3-4-2015　2015 (4B)

数　学　Y　問　題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ～ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ 座標平面上に，円 $C : x^2+y^2-6x-8y+15=0$ がある。円 C と y 軸との交点を $\mathrm{P}(0,\ p)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$（ただし，$p>q$）とする。

(1) p，q の値をそれぞれ求めよ。また，円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 点Pにおける円 C の接線を l とする。直線 l の方程式を求めよ。また，円 C の中心をAとし，点Aに関して点Qと対称な点をRとする。点Rと直線 l の距離を求めよ。

(配点　20)

$\boxed{\text{Y 2}}$ a を定数とする。関数 $f(x)=\log_2 x+\log_2(10-x)+a$ があり，$f(2)=0$ を満たしている。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(配点　20)

Y3 2つの箱A，Bがある。Aの箱には3，4，5の数が書かれたカードが各1枚ずつ計3枚，Bの箱には1，2，3，4，5，6，7の数が書かれたカードが各1枚ずつ計7枚入っている。Aの箱から1枚，Bの箱から2枚，計3枚のカードを取り出す。

(1) 3枚のカードに書かれた数の積が奇数である確率を求めよ。

(2) 3枚のカードに書かれた数の和が奇数である確率を求めよ。

(3) 3枚のカードに書かれた数の和が奇数であったとき，その3枚のカードに書かれた数の中で最大の数が5である条件付き確率を求めよ。　（配点　40）

Y4 座標平面上に，放物線 $C: y=x^2-3x+3$ がある。放物線 C 上の点 A(2, 1) を通り，点Aにおける C の接線と垂直である直線を l とする。また，直線 l と放物線 C で囲まれた領域を D_1，放物線 C と2直線 l および $x=3$ で囲まれた領域を D_2 とし，領域 D_1 と領域 D_2 の和集合 $D_1 \cup D_2$，すなわち領域 D_1 と領域 D_2 をあわせた領域を D とする。さらに，$0 \leqq t \leqq 2$ である t に対して，領域 D のうち2直線 $x=t$，$x=t+1$ にはさまれる図形の面積を S とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) S を最小にする t の値を求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。　（配点　40）

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合（P.8 ～ 9)】	$\boxed{\text{Y 5}}$ ～ $\boxed{\text{Y 7}}$ の 3 題中 2 題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2 次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.10 ～ 11)】	$\boxed{\text{Y 7}}$ ～ $\boxed{\text{Y 10}}$ の 4 題中 2 題を解答せよ。

$\boxed{\text{Y 7}}$ △OAB において，OA＝2，OB＝3，$\cos\angle\text{AOB}=\dfrac{5}{6}$ である。△OAB の重心を G とし，点 G から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点を H とする。また，$\overrightarrow{\text{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\text{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\text{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\text{OH}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(3) 辺 OB を 1:4 に内分する点を P とし，線分 AP と線分 GH の交点を Q とする。$\overrightarrow{\text{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Y 8}}$ 焦点 F(1，0)，準線 $x=-1$ である放物線を C とする。準線上の点 P$(-1,\ t)$ を通り傾きが m の直線を l とする。ただし，t は実数とする。

(1) 放物線 C の方程式を求めよ。

(2) 直線 l が放物線 C に接する。このときの直線 l の傾き m を α，β とすると，$\alpha\beta=-1$ であることを示せ。

(3) (2)のときの接点を A, B とする。2 つの線分 AF, BF の長さの和について，AF＋BF＝6 であるとき，t の値を求めよ。

（配点　40）

Y9 $\alpha=1+i$ とする。Oを原点とする複素数平面上で，α，$\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれA，Bとする。また，直線ABと実軸との交点をCとする。ただし，i を虚数単位とする。

(1) $|\alpha|$，$\arg\alpha$ を求めよ。ただし，$0<\arg\alpha<\pi$ とする。

(2) 線分OCの長さを求めよ。

(3) 点Aを点Cの周りに $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ だけ回転した点をDとする。△OCDの面積が $\dfrac{1}{3}$ となるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。また，このとき，点Dを表す複素数を求めよ。

(配点　40)

Y10 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_5=12$，$a_{10}=27$ である。また，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=1\cdot a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\cdots\cdots+n\cdot a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定める。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{b_k}$ を求めよ。

(配点　40)