3-7-2017

2017 (7月)

数 学 Z 問 題

(120分)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z1}}$ ～ $\boxed{\text{Z3}}$ の３題の中から２題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z1}}$ 座標平面上に２つの円 C_1：$x^2+y^2=1$，C_2：$x^2+y^2-2ax-6y+9=0$ があり，C_1 と C_2 は点Pにおいて外接している。ただし，a は正の定数とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点Pの座標を求めよ。また，点Pにおいて２つの円 C_1，C_2 に接する直線の方程式を求めよ。

(配点 20)

$\boxed{\text{Z2}}$ 関数 $y=2\cos 2x+\cos x+a$ があり，$x=\frac{2}{3}\pi$ のとき，$y=-\frac{1}{2}$ である。ただし，a は定数とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲における関数 y の最小値を求めよ。また，このときの x の値を θ とする。$\tan\theta$ の値を求めよ。

(配点 20)

$\boxed{\text{Z3}}$ ２つの自然数 A，B $(A<B)$ の最大公約数を G，最小公倍数を L とする。

(1) $A+B=72$，$G=6$ であるときの A，B の組 $(A,\ B)$ を求めよ。

(2) $A+B=154$，L を G で割ったときの商が 28 であるとき，G の値と，このときの A，B の組 $(A,\ B)$ を求めよ。

(配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z4}}$，$\boxed{\text{Z5}}$ から1題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z4}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x-\log x}{x}$ $(x>0)$ がある。ただし，対数は自然対数である。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めて，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてもよい。

(3) a を定数とする。方程式 $ax=x-\log x$ が異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。また，この異なる2つの実数解がともに整数になるときの a の値と，そのときの解を求めよ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z5}}$ 複素数 $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ がある。ただし，i は虚数単位である。

(1) α を極形式で表せ。ただし，偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ とする。また，α^6 の値を求めよ。

(2) $z_1=2\alpha^2$，$z_2=2\alpha^6$ とする。

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=\frac{\pi}{2},\ \left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=\sqrt{3}$$

を満たす複素数 z_3 を求めよ。また，複素数平面上で，z_1，z_2，z_3 を表す点をそれぞれA，B，Cとする。△ABCの外接円の中心を表す複素数と，外接円の半径をそれぞれ求めよ。

(3) $w=\dfrac{1}{z-2\sqrt{3}i}$ とする。点 z が(2)の△ABCの外接円上を動くとき，点 w の描く図形が円であることを示せ。また，この円の中心を表す複素数と，円の半径をそれぞれ求めよ。

（配点　40）

【必答問題】 $\boxed{\text{Z6}}$ ～ $\boxed{\text{Z8}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Z6}}$ A，B，2つのライトがある。3個のさいころを同時に投げ，出た3つの目の中に，3の倍数が含まれていればAのライトを点灯させ，2の倍数が含まれていればBのライトを点灯させる。

(1) 2つのライトがいずれも点灯しない確率を求めよ。

(2) Aのライトだけが点灯する確率を求めよ。

(3) 2つのライトがともに点灯したとき，6の目が1つも出ていない条件付き確率を求めよ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z7}}$ 四面体OABCがあり，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{CA}=\sqrt{2}$ である。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の重心をGとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 線分CGの中点をMとし，直線OMと平面ABCとの交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) (2)のとき，Oを中心とする半径1の球面を S とし，直線CDと S との交点のうち，Cと異なる点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（配点　40）

$\boxed{\mathbf{Z8}}$ 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があり

$$a_1=4,\ a_{n+1}=-a_n+6 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_1=3,\ b_{n+1}=\frac{b_n}{n}+n^2+3n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を推定し，それを数学的帰納法で証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}a_k b_k$ を求めよ。

(配点　40)