$\frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y} = c$$

Y se obtienen las ecuaciones

$$\frac{X'}{X} = c$$

$$1 - \frac{Y'}{Y} = c$$

La primera ecuación se escribe en la forma

$$X' = cX$$

$$\frac{dX}{dx} = cX$$

Es de variables separables

$$\frac{dX}{X} = cdx$$

Integrando:

$$\ln X = cx + \ln c_1$$

$$\ln X - \ln c_1 = cx$$

$$\ln \frac{X}{c_1} = cx$$

$$X(x) = c_1 e^{cx}$$

Para encontrar $Y(y)$ se resuelve la ecuación

$$1-\frac{Y'}{Y}=c$$

$$\frac{Y'}{Y}=1-c$$

que es también de variables separables

$$\frac{dY}{Y}=(1-c)dy$$

$$\ln Y=(1-c)y+\ln c_2$$

Despejando $Y(y)$

$$Y(y)=c_2e^{(1-c)y}$$

Por lo tanto la solución general se escribe como

$$U(x,y)=c_1e^{cx}c_2e^{(1-c)y}=ae^{cx+(1-c)y}$$

Al tratar de aplicar la condición de frontera se llega a una contradicción porque $U(0,y)=ae^{(1-c)y}$ solamente tiene un término, para evitar la contradicción se usa el principio de superposición y se escribe la solución de la siguiente forma:

$$U(x,y)=a_1e^{c_1x+(1-c_1)y}+a_2e^{c_2x+(1-c_2)y}$$

Ahora si, aplicando las condiciones a la frontera:

$$U(0,y)=a_1e^{(1-c_1)y}+a_2e^{(1-c_2)y}=2e^{-y}+3e^{-2y}$$

de tal forma que $a_1=2$, $a_2=3$, $1-c_1=-1$, $1-c_2=-2$, o sea por lo tanto $c_1=2$ y $c_2=3$, por lo tanto la solución se escribe como

$$U(x,y)=2e^{2x-y}+3e^{3x-2y}$$

Problema 2. Use el método de separación de variables para obtener la solución del siguiente problema de valor de frontera.

$$9\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dx^2}$$

$$y\left(0,t\right) = 0;\ y_t\left(x,0\right) = 2senx - 3sen2x;\ y\left(\pi,t\right) = 0; y\left(x,0\right) = 0$$

Solución: Se propone una solución de la forma:

$$Y\left(x,t\right) = X\left(x\right)T\ \ \left(t\right)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = XT'';\ \frac{d^2Y}{dx^2} = X''T$$

Sustituyendo en la ecuación y dividiendo entre XT:

$$\frac{9XT''}{XT} = \frac{X''T}{XT}\ \ ;\ \ \frac{9T''}{T} = \frac{X''}{X}$$

La única forma en que una función de t es igual a una función de x es cuando son iguales a una constante:

$$\frac{9T''}{T} = \frac{X''}{X} = c$$

Y se obtienen las ecuaciones

$$\frac{X''}{X} = c$$

$$\frac{9T''}{T} = c$$

La primera ecuación se escribe en la forma

$$X'' - cX = 0$$

Su ecuación característica es

$$m^2 - c = 0$$

o sea $m = \pm\sqrt{c}$. Po r lo tanto existen tres casos

$c > 0$. En cuyo caso las raíces son reales y diferentes. Por lo tanto la solución $X(x)$ se escribe como

$$X(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

$c = 0$. En este caso solo hay una raíz doble $m = 0$, la solución se escribe como

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

$c < 0$. En este caso las raíces son complejas $m = \pm\sqrt{-c}i = \pm\beta i$. Y la solución se escribe como

$$X(x) = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$$

Para decidir cual de los tres casos es el adecuado se observa que una de las condiciones de frontera es $y_t(x, 0) = 2senx - 3sen2x$, el hecho de que en esta expresión aparezcan términos con senos automáticamente descarta los dos primeros casos, ya que una solución que no contenga términos con senos y cosenos no podrá cumplir con esta condición a la frontera. Usualmente para asegurar que c es negativa se pone $c = -\lambda^2$, para encontrar $T(t)$ se resuelve la ecuación

$$\frac{9T''}{T} = -\ \lambda^2$$

esta ecuación se escribe como

$$9T'' + \lambda^2 T = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son $m = \pm\frac{\lambda}{3}i$, por lo que la solución se escribe como

$$T(t) = c_3 \cos\frac{\lambda}{3}t + c_4\ sen\frac{\lambda}{3}t$$

Por lo tanto la solución general se escribe como

$$Y(x,t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2\ sen \lambda x)(c_3 \cos \frac{\lambda}{3} t + c_4\ sen \frac{\lambda}{3} t)$$

Aplicando las condiciones a la frontera:

$Y(0,t) = 0 = (c_1)\ (c_3 \cos \frac{\lambda}{3} t + c_4\ sen \frac{\lambda}{3} t) \qquad \therefore\ c_1 = 0$

Es decir,

$Y(x,t) = (c_2\ sen \lambda x)(c_3 \cos \frac{\lambda}{3} t + c_4\ sen \frac{\lambda}{3} t) = sen \lambda x (a_1 \cos \frac{\lambda}{3} t + a_2\ sen \frac{\lambda}{3} t)$

Aplicando ahora la condición $y\,(x,0) = 0$

$Y(x,0) = a_1 sen \lambda x = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0$

Y la solución se escribe como

$$Y(x,t) = a_2\ sen \lambda x sen \frac{\lambda}{3} t$$

Ahora se aplica la condición $y\,(\pi,t) = 0$

$Y(\pi,t) = a_2\ sen \lambda \pi sen \frac{\lambda}{3} t = 0$

$\therefore sen \lambda \pi = 0$ de donde se obtiene $\lambda \pi = n\pi$, es decir, $\lambda = n$

$$Y(x,t) = a_2 sennx sen \frac{n}{3} t = \quad A sennx sen \frac{n}{3} t$$

Para cumplir con la última condición de frontera se aplica el principio de superposición..

$$Y(x,t) = A_1 senn_1 x sen \frac{n_1}{3} t \ + \ A_2 senn_2 x sen \frac{n_2}{3} t$$

Derivamos con respecto a t

$$Y_t(x,t) = A_1 \frac{n_1}{3} senn_1 x \cos \frac{n_1}{3} t + A_2 \frac{n_2}{3}\ sen\ n_2 x \cos \frac{n_2}{3} t$$

Aplicamos la última condición de frontera

$$Y_t(x,0) = 2senx - 3sen2x = A_1 \frac{n_1}{3} senn_1 x + A_2 \frac{n_2}{3}\ sen\ n_2 x$$

$n_1 = 1$ y $\frac{A_1}{3} = 2,\ A_1 = 6;\ \ n_2 = 2$ y $\frac{2A_2}{3} = -3,\ A_2 = -\frac{9}{2}$

Por lo tanto la solución queda como

$$Y(x,t) = 6senxsen\frac{t}{3} - \frac{9}{2}sen2xsen\frac{2}{3}t$$

8.2 Problemas de aplicación

Problema 1. Una barra de 100 cm de longitud tiene sus extremos $x = 0$ y $x = 100$ mantenidos a 0^0 C. Inicialmente la temperatura $f(x)$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < x < 40 \\ 100 & si \quad 40 < x < 60 \\ 0 & si \quad 60 < x < 100 \end{cases}$$

Asumiendo una difusividad de 0.20 y una superficie aislada, encuentre la temperatura en cualquier posición de la barra en cualquier tiempo.

Solución:
Se utiliza la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Se propone una solución de la forma:

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

La derivadas parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT', \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$XT' = 0.2X''T$$

Dividiendo entre XT:

$$\frac{T'}{0.2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Como se observa, ya se separaron las variables. Se iguala a $-\lambda^2$ para asegurar que la solución $X(x)$ sea en términos de senos y cosenos. De hecho, tal solución es:

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

De la misma forma la solución de la ecuación para $T(t)$ es:

$$T(t) = c_3 e^{-0.2\lambda^2 t}$$

Por lo tanto la solución general es:

$$U(x,t) = c_3 e^{-0.2\lambda^2 t}(c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)$$

Agrupando constantes la solución se escribe como:

$$U(x,t) = e^{-0.2\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

Las condiciones de frontera son:

$$U(0,t) = 0, \ U(100,t) = 0$$

$$U(x,0) = f(x)$$

Aplicando la primera condición:

$$U(0,t) = (e^{-0.2\lambda^2 t})A = 0 \Rightarrow A = 0$$

La solución queda como:

$$U(x,t) = Be^{-0.2\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

Con $x = 100$:

$$U(100,t) = Be^{-0.2\lambda^2 t} \sin 100\lambda = 0$$

La única forma en que puede dar cero es que $\sin 100\lambda = 0$, osea:

$$n\pi = 100\lambda, \ \lambda = n\pi/100$$

Por lo que la solución hasta ahora se escribe como:

$$U(x,t) = Be^{-0.2(n\pi/100)^2 t} sin \frac{n\pi x}{100}$$

Para satisfacer la última condición es necesario usar el principio de superposición:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-0.2(n\pi/100)^2 t} sin \frac{n\pi x}{100}$$

Ahora si, en $t = 0$:

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{100}$$

Aplicando las fórmulas de la serie de Fourier para calcular B_n:

$$B_n = \frac{2}{100} \left[\int_0^{100} f(x) \sin \frac{n\pi x}{100} dx \right]$$

$$B_n = \frac{2}{100} \left[\int_0^{40} (0) \sin \frac{n\pi x}{100} dx + \int_{40}^{60} 100 \sin \frac{n\pi x}{100} dx + \int_{60}^{100} (0) \sin \frac{n\pi x}{100} dx \right]$$

$$B_n = \frac{2}{100} 100 \left[\frac{-100}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{100} \right]_{40}^{60}$$

$$B_n = \frac{200}{n\pi} \left[\cos \frac{2n\pi}{5} - \cos \frac{3n\pi}{5} \right]$$

La solución se escribe como:

$$U(x,t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{5} - \cos \frac{3n\pi}{5}}{n} e^{-0.2(n\pi/100)^2 t} sin \frac{n\pi x}{100}$$

Problema 2. Una barra de difusividad κ cuya superficie está aislada y cuyos extremos están localizados en $x = 0$ y $x = L$ tiene una distribución de temperatura inicial $f(x)$. Asumiendo que los

extremos de la barra están aislados, determine la temperatura de la barra en cualquier tiempo. Encuentre la temperatura de la barra si

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2U_0x}{L} & si \quad 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2U_0}{L}(L-x) & si \quad \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

Solución:

Si se resuelve la ecuación de calor:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Se obtiene la solución:

$$U(x,t) = e^{-k\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

Si los extremos están aislados entonces deben de cumplirse las condiciones a la frontera:

$$U_x(0,t) = 0, \; U_x(L,t) = 0$$

y la condición inicial es:

$$U(x,0) = f(x)$$

Derivando la solución:

$$U_x(x,t) = e^{-k\lambda^2 t}(-A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x)$$

Aplicando la primera condición:

$$U_x(0,t) = 0 = e^{-k\lambda^2 t}B\lambda$$

La única forma en que la expresión anterior puede ser cero es que $B = 0$, es decir:

$$U(x,t) = Ae^{-k\lambda^2 t}\cos\lambda x$$

Aplicando la segunda condición de frontera:

$$U_x(L,t) = 0 = -A\lambda e^{-k\lambda^2 t}\sin\lambda L$$

Para que la última expresión sea cero debe tenerse que $\sin \lambda L = n\pi$, por lo tanto:

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

Y la solución se escribe como:

$$U(x,t) = Ae^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

Sin embargo, en esta forma no puede cumplirse la condición inicial, para ello habrá que utilizar el principio de superposición:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos \frac{n\pi}{L} x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

La separación en dos términos se hace para utilizar las fórmulas de Fourier para A_0 y A_n:

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Evaluando

$$A_0 = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} \frac{2U_0}{L} x dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2U_0}{L} (L-x) dx \right] = \frac{4U_0}{L^2} \left[\frac{x^2}{2} \bigg|_0^{L/2} + (Lx - \frac{x^2}{2}) \bigg|_{L/2}^{L} \right]$$

$$A_0 = \frac{4U_0}{L^2} \left[\frac{L^2}{8} + L^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{8} \right] = \frac{4U_0}{L^2} \left[\frac{L^2}{4} \right] = U_0$$

$$A_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} \frac{2U_0}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2U_0}{L} (L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right]$$

Haciendo la integral: $\int x \sin \frac{n\pi}{L} x dx$

$$u = x,\ du = dx$$

$$dv = \sin\frac{n\pi}{L}xdx,\ v = -\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$\int x\sin\frac{n\pi}{L}xdx = -\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{L}{n\pi}\int\cos\frac{n\pi}{L}xdx = -\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$A_n = \tfrac{4U_0}{L^2}\left[\begin{array}{c} -\tfrac{L}{n\pi}x\cos\tfrac{n\pi}{L}x+\tfrac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\tfrac{n\pi}{L}x\Big|_0^{L/2} -\tfrac{L^2}{n\pi}\cos\tfrac{n\pi}{L}x\Big|_{L/2}^{L}+ \\ +\tfrac{L}{n\pi}x\cos\tfrac{n\pi}{L}x-\tfrac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\tfrac{n\pi}{L}x\Big|_{L/2}^{L} \end{array}\right]$$

$$A_n = \tfrac{4U_0}{L^2}\left[\begin{array}{c} -\tfrac{L^2}{2n\pi}\cos\tfrac{n\pi}{2}+\tfrac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\tfrac{n\pi}{2}-\tfrac{L^2}{n\pi}\cos n\pi+\tfrac{L^2}{n\pi}\cos\tfrac{n\pi}{2}+\tfrac{L^2}{n\pi}\cos n\pi- \\ -\tfrac{L^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi-\tfrac{L^2}{2n\pi}\cos\tfrac{n\pi}{2}+\tfrac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\tfrac{n\pi}{2} \end{array}\right]$$

y solamente queda:

$$A_n = \frac{4U_0}{L^2}\left[\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{8U_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$U(x,t) = U_0 + \frac{8U_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

Problema 3. Si la superficie de una barra metálica no está aislada sino que en vez irradia calor a un medio de temperatura constante U_0 de acuerdo a la Ley de Newton de enfriamiento, la ecuación diferencial para el flujo de calor se convierte en

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - c(U - U_0)$$

Asumiendo que los extremos de la barra de longitud L se mantienen a $0°C$ y la distribución de la temperatura inicial es $f(x)$, mientras que $U_0 = 0°C$, encuentre $U(x,t)$.

Solución:

Como $U_0 = 0°C$, la ecuación que se va a resolver es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - cU$$

Con las condiciones a la frontera:

$$U(0,t) = 0 = U(L,t)$$

Y la condición inicial:

$$U(x,0) = f(x)$$

Se propone una solución de la forma:

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

La derivadas parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT',\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$XT' = \kappa X''T - cXT$$

Dividiendo entre XT:

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{X''}{X} - \frac{c}{\kappa}$$

$$\frac{T'}{\kappa T} + \frac{c}{\kappa} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Obtenemos:

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 sen \lambda x$$

La solución para $T(t)$ es:

$$\frac{T'}{\kappa T} = -\lambda^2 - \frac{c}{\kappa}$$

$$\frac{dT}{T} = (-\kappa\lambda^2 - c)dt$$

$$\int \frac{dT}{T} = -\int (\kappa\lambda^2 + c)dt$$

$$lnT = -(\kappa\lambda^2 + c)t + \ln c_3$$

$$ln\frac{T}{c_3} = -(\kappa\lambda^2 + c)t$$

$$T = c_3 e^{-(\kappa\lambda^2+c)t}$$

Por lo que la solución general se escribe como:

$$U(x,t) = (c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x)c_3 e^{-(\kappa\lambda^2+c)t}$$

$$U(x,t) = e^{-(\kappa\lambda^2+c)t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

Aplicando la condición de frontera:

$$U(0,t) = Ae^{-(\kappa\lambda^2+c)t} = 0 \Rightarrow A = 0$$

Por lo que la solución se escribe como:

$$U(x,t) = Be^{-(\kappa\lambda^2+c)t}\sin\lambda x$$

Aplicando la segunda condición de frontera:

$$U(L,t) = Be^{-(\kappa\lambda^2+c)t}\sin\lambda L = 0 : \lambda L = n\pi : \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$U(x,t) = Be^{-(\frac{kn^2\pi}{L^2}^2 k+c)t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Para poder aplicar la condición inicial se requiere usar el principio de superposición:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(\frac{kn^2\pi}{L^2}^2 k+c)t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$B_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right]$$

Por lo tanto la solución se puede escribir como:
$U(x,t) = \frac{2}{L} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right] e^{-(\frac{kn^2\pi}{L^2}^2 k+c)t} \sin \frac{n\pi}{L} x$
La cual podría ser evaluada si se conociera la función $f(x)$.

Problema 4. Una placa rectangular de dimensiones a y b, tiene sus caras planas aisladas. Tres aristas se mantienen a temperatura cero mientras que la cuarta se mantiene a la temperatura constante U_0. Muestre que la temperatura de estado estacionario está dada por

$$U(x,y) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\cos k\pi)\sin(\frac{k\pi x}{a})\sinh\left(\frac{k\pi y}{a}\right)}{k\sinh(\frac{k\pi b}{a})}$$

Solución:
Consideramos la ecuación de calor en dos dimensiones:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

Como es en estado estacionario $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$
la ecuación que se resuelve, es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

haciendo la separación de variables:

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

La ecuación para $X(x)$ ya se ha obtenido anteriormente:

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2 sen\lambda x$$

La ecuación para $Y(y)$ es:

$$\frac{Y''}{Y}=\lambda^2$$

$$Y''-\lambda^2 Y=0$$

La ecuación característica es:

$$m^2-\lambda^2=0$$

o sea $m=\pm\lambda$. Po r lo tanto $Y(y)$ se escribe como

$$Y(y)=c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y}$$

la solución general es de la forma:

$$U(x,y)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)\left(c_3e^{\lambda y}+c_4e^{-\lambda y}\right)$$

las cpndiciones a la frontera se pueden escribir como

$$U(0,y)=U(x,0)=U(a,y)=0,\ U(x,b)=U_0$$

donde se está suponiendo que la arista superior es la que se mantiene a una temperatura diferente de cero.

Aplicando la primera condición de frontera

$$U(0,y) = 0 = c_1(c_3e^{\lambda y} + c_4e^{-\lambda y}) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$U(x,y) = c_2 \sin \lambda x \left(c_3e^{\lambda y} + c_4e^{-\lambda y}\right)$$

La segunda condición de frontera:

$$U(a,y) = 0 = c_2 \sin \lambda a \left(c_3e^{\lambda y} + c_4e^{-\lambda y}\right)$$

se obtiene que $\sin \lambda a = 0$ por lo que $\lambda a = n\pi$ y $\lambda = \frac{n\pi}{a}$

$$U(x,y) = \sin \frac{n\pi}{a}x \left(Ae^{\frac{n\pi}{a}y} + Be^{\frac{-n\pi}{a}y}\right)$$

Se aplica ahora la tercera condición de frontera:

$$U(x,0) = 0 = \sin \frac{n\pi}{a}x\,(A+B)$$

para esto $(A+B) = 0$ por lo tanto $B = -A$

$$U(x,y) = A \sin \frac{n\pi}{a}x \left(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{\frac{-n\pi}{a}y}\right)$$

$$U(x,y) = 2A \sin \frac{n\pi x}{a} \left(\frac{e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{\frac{-n\pi}{a}y}}{2}\right) = B \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi}{a}y$$

Se necesita utilizar el principio de superposición para poder aplicar la última condición:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a}x \sinh \frac{n\pi}{a}y$$

$$U(x,b) = U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a}x \sinh \frac{n\pi}{a}b$$

Esta condición se puede escribir como:

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x$$

Si se toma que $C_n = B_n \sinh \frac{n\pi}{a} b$
Se obtiene C_n a partir de las fórmulas de Fourier:

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a U_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{2}{a} \left[U_0 \left(\frac{a}{n\pi}\right) \left(-\cos \frac{n\pi}{a} x\right) \right]_0^a$$

$$C_n = \frac{2U_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

A partir de C_n se puede obtener B_n:

$$B_n = \frac{C_n}{\sinh \frac{n\pi}{a} b}$$

La solución es:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{2U_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y$$

Por lo tanto:

$$U(x,y) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - \cos n\pi)}{n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y$$

que es precisamente lo que se deseaba demostrar.

Problema 5. Una cuerda de longitud de 2 ft pesa 4 onzas y se estira hasta que la tensión sea de 1 lb fuerza. El centro de la cuerda se alza 1/4 de pulgada por encima de la posición de equilibrio y luego se suelta. Encuentre el desplazamiento resultante de la cuerda como función del tiempo.

Solución:

Se resolverá la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Con las condiciones:

$$Y(0.t) = 0$$

$$Y(L,t) = 0$$

$$Y_t(x,0) = 0$$

Recordando que $\frac{1}{4}$ in $= \frac{1}{48}$ ft:

$$Y(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{48}x & si \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{48}(L-x) & si \quad \frac{1}{2} < x < L \end{cases}$$

haciendo la separación de variables se obtiene la solución general:

$$Y(x,t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \; sen \lambda x)\;(c_3 \cos a\lambda t + c_4 \; sena\lambda t)$$

Aplicando las condiciones en los extremos de la cuerda:

$$Y(0,t) = 0 = c_1\;(c_3 \cos a\lambda t + c_4 \; sena\lambda t) \quad \Rightarrow \; c_1 = 0$$

$$Y(L,t) = c_2 \; sen\lambda L\;(c_3 \cos a\lambda t + c_4 \; sena\lambda t) \;\; \Rightarrow \; \lambda L = n\pi, \; \lambda = n\pi/L$$

La solución entonces se escribe como:

$$Y(x,t) = \; sen\frac{n\pi}{L}x\;(A \cos \frac{an\pi}{L}t + B \; sen\frac{an\pi}{L}t)$$

Para aplicar la condición de que la velocidad inicial es cero, se requiere derivar con respecto al tiempo:

$$Y_t(x,t) = sen\frac{n\pi}{L}x\;(-A\frac{an\pi}{L} \; sen \; \frac{an\pi}{L}t + B\frac{an\pi}{L}\cos\frac{an\pi}{L}t)$$

$$Y_t(x,0) = 0 = sen\frac{an\pi}{L}x\;(B\frac{an\pi}{L}) \quad \Rightarrow B = 0$$

Y la solución hasta ahora se escribe como:

$$Y(x,t) = \ A\cos\frac{an\pi}{L}t \ \ sen\frac{n\pi}{L}x$$

Para la última condición se aplica el principio de superposición:

$$Y(x,t) = \ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{an\pi}{L}t \ \ sen\frac{n\pi}{L}x$$

$$f(x) = Y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\frac{n\pi}{L}x$$

;

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi}{L}x dx$$

$$A_n = \frac{1}{24L}\int_0^{\frac{L}{2}} x sen\frac{n\pi x}{L}dx \ + \frac{1}{24L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} (L-x)\ sen\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$\begin{aligned} A_n \ \ &= \ \ \frac{1}{24L}\left[-\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{L} \ +\frac{L}{n\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right] \ + \ \frac{1}{24L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} L\ sen\frac{n\pi x}{L}dx \ - \\ &- \frac{1}{24L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} x\ sen\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n \ \ &= \ \ \frac{1}{24L}\left[-\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{L} \ + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\ sen\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{\frac{l}{2}} - \left[\frac{1}{24}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \\ &-\frac{1}{24L}\left(-\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}sen\frac{n\pi x}{L}\right)_{L/2}^{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{24L}\left[-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\ sen\frac{n\pi}{2}\right] - \frac{1}{24}\frac{L}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{24}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \\ &\quad -\frac{1}{24L}\left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{L^2}{n^2\pi^2} sen n\pi + \frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{1}{24L}\left[\begin{array}{c} -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\ sen\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{L^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi - \\ -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2} \end{array}\right]$$

$$A_n = \frac{L}{12n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2}$$

$$Y(x,t) = \frac{L}{12\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{an\pi}{L}t\ \ sen\frac{n\pi}{L}x$$

Problema 6. Una cuerda fuertemente estirada con puntos extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ está inicialmente en equilibrio. En $t = 0$ se pone a vibrar al darle a cada uno de sus puntos extremos una distribución de velocidad definida por $g(x)$. a) Establezca el problema de valor de frontera, y b) Muestre que el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda para cualquier tiempo $t > 0$ está dado por

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi x}{L} sen\frac{n\pi at}{L}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\frac{sen n\pi x}{L}dx$$

Solución:

Las condiciones de frontera son:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

$$y(x,0) = 0,\ \ y_t(x,0) = g(x)$$

Se sabe que la solución es:

$$y(x,t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 sen \lambda x)(c_3 \cos a\lambda t + c_4 sen a\lambda t)$$

La aplicación de las condiciones de frontera es análoga al problema anterior.

$$y(0,t) = 0 \qquad \Longrightarrow C_1 = 0$$

$$y(L,t) = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

La solución hasta ahora es:

$$y(x,t) = sen\frac{n\pi x}{L}\left(A\cos\frac{an\pi t}{L} + Bsen\frac{an\pi t}{L}\right)$$

Ahora se aplica la condición:

$$y(x,0) = 0$$

$$y(x,0) = sen\frac{n\pi x}{L}(A) \qquad \Longrightarrow A = 0$$

$$y(x,t) = Bsen\frac{n\pi x}{L}sen\frac{an\pi t}{L}$$

Ahora se usa el principio de superposición:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi x}{L}sen\frac{an\pi t}{L}$$

Para aplicar la última condición es necesario derivar:

$$y_t(x,0) = g(x)$$

Derivando:

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} bn\frac{an\pi}{L}sen\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{an\pi t}{L}$$

$$y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} bn \frac{an\pi}{L} sen \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n sen \frac{n\pi x}{L}$$

donde se ha puesto $D_n = b_n \frac{an\pi}{L}$, para obtener D_n se integra:

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

Despejando b_n

$$b_n = D_n \frac{L}{an\pi} = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

Entonces la solución se puede escribir como:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen \frac{n\pi x}{L} sen \frac{n\pi at}{L}$$

con

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \frac{sen n\pi x}{L} dx$$

Problema 7. Una placa tiene la forma de una región anular acotada por dos círculos concéntricos de radio r$_1$ y r$_2$, respectivamente. Tomando $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, y asumiendo que las temperaturas de frontera están dadas, respectivamente, por

$U_1 = 100 \sin\phi, \quad U_2 = 50 \cos\phi, \quad 0 < \phi < 2\pi$

encuentre la temperatura de estado estacionario en cada punto de la placa.

Solución:

La solución de la ecuación de calor en coordenadas polares es:

$$U(r,\theta) = (c_1 \cos\lambda\theta + c_2 \sin\lambda\theta)\left(c_3 r\lambda + c_4 r^{-\lambda}\right)$$

Debido a la periodicidad de θ , tenemos que $\lambda = n$

Las condiciones a la frontera son:

$$U(1,\theta) = 100\sin\theta,\ U(2,\theta) = 50\cos\theta$$

Escribiendo la solución como:

$$U\left(r,\theta\right)=\left(c_1c_3r^n\cos n\theta+c_1c_4r^{-n}\cos n\theta+c_2c_3r^n\sin n\theta+c_2c_4r^{-n}\sin n\theta\right)$$

$$U\left(1,\theta\right)=c_1c_3\cos n\theta+c_1c_4\cos n\theta+c_2c_3\sin n\theta+c_2c_4\sin n\theta=100\sin\theta$$

$$U\left(2,\theta\right)=c_1c_32^n\cos n\theta+c_1c_42^{-n}\cos n\theta+c_2c_32^n\sin n\theta+c_2c_42^{-n}\sin n\theta=50\cos\theta$$

Para que estas condiciones sean consistentes debe tenerse $n=1$ y además:

$$\left(c_1c_3+c_1c_4\right)\cos\theta+\left(c_2c_3+c_2c_4\right)\sin\theta=100\sin\theta$$

$$\left(2c_1c_3+2^{-1}c_1c_4\right)\cos\theta+\left(2^1c_2c_3+2^{-1}c_2c_4\right)\sin\theta=50\cos\theta$$

De donde se obtienen las ecuaciones:

$$c_1c_3+c_1c_4=0$$

$$2c_1c_3+\frac{1}{2}c_1c_4=50$$

Resolviendo:

$$c_1c_3=\frac{100}{3}$$

$$c_1c_4=\frac{-100}{3}$$

Análogamente

$$c_2c_3+c_2c_4=100$$

$$2c_2c_3+\frac{1}{2}c_2c_4=0$$

$$c_2c_3 = \frac{-100}{3}$$

$$c_2c_4 = \frac{400}{3}$$

Susutituyendo en la solución:

$$U(r,\theta) = \frac{100}{3}r\cos\theta - \frac{100}{3}r^{-1}\cos\theta - \frac{100}{3}r\sin\theta + \frac{400}{3}r^{-1}\sin\theta$$

Finalmente:

$$U(r,\theta) = \frac{100}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{100}{3}\left(\frac{4}{r} - r\right)\sin\theta$$

Problema 8. Encuentre la temperatura de estado estacionario en una placa en la forma de un sector circular de radio unitario y ángulo $\pi/6$, si las temperaturas de los lados se mantienen a 0, la temperatura del arco circular se mantiene a 100, y las caras planas están aisladas.

¿Cual es la solución si el sector tiene radio c?

La solución general de la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$$

es la siguiente:

$$u(r,\theta) = (c_1\cos\lambda\theta + c_2 sen\lambda\theta)\left(c_3 r\lambda + c_4 r^{-\lambda}\right)$$

Por acotamiento $c_4 = 0$

$$u(r,\theta) = r\lambda\ \left(A\cos\lambda\theta + Bsen\lambda\theta\right)$$

las condiciones de frontera son:

$$u(r,0) = 0;\ u(1,\theta) = 100;\ u(r,\frac{\pi}{6}) = 0$$

Aplicando la primera condición:

$$u(r,0) = 0 = r^2\ A \qquad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$u(r,\theta) = B\ r\lambda sen\theta\lambda$$

La segunda condición:

$$u(r,\frac{\pi}{6}) = 0 = \ Br\lambda sen\lambda\pi/6 \qquad \Rightarrow \lambda = 6n$$

$$u(r,\theta) = B_n\ r^{6n}\ sen\ 6n\theta$$

Usando el principio de superposición para aplicar la última condición de frontera:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ r^{6n}\ sen\ 6n\theta$$

$$u(1,0) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty}\ B_n sen 6n\theta$$

$$B_n = \frac{2}{\frac{\pi}{6}}\ 100\ \int_0^{\frac{\pi}{6}}\ sen\ 6n\theta\ d\theta\ =\ 200\frac{6}{\pi}\ \left[-\frac{1}{6n}\cos 6n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\ =\ -\frac{200}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

$$B_n = \frac{200}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

$$u(r,\theta) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n} r^{6n}\ sen\ 6n\theta$$

Si $r = c$:

$$u(c,\theta) = 100\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, c^{6n}\ sen\ 6n\theta \ = \ 100\sum_{n=1}^{\infty} D_n\ sen\ 6n\theta$$

donde $D_n = B_n\, c^{6n}$, como

$$D_n = \frac{200}{n\pi}\,(1-\cos n\pi)$$

entonces para este caso la solución es simplemente:

$$u(r,\theta) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{c^{6n}n} r^{6n}\ sen\ 6n\theta$$

Problema 9. Encuentre la temperatura de estado estacionario en una placa en la forma de un sector circular de radio unitario y àngulo $\pi/2$.Si la temperatura de los lados se mantiene a 0, la temperatura del arco circular se mantiene a 100 y las caras planas están aisladas.

Solución:

La ecuación de Laplace en coordenadas polares se escribe como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Se propone una solución de la forma:

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Sustituyendo:

$$\frac{R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta''}{R\Theta} = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda^2$$

La solución para $\Theta(\theta)$ es:

$$\Theta(\theta) = (c_1 \cos \lambda\theta + C_2 sen\lambda\theta)$$

La ecuación que queda para $R(r)$ es de Cauchy Euler:

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0$$

para resolverla se propone una solución de la forma $R(r) = r^m$:

$$r^2(m)(m-1)r^{\lambda-2} + rmr^{\lambda-1} - \lambda^2 r\lambda = 0$$

$$(m)(m-1) + m - \lambda^2 = 0,\ m^2 - \lambda^2 = 0,\ m = \pm\lambda$$

Por lo que la solución para $R(r)$ es:

$$R(r) = c_3 r\lambda + c_4 r^{-\lambda}$$

Y la solución general se escribe como:

$$u(r,\theta) = (c_1 \cos \lambda\theta + c_2 sen\lambda\theta)\,(c_3 r\lambda + c_4 r^{-\lambda})$$

Como la solución debe ser acotada en el origen: $c_4 = 0$, reagrupando constantes:

$$u(r,\theta) = r\lambda\ \ (A \cos \lambda\theta + B sen\lambda\theta)$$

Las condiciones a la frontera son:

$$U(r,0) = 0,\ U(r,\pi/2) = 0,\ U(1,\theta) = 100$$

Aplicando la primera condición:

$$U(r,0) = 0 = r\lambda A \Longrightarrow A = 0$$

$$U(r,\theta) = Br\lambda sen\lambda\theta$$

Aplicando ahora la segunda condición:

$$U(r,\pi/2) = 0 = Br\lambda sin\frac{\lambda\pi}{2} \Rightarrow \frac{\lambda\pi}{2} = n\pi,\ \lambda = 2n$$

$$U(r,\theta) = Br^{2n} sin2n\theta$$

usando el principio de superposición:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{2n} sin2n\theta$$

Por último:

$$U(1,\theta) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin2n\theta$$

Usando Fourier:

$$Bn = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2} 100\sin 2n\theta d\theta = \frac{-(200)2}{\pi 2n}\cos 2n\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{-200}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$Bn = \frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

La solución se escribe como:

$$U(r,\theta) = \frac{200}{\pi}\sum\frac{(1-\cos n\pi)}{n} r^{2n}\sin 2n\theta$$

Problema 10. Si una cuerda con sus puntos extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ está bajo la influencia de la gravedad pero no vibra, muestre que su forma está dada por la porción de la parábola

$$Y = -\frac{gx\,(L-x)}{2a^2}$$

entre $x = 0$ y $x = L$.

Solución:

La ecuación de la cuerda vibrante es:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Pero si consideramos la gravedad, la ecuación cambia:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g$$

Usamos las condiciones inciales:

$$Y(0,t) = 0, \;\; Y(L,t) = 0, \quad Y(x,0) = f(x), \quad Y_t(x,0) = 0$$

Donde $f(x)$ representa el desplazamiento incial, pero como no vibra:

$$Y(x,0) = f(x) = 0$$

Como la ecuación es no homogénea se requiere hacer un cambio de variable:

$$Y(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$$

Sustituimos

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a^2 \psi - g$$

para que la ecuación quede homogénea tomamos:

$$a^2 \psi - g = 0$$

es decir:

$$\psi'' = \frac{g}{a^2}$$

Integrando dos veces:

$$\psi(x) = \frac{gx^2}{2a^2} + \alpha x + \beta$$

La ecuación que debemos resolver es:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

con las condiciones a la frontera e iniciales:

$$W(0,t) = Y(0,t) - \psi(0) = 0 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$W(L,t) = Y(L,t) - \psi(L) = 0 - \frac{gL^2}{2a^2} - \alpha L = 0$$

Despejando α :

$$\alpha = -\frac{gL}{2a^2}$$

Por lo que

$$\psi(x) = \frac{gx^2}{2a^2} - \frac{gL}{2a^2}x = -\frac{gx(L-x)}{2a^2}$$

En cuanto a las condiciones iniciales:

$$W(x,0) = Y(x,0) - \psi(x) = \frac{gx(L-x)}{2a^2}$$

$$W_t(x,0) = Y_t(x,0) = 0$$

La solución para $W(x,t)$ es:

$$W(x,t) = (c_1 \cos a\lambda t + c_2 sen a\lambda t)(c_3 \ \cos \ \lambda x + c_4 \ sen \ \lambda x)$$

Aplicando la primera condición:

$$W\ (0,t) = 0$$

$$W(x,t) = (c_1 \cos \lambda t + c_2 sen\lambda t)(c_3) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Es decir, la solución queda hasta ahora como:

$$W(x,t) = (c_1 \cos \lambda t + c_2 sen\lambda t)(c_4 \ sen \ \lambda x) = sen \ \lambda x(A \cos \lambda t + B sen\lambda t)$$

Aplicamos la condición inicial:

$$W_t(x,0) = 0$$

$$W_t(x,t) = sen\ \lambda x(-A\lambda sen\lambda t + B\lambda\cos\lambda t)$$

$$W_t(x,0) = sen\ \lambda x(B\lambda) = 0 \Rightarrow B = 0$$

es decir, la solución queda en este paso como:

$$W(x,t) = Asen\ \lambda x\cos\lambda t$$

Aplicamos la otra condición de frontera:

$$W(L,t) = Asen\ \lambda L\cos\lambda t = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi$$

es decir

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$W(x,t) = Asen\ \frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}t$$

Usando principio de superposición:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\ \frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}t$$

Por último aplicamos la condición inicial:

$$W\left(x,0\right) = \frac{gx\left(L-x\right)}{2a^2}$$

$$W(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\ \frac{n\pi}{L}x = \frac{gx\left(L-x\right)}{2a^2}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{gx\left(L-x\right)}{2a^2}\right)sen\ \frac{n\pi}{L}xdx$$

Hacemos primero la integral

$$\int x sen\ \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$u = x,\ du = dx$$

$$dv = sen \frac{n\pi}{L} x dx,\ v = -\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$\int x sen\ \frac{n\pi}{L} x dx = -\frac{Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L}{n\pi}\int \cos\frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\int x sen\ \frac{n\pi}{L} x dx = -\frac{Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{(n\pi)^2} sen \frac{n\pi}{L} x$$

Como se va a necesitar, también se resuelve la integral:

$$\int x \cos\ \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$u = x, du = dx$$

$$dv = \cos\frac{n\pi}{L} x dx, v = \frac{L}{n\pi} sen \frac{n\pi}{L} x$$

$$\int x \cos\ \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{Lx}{n\pi} sen \frac{n\pi}{L} x - \frac{L}{n\pi}\int sen \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\int x \cos\frac{n\pi}{L} x dx = \frac{Lx}{n\pi} sen \frac{n\pi}{L} x + \frac{L^2}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

Ahora se resuelve la integral:

$$\int x^2 sen\ \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$u = x, du = dx$$

$$dv = xsen\frac{n\pi}{L}xdx, v = -\frac{Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 sen\,\frac{n\pi}{L}xdx &= -\frac{Lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2x}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x - \\
-\int\left[-\frac{Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x\right]dx &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2x}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x + \frac{L}{n\pi}\int\left(x\cos\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
-\frac{L^2}{(n\pi)^2}\int sen\frac{n\pi}{L}xdx &= -\frac{Lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2x}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x
\end{aligned}$$

$$+\frac{L}{n\pi}\left(-\frac{Lx}{n\pi}sen\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^3}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi}{L}x =$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{Lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2x}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x - \frac{L^2x}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^3}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi}{L}x + \\
&+\frac{L^3}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi}{L}x
\end{aligned}$$

$$\int x^2 sen\,\frac{n\pi}{L}xdx = -\frac{Lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{2L^3}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

Ahora bien:

$$A_n = \frac{g}{2a^2L}\int_0^L x\,(L-x)\,sen\,\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$A_n = \frac{g}{2a^2}\int_0^L x sen\ \frac{n\pi}{L}x dx - \frac{g}{2a^2L}\int_0^L x^2 sen\ \frac{n\pi}{L}x dx =$$

$$A_n = \frac{g}{2a^2}\left[-\frac{Lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{(n\pi)^2}sen\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L - \frac{g}{2a^2L}\left[-\frac{Lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{2L^3}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L$$

$$A_n = \frac{g}{2a^2}\left[-\frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi\right] - \frac{g}{2a^2L}\left[-\frac{L^3}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2L^3}{(n\pi)^3}\cos n\pi - \frac{2L^3}{(n\pi)^3}\right]$$

$$A_n = -\frac{gL^2}{2a^2n\pi}\cos n\pi + \frac{gL^2}{2a^2n\pi}\cos n\pi + \frac{gL^2}{a^2(n\pi)^3}(1-\cos n\pi) = \frac{gL^2}{a^2(n\pi)^3}(1-\cos n\pi)$$

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$W(x,t) = \frac{gL^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n^3}sen\ \frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}t$$

Y la solución $Y(x,t)$ es:

$$Y(x,t) = \frac{gL^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n^3}sen\ \frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}t - \frac{gx(L-x)}{2a^2}$$

Esta es la solución para una cuerda vibrante que está sometida a la acción de la gravedad, pero si por alguna razón la cuerda no oscila entonces la solución solamente es:

$$Y(x) = -\frac{gx(L-x)}{2a^2}$$

Problema 11. Evalue e interprete físicamente el siguiente problema de valor de frontera.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 1 + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$Y(0,t) = 1,\ \ Y_x(\frac{\pi}{2},t) = -\frac{\pi}{2},\ Y(x,0) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\pi x,\ \ Y_t(x,0) = 0$$

Solución: Se trata de una ecuación de onda con un término extra el cual puede deberse a la presencia de una fuerza constante externa. Las condiciones a la frontera también son no homogéneas, por lo que debe hacerse un cambio de variable:

$$Y(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$$

Las derivadas son:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \; + \psi''(x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \psi''(x)$$

Se desea que la ecuación quede de la forma:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Por lo que debemos tomar:

$$1 + \psi''(x = 0$$

Integrando:

$$\psi'(x) = -x + \alpha$$

Integrando otra vez:

$$\psi(x) = -\frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$$

Las condiciones a la frontera e iniciales para $W(x,t) = Y(x,t) - \psi(x)$ quedan:

$$W\ (0,t) = Y(0,t) - \psi(0) = 0$$

pero esto nos lleva a:

$$W\ (0,t) = 1 - \beta = 0 \quad \Rightarrow \beta = 1$$

La siguiente condición es:

$$W_x(\frac{\pi}{2},t) = Y_x(\frac{\pi}{2},t) - \psi'\ (\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\alpha = 0$$

es decir, para que las condiciones de frontera queden homogéneas debe cumplirse que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, es decir:

$$\psi(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$$

En cuanto a las condiciones iniciales estas quedan:

$$W(x,0) = Y(x,0) - \psi\ (x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{x^2}{2} - 1 = x^2 - \frac{1}{2}\pi x$$

$$W_t(x,0) = Y_t(x,0) = 0$$

La solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

es

$$W(x,t) = (c_1 \cos \lambda t + c_2 sen \lambda t)\,(c_3\ \cos\ \lambda x + c_4\ sen\ \lambda x)$$

Aplicando la primera condición:

$$W\ (0,t) = 0$$

$$W(x,t) = (c_1 \cos \lambda t + c_2 sen \lambda t)\,(c_3) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Es decir, la solución queda hasta ahora como:

$$W(x,t) = (c_1 \cos \lambda t + c_2 sen \lambda t)\,(c_4\ sen\ \lambda x) = sen\ \lambda x(A \cos \lambda t + B sen \lambda t)$$

Aplicamos la condición inicial:

$$W_t(x,0) = 0$$

$$W_t(x,t) = sen\ \lambda x(-A\lambda sen\lambda t + B\lambda \cos \lambda t)$$

$$W_t(x,0) = sen\ \lambda x(B\lambda) = 0 \Rightarrow B = 0$$

es decir, la solución queda en este paso como:

$$W(x,t) = Asen\ \lambda x \cos \lambda t$$

Aplicamos la otra condición de frontera:

$$W_x(x,t) = A\lambda \cos\ \lambda x \cos \lambda t$$

$$W_x(\frac{\pi}{2},t) = A\lambda \cos\ \lambda\frac{\pi}{2} \cos \lambda t = 0 \Rightarrow \cos\ \lambda\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow\ \lambda\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

es decir

$$\lambda = 2n - 1$$

$$W(x,t) = Asen\ (2n-1)x \cos(2n-1)t$$

Usando principio de superposición:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\ (2n-1)x \cos(2n-1)t$$

Por último aplicamos la condición inicial:

$$W(x,0) = x^2 - \frac{1}{2}\pi x$$

$$W(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\ (2n-1)x = x^2 - \frac{1}{2}\pi x$$

$$A_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - \frac{1}{2}\pi x) sen\ (2n-1)x dx$$

Hacemos primero la integral

$$\int x sen\ (2n-1)x dx$$

$$u = x,\ du = dx$$

$$dv = sen(2n-1)x,\ v = -\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x$$

$$\int x sen\ (2n-1)x dx = -\frac{x}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{1}{2n-1}\int \cos(2n-1)x dx$$

$$\int x sen\ (2n-1)x dx = -\frac{x}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{1}{(2n-1)^2} sen(2n-1)x$$

Como se va a necesitar, también se resuelve la integral:

$$\int x \cos\ (2n-1)x dx$$

$$u = x, du = dx$$

$$dv = \cos(2n-1)x, v = \frac{1}{2n-1} sen(2n-1)x$$

$$\int x \cos\ (2n-1)x dx = \frac{x}{2n-1} sen(2n-1)x - \frac{1}{2n-1}\int sen(2n-1)x dx$$

$$\int x \cos(2n-1)x dx = \frac{x}{2n-1} sen(2n-1)x + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

Ahora se resuelve la integral:

$$\int x^2 sen\ (2n-1)xdx$$

$$u = x, du = dx$$

$$dv = xsen(2n-1)x, v = -\frac{x}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{1}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x$$

$\int x^2 sen\ (2n-1)xdx = -\frac{x^2}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{x}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x-$
$-\int\left[-\frac{x}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{1}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x\right]dx = -\frac{x^2}{2n-1}\cos(2n{-}1)x+$
$+\frac{x}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x + \frac{1}{2n-1}\int\left(x\cos(2n-1)x\right)dx - -\frac{1}{(2n-1)^2}\int sen(2n-$
$1)xdx =$
$-\frac{x^2}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{x}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x+$
$+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x}{2n-1}sen(2n-1)x + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\right) - \frac{1}{(2n-1)^3}\cos(2n-1)x$

$$\int x^2 sen\ (2n-1)xdx = -\frac{x^2}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{2x}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x$$

Ahora bien:

$$A_n = \frac{4}{\pi}\left[\begin{array}{c} -\frac{x^2}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{2x}{(2n-1)^2}sen(2n-1)x + \frac{\pi}{2(2n-1)}\cos(2n-1)x \\ -\frac{\pi}{2(2n-1)^2}sen(2n-1)x \end{array}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_n = \frac{4}{\pi}\left[\begin{array}{c} -\frac{\pi^2}{4(2n-1)}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{(2n-1)^2}sen(2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(2n-1)}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}- \\ -\frac{\pi}{2(2n-1)^2}sen(2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(2n-1)} \end{array}\right] =$$

$$A_n = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi}{2\left(2n-1\right)^2}sen(2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(2n-1)}\right] = \frac{2}{(2n-1)}\left[sen(2n-1)\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$W(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\left[sen(2n-1)\frac{\pi}{2} - 1\right] sen\ (2n-1)x\cos(2n-1)t$$

Y la solución $Y(x,t)$ es:

$$Y(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\left[sen(2n-1)\frac{\pi}{2}-1\right] sen\ (2n{-}1)x\cos(2n{-}1)t-\frac{x^2}{2}+1$$

Problema 12. Una placa circular de radio unitario y difusividad k tiene una temperatura inicial dada por

$$\mathbf{f}\,(r) = \begin{matrix} 100 & si & 0 < r < \frac{1}{2} \\ 0 & si & \frac{1}{2} < r < 1 \end{matrix}$$

Donde r es la distancia de cualquier punto desde el centro. Asumiendo que la temperatura del borde se mantiene a cero y que las caras planas están aisladas encuentre la temperatura en cualquier parte de la placa en cualquier punto.

Solución:

Se resuelve la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Por el método de separación de variables

$$\frac{RT^{'} = \kappa\left(R''T+\frac{1}{r}R'T\right)}{RT}$$

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{R"}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\lambda^2$$

Para $T(t)$ queda la ecuación:

$$\frac{T'}{\kappa T} = -\lambda^2$$

Cuya solución es:

$$T\,(t) = c_1 e^{-\kappa\lambda^2 t}$$

La ecuación para $R(r)$ es:

$$\left(\frac{R"}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\lambda^2\right)$$

Que se puede escribir como:

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0$$

La cual es una ecuación de Bessel de orden cero con solución:

$$R(r) = c_2 J_0(\lambda r) + c_3 Y_0(\lambda r)$$

La solución general es:

$$u(r,t) = \left(c_1 e^{-k\lambda^2 t}\right)\left(c_2 J_0(\lambda r) + c_3 Y_0(\lambda r)\right)$$

Como la solución debe ser acotada y la función $Y_0(\lambda r)$ no es acotada en le origen, entonces debe tomarse $c_3 = 0$, reagrupando constantes la solución se escribe como:

$$u(r,t) = c e^{-k\lambda^2 t} J_0(\lambda r)$$

Como el brode se mantiene a temperatura cero, se tiene la condición de frontera:

$$u(1,t) = 0$$

$$u(1,t) = c e^{-k\lambda^2 t} J_0(\lambda) = 0$$

Y debe tenerse que $J_0(\lambda) = 0$, por lo tanto los eigenvalores λ son las raíces de la $J_0(x) = 0$.

Usando el principio de superposición para aplicar la última condición de frontera:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k\lambda_k^2 t} J_0(\lambda_k r)$$

Aplicando la última condición:

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\lambda_k r) = f(r)$$

De tal manera que:

$$c_k = \frac{\int_0^1 f\,(r)\, rJ_0(\lambda_k r)dr}{\int_0^1 rJ_o^2(\lambda_k r)dr}$$

La integral del denominador da el siguiente resultado:

$$\int_0^1 rJ_o^2(\lambda_k r)dr = \frac{1}{2}J_0'^2(\lambda_k) = \frac{1}{2}J_1^2(\lambda_k)$$

La integral del numerador es:

$$\int_0^1 f\,(r)\, rJ_0(\lambda_k r)dr = 100\int_0^{\frac{1}{2}} rJ_0(\lambda_k r)dr$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \lambda_k r,\ \ r = \frac{u}{\lambda_k},\ \ \frac{du}{\lambda_k} = dr$$

$$\int_0^1 f\,(r)\, rJ_0(\lambda_k r)dr = 100\int_0^{\frac{k_k}{2}} \frac{u}{\lambda_k}J_0(u)\frac{du}{\lambda_k} = \frac{100}{\lambda_k^2}\int_0^{\frac{k_k}{2}} uJ_0(u)du$$

$$\int_0^1 f\,(r)\, rJ_0(\lambda_k r)dr = \frac{100}{\lambda_k^2}uJ_1(u)\bigg|_0^{\frac{k_k}{2}} = \frac{100}{\lambda_k^2}\frac{\lambda_k}{2}J_1(\frac{\lambda_k}{2}) = \frac{50}{\lambda_k}J_1(\frac{\lambda_k}{2})$$

O sea, c_k se escribe como

$$c_k = \frac{\frac{50}{\lambda_k}J_1(\frac{\lambda_k}{2})}{\frac{1}{2}J_1^2(\lambda_k)} = \frac{100J_1(\frac{\lambda_k}{2})}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k)}$$

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$u\,(r,t) = 100\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\frac{\lambda_k}{2})}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k)}e^{-k\lambda_k^2 t}J_0(\lambda_k r)$$

Problema 13. Trabaje el problema anterior si la condición de temperatura en el borde se reemplaza por la condición de radiación en el borde dada por $u_r\,(1,t) = -2u\,(1,t)$.

Solución:
La solución coincide con lo realizado en el problema anterior hasta que

$$u\left(r,t\right)=ce^{-k\lambda^{2}t}J_{0}(\lambda r)$$

pero la condición al borde ahora es

$$u_{r}\left(1,t\right)=-2u\left(1,t\right)$$

para ello es necesario obtener la derivada de la solución con respecto a r :

$$u_{r}\left(r,t\right)=c\lambda e^{-k\lambda^{2}t}J_{0}'(\lambda r)$$

la condición se aplica así:

$$c\lambda e^{-k\lambda^{2}t}J_{0}'(\lambda)=-2ce^{-k\lambda^{2}t}J_{0}(\lambda)$$

y nos lleva a:

$$2J_{0}(\lambda)+\lambda J_{0}'(\lambda)=0$$

es decir, las λ's son las raíces de $2J_{0}(x)+xJ_{0}'(x)=0$, $\lambda=\lambda_{k}$
Usando el principio de superposición para aplicar la última condición de frontera:

$$u\left(r,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{k}e^{-k\lambda_{k}^{2}t}J_{0}(\lambda_{k}r)$$

La solución tiene el mismo aspecto que en el problema anterior pero las λ's son muy diferentes.
Aplicando la última condición:

$$u\left(r,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{k}J_{0}(\lambda_{k}r)=f(r)$$

De tal manera que:

$$c_{k}=\frac{\int_{0}^{1}f\left(r\right)rJ_{0}(\lambda_{k}r)dr}{\int_{0}^{1}rJ_{o}^{2}(\lambda_{k}r)dr}$$

Para calcular la integral del denominador se hace lo siguiente:
Se sabe que si r_k son las raíces de la ecuación:

$$\mu J_n(x) + xJ_n'(x) = 0$$

Entonces:

$$\int_0^1 xJ_n^2(r_kx)\,dx = \frac{(\mu^2 + r_k^2 - n^2)\,J_n^2(r_k)}{2r_k^2}$$

en nuestro caso:
$\mu = 2; \quad n = 0; \quad r_k = \lambda_k$
así obtenemos finalmente

$$\int_0^1 rJ_0^2(\lambda_k r)\,dr = \frac{(4 + \lambda_k^2)\,J_0^2(\lambda_k)}{2\lambda_k^2}$$

La integral del numerador da el mismo resultado:

$$\int_0^1 f(r)\,rJ_0(\lambda_k r)dr = \frac{50}{\lambda_k}J_1(\frac{\lambda_k}{2})$$

O sea, c_k se escribe como

$$c_k = \frac{\frac{50}{\lambda_k}J_1(\frac{\lambda_k}{2})}{\frac{(4+\lambda_k^2)J_0^2(\lambda_k)}{2\lambda_k^2}} = \frac{100\lambda_k J_1(\frac{\lambda_k}{2})}{(4 + \lambda_k^2)\,J_0^2(\lambda_k)}$$

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$u(r,t) = 100\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100\lambda_k J_1(\frac{\lambda_k}{2})}{(4 + \lambda_k^2)\,J_0^2(\lambda_k)}e^{-k\lambda_k^2 t}J_0(\lambda_k r)$$

Problema 14. Un cilindro de radio unitario y longitud L tiene su superficie convexa y base en el plano xy mantenidas a temperatura cero mientras que el extremo superior se mantiene a temperatura $f(r)$. Escriba y resuelva el problema de valor de frontera para la temperatura de estado estacionario en cualquier punto del cilindro.

Solución:

La ecuación que se resolverá es la siguiente. Note que no hay dependencia del ángulo por la simetría y tampoco del tiempo, porque el problema es estacionario.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

los condiciones a la frontera son

$$U(r,0) = 0;\ U(r,L) = f(r);\ U(1,z) = 0$$

Haciendo la separación de variables:

$$\frac{R''Z + \frac{1}{r}R'Z + RZ''}{RZ} = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\lambda^2$$

$$\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\frac{d^2 Z}{dz} + \lambda^2 Z = 0$$

$$Z(z) = c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z}$$

La ecuación para $R(r)$ es:

$$r^2\frac{d^2 R}{dr} + r\frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R = 0$$

la cual es una ecuación de Bessel cuya solución es:

$$R(r) = c_3 J_0(\lambda r) + c_4 Y_0(\lambda r)$$

De tal forma que la solución general del problema se escribe como:

$$U(r,z)=(c_1e^{\lambda z}+c_2e^{-\lambda z})(c_3J_0(\lambda r)+c_4Y_0(\lambda r))$$

La solución debe de ser acotada para $r=0$, pero la función $Y_0(\lambda r)$ no es acotada en el origen, por tal motivo debe tomarse $c_4=0$.

Aplicando la primera condición inicial:

$$U(r,0)=0=(c_1+c_2)\,(c_3J_0(\lambda r))$$

$0=c_1+c_2$ por lo tanto $c_2=-c_1$
sustituyendo en $U(r,z)$

$$U(r,z)=(c_1e^{\lambda z}-c_1e^{-\lambda z})c_3J_0(\lambda r)$$

Se factoriza el c_1 y se divide entre dos para utilizar la identidad del $senhz$. Agrupando las constantes:

$$U(r,z)=c\sinh(\lambda z)J_0(\lambda r)$$

Aplicando la siguiente condición:

$$U(1,z)=0=c\sinh(\lambda z)J_0(\lambda)$$

$J_0(\lambda)=0$ esto significa que λ son todos los raíces positivas de $J_0(x)=0$

$$\lambda=\lambda_k$$

Y usando el principio de superposición:

$$U(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sinh(\lambda_kz)J_0(\lambda_kr)$$

Aplicando la última condición: $U(r,L)=f(r)$

$$U(r,L)=f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sinh(\lambda_kL)J_0(\lambda_kr)=\sum_{k=1}^{\infty}d_kJ_0(\lambda_kr)$$

donde se ha tomado: $d_k=c_k\sinh(\lambda_kL)$
La expresión para d_k es:

$$d_k = \frac{\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_k r)dr}{\int_0^1 rJ_o^2(\lambda_k r)dr} = \frac{2\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_k r)dr}{J_1^2(\lambda_k)}$$

es decir, c_k es:

$$c_k = \frac{2\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_k r)dr}{J_1^2(\lambda_k)\sinh(\lambda_k L)}$$

Y la solución se escribe como:

$$U(r,z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_k r)dr}{J_1^2(\lambda_k)\sinh(\lambda_k L)} \sinh(\lambda_k z)J_0(\lambda_k r)$$

Problema 15. Considere una placa metálica delgada rectangular cuyo ancho es L y cuya longitud es tan grande comparada con su ancho que para todos los propósitos prácticos se puede considerar infinita. Asumamos que los lados infinitos se mantienen aislados y que la base de la placa (en el eje x) se mantiene a una temperatura constante $U_0{}^oC$. Asumiremos también que las caras de la placa están aisladas de modo que el calor no puede entrar ni escapar de ellas. Buscamos determinar la temperatura de estado estacionario de la placa, esto es, la temperatura que es independiente del tiempo.

Solución:

La ecuación de calor es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

Por ser estado estacionario, el término $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Utilizando el método de separaciòn de variables

$$U(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{X''Y + XY''}{XY} = 0$$

$$\frac{X"}{X} + \frac{Y"}{Y} = 0$$

Haciendo la separación de variables:

$$\frac{X"}{X} = -\frac{Y"}{Y} = -\lambda^2$$

La ecuación para $X(x)$:

$$\frac{X"}{X} = -\lambda^2$$

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 sen \lambda x$$

La ecuación para $Y(y)$:

$$\frac{Y"}{Y} = \lambda^2$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2 y$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 y = 0$$

$$m^2 = \lambda^2$$

$$m = \pm\lambda$$

$$Y(y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$$

$$U(x,y) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 sen\lambda x) \left(C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}\right)$$

Con las condiciones a la frontera:

$$U(0,y) = 0,\ u(L,y) = 0,\ u(x,0) = U_0$$

La temperatura debe estar acotada, por lo tanto $C_3 = 0$.

Factorizando y agrupando los productos de las constantes en dos nuevas constantes A y B

$$U(x,y) = e^{-\lambda y}(A \cos \lambda x + B sen\lambda x)$$

Aplicando la primera condición de frontera:

$$u(0,y) = Ae^{-\lambda y} = 0 \Rightarrow A = 0$$

Por lo tanto la solución hasta ahora está dada como:

$$U(x,y) = Be^{-\lambda y} sen\lambda x$$

Ahora aplicamos la condición $u(L,y) = 0$

$$U(x,L) = Be^{-\lambda y} sen\lambda L = 0, \quad \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

Por lo tanto:

$$U(x,y) = Be^{-\frac{n\pi}{L}y} sen\frac{n\pi}{L}x$$

Usando el principio de superposición:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{L}y} sen\frac{n\pi}{L}x$$

Por último aplicamos la condición:

$$U(x,0) = U_0$$

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\frac{n\pi}{L}x = U_0$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L U_0 sen\frac{n\pi}{L}xdx = -\frac{2}{L}\frac{U_0 L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L = \frac{2U_0}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Y la solución se puede escribir como:

$$U(x,y) = \frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)e^{-\frac{n\pi}{L}y}sen\frac{n\pi}{L}x$$