

2018 1A

## 数 学 B 問 題

(120 分)

【必答問題】 数学B受験者は **B1**, **B2**, **B3**, **B4** を全問解答せよ。

**B1** 2 次関数  $f(x) = x^2 - 4ax - 3a - 2$  がある。ただし、 $a$  は  $0 < a < 1$  を満たす定数とする。

- (1)  $y = f(x)$  のグラフの頂点の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $-2 \leq x \leq 2$  における  $f(x)$  の最大値を  $M$ , 最小値を  $m$  とするとき,  $M, m$  を  $a$  を用いて表せ。また,  $M - m = 8$  を満たす  $a$  の値を求めよ。 (配点 20)

**B2**  $\alpha, \beta$  は  $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \sin \beta = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  を満たしている。

- (1)  $\sin \alpha, \cos \beta$  の値をそれぞれ求めよ。また,  $\sin 2\alpha$  の値を求めよ。
- (2)  $\sin(2\alpha + \beta)$  の値を求めよ。 (配点 20)



**B3** 立方体のさいころに 1, -1, \* の目が 2 つずつ書かれている。点 P は最初、数直線上の原点 O にある。このさいころを投げて、以下のルールに従い点 P を数直線上で移動させる。

【ルール】 1 の目が出たときは、点 P を正の向きに 1 だけ移動させる。

-1 の目が出たときは、点 P を負の向きに 1 だけ移動させる。

\* の目が出たときは、点 P を原点 O に移動させる。

- (1) さいころを 2 回投げたとき、点 P の座標が 2 である確率と 1 である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) さいころを 3 回投げたとき、点 P の座標が 2 である確率と 1 である確率をそれぞれ求めよ。
- (3) さいころを 3 回投げたとき、点 P の座標が負となる確率を求めよ。また、さいころを 3 回投げて点 P の座標が負であるとき、2 回目に \* が出ている条件付き確率を求めよ。

(配点 40)

**B4** 座標平面上において、原点 O を中心とする半径 5 の円を  $C_1$  とし、円  $C_1$  上の点 A (3, 4) における円  $C_1$  の接線を  $\ell$  とする。また、円  $C_1$  と点 A で外接する半径 5 の円を  $C_2$  とする。

- (1) 接線  $\ell$  の方程式を求めよ。また、円  $C_2$  の方程式を求めよ。
- (2) 円  $C_1$  と円  $C_2$  の両方に接する接線は、直線  $\ell$  を含めて 3 本ある。直線  $\ell$  以外の接線のうち  $y$  切片が正である接線  $m$  の方程式を求めよ。
- (3) (2) の接線  $m$  と円  $C_1$  との接点を P, 円  $C_2$  との接点を Q とする。 $\triangle OPQ$  を原点 O の周りに 1 回転させる。このとき、辺 PQ が通過する領域のうち、 $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  を満たす部分を  $D$  とする。領域  $D$  内の点  $(x, y)$  に対して、 $x+y$  の最大値および最小値を求めよ。

(配点 40)



【選択問題】 数学B受験者は、次の **B5** ~ **B8** のうちから2題を選んで解答せよ。

**B5** 等差数列  $\{a_n\}$ :  $94, x, 82, \dots$  がある。また、数列  $\{b_n\}$  は  $b_1 = 4, b_{n+1} = 2b_n - 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たしている。

(1)  $x$  の値を求めよ。また、数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(2) 数列  $\{b_n\}$  の一般項  $b_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(3) 数列  $\{c_n\}$  は  $\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{c_3}{a_3} + \dots + \frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{c_n}{a_n} = b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たしている。

このとき、 $c_1$  を求めよ。また、一般項  $c_n$  を  $n$  を用いて表せ。 (配点 40)

**B6** 直方体  $OADB-CEFG$  があり、 $OA = OB = 1, OC = 2$ , 辺  $EF$  の中点を  $M$  とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とする。

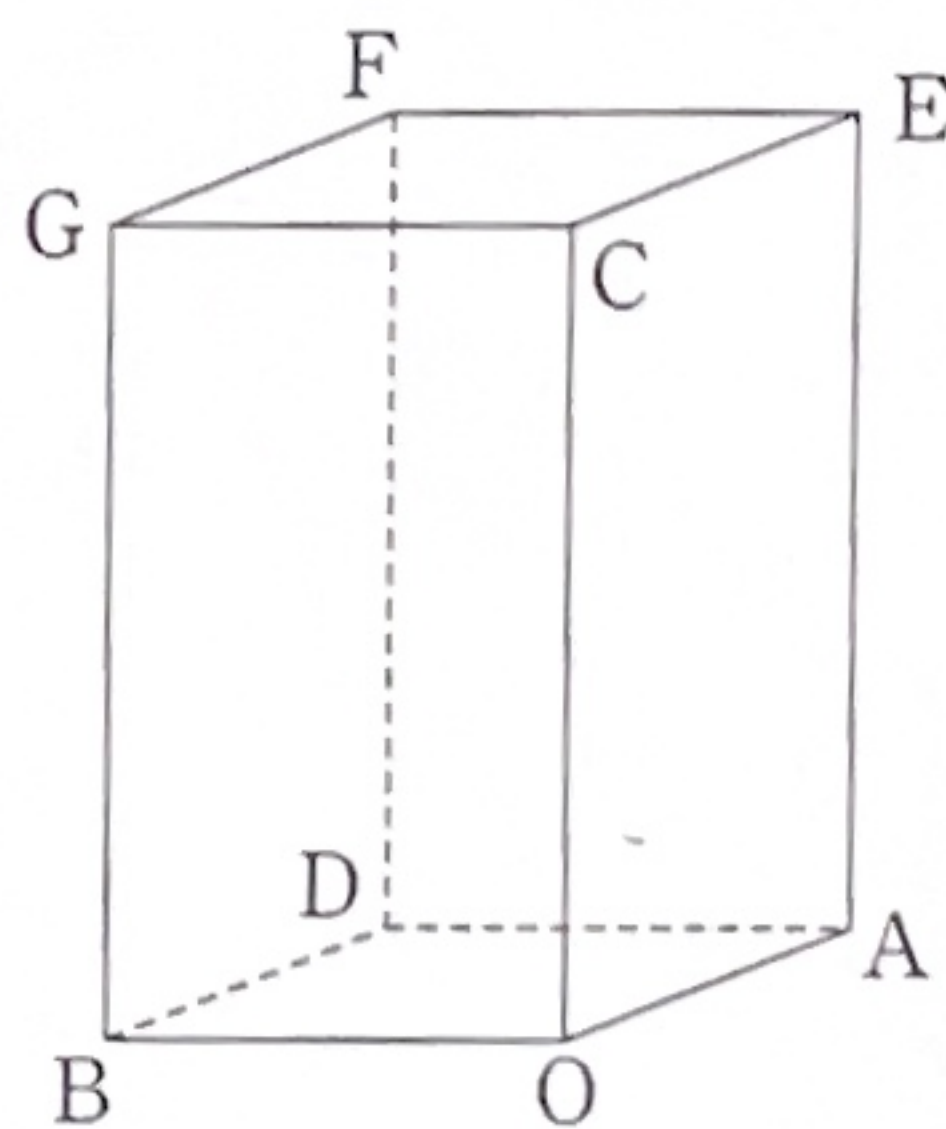
(1)  $\overrightarrow{OM}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ。また、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。

(2) 平面  $ABC$  上に点  $P$  をとり、 $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$  ( $s, t$  は実数) とする。このとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $s, t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ。

また、点  $P$  が線分  $OM$  上にあるとき、 $s, t$  の値をそれぞれ求めよ。

(3) (2)の点  $P$  が線分  $OM$  上にあるとき、頂点  $B$  から線分  $PD$  に垂線を引き交点を  $H$  とする。

$\overrightarrow{OH}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ。 (配点 40)





**B7** 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  ( $a, b$  は実数) は  $f(2) = 3, f'(3) = 0$  を満たしている。

- (1)  $a, b$  の値を求めよ。
- (2)  $-1 \leq x \leq 4$  における  $f(x)$  の最大値, 最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ。
- (3)  $x$  についての 3 次方程式  $x^3 + ax^2 + bx + 1 = t$  が異なる 3 つの実数解をもつとき, 定数  $t$  のとり得る値の範囲を求めよ。またそのとき, 3 つの解の整数部分を  $l, m, n$  とする。  
 $l + m + n = 4$  となるような  $t$  の値の範囲を求めよ。ただし, 実数  $p$  の整数部分とは  $k \leq p < k + 1$  ( $k$  は整数) を満たす  $k$  の値である。

(配点 40)

**B8** 関数  $y = (\log_2 2x) \left( \log_4 \frac{x}{8} \right)$  がある。

- (1)  $x = 32, x = 2$  のとき,  $y$  の値をそれぞれ求めよ。
- (2)  $t = \log_2 x$  とするとき,  $\log_2 2x, \log_4 \frac{x}{8}$  をそれぞれ  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $a$  は  $a > \frac{1}{8}$  を満たす定数とする。 $\frac{1}{8} \leq x \leq a$  における  $y$  の最小値が  $-\frac{15}{8}$  であるとき,  $a$  の値を求めよ。

(配点 40)