2016

1-11-2016

数　学　問　題

(100 分)

【必答問題】　次の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)　$(2-\sqrt{3})^2+4(1+\sqrt{3})$ を展開し，簡単にすると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2)　x^4-2x^2-8 を因数分解すると $\boxed{(イ)}$ となる。

(3)　不等式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x-1}{5} \geqq \dfrac{5x+4}{3}$ の解は $\boxed{(ウ)}$ である。

(4)　次の $\boxed{(エ)}$ にあてはまるものを，下の **1**～**4** のうちから一つ選べ。

x は実数とする。$x^2=9$ であることは，$x=3$ であるための $\boxed{(エ)}$。

1　必要十分条件である　　**2**　必要条件であるが，十分条件ではない

3　十分条件であるが，必要条件ではない　　**4**　必要条件でも十分条件でもない

(5)　2 次関数 $f(x)=x^2-6x+a$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値が 9 であるとき，定数 a の値は $\boxed{(オ)}$ である。

(配点　20)

$\boxed{2}$　実数 x，y が，$x^2+y^2=16$，$xy=2$ を満たしている。ただし，$x>y>0$ とする。

(1)　$(x+y)^2$ の値を求めよ。また，$x+y$ の値を求めよ。

(2)　$x-y$ の値を求めよ。また，$\dfrac{1}{x}$ の値を求めよ。

(3)　$m \leqq \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x} < m+1$，$n \leqq x+\dfrac{2}{x}-\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{x^2}\right) < n+1$ を満たす整数 m，n の値をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

(1) 20, $2\sqrt{5}$

(2) $x-y=2\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

(3) $m=2$, $n=-3$

3 2 次関数 $f(x)=ax^2-4ax+1$ がある。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

(2) p を $0<p<2$ を満たす定数とする。$p \leqq x \leqq 2p+1$ における $f(x)$ の最小値を m とおく。m を a と p を用いて表せ。

(3) (2)のとき，$p \leqq x \leqq 2p+1$ における $f(x)$ の最大値を M とおく。$M-m=2a$ となるような p の値を求めよ。

（配点　20）

(1) $-4a+1$

(2) $m=4ap^2-4ap-3a+1$ $\left(0<p<\frac{1}{2}\right)$, $m=-4a+1$ $\left(\frac{1}{2}\leqq p<2\right)$

(3) $p=2-\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

【選択問題】 次の **4**，**5**，**6**，**7**，**8** のうちから２題を選んで解答せよ。

4 2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+3$，$g(x)=2x^2-ax+a-1$ がある。ただし，a は定数とする。

(1) 2 次不等式 $f(x)<0$ を解け。

(2) $y=g(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(3) $y=g(x)$ のグラフが，(1)で求めた x の値の範囲において，x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

（配点　20）

(1) $1<x<3$

(2) $a<4-2\sqrt{2}$, $4+2\sqrt{2}<a$

(3) $4<a<17$

5 $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{AC}=8$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 点 D を直線 BC に関して点 A と反対側に，$\mathrm{BD}=2\mathrm{CD}$，$\angle\mathrm{BDC}=120^\circ$ となるようにとる。このとき，線分 CD の長さを求めよ。

(3) (2)のとき，四角形 ABDC の面積を求めよ。また，$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を求めよ。

（配点　20）

(1) $BC=7$

(2) $CD=\sqrt{7}$

(3) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$, $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

（選択問題は次ページに続く。）

6 大人３人，子ども４人の合計７人がいる。また，A，B，Cの３つの部屋がある。

(1) 大人３人をA，B，Cの３部屋に１人ずつ入れる方法は全部で何通りあるか。 6通り

(2) 大人３人を３部屋に１人ずつ，子どもは４人とも同じ部屋に入れる方法は全部で何通りあるか。また，大人３人を３部屋に１人ずつ，子ども４人はそれぞれ３部屋のいずれかに入れる方法は全部で何通りあるか。ただし，子どもが入らない部屋があってもよいものとする。 486通り

(3) 子どもが１人増えて５人となり，合計８人となった。大人３人を３部屋に１人ずつ，子ども５人を３人と２人に分けて２部屋に入れる方法は全部で何通りあるか。また，この８人をどの部屋にも大人も子どももいるように入れる方法は全部で何通りあるか。

900通り

(配点　20)

7 整数 x，y が，等式 $3x+7y=-1$ ……①を満たしている。

(1) x を１桁の自然数とする。このとき，①を満たす整数 x，y の組を１組求めよ。

(2) ①を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。また，$2x+3y$ の値が２桁の自然数となるとき，$2x+3y$ の最大値 M の値を求めよ。

(3) (2)で求めた M について，自然数 a，b が，等式 $2ab+a-2b-25=M$ を満たしている。このとき，自然数 a，b の組をすべて求めよ。

(配点　20)

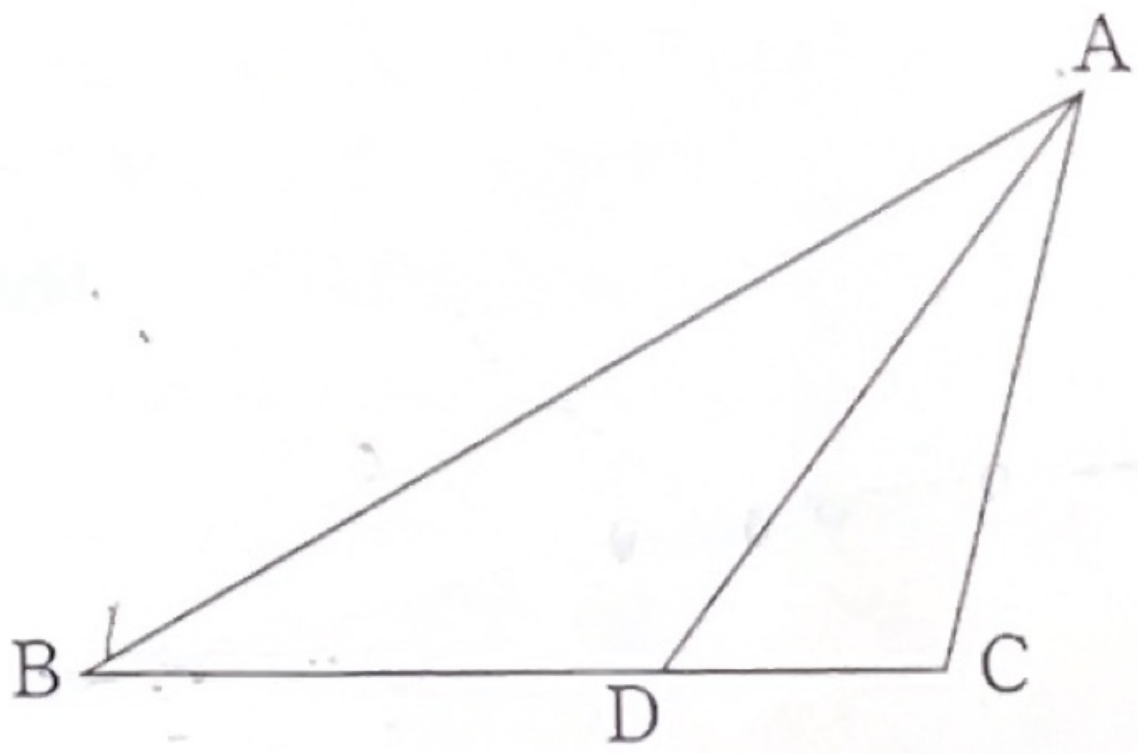
(1) $x=2,\ y=-1$

(2) $x=7k+2 \quad y=-3k-1 \quad (k=\text{整数})$

$2x+3y=2(7k+2)+3(-3k-1)=5k+1$

$M=96$

8 右の図のように，AB＝4，BC＝3，CA＝2 の△ABCがあり，∠BACの二等分線と辺BCの交点をD，△ABCの面積をSとする。



(1) 線分BDの長さを求めよ。

(2) 3点A，C，Dを通る円と辺ABとの交点のうち，Aでない方をEとする。線分AEの長さを求めよ。
また，△BDEの面積をSを用いて表せ。

(3) (2)のとき，線分CEと線分ADの交点をF，線分BFと線分DEの交点をGとする。
BG：GFを最も簡単な整数の比で表せ。また，△EFGの面積をSを用いて表せ。

(配点 20)

(1) $BD=2$

(2) $BE \cdot BA = BD \cdot BC$

$(4-AE)\cdot 4 = 2\cdot 3$ $\quad BE=\frac{3}{2}$

$4-AE = \frac{3}{2}$

$AE=\frac{5}{2}$

$\triangle BDE = S \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}S$

(3) $BG:GF = 18:5$ $\quad$ メネラウス BDCE，G

$\triangle EFG = \frac{25}{312}S$