3-4-2015 2015 (4B)

数 学 Y 問 題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ~ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ 座標平面上に，円 $C: x^2+y^2-6x-8y+15=0$ がある。円 C と y 軸との交点を $\mathrm{P}(0,\ p)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$（ただし，$p>q$）とする。

(1) p，q の値をそれぞれ求めよ。また，円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 点Pにおける円 C の接線を l とする。直線 l の方程式を求めよ。また，円 C の中心をAとし，点Aに関して点Qと対称な点をRとする。点Rと直線 l の距離を求めよ。

（配点 20）

(1) $p=5$, $q=3$, 中心 $(3,4)$ 半径 $\sqrt{10}$

(2) l: $3x-y+5=0$,

$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{\text{Y 2}}$ a を定数とする。関数 $f(x)=\log_2 x+\log_2(10-x)+a$ があり，$f(2)=0$ を満たしている。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(x) \leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

（配点 20）

(1) $a=-4$

(2) $0<x\leqq 2$, $8\leqq x<10$

Y3 2つの箱A，Bがある。Aの箱には3，4，5の数が書かれたカードが各1枚ずつ計3枚，Bの箱には1，2，3，4，5，6，7の数が書かれたカードが各1枚ずつ計7枚入っている。Aの箱から1枚，Bの箱から2枚，計3枚のカードを取り出す。

(1) 3枚のカードに書かれた数の積が奇数である確率を求めよ。

(2) 3枚のカードに書かれた数の和が奇数である確率を求めよ。

(3) 3枚のカードに書かれた数の和が奇数であったとき，その3枚のカードに書かれた数の中で最大の数が5である条件付き確率を求めよ。

（配点　40）

(1) $\frac{4}{21}$

(2) $\frac{10}{21}$

(3) $\frac{4}{15}$

Y4 座標平面上に，放物線 $C: y=x^2-3x+3$ がある。放物線 C 上の点 A(2，1) を通り，点Aにおける C の接線と垂直である直線を l とする。また，直線 l と放物線 C で囲まれた領域を D_1，放物線 C と2直線 l および $x=3$ で囲まれた領域を D_2 とし，領域 D_1 と領域 D_2 の和集合 $D_1 \cup D_2$，すなわち領域 D_1 と領域 D_2 をあわせた領域を D とする。さらに，$0 \leqq t \leqq 2$ である t に対して，領域 D のうち2直線 $x=t$，$x=t+1$ にはさまれる図形の面積を S とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) S を最小にする t の値を求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。

（配点　40）

(1) l: $y=-x+3$

(2) $S=\frac{2}{3}t^3-t^2-t+2$

(3) $t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ で $S=\frac{8-3\sqrt{3}}{2}$

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合（P.8 ～ 9）】	$\boxed{\text{Y5}}$ ～ $\boxed{\text{Y7}}$ の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.10 ～ 11）】	$\boxed{\text{Y7}}$ ～ $\boxed{\text{Y10}}$ の4題中2題を解答せよ。

$\boxed{\text{Y7}}$ △OABにおいて，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{6}$ である。△OABの重心をGとし，点Gから直線OAに引いた垂線と直線OAの交点をHとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(3) 辺OBを1:4に内分する点をPとし，線分APと線分GHの交点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（配点　40）

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

(2) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$

(3) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{15}\vec{b}$

$\boxed{\text{Y8}}$ 焦点F(1, 0)，準線 $x=-1$ である放物線を C とする。準線上の点P$(-1,\ t)$ を通り傾きが m の直線を l とする。ただし，t は実数とする。

(1) 放物線 C の方程式を求めよ。

(2) 直線 l が放物線 C に接する。このときの直線 l の傾き m を α，β とすると，$\alpha\beta=-1$ であることを示せ。

(3) (2)のときの接点をA, Bとする。2つの線分AF, BFの長さの和について，AF+BF＝6であるとき，t の値を求めよ。

（配点　40）

(1) $C:\ y^2=4x$

(2) 略.

(3) $t=\pm\sqrt{2}$

Y9 $\alpha=1+i$ とする。O を原点とする複素数平面上で，α，$\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ A，B とする。また，直線 AB と実軸との交点を C とする。ただし，i を虚数単位とする。

(1) $|\alpha|$，$\arg\alpha$ を求めよ。ただし，$0<\arg\alpha<\pi$ とする。

(2) 線分 OC の長さを求めよ。

(3) 点 A を点 C の周りに $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ だけ回転した点を D とする。△OCD の面積が $\dfrac{1}{3}$ となるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。また，このとき，点 D を表す複素数を求めよ。

（配点　40）

(1) $|\alpha|=\sqrt{2}$, $\arg\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $OC=\dfrac{2}{3}$,

(3) $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, $D=\dfrac{1}{3}+i$

Y10 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_5=12$，$a_{10}=27$ である。また，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=1\cdot a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\cdots\cdots+n\cdot a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定める。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{b_k}$ を求めよ。

（配点　40）

(1) $a_n=3(n-1)$

(2) $b_n=(n-1)n(n+1)$

(3) $\dfrac{3}{4}$