2016 1月 1-1-2016

数学問題

(100分)

【必答問題】 次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$ の分母を有理化して簡単にすると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$ を展開し，整理すると $\boxed{(イ)}$ となる。

(3) 1以上15以下の整数の集合を U とし，U の部分集合 A, B を

$$A=\{3n \mid n は整数\},\quad B=\{2n \mid n は整数\}$$

とするとき，集合 $A\cap B$ の要素を書き並べて表すと，$A\cap B=\{\boxed{(ウ)}\}$ である。

(4) 2次方程式 $x^2+x+k+1=0$ (k は定数) が重解をもつとき，$k=\boxed{(エ)}$ である。

(5) 2次関数 $y=2x^2+8x+11$ のグラフは，2次関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{(オ)}$, y 軸方向に $\boxed{(カ)}$ だけ平行移動したものである。

(配点 20)

$\boxed{2}$ x についての2次不等式

$$x^2-2x-8>0 \cdots\cdots①,\quad (x-1)(x-4a)<0 \cdots\cdots②$$

がある。ただし，a は定数とする。

(1) 不等式①を解け。 $x<-2,\ 4<x$

(2) $a>\dfrac{1}{4}$ のとき，不等式②を解け。またこのとき，不等式①，②を同時に満たす x が存在するような a の値の範囲を求めよ。 $1<x<4a$,

(3) $a\neq\dfrac{1}{4}$ とする。不等式①，②を同時に満たす整数 x が1つだけ存在するような a の値の範囲を求めよ。 $\dfrac{5}{4}<a\leqq\dfrac{3}{2},\ -1\leqq a<-\dfrac{3}{4}$

(配点 20)

$\boxed{3}$ 2次関数 $f(x)=-x^2+ax-3a+8$ がある。ただし，a は定数とする。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-3a+8\right)$

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲における $f(x)$ の最小値が 0 となるような a の値を求めよ。 $a=\frac{8}{3}$

(3) $a-1 \leqq x \leqq a+1$ の範囲における $f(x)$ の最大値を M とする。$M>0$ であるような a の値の範囲を求めよ。 $a<\frac{7}{2}$

(配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{4}$ $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=7$，$\cos B=\frac{3}{5}$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心をOとする。

(1) 辺ACの長さを求めよ。 $\mathrm{AC}=4\sqrt{2}$

(2) 線分OAの長さを求めよ。また，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを求めよ。 $\mathrm{OA}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=90°$

(3) 直線ACに関して点Bと反対側に，点Pを $\mathrm{AP}=\mathrm{AC}$ となるようにとる。$\triangle\mathrm{APC}$ の面積が $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の $\frac{8}{5}$ 倍となるとき，$\tan\angle\mathrm{PAC}$ の値を求めよ。

(配点 20)

$\tan\angle\mathrm{PAC}=\pm\frac{5}{\sqrt{39}}$

$\boxed{5}$ 座標平面上に点Pがあり，次の規則にしたがって点Pが移動する操作を繰り返し行う。初め，点Pは原点にある。

【規則】

1個のさいころを投げて，

(ア) 1，2，3のいずれかの目が出たときは，x 軸方向に1だけ移動する。

(イ) 4，5のいずれかの目が出たときは，y 軸方向に1だけ移動する。

(ウ) 6の目が出たときは，y 軸方向に2だけ移動する。

(1) 3回の操作で，点Pが点(3, 0)に到達する確率を求めよ。 $\frac{1}{8}$

(2) 3回の操作で，点Pが点(2, 1)に到達する確率を求めよ。また，4回の操作で，点Pが点(2, 2)に到達する確率を求めよ。 $\frac{1}{4}$，$\frac{5}{12}$

(3) ちょうど5回目の操作で，点Pの y 座標が初めて3以上になる確率を求めよ。 $\frac{7}{24}$

(配点 20)

(問題は次ページに続く。)

6 10進法で表された自然数 N がある。

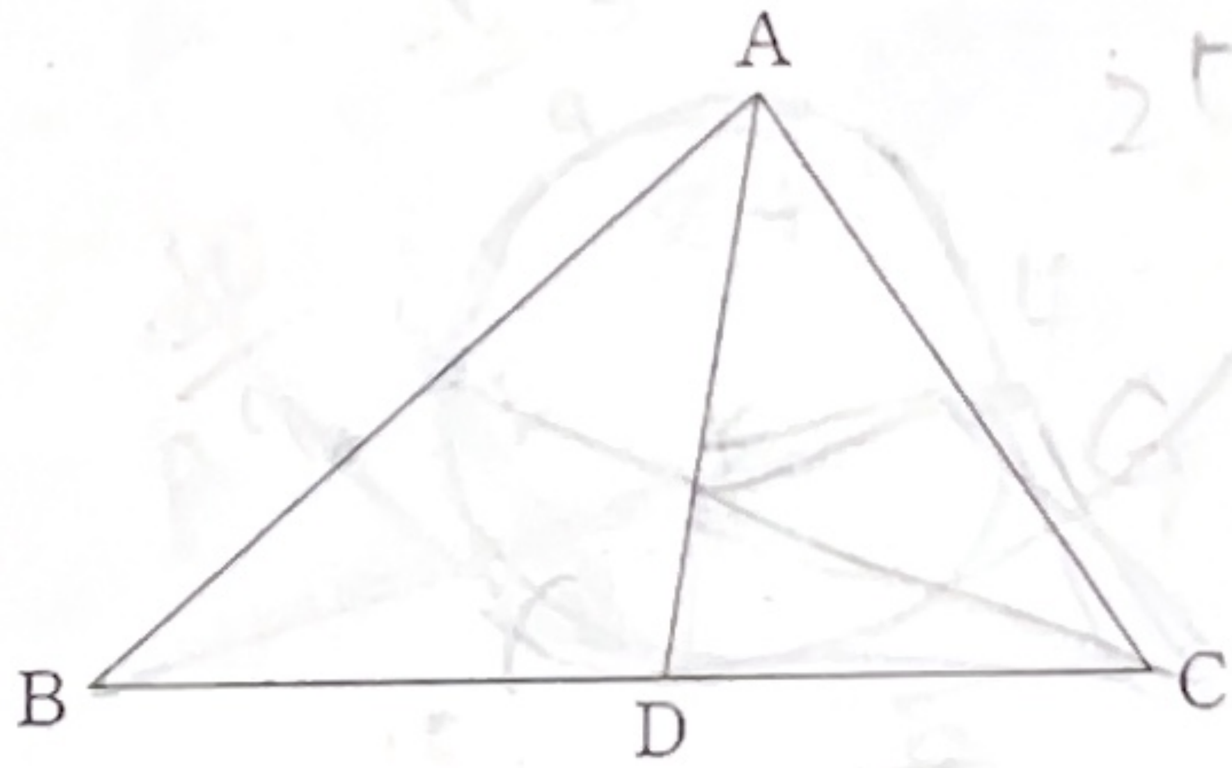
(1) N を5進法で表すと，$2324_{(5)}$ となった。このとき，N の値を求めよ。 N=339

(2) N を5進法で表すと4桁で表された。このような N のうち，最大の数と最小の数をそれぞれ求めよ。 Max 624 , min 125

(3) 5進法で表すと4桁で表される N のうち，9の倍数であり，かつ5進法で表したときの各位の数の和が4の倍数になるものを考える。このような N のうち，最大の数と最小の数をそれぞれ求めよ。 Max 612 , min 144

（配点 20）

7 右の図のように，AB＝5，BC＝6，CA＝4 である △ABC があり，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。



(1) 線分 BD の長さを求めよ。 $BD = \frac{10}{3}$

(2) 点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と，辺 AB との交点のうち A でない方を E とする。線分 BE の長さを求めよ。また，線分 AD と線分 CE の交点を F，直線 BF と辺 CA の交点を G とする。$\dfrac{AG}{GC}$ の値を求めよ。 $BE = \frac{20}{9}$, $\frac{AG}{GC} = \frac{25}{16}$

(3) (2)のとき，$\dfrac{AF}{FD}$ の値を求めよ。また，△FCG の面積を S_1，△FCD の面積を S_2 とする。$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 $\frac{AF}{FD} = \frac{45}{16}$ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{45}{41}$

（配点 20）