3-4-2019　2019 4月

数　学　Y　問　題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ～ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ 2つの袋X，Yがあり，袋Xには赤玉3個，白玉1個が入っていて，袋Yには赤玉2個，青玉1個が入っている。X，Yの袋の中から玉を1個ずつ取り出し，取り出した玉の色を記録してもとの袋の中に戻す操作を2回行う。

(1) 赤色が2回，かつ青色が2回記録された確率を求めよ。 $\frac{1}{16}$

(2) 青色が2回記録された確率を求めよ。また，青色が2回記録されたとき，記録された玉の色が2種類である条件付き確率を求めよ。 (配点　20)

$\frac{1}{9}$, $\frac{5}{8}$

$\boxed{\text{Y 2}}$ 関数 $f(x)=a\sin x+b\cos 2x$ (a, b は定数) があり，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ である。

(1) a，b の値を求めよ。 $a=2$, $b=-1$

(2) $0\leqq x<2\pi$ のとき，$f(x)=-\frac{3}{2}$ となる x の値を求めよ。 (配点　20)

(2) $x=\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

Y 3 座標平面上に，放物線 $C : y=x^2-x+3$ がある。C 上の点 A $(1,\ 3)$ における C の接線を ℓ とする。また，ℓ と x 軸の交点を B とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) C 上の点を P $(p,\ p^2-p+3)$ (p は定数）とし，P を通り y 軸に平行な直線が ℓ と交わる点を Q とする。Q が線分 AB（両端の 2 点 A，B を除く）上にあるとき，△BPQ をつくり，△BPQ の面積を T とする。T を p を用いて表せ。また，T が最大となるときの p の値を求めよ。

(3) p を(2)で求めた値とする。C と直線 ℓ，および線分 BP で囲まれた部分の面積を求めよ。

（配点　40）

(1) $\ell : y = x+2$

(2) $T=\frac{1}{2}(p^3-3p+2)$ ， $p=-1$

(3) $\frac{14}{3}$

Y 4 a を正の定数とする。O を原点とする座標平面上に，円 $C_1 : x^2+y^2+10x+2y+1=0$ と直線 $\ell : 3x+4y=a$ があり，C_1 と ℓ は接している。

(1) a の値を求めよ。

(2) ℓ に関して C_1 と対称な円を C_2 とする。C_2 の方程式を求めよ。

(3) (2)のとき，O から C_2 に引いた接線のうち傾きが正であるものを m とする。また，C_2 と m の接点を P とし，C_2 上の点を Q とする。Q が P を除く C_2 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値とそのときの Q の座標を求めよ。

（配点　40）

(1) $a=6$

(2) $(x-1)^2+(y-7)^2=25$

(3) △OPQ $=25$　　Q$(-2,3)$

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合(P.10～11)】	$\boxed{\text{Y5}}$～$\boxed{\text{Y7}}$の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.12～13)】	$\boxed{\text{Y7}}$～$\boxed{\text{Y10}}$の4題中2題を解答せよ。

$\boxed{\text{Y7}}$ 平行四辺形OACBがあり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{1}{6}$ である。対角線ABを3:1に内分する点をDとし，Oから対角線ABに引いた垂線と対角線ABとの交点をHとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 直線OHと直線DCの交点をEとする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分DEの長さを求めよ。

（配点　40）

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ ， $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}(\vec{a}+3\vec{b})$

(2) $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{OE}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$ ， $DE=\frac{\sqrt{79}}{20}$

$\boxed{\text{Y8}}$ a，b を正の定数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は点A(0, 1)を通り，その焦点の1つはF(1, 0)である。また，直線AFと C の2つの交点のうち，Aと異なるものをBとする。

(1) a，b の値を求めよ。

(2) Bの座標を求めよ。また，線分ABの長さを求めよ。

(3) 直線ABに平行な直線 ℓ が C と第1象限において接するとき, C と ℓ の接点をPとする。△PABの面積を求めよ。

（配点　40）

(1) $a=\sqrt{2}$ ， $b=1$

(2) $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ， $AB=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) $\triangle PAB=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$

Y9 x の2次方程式 $x^2-3x+3=0$ の虚数解のうち，虚部が正であるものを α とし，O を原点とする複素数平面上で，α を表す点を A とする。また，O を中心として A を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を B とし，点 B を表す複素数を β とする。

(1) α，β をそれぞれ $a+bi$（a，b は実数）の形に表せ。

(2) β を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。また，β^6 を計算せよ。

(3) $\gamma=1+i$ とする。不等式 $|\gamma^m| \leqq |\beta^6|$ を満たすような自然数 m のうち，最大のものを M とする。また，γ，γ^M を表す点をそれぞれ P，Q とする。3点 P，Q，R が正三角形の頂点となるとき，点 R を表す複素数を $x+yi$（x，y は実数）の形に表せ。（配点　40）

(1) $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$　$\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

(2) $\beta = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$\beta^6 = 27$.

(3) R : $\left(\dfrac{17}{2} \mp \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{17}{2} \pm \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\right)i$

Y10 数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1}=a_n+3$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）を満たし，第5項から第10項までの和は 147 である。また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は
$S_n=2b_n-n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）を満たしている。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) a_n を 2 で割ったときの余りを c_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とする。$T_{2m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}\frac{c_k}{b_k+1}$（$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とするとき，$T_{2m}$ を m の式で表せ。また，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} T_{2m}$ を求めよ。

（配点　40）

(1) $a_n = 3n+2$

(2) $b_n = 2^n - 1$

(3) $T_{2m} = \dfrac{2}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^m\right\}$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} T_{2m} = \dfrac{2}{3}$