

数 学 問 題

2016
1-1-2016
(100 分)

【必答問題】 次の **1**, **2**, **3** は全問解答せよ。

1 次の を正しくうめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $(2-\sqrt{3})^2+4(1+\sqrt{3})$ を展開し、簡単にすると となる。

(2) x^4-2x^2-8 を因数分解すると となる。

(3) 不等式 $\frac{x}{2}+\frac{2x-1}{5}\geq\frac{5x+4}{3}$ の解は である。

(4) 次の にあてはまるものを、下の **1**~**4** のうちから一つ選べ。

x は実数とする。 $x^2=9$ であることは、 $x=3$ であるための 。

1 必要十分条件である

2 必要条件であるが、十分条件ではない

3 十分条件であるが、必要条件ではない

4 必要条件でも十分条件でもない

(5) 2 次関数 $f(x)=x^2-6x+a$ の $0\leq x\leq 2$ における最小値が 9 であるとき、定数 a の値は である。 (配点 20)

2 実数 x, y が、 $x^2+y^2=16$, $xy=2$ を満たしている。ただし、 $x>y>0$ とする。

(1) $(x+y)^2$ の値を求めよ。また、 $x+y$ の値を求めよ。

(2) $x-y$ の値を求めよ。また、 $\frac{1}{x}$ の値を求めよ。

(3) $m\leq\frac{x}{2}+\frac{1}{x}<m+1$, $n\leq x+\frac{2}{x}-\sqrt{3}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)<n+1$ を満たす整数 m, n の値をそれぞれ求めよ。 (配点 20)

3 2次関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 1$ がある。ただし、 a は正の定数とする。

- (1) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。
- (2) p を $0 < p < 2$ を満たす定数とする。 $p \leq x \leq 2p+1$ における $f(x)$ の最小値を m とおく。
 m を a と p を用いて表せ。
- (3) (2)のとき、 $p \leq x \leq 2p+1$ における $f(x)$ の最大値を M とおく。 $M - m = 2a$ となるような p の値を求めよ。

(配点 20)

【選択問題】 次の **4**, **5**, **6**, **7**, **8** のうちから2題を選んで解答せよ。

4 2つの2次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 2x^2 - ax + a - 1$ がある。ただし、 a は定数とする。

- (1) 2次不等式 $f(x) < 0$ を解け。
- (2) $y = g(x)$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (3) $y = g(x)$ のグラフが、(1)で求めた x の値の範囲において、 x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(配点 20)

5 $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$ の $\triangle ABC$ がある。

- (1) 辺 BC の長さを求めよ。
- (2) 点 D を直線 BC に関して点 A と反対側に、 $BD = 2CD$, $\angle BDC = 120^\circ$ となるようにとる。このとき、線分 CD の長さを求めよ。
- (3) (2)のとき、四角形 $ABDC$ の面積を求めよ。また、 $\triangle ABD$ の面積を求めよ。

(配点 20)

(選択問題は次ページに続く。)

6 大人3人、子ども4人の合計7人がいる。また、A、B、Cの3つの部屋がある。

- (1) 大人3人をA、B、Cの3部屋に1人ずつ入れる方法は全部で何通りあるか。
- (2) 大人3人を3部屋に1人ずつ、子どもは4人とも同じ部屋に入れる方法は全部で何通りあるか。また、大人3人を3部屋に1人ずつ、子ども4人はそれぞれ3部屋のいずれかに入れる方法は全部で何通りあるか。ただし、子どもが入らない部屋があってもよいものとする。
- (3) 子どもが1人増えて5人となり、合計8人となった。大人3人を3部屋に1人ずつ、子ども5人を3人と2人に分けて2部屋に入れる方法は全部で何通りあるか。また、この8人をどの部屋にも大人も子どももいるように入れる方法は全部で何通りあるか。

(配点 20)

7 整数 x 、 y が、等式 $3x+7y=-1$ ……①を満たしている。

- (1) x を1桁の自然数とする。このとき、①を満たす整数 x 、 y の組を1組求めよ。
- (2) ①を満たす整数 x 、 y の組をすべて求めよ。また、 $2x+3y$ の値が2桁の自然数となるときの、 $2x+3y$ の最大値 M の値を求めよ。
- (3) (2)で求めた M について、自然数 a 、 b が、等式 $2ab+a-2b-25=M$ を満たしている。このとき、自然数 a 、 b の組をすべて求めよ。

(配点 20)

8 右の図のように、 $AB=4$ 、 $BC=3$ 、 $CA=2$ の $\triangle ABC$ があり、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D 、 $\triangle ABC$ の面積を S とする。

- (1) 線分 BD の長さを求めよ。
- (2) 3点 A 、 C 、 D を通る円と辺 AB との交点のうち、 B でない方を E とする。線分 AE の長さを求めよ。
また、 $\triangle BDE$ の面積を S を用いて表せ。
- (3) (2)のとき、線分 CE と線分 AD の交点を F 、線分 BF と線分 DE の交点を G とする。
 $BG:GF$ を最も簡単な整数の比で表せ。また、 $\triangle EFG$ の面積を S を用いて表せ。

(配点 20)

