清华大学本科生考试试题专用纸

期末考试课程　概率论与数理统计（A卷）　2021年12月28日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一、填空题（**27** 分，每空 **3** 分，将计算结果直接写在横线上）

（**1**）设 A,B 相互独立，$P(A)=P(B)=p\in(0,1)$，则 $P(A|A\cup B)=$ ______。

（**2**）设随机变量 X,Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P(X\le 0,Y>0)=0.4$，

则 $P(X>0,Y<0)$=__________。

（**3**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，则 $P\left(|X-Y|\le 0.5\right)=$________。

（**4**）随机变量 X 服从几何分布 $Ge(p)$，则 $P\left(X=2022|X>2021\right)=$________________。

（**5**）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 **2** 的 **Poisson** 总体的一个样本，令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，

则 $S_n^2\xrightarrow{P}$____________。

（**6**）设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 为来自总体 $N(\mu,4)$ 的一个样本，记 $\bar{X},S^2$ 为其样本均值与样本方差，则 $E((\bar{X})^2S^2)$ = __________ 。又若考虑检验问题：$H_0:\mu=6,\ H_1:\mu\neq 6$，取拒绝域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_n):|\bar{x}-6|\ge c\}$，则该检验法的势函数 $g(\mu)$ = ____________________________ 。

（**7**）设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，若 $\frac{a(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，则 a=_______ 。

（**8**）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9}{x^4y^4}, & x>1,y>1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

则 $Cov(X,3Y+1)$ =_______。

二.（**13** 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $P(X_1=1)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

（**1**）　试求 $P(X_1=X_2)$；（**2**）试求 $P(S_4=ES_4)$；（**3**）试求 $Cov(S_m,S_n),m<n$。

三.（15 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}, & x\ge 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$

（1） 设 N 是在对 X 进行的 10 次独立观察中 X 的取值大于 2 的次数，试求 N 的特征函数 $\varphi_N(\theta)$；

（2） 设 Y 是观察到 X 取值首次大于 2 时所需的观察次数，试求 $P(Y<EY)$；

（3） 设与 X 独立的随机变量 α 服从两点分布：$P(\alpha=0.5)=0.8, P(\alpha=1)=0.2$，试求 $P(\alpha X>2)$。

四.（20 分）设随机变量 X 和 Y 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$，

（1）试问 X 和 Y 是否相互独立，为什么？

（2）设 $U=E(Y\mid X)$，求 $Cov(X,U)$；

（3）求 $E(X\mid X+Y<3EY)$；

（4）令 $U=E(Y\mid X), V=\dfrac{Y}{2}+E(Y\mid X)$，试求 (U,V) 的密度函数 $f_{U,V}(u,v)$ 。

五.（25分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<+\infty,\text{其中}\theta>0\text{为未知参数。}$$

（1） 令 $Y=|X|$，试求出 Y 的密度函数 $f_Y(y)$；

（2）试求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$，并证明 $\hat{\theta}_{MLE}$ 是 θ 的相合估计；

（3）$\hat{\theta}_{MLE}$ 是否为 θ 有效估计和 UMVUE？请给出理由；

（4）试证明 $T\triangleq\dfrac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\sim\chi^2(2n)$，并由此给出参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的等尾置信区间；

（5）若记 $N=\min\{n\ge 0:\sum_{i=1}^{n+1}|X_i|>1\}$，试求出 N 所服从的分布。