

2018

2-7-2018

B2 袋の中に9個の玉①②③④⑤⑥⑦⑧⑨が入っている。また、右のように9つの枠の中に1から9の番号が1つずつ書かれたボードがある。袋から無作為に玉を1個取り出して、書かれた番号を確認し、ボードに書かれた同じ番号に○印をつける。この操作を繰り返し、○印が縦、横、ななめのいずれかに3つ並んだ時点で操作を「終了」する。ただし、各操作において取り出した玉は袋に戻さない。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- (1) 1回目に①、2回目に④、3回目に⑦を取り出して「終了」する確率を求めよ。
- (2) 3回の操作で①、④、⑦を取り出して「終了」する確率を求めよ。また、3回の操作で3回目に②を取り出して「終了」する確率を求めよ。
- (3) 3回の操作で3回目に⑤を取り出して「終了」する確率を求めよ。また、このとき、1回目に①を取り出していた条件付き確率を求めよ。(配点 20)

(1) $\frac{1}{504}$, (2) $\frac{1}{84}$, $\frac{1}{26}$, (3) $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{8}$

B3 $\cos \angle ABC = \frac{5}{6}$, $AB = 8$ である $\triangle ABC$ があり、その外接円の半径は $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ である。

ただし、 $BC > AB$ とする。

- (1) 辺 AC の長さを求めよ。 $AC = 5$
- (2) 辺 BC の長さを求めよ。 $BC = 9$
- (3) 辺 BC 上に $BD = 3$ となるような点 D をとる。さらに、点 E を直線 BC に対して点 A と反対側に $BE:CE = 2:1$, $DE = 6$ となるようにとる。このとき、線分 CE の長さと $\cos \angle BDE$ の値をそれぞれ求めよ。 $CE = 3\sqrt{2}$, $\cos \angle BDE = -\frac{3}{4}$ (配点 20)

【選択問題】 数学B受験者は、次の **B4** ~ **B8** のうちから2題を選んで解答せよ。

B4 整式 $P(x) = x^3 + 2(a+1)x^2 + 3ax - 2a$ がある。ただし、 a は実数の定数とする。

- (1) $P(-2)$ の値を求めよ。 $P(-2) = 0$
- (2) $P(x)$ を因数分解せよ。 $P(x) = (x+2)(x^2 + 2ax - a)$
- (3) 方程式 $P(x) = 0$ の解がすべて実数となるような a の値の範囲を求めよ。また、方程式 $P(x) = 0$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値と、そのときの実数解をそれぞれ求めよ。

$$a \leq -1, 0 \leq a$$

(配点 20)

$$a=0 \text{ で } x=-2, 0$$

$$a=-1 \text{ で } x=-2, 1$$

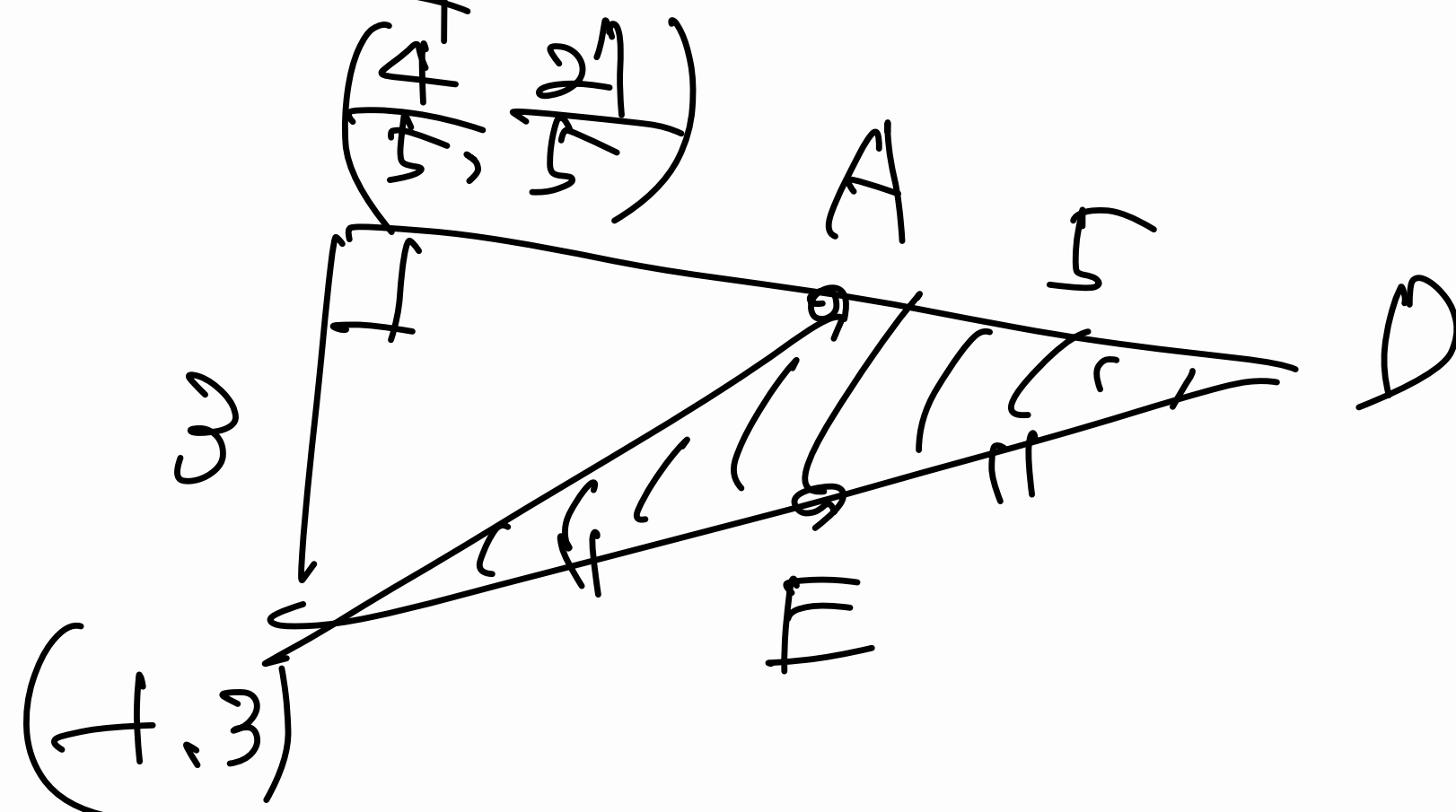
$$a=\frac{4}{5} \text{ で } x=\frac{2}{6}, \frac{2}{5}$$

B5 座標平面上に円 $K_1: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ と、直線 $\ell: 4x - 3y + a = 0$ (a は正の定数) がある。円 K_1 の中心を A とし、点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線を m とする。

- (1) 円 K_1 の中心 A の座標と半径を求めよ。 $A(4, 3), 4$
- (2) 直線 m の方程式を求めよ。また、点 A と直線 ℓ の距離を d とする。 d を a を用いて表せ。さらに、直線 ℓ が円 K_1 と接するとき、 a の値を求めよ。
- (3) (2) のとき、直線 ℓ と直線 m の交点を B 、直線 ℓ 上の x 座標が -1 の点を C 、直線 m と x 軸の交点を D とする。3 点 B, C, D を通る円 K_2 の中心を E とするとき、 E の座標を求めよ。また、 $\triangle ADE$ の面積を求めよ。 (配点 20)

$$(2) \quad 3x + 4y - 21 = 0, \quad d = \frac{7+a}{5}, \quad a = 13$$

$$(3) \quad E\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \triangle ADE = \frac{15}{4}$$



B6 関数 $y = \sin 2\theta + a \cos \theta$ がある。ただし、 a は定数とし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、 y の値を a を用いて表せ。また、 $\sin 2\theta$ を $\sin \theta$, $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (2) $a = 3$ のとき、 $y = 0$ を満たす θ の値を求めよ。
- (3) $y = 0$ を満たす θ の値が 4 個となるような a の値の範囲を求めよ。 (配点 20)

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}, \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$(2) \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$(3) \quad -2 < a < 2$$

B7 等差数列 $\{a_n\}$ があり, $a_2=8$, $a_5=26$ を満たしている。また, 初項が 3, 公比が r ($r>0$) である等比数列 $\{b_n\}$ があり, $b_2+b_3=60$ を満たしている。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。
- (2) r の値を求めよ。また, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n に対し, $T_n = S_n - S_1$ とおく。 T_n を n を用いて表せ。
- (3) (2) の T_n に対して, $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ の一の位の数をもそれぞれ $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ とする。このとき, c_{10} を求めよ。また, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を U_n とするとき, $\sum_{k=1}^{2n} c_k U_k$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を n を用いて表せ。(配点 20)

$$(1) a_n = 6n - 4$$

$$(2) r = 4, \quad T_n = 4^n - 4$$

$$(3) c_{10} = 2, \quad 2n(n+1)(4n+1)$$

B8 $OA=3$, $OB=2$, $\angle AOB=60^\circ$ の $\triangle OAB$ があり, 辺 AB を $3:4$ に内分する点を P とする。また, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

- (1) \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。また, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) 辺 OB 上に $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OB}$ (k は $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数) となる点 H をとる。 \overrightarrow{PH} を k , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。また, 直線 PH が直線 OB と垂直になるとき, k の値を求めよ。
- (3) 辺 AB を $6:1$ に内分する点を Q とする。(2) で求めた k の値における点 H に対し, 線分 PH 上に $PR:RH=s:(1-s)$ (s は $0 < s < 1$ を満たす実数) となる点 R をとるとき, \overrightarrow{OR} を s , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。さらに, 点 R が線分 OQ 上にあるとき, s の値を求めよ。
(配点 20)

$$(1) \overrightarrow{OP} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$(2) \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = k\vec{b} - \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7} = -\frac{4}{7}\vec{a} + \left(k - \frac{3}{7}\right)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{4}{7}\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(k - \frac{3}{7}\right)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$-\frac{12}{7} + \left(k - \frac{3}{7}\right)4 = 0 \quad k = \frac{6}{7}$$

$$(3) \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{a} + 6\vec{b}}{7} \quad \overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OH} = \frac{4}{7}(1-s)\vec{a} + \frac{3}{7}(1+s)\vec{b}$$

$$\frac{1}{7}t = \frac{4}{7}(1-s) \quad \frac{6}{7}t = \frac{3}{7}(1+s)$$

$$t = 4(1-s)$$

$$2 \cdot 4(1-s) = 1+s$$

$$s = \frac{7}{9}$$