

3-4-2017

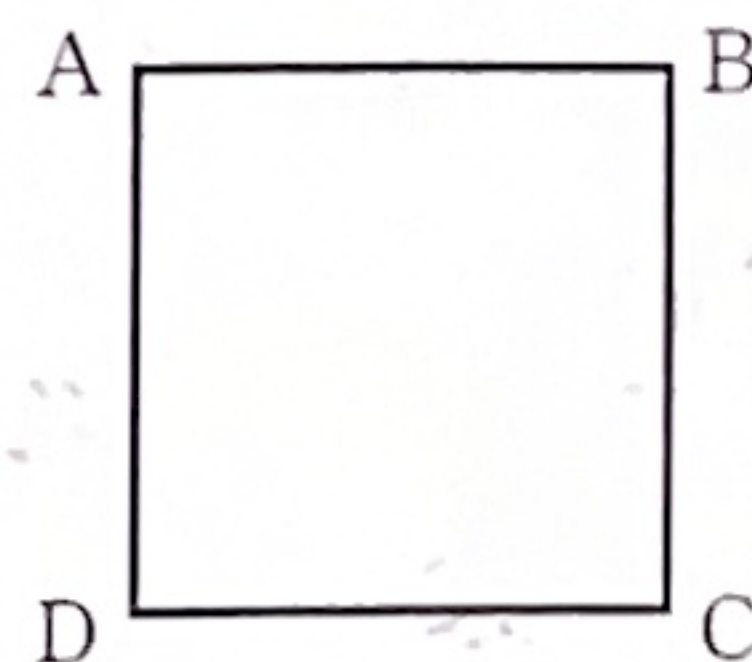
2017 (4月)

数 学 Y 問 題

(120分)

【必答問題】 Y1 ~ Y4 は全員全問解答せよ。

Y1 図のような1辺の長さが1の正方形ABCDがあり、動点Pは最初、頂点Aの位置にある。動点Pは、1個のさいころを1回投げるごとに、目の数と同じ長さだけ正方形ABCDの辺上を時計回りに移動する。この操作を繰り返し行い、動点Pが頂点Aに止まったとき、さいころを投げることを終了するものとする。



(1) 動点Pが1回目に点Dに到達し、かつ2回目に点Cに到達する確率を求めよ。

(2) 動点Pが2回目にちょうど点Cに到達する確率を求めよ。

(配点 20)

Y2 関数 $y = 2\sin x \cos x + \cos 2x$ がある。

(1) y を $r\sin(2x+\alpha)$ ($r > 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$) の形で表せ。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ において、 $y = -\sqrt{2}$ となる x の値を求めよ。

(配点 20)

Y3 a を実数とする。座標平面上に、2つの放物線 $C_1: y = x^2 + 2x + 4$, $C_2: y = x^2 - 10x + a$ がある。 C_1 上の点 $(-2, 4)$ における C_1 の接線を l とする。

- (1) l の方程式を求めよ。
- (2) l が C_2 とも接するとき、 a の値、および C_2 と l の接点の座標を求めよ。
- (3) (2) のとき、 C_1 , C_2 および l で囲まれた図形を D とする。 D の面積を求めよ。また、 D のうち、 x 軸の下側にある部分の面積を S_1 , x 軸の上側にある部分の面積を S_2 とする。

$\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(配点 40)

Y4 $a > 0$ とする。 O を原点とする座標平面上に、直線 $l: x - 2y + a = 0$ と折れ線 $K: y = |x|$ がある。 l と K の交点を P, Q とし、線分 PQ の中点を M とする。また、点 M を通り、 l に垂直な直線を m とし、 m と K の交点を R とする。ただし、(点 P の x 座標) $>$ (点 Q の x 座標) とする。

- (1) 点 M の座標を a を用いて表せ。
- (2) $\triangle PQR$ の面積が 5 であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) (2) のとき、 $\triangle OQR$ の内接円の方程式を求めよ。

(配点 40)

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合(P.10～11)】	Y5 ～ Y7 の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」, 「複素数平面」, 「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合 (P.12～13)】	Y7 ～ Y10 の4題中2題を解答せよ。

Y7 1辺の長さが2の正六角形 ABCDEF がある。辺 BC の中点を P, 辺 DE を $t:(1-t)$

($0 < t < 1$) に内分する点を Q とする。また, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とする。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。また, \overrightarrow{BC} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (2) 線分 AP と線分 BQ が垂直に交わる時, t の値を求めよ。
- (3) (2) のとき, 線分 AP と線分 BQ の交点を R とする。 \overrightarrow{AR} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。また, 線分 AR の長さを求めよ。

(配点 40)

Y8 a, b を正の定数とする。楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は2点 $(\sqrt{10}, 0)$, $(\frac{5}{\sqrt{3}}, 1)$ を通る。

- (1) a, b の値を求めよ。また, C の焦点の座標を求めよ。
- (2) C と直線 $y = -x + k$ が異なる2点 P, Q で交わる時, 定数 k の値の範囲を求めよ。
- (3) C の2つの焦点のうち, x 座標が大きい方の点を F とする。(2) のとき, $\angle PFQ = 90^\circ$ となるような定数 k の値を求めよ。

(配点 40)

Y9 O を原点とする複素数平面上に、3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ がある。複素数 α は、 $|\alpha|=4$, $\arg \alpha = \frac{\pi}{3}$ を満たし、 $\gamma = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}-1)i$ とする。また、点 B は、点 C を中心とし、点 A を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

- (1) α を $a+bi$ の形で表せ。ただし、 a, b は実数である。
- (2) β を極形式で表せ。ただし、 β の偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) n を自然数とする。複素数 α^n, β^n を表す点をそれぞれ P, Q とする。3点 O, P, Q が同一直線上に並ぶような n の最小値を求めよ。また、そのとき、 $\frac{OP}{OQ}$ の値を求めよ。

(配点 40)

Y10 等差数列 $\{a_n\}$ があり、 $3a_2 - a_5 = 5$, $a_6 - 2a_4 = -7$ である。また、数列 $\{b_n\}$ は初項が p (p は定数) であり、 $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 3$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たしている。

- (1) a_n を n を用いて表せ。
- (2) b_n を n, p を用いて表せ。また、 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 6) = 2$ が成り立つとき、 p の値を求めよ。
- (3) (2)のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - 6)$ を求めよ。必要ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ を用いてもよい。

(配点 40)