2017 1A

数　学　B　問　題

(120分)

【必答問題】　数学B受験者は $\boxed{\text{B1}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{B3}}$, $\boxed{\text{B4}}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B1}}$ 関数 $f(x)=x^2-x+a$ （a は定数）がある。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。また，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}+a\right)$ 　$a<\frac{1}{4}$

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の $-2<x<3$ の部分が異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

$-6<a<\frac{1}{4}$

（配点　20）

$\boxed{\text{B2}}$ 関数 $y=2\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta$ がある。

(1)　$\theta=0$ のとき，y の値を求めよ。また，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，y の値を求めよ。 $y=\sqrt{3}$, $y=1$

(2)　y を $r\sin(2\theta+\alpha)$ （$r>0$，$0\leqq\alpha<2\pi$）の形で表せ。また，$0\leqq\theta<\pi$ のとき，$y=-\sqrt{3}$ を満たす θ の値を求めよ。

（配点　20）

$y=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$, $\theta=\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$

$\boxed{\text{B3}}$ 袋の中に $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の6枚のカードが入っている。この袋の中から同時に2枚のカードを取り出したとき，X を次のように定める。

・$\boxed{\text{A}}$ が含まれるとき，もう一方のカードに書かれた数の2倍を X とする。

・$\boxed{\text{A}}$ が含まれないとき，2枚のカードに書かれた数の和を X とする。

(1)　$X=8$ となる確率を求めよ。 $\frac{1}{15}$

(2)　$X=6$ となる確率を求めよ。また，$X=5$ となる確率を求めよ。 $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{5}$

(3)　$X\leqq 4$ となる確率を求めよ。また，$X\leqq 4$ のとき，取り出したカードに $\boxed{\text{A}}$ が含まれている条件付き確率を求めよ。 $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{8}$

（配点　40）

B4 座標平面上に円 C：$x^2+y^2-2kx-4ky+5k^2-9=0$ がある。ただし，k は $k>2$ を満たす実数とする。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。 $(k, 2k)$, 3

(2) 円 C が点 $(4,\ 5)$ を通るときの円を K_1 とする。円 K_1 の中心の座標を求めよ。また，直線 ℓ：$x-y+2=0$ に関して円 K_1 と対称な円を K_2 とするとき，円 K_2 の方程式を求めよ。

(3) 円 C と(2)で求めた円 K_2 が共有点をもつような k の最大値を求めよ。また，このときの円 C の中心を P とする。点 Q が円 K_2 の周上を動くとき，線分 PQ を 3:1 に外分する点 R の軌跡の方程式を求めよ。

（配点　40）

(2) $(4, 8)$, $K_2: (x-6)^2+(y-6)^2=9$, (3) Max 6 $(x-6)^2+(y-3)^2=\frac{81}{4}$

【選択問題】　数学 B 受験者は，次の **B5** ～ **B8** のうちから２題を選んで解答せよ。

B5 $a_2=1$，$a_{n+1}-a_n=2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。

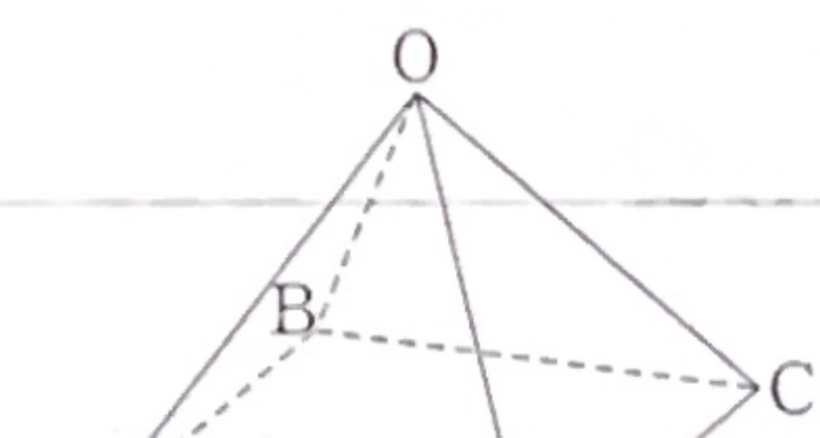
(1) a_1 を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。 $a_1=-1$, $a_n=2n-3$

(2) $b_1=0$，$b_{n+1}-b_n=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{b_n\}$ がある。数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n を用いて表せ。 $b_n=n^2-4n+3$

(3) (2)の数列 $\{b_n\}$ に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ とする。S_n を n を用いて表せ。また，$\sum_{k=2}^{20} \frac{2k-7}{S_k}$ の値を求めよ。 $S_n=\frac{1}{6}n(2n-7)(n-1)$, $\frac{57}{10}$

（配点　40）

B6 正方形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD があり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。また，辺 OA を 2:3 に内分する点を P, 辺 OC 上の $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OC}$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ となる点を Q とする。



(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{PQ}$ を k，$\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\cos\angle AOC=\frac{1}{4}$ とする。内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{5}$ のとき，k の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，(2)のとき，平面 PQD と直線 OB の交点を H とする。$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ。

（配点　40）

(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{PQ}=k\vec{c}-\frac{2}{5}\vec{a}$, (2) $\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{4}$, $k=\frac{4}{5}$

(3) $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ $\overrightarrow{OH}=\frac{4}{11}\vec{b}$

B7 関数 $f(x)=x^3-2ax^2+3a$ (a は定数) があり，$f'(2)=4$ である。また，曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 A $(2,\ f(2))$ における曲線 C の接線を ℓ とする。

(1) a の値を求めよ。また，$f(2)$ の値を求めよ。 $a=1$, $f(2)=3$

(2) 接線 ℓ の方程式を求めよ。また，ℓ と曲線 C の A 以外の共有点を B とする。点 B の座標を求めよ。 $\ell: y=4x-5$ 　 $B(-2, -13)$

(3) (2)のとき，曲線 C 上に点 P $(t,\ f(t))$ があり，P は点 A から点 B まで動くものとする。△ABP の面積を S とするとき，S を t を用いて表せ。また，S が最大となるような t の値を求めよ。

（配点　40）

$S=2(t^3-2t^2-4t+8)$

$t=-\frac{2}{3}$

B8 関数 $y=9^x+2a\cdot3^{x+1}+9a+6$ (a は定数) がある。また，$t=3^x$ とおく。

(1) 9^x，3^{x+1} をそれぞれ t を用いて表せ。 $9^x=t^2$, $3^{x+1}=3t$

(2) $a=-\frac{4}{9}$ とする。y を t を用いて表せ。また，$y>3$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(3) y の最小値が -4 となるような a の値を求めよ。また，このとき最小値をとる x の値を求めよ。

（配点　40）

(2) $y=t^2-\frac{8}{3}t+2$, $x>1$

(3) $a=-\frac{2}{3}$, $x=\log_3 2$