清华大学本科生考试试题专用纸

期末考试课程　概率论与数理统计（A 卷）　2022 年 6 月 13 日

学号：＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿＿

一. 填空题（**27** 分，每空 **3** 分，将计算结果直接写在横线上）

（1）设 A,B 相互独立，$P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.75$，则 $P(A-B)$=＿＿＿＿＿。

（2）设 X 服从 Poisson 分布，且 $P(X\le 1)=4P(X=2)$，则 $P(X>EX)$=＿＿＿＿。

（3）将一枚均匀硬币重复掷 n 次，用 X 和 Y 分别表示出现正面和出现反面的次数，则 $E(XY)$=＿＿＿＿＿＿。

（4）设 $\xi\sim U[0,5]$，则二次方程 $x^2+\xi x+\dfrac{\xi}{4}+\dfrac{1}{2}=0$ 有实根的概率 = ＿＿＿＿＿＿。

（5）随机变量 X 服从几何分布 $Ge(p)$，则 $P\left(X=2024\middle|X>2021\right)=$＿＿＿＿＿＿。

（6）设 $X_{1,},\cdots,X_{100}$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的一个样本，记 $\bar{X},S^2$ 为其样本均值与样本方差，则方差 $D(S^2)$ = ＿＿＿＿＿＿。又若考虑检验问题：$H_0:\mu=1\leftrightarrow H_1:\mu\neq 1$，取拒绝域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_{100}):|\bar{x}-1|\ge c\}$，则该检验的势函数 $g(\mu)$ = ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

（7）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 为其样本方差，记 $Y=n(\dfrac{\bar{X}-\mu}{S})^2$，则 $Y\sim$＿＿＿＿＿＿。（写出分布类型与参数）

（8）设独立随机变量 X 和 Y 的特征函数分别为 $\varphi_X(\theta)=e^{i\theta-\frac{1}{2}\theta^2}$ 和 $\varphi_Y(\theta)=e^{-i\theta-\frac{5}{2}\theta^2}$，则 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$= ＿＿＿＿＿＿＿。

二.（13 分）连续做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果，而且第 $k+1$ 次试验的结果只与第 k 次试验结果有关：当第 k 次试验成功时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 2/3；当第 k 次试验失败时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 1/6。已知第 1 次试验成功的概率为 1/3。

（1）试求第 2 次试验成功的概率；

（2）在已知第 3 次试验成功的条件下，试求第 2 次试验成功的概率；

（3）用 X 表示首次获得成功时的试验次数，试求 X 的概率分布。

三.（15 分）设随机变量 X 服从参数为 $\lambda>0$（λ 待定）的指数分布，$F(x)$ 为其分布函数，若已知 $F(2\ln 2)=\frac{1}{2}$，

（1）试确定参数 λ，并求 $P(X-EX>\sqrt{DX})$；

（2）设 $P(\eta=1)=\frac{1}{3}, P(\eta=2)=\frac{2}{3}$，且 η 与 X 独立，求 $P(\eta X>2)$；

（3）若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且均与 X 同分布，试问 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{X_i}{2EX_i}}$ 依概率收敛到多少？说明你的理由。

四.（20 分）设 $X\sim U[0,1]$，且在 $\{X=x\}$ 的条件下，$Y\sim U[0,x]$ （$x\in[0,1]$）；

（1）试求 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；

（2）试求 $Cov(X,Y)$；

（3）试求 $P(X+Y\le 1)$ 以及 $E(X\mid X+Y\le 1)$；

（4）求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$。

五.（25分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数。

（1）试求 $Y\triangleq -\ln X$ 的概率密度函数；

（2）试问 $T\triangleq -\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 是否为 θ 的充分统计量？为什么？

（2）试求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$；

（4）$\frac{1}{\hat{\theta}_{MLE}}$ 是否为 $\frac{1}{\theta}$ 有效估计和 UMVUE？请给出理由；

（5）试证明 $2\theta T\sim\chi^2(2n)$，并由此给出参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的等尾置信区间。