3-7-2014

2014 7月

数 学 Z 問 題

(120分)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z1}}$ ～ $\boxed{\text{Z3}}$ の3題の中から2題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z1}}$ 2次関数 $f(x)=ax^2+2bx+3$ は，$f(3)=0$，$f'(b)=0$ を満たす。ただし，a，b は0でない定数とする。

(1) a，b の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx=\frac{5}{3}$ のとき，定数 k の値を求めよ。 (配点 20)

$\boxed{\text{Z2}}$ AB＝6，BC＝7，CA＝5 の △ABC がある。点Bから辺ACに垂線を引き，辺ACとの交点をDとする。また，点Cから辺ABに垂線を引き，辺ABとの交点をEとする。

(1) cos∠BAC の値を求めよ。また，線分ADの長さを求めよ。

(2) 線分DEの長さを求めよ。また，線分BDと線分CEとの交点をFとするとき，△DEFの外接円の半径を求めよ。 (配点 20)

$\boxed{\text{Z3}}$ 自然数 a，b，k は，次の2つの条件を満たす。

(i) $a+15$ は b で割ると商が2で，余りが $2k$ である。

(ii) $b+2$ は a で割り切れ，商は k である。

(1) a と k の関係式を求めよ。

(2) 条件を満たす a，b，k の値の組 $(a,\ b,\ k)$ をすべて求めよ。 (配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z4}}$，$\boxed{\text{Z5}}$ から1題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z4}}$ 関数 $f(x)=\log(3x^2-3x+1)$ がある。ただし，対数は自然対数である。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線と y 軸との交点の y 座標を q とする。$L=f(p)-q$ とするとき，L を p を用いて表せ。

(3) (2)において，p が $p\geqq 0$ の範囲を動くとき，L の最大値を求めよ。 (配点 40)

$\boxed{\text{Z5}}$ 方程式 $x^3+1=0$ の虚数解のうち，虚部が負であるものを w とする。また，互いに異なる複素数 α，β，γ があり，$\gamma=\alpha w+(\alpha-2\beta)(w-1)$ を満たしている。

(1) w の値を求めよ。

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(3) i を虚数単位とする。$\alpha=2w$，$|\beta-\alpha|=2$，$\gamma=ki$ $(k>0)$ であるとき，k の値を求めよ。また，β を求めよ。 (配点 40)

【必答問題】 $\boxed{Z6}$ ～ $\boxed{Z8}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{Z6}$ $\boxed{6}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$，$\boxed{9}$，$\boxed{10}$，$\boxed{11}$，$\boxed{12}$ の7枚のカードの中から1枚ずつ3枚のカードを取り出して左から順に並べて数を作る。例えば，$\boxed{7}$，$\boxed{10}$，$\boxed{9}$ の順に並べて作られる数は，4桁（けた）の数 7109 である。

(1) 3桁の数は全部で何個できるか。また，4桁の数は全部で何個できるか。

(2) 作られる数のうち，最小の数は 678 であり，最大の数は 121110 である。作られる数のうち，小さい方から数えて 200 番目の数を求めよ。

(3) 4桁または5桁の奇数は全部で何個できるか。

（配点　40）

$\boxed{Z7}$ 四面体 OABC があり，$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ である。辺 OA を 2:1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，直線 OM 上に $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる点 E をとる。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 DE と平面 ABC との交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) (2)の点 P に対して，四面体 POAC の体積を求めよ。

（配点　40）

$\boxed{Z8}$ p, q は実数で, $p \neq q$ とする。数直線上に点 $A_1(p)$, 点 $A_2(q)$ がある。線分 A_1A_2 を 2:1 に内分する点を A_3, 線分 A_2A_3 を 2:1 に内分する点を A_4, 以下同様に線分 A_nA_{n+1} を 2:1 に内分する点を A_{n+2}, …と定める。点 A_n の座標を a_n とする。ただし, n は自然数とする。

(1) a_3 を p, q を用いて表せ。また, a_{n+2} を a_n, a_{n+1} を用いて表せ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とするとき, b_n を p, q, n を用いて表せ。また, a_n を p, q, n を用いて表せ。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ が成り立つとき, p, q の値を求めよ。 (配点 40)