2014 1A
1-1-2014

数 学 問 題

(100分)

【必答問題】 次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) 不等式 $\dfrac{6-5x}{2}>x-4$ の解は $\boxed{(ア)}$ である。

(2) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}$ を計算すると $\boxed{(イ)}$ となる。

(3) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ を展開して整理すると $\boxed{(ウ)}$ となる。

(4) 放物線 $y=x^2-4x+k+1$ (k は定数) が x 軸に接するとき，$k=\boxed{(エ)}$ である。

(5) 次の $\boxed{(オ)}$ にあてはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

a, b は実数とする。$ab<0$ であることは，$a<0$ かつ $b>0$ であるための $\boxed{(オ)}$。

⓪ 必要十分条件である　① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない　③ 必要条件でも十分条件でもない

(配点 20)

$\boxed{2}$ 2つの不等式

$x^2+4x+3\geqq 0$ ……①

$|x|\leqq 2$ ……②

がある。

(1) 不等式①を解け。　$x\leqq -3,\ -1\leqq x$

(2) 不等式②を解け。また，不等式①，②を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(3) a は正の定数とする。方程式 $x^2-2ax-a^2=0$ を解け。また，この方程式の2つの解が不等式①，②を同時に満たすとき，a の値の範囲を求めよ。　(配点 20)

(2) $-2\leqq x\leqq 2$, $-1\leqq x\leqq 2$

(3) $x=a\pm\sqrt{2a^2}$, $0<a\leqq -2+2\sqrt{2}$

3 2次関数 $f(x)=x^2-4ax+5a^2-2a-4$ があり，$y=f(x)$ のグラフを K とする。ただし，a は正の定数とする。

(1) グラフ K の頂点の座標を a を用いて表せ。 $(2a, a^2-2a-4)$

(2) $a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) A$(a, 0)$，B$(a+2, 0)$，C$(a+2, 2)$，D$(a, 2)$ とする。正方形ABCDとグラフ K が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

（配点　20）

(2) $0<a\leqq 2$　a^2-2a-4　　(3) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}<a$, $0<a<2$

$2<a$　$2a^2-6a$

【選択問題】 次の **4**，**5**，**6**，**7** のうちから２題を選んで解答せよ。

4 AD // BC，AD < BC の台形ABCDがあり，AB = 4，AD = 2，∠BAD = 120°，$\sin\angle\text{BCD}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ である。

(1) 線分BDの長さを求めよ。また，△ABDの面積を求めよ。 BD$=2\sqrt{7}$　△ABD$=2\sqrt{3}$

(2) $\sin\angle$ADBの値を求めよ。また，辺CDの長さを求めよ。

(3) 辺BCの長さを求めよ。また，線分ACとBDの交点をEとするとき，△CDEの面積を求めよ。

（配点　20）

(2) $\sin\angle\text{ADB}=\frac{2\sqrt{21}}{17}$, CD$=\sqrt{21}$

(3) BC$=7$, △CDE$=\frac{14\sqrt{3}}{9}$

5 袋の中に1と書かれたカードが4枚，2と書かれたカードが3枚，3と書かれたカードが2枚，4と書かれたカードが1枚の合計10枚のカードが入っている。この袋から同時に4枚のカードを取り出し，取り出されたカードに書かれている数の積を X とする。

(1) $X=1$ となる確率を求めよ。 $\frac{1}{210}$

(2) $X=72$，$X=48$，$X=24$ となる確率をそれぞれ求めよ。 $\frac{1}{170}$, $\frac{1}{35}$, $\frac{13}{105}$

(3) X が3の倍数であるが8の倍数でない確率を求めよ。 $\frac{1}{2}$

（配点　20）

（選択問題は次ページに続く。）

6 4桁の自然数 N があり，N の千の位の数は 1，百の位の数は a，十の位の数は 1，一の位の数は b である。

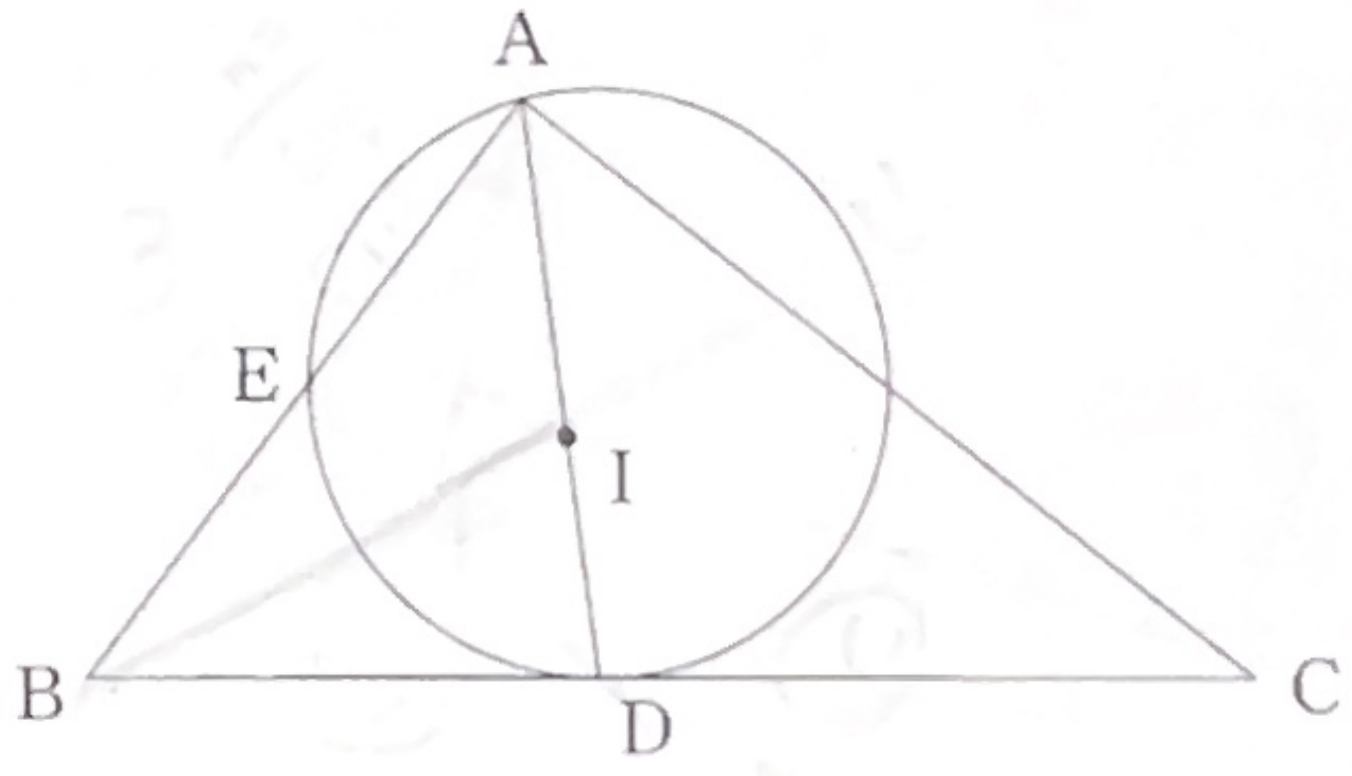
(1) N が 9 の倍数であるとき，$a+b$ の値をすべて求めよ。 7, 16

(2) N が 45 の倍数であるとき，N をすべて求めよ。 1215, 1710

(3) (2)で求めた N のうち，最小のものを M とする。M 以下で，M との最大公約数が 9 となるような自然数の個数を求めよ。 72コ

(配点　20)

7 AB＝3，BC＝5，CA＝4 である △ABC がある。∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とし，△ABC の内心を I とする。また，点 D で辺 BC に接して点 A を通る円と辺 AB の交点のうち，A でない方の点を E とする。



(1) 線分 BD の長さを求めよ。

(2) AI : ID を最も簡単な整数の比で表せ。また，線分 BE の長さを求めよ。

(3) 線分 BI と線分 DE の交点を F とする。$\dfrac{BF}{FI}$ の値を求めよ。また，△AFI の面積を求めよ。

(配点　20)

(1) $BD = \frac{15}{7}$,

(2) $AI : ID = 7 : 5$, $BE = \frac{75}{49}$

(3) $\frac{BF}{FI} = \frac{5}{2}$ 　 $\triangle AFI = \frac{3}{7}$