2015 1A

13-1-2015

数　学　問　題

(100 分)

【必答問題】　次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)　$\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}$ の分母を有理化して簡単にすると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2)　不等式 $\dfrac{2x-7}{3}<\dfrac{5x-6}{4}$ の解は $\boxed{(イ)}$ である。

(3)　$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とし，U の部分集合を A，B とする。
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9\}$ のとき，集合 $\overline{A}\cap B=\left\{\boxed{(ウ)}\right\}$ である。
ただし，$\overline{A}$ は A の補集合とする。

(4)　グラフが点 $(1,\ 3)$ を頂点とし，かつ点 $(2,\ 5)$ を通る放物線となるような 2 次関数は，
$y=\boxed{(エ)}$ である。

(5)　2 次関数 $y=x^2-6x+k-2$（k は定数）のグラフが x 軸と共有点をもたないような k の値の範囲は $\boxed{(オ)}$ である。

（配点　20）

$\boxed{2}$　2 つの不等式

$$x^2+5x+4\leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(a-2)(x^2-a^2)>0 \quad \cdots\cdots ②$$

がある。ただし，a は正の定数とする。

(1)　不等式①を解け。

(2)　$a=3$ のとき，不等式②を解け。また，$a=\sqrt{3}$ のとき，不等式②を解け。

(3)　a は 2 でない正の定数とする。不等式①，②をともに満たす x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

（配点　20）

$\boxed{3}$ 2つの2次関数 $f(x)=-x^2+4ax-3a^2$, $g(x)=x^2-10x+27$ がある。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f(x)$ の最大値を a を用いて表せ。

(2) $y=f(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さが10以下であるような a の値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の値の範囲で変化するとき，$f(x) \leqq 0$ を満たす x の値の範囲における $g(x)$ の最小値が3であるような a の値を求めよ。

(配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{4}$ AB＝2, AC＝1, $\cos\angle\mathrm{BAC}=-\dfrac{1}{4}$ の △ABC がある。

(1) 辺BCの長さを求めよ。

(2) △ABC の外接円の半径を求めよ。また，$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

(3) △ABC の外接円の点 A を含まない弧 BC 上に，点 D を $\angle\mathrm{BAD}=90^\circ$ となるようにとる。辺 BC と線分 AD の交点を E とするとき，$\sin\angle\mathrm{BED}$ の値を求めよ。また，△BDE の外接円の半径を求めよ。

(配点 20)

$\boxed{5}$ 1個のさいころを投げ，次の規則に従って赤玉，白玉，青玉を左から横一列に並べていく。

【規則】

さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは赤玉を2個，4，5のときは白玉を1個，6のときは青玉を1個並べる。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，すでにある列の右側に並べていく。

例えば，さいころを3回投げ，その出た目が順に2，5，6であったとすると，左から順に赤赤白青の玉が並び，玉の個数は4個で，左から4番目の玉は青玉である。

(1) さいころを3回投げたとき，赤玉が6個並んでいる確率を求めよ。

(2) さいころを2回投げたとき，並んだ玉の個数が3個で，赤玉が2個，白玉が1個並んでいる確率を求めよ。また，さいころを3回投げたとき，並んだ玉の個数が3個で，白玉が2個，青玉が1個並んでいる確率を求めよ。

(3) さいころを4回投げたとき，並んだ玉の個数が5個で，左から4番目の玉が赤玉である確率を求めよ。

(配点 20)

(問題は次ページに続く。)

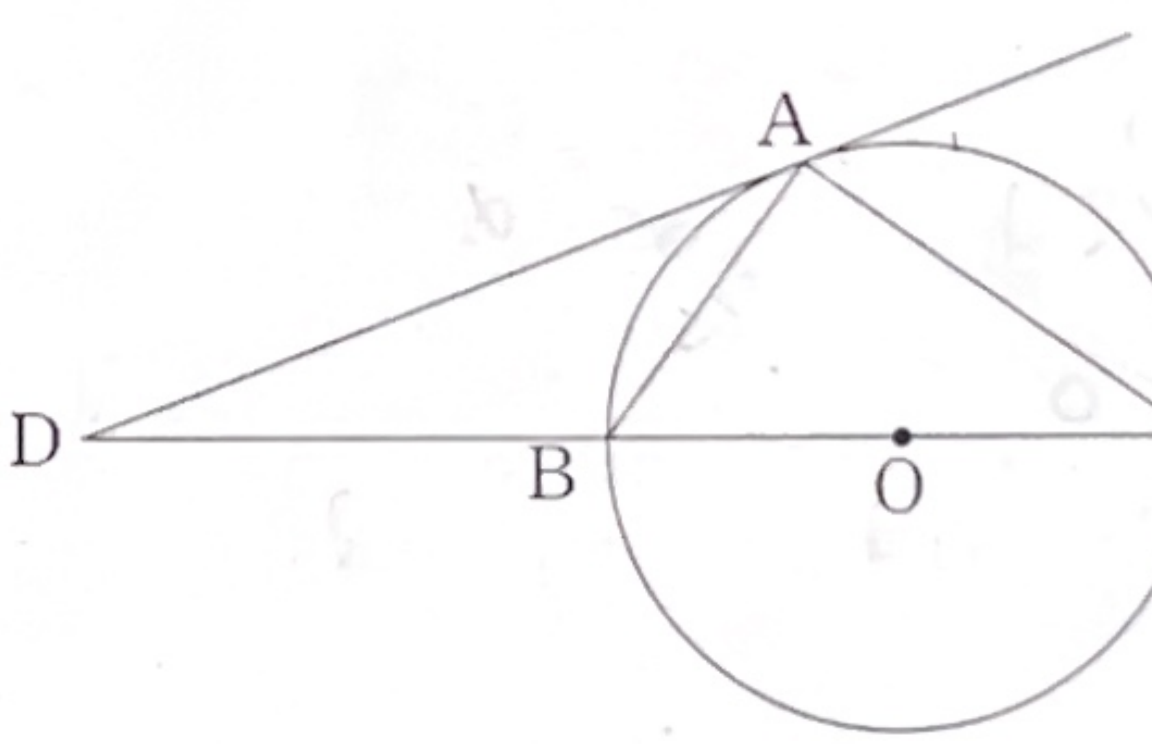
6 2つの自然数 m, n があり，m, n の最大公約数を G，最小公倍数を L とする。

(1) $m=63$, $n=105$ とする。G と L の値をそれぞれ求めよ。

(2) m, n は2桁の自然数で，$m>n$ であるとする。$G=13$, $L=455$ のとき，m と n の値をそれぞれ求めよ。

(3) m と n を(2)で求めた値とする。$mx+ny=13$ を満たす整数 x, y の組のうち，$\sqrt{x+y}$ の値が30以下の整数となるような x, y の組は全部で何組あるか求めよ。 （配点 20）

7 右の図のように，$BC=6$ である $\triangle ABC$ があり，辺BCは $\triangle ABC$ の外接円Oの直径である。点Aにおける円Oの接線と直線BCとの交点をDとすると，$BD=6$ となった。



(1) 線分ADの長さを求めよ。

(2) $\dfrac{AC}{AB}$ の値を求めよ。また，辺ACの長さを求めよ。

(3) 点Dを通り直線BCに垂直な直線と直線ACとの交点をEとする。線分CEの長さを求めよ。また，$\angle BCA$ の二等分線と線分AD, DEとの交点をそれぞれF, Gとする。$\dfrac{CF}{FG}$ の値を求めよ。 （配点 20）