

数 学 問 題

2017年(1月)
1-1-2017
(100分)

【必答問題】 次の **1**, **2**, **3** は全問解答せよ。

1 次の を正しくうめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $a = 3 - 2\sqrt{2}$ とする。 $\frac{1}{a}$ の分母を有理化して簡単にすると となる。

また、 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ を計算すると となる。

(2) 2 次関数 $y = x^2 - 8x + k$ (k は定数) の $2 \leq x \leq 5$ における最小値が -6 であるとき、

$k =$ であり、 y の最大値は である。

(3) 不等式 $\frac{5-x}{6} \geq 3 - \frac{x}{2}$ の解は である。

(4) 次の にあてはまるものを、下の **1** ~ **4** のうちから一つ選べ。

a, b は実数とする。 $a > 1$ かつ $b > 1$ であることは $ab > 1$ であるための 。

- 1 必要十分条件である
- 2 必要条件であるが、十分条件ではない
- 3 十分条件であるが、必要条件ではない
- 4 必要条件でも十分条件でもない

(配点 20)

2 2 つの不等式

$$x^2 - (4+a)x + 4a \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|2x-7| \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

がある。ただし、 a は定数とする。

(1) $a = 9$ のとき、不等式 $\textcircled{1}$ を解け。

(2) 不等式 $\textcircled{2}$ を解け。また、 $a < 1$ のとき、不等式 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす x の値の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

(配点 20)

3 2次関数 $f(x) = 2x^2 - 4ax + 5$ があり、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に $-5a - 2$ だけ平行移動したグラフを表す 2 次関数を $y = g(x)$ とする。ただし、 a は正の定数とする。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。
- (2) $y = g(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。また、 $y = g(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分において 1 つずつ共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) $y = g(x)$ のグラフが x 軸の $0 < x < 3$ の部分とただ 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。 (配点 20)

【選択問題】 次の 4, 5, 6, 7 のうちから 2 題を選んで解答せよ。

4 $AC = 8$, $BC = 7$ の鋭角三角形 ABC があり、その外接円の半径は $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ である。

- (1) $\sin B$ の値を求めよ。
- (2) $\cos B$ の値を求めよ。また、辺 AB の長さを求めよ。
- (3) 平面 ABC 上にない点 O から平面 ABC に下ろした垂線と平面 ABC との交点を H とする。 $\angle OBH = 45^\circ$, $\angle OCH = 30^\circ$, $\angle BHC = 150^\circ$ であるとき、線分 OH の長さを求めよ。また、四面体 $OABC$ の体積を求めよ。 (配点 20)

5 A の袋には、①, ③, ③, ⑥, ⑥の 5 個の球が入っており、 B の袋には、①, ②, ④, ④の 4 個の球が入っている。 A , B の袋から球を 1 個ずつ取り出し、取り出された球に書かれた 2 つの数の最大値を記録し、球をそれぞれの袋に戻す。この試行を繰り返す。

- (1) 1 回の試行で 6 が記録される確率を求めよ。
- (2) 3 回の試行で 1 が 1 回、6 が 2 回記録される確率を求めよ。
- (3) 3 回の試行で記録された 3 つの数の積が 36 となる確率を求めよ。 (配点 20)

(問題は次ページに続く。)

6 2つの自然数 x, y があり, $x > y$ とする。また, x, y の最大公約数を G とする。

- (1) $x = 437, y = 323$ とする。このとき, G の値を求めよ。
- (2) $x + y = 200$ で, G が 2 桁の奇数となるような G の値を求めよ。また, そのときの自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。
- (3) $ab - 4a + 6b = 0$ となるような自然数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。また, x, y の最小公倍数を L とする。 $4x - 6y = L$ を満たすとき, x, y の値をそれぞれ G を用いて表せ。

(配点 20)

7 右の図のように, $AB = 3, BC = 5, \angle ABD = \angle CBD$ の四角形 $ABCD$ があり, 辺 BC を直径とする円に内接している。また, 対角線 AC, BD の交点を E とする。

- (1) 線分 AE の長さを求めよ。
- (2) 線分 BE の長さを求めよ。また, 線分 DE の長さを求めよ。
- (3) 辺 AD の中点を M とし, 線分 CM と線分 BD の交点を

P とする。このとき, $\frac{DP}{PE}$ の値を求めよ。また, $\triangle DMP$ の面積を求めよ。 (配点 20)

