3-7-2015

2015 (7A)

数 学 Z 問 題

(120分)

【選択問題】 次の $\boxed{Z1}$ ～ $\boxed{Z3}$ の3題の中から2題選択し，解答せよ。

$\boxed{Z1}$ 座標平面上で，放物線 $y=x^2-2x-3$ を C とし，直線 $y=2x+2$ を ℓ とする。放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形を D とする。

(1) 図形 D の面積を求めよ。

(2) 図形 D のうち，直線 $y=5$ の上側にある部分の面積を求めよ。 (配点 20)

$\boxed{Z2}$ 数直線上にある2点P，Qは，それぞれ原点，4を表す点を出発点とし，次の規則によって移動する。

【規則】

1個のさいころを投げて

[1] 1，2の目が出たとき，Pは正の向きに2だけ，Qは負の向きに2だけ移動する。

[2] 3の目が出たとき，Pは正の向きに1だけ，Qは負の向きに1だけ移動する。

[3] 4，5，6の目が出たとき，P，Qはともに移動しない。

(1) さいころを2回投げたとき，PとQの座標が等しくなる確率を求めよ。

(2) さいころを3回投げたとき，PとQの座標をそれぞれ p，q とする。$p \geqq q$ となる確率を求めよ。 (配点 20)

$\boxed{Z3}$ m，n，Nを自然数とし，等式 $m^2(n-1)=N$ ……① を考える。

(1) $N=4$ とする。等式①を満たす m，n の組をすべて求めよ。

(2) $N=600$ とする。等式①を満たす m，n の組のうち，m と n が互いに素である組をすべて求めよ。 (配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z4}}$，$\boxed{\text{Z5}}$ から1題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z4}}$ kは正の定数とする。関数 $f(x)=kxe^{-\frac{x^2}{2}}$ がある。ただし，eは自然対数の底である。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の極大値，極小値をkを用いて表せ。また，極大値と極小値の差が $2\sqrt{e}$ であるとき，定数kの値を求めよ。

(3) kを(2)で求めた値とし，aを定数とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るようなtが $0\leqq t\leqq 2$ に2個存在する。このとき，aのとり得る値の範囲を求めよ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z5}}$ 方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解のうち，虚部が正であるものをαとする。また，複素数βは等式 $\alpha^{10}(\beta+2i)+(2\alpha-\beta)=0$ を満たしている。ただし，iは虚数単位である。

(1) αを極形式で表せ。ただし，偏角θの範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) α^{10} を求めよ。また，βを求めよ。

(3) tを1でない実数とする。複素数平面上に3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(t\beta)$ をとり，点Bを点Cの周りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点をB'とする。3点A，B'，Cが一直線上にあるとき，tの値を求めよ。

（配点　40）

【必答問題】 $\boxed{\text{Z6}}$ ～ $\boxed{\text{Z8}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Z6}}$ 平面上に $\triangle\mathrm{OAB}$ があり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=6$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{1}{4}$ である。また，点Pは $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{0}$ を満たしている。直線OPと直線ABとの交点をCとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分OCの長さを求めよ。

(3) 点Pを通り直線OCに垂直な直線を m とし，点Bから直線 m に引いた垂線と直線 m との交点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z7}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=2$ である。辺AC上に $\angle\mathrm{ABX}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ となるように点Xをとり，直線BXを引く。

また，点A，点Cから直線BXに垂線を下ろし，直線BXとの交点をそれぞれP，Qとする。さらに，$\triangle\mathrm{ABP}$ と $\triangle\mathrm{BCQ}$ の面積の和を S とする。

(1) 線分AP，BPの長さを θ を用いて表せ。また，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積を $\sin 2\theta$ を用いて表せ。

(2) S を $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S の最大値を求めよ。また，そのときの $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z8}}$ a を実数の定数とする。

$$a_1=a,\ \ a_{n+1}=3a_n-2^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) a_n を a，n を用いて表せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}$ であるとき，a の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とし，p を正の定数とする。数列 $\left\{\dfrac{S_n}{p^n}\right\}$ の極限を調べよ。

(配点　40)