3-4-2018

2018 (4A)

数　学　Y　問　題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ～ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ 箱の中に，1から4までの数が1つずつ書かれたカードが計4枚入っている。箱の中から1枚のカードを取り出して，数を確認して箱の中に戻す作業を3回行う。

(1) 取り出されたカードに書かれた3つの数がすべて異なる確率を求めよ。

(2) 取り出されたカードに書かれた3つの数の最大値が奇数である確率を求めよ。また，取り出されたカードに書かれた3つの数の最大値が奇数であるとき，3つの数がすべて異なる条件付き確率を求めよ。

(配点　20)

(1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{10}$

$\boxed{\text{Y 2}}$ 関数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ (a は定数) があり，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ である。

(1) a の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

(1) $a=\sqrt{3}$

(2) Max 2 $\left(x=\frac{\pi}{6}\right)$

Min 1 $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$

Y 3 O を原点とする座標平面上に，放物線 $C : y=x^2$ があり，C 上の点 A $(a,\ a^2)$ における C の接線を ℓ とする。ただし，a は正の定数とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と x 軸との交点の x 座標を a を用いて表せ。また，C，ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。

(3) 点 A を通り，ℓ に垂直な直線と y 軸との交点を B とする。C，線分 AB，線分 OB で囲まれた図形の面積を S_2 とする。(2)で求めた S_1 に対し，$S_2=10S_1$ となる a の値を求めよ。

（配点　40）

(1) $\ell = y=2ax-a^2$

(2) $x=\frac{a}{2}$, $S_1 = \frac{a^3}{12}$

(3) $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Y 4 座標平面上の 3 点 $(-3,\ 2)$，$(1,\ 4)$，$(5,\ -4)$ を通る円を C_1 とする。

(1) C_1 の中心の座標と半径を求めよ。

(2) C_1 の接線で傾きが $-\frac{3}{4}$ であるもののうち，y 切片が正であるものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

(3) (2)のとき，C_1 の中心を通り，y 軸および ℓ に接する円を C_2 とする。C_2 の方程式を求めよ。

（配点　40）

(1) 中心 $(1,-1)$ 半径 5

(2) $\ell : y=-\frac{3}{4}x+6$

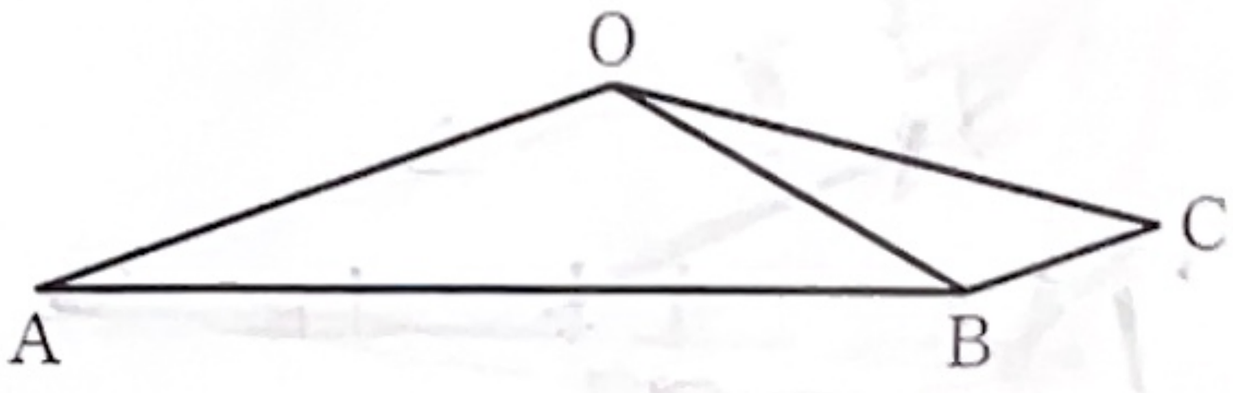
(3) C_2 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$

$(x-5)^2+(y+4)^2=25$

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合(P.10 ～ 11)】	$\boxed{\text{Y5}}$ ～ $\boxed{\text{Y7}}$ の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.12 ～ 13)】	$\boxed{\text{Y7}}$ ～ $\boxed{\text{Y10}}$ の4題中2題を解答せよ。

Y7 右の図のように，OA＝3，OB＝2，BC＝1，$\cos\angle AOB=-\frac{2}{3}$，OA∥CB である台形OABC がある。線分ABを2:1に内分する点をD，線分OCの中点をEとし，直線DEと直線OAの交点をFとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 点Gを $\overrightarrow{DG}=k\overrightarrow{DE}$（$k$は実数）を満たす点とする。$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，kを用いて表せ。また，点Gが点Fに一致するとき，kの値を求めよ。

(3) 点Hを $\overrightarrow{OH}=t\vec{b}$（$t$は0でない実数）を満たす点とする。$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{CH}$ であるとき，tの値を求めよ。また，このとき△AFHの面積を求めよ。 （配点 40）

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$

(2) $\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}k\right)\vec{b}$，$k=4$

(3) $t=\frac{4}{3}$，$\triangle AFH=\frac{32\sqrt{5}}{9}$

Y8 Oを原点とする座標平面上に，焦点の1つが点$(\sqrt{2},\ 0)$である楕円 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）がある。

(1) aの値を求めよ。

(2) 点A$(0,\ 2)$からCに異なる2つの接線ℓ_1，ℓ_2を引く。ℓ_1，ℓ_2の方程式を求めよ。ただし，(ℓ_1の傾き)＞(ℓ_2の傾き）とする。

(3) 点PがCの$y<0$の部分を動くとする。(2)で求めたℓ_1，ℓ_2に対して，点Pからℓ_1に引いた垂線とℓ_1との交点をH_1とし，点Pからℓ_2に引いた垂線とℓ_2との交点をH_2とする。四角形AH_1PH_2の面積が$\frac{9}{8}$となるとき，点Pの座標を求めよ。 （配点 40）

(1) $a=\sqrt{3}$ (2) $\ell_1: y=x+2$，$\ell_2: y=-x+2$

(3) $P\left(\pm\frac{3\sqrt{5}}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$

Y9 pを実数の定数とする。xの2次方程式 $x^2-2px+p^2+3=0$ の虚数解のうち，虚部が正であるものをαとし，Oを原点とする複素数平面上で，αを表す点をAとする。

(1) αをpを用いて表せ。

(2) 点Aを原点のまわりに$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転し，さらに原点からの距離を$\dfrac{1}{2}$倍にした点をB(β)とすると，βの虚部が$2\sqrt{3}$となった。このとき，pの値を求めよ。

(3) (2)のとき，△OABの外接円の周上に2点C，Dを BC＝BD，∠CBD＝$\dfrac{\pi}{6}$ となるようにとる。2点C，Dを表す複素数を求めよ。ただし，3点B，C，Dはこの順に反時計回りにあるものとする。

（配点　40）

(1) $\alpha = p+\sqrt{3}i$

(2) $p=7$

(3) $C = \dfrac{\sqrt{3}+7}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}i$, $D = \dfrac{4\sqrt{3}+7}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}i$

Y10 数列$\{a_n\}$は $a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n-3$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を満たしている。また，数列$\{b_n\}$は $b_1=b$ (bは定数)，$b_{n+1}=b_n+a_n-3$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を満たしている。

(1) a_nをnを用いて表せ。

(2) b_nをn，bを用いて表せ。

(3) rを正の数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{r^n}=1$ であるとき，rの値を求めよ。さらに，このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{r^{2k}}=3$ となるbの値を求めよ。

（配点　40）

(1) $a_n = 2^n+3$

(2) $b_n = 2^n-2+b$.

(3) $r=2$, $b=8$.