2-7-2018
2018 7A

数 学 Z 問 題

(120分)

【選択問題】 次の $\boxed{\mathrm{Z}\,1}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}\,3}$ の3題の中から2題選択し，解答せよ。

$\boxed{\mathrm{Z}\,1}$ 座標平面上に直線 $\ell : y=2x-11$ があり，点 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ を通り ℓ に垂直な直線を m とする。また，ℓ と m との交点をBとする。

(1) 点Bの座標を求めよ。

(2) 点Bにおいて ℓ に接し，点 $\mathrm{C}(5,\ 4)$ を通る円の方程式を求めよ。 (配点 20)

$\boxed{\mathrm{Z}\,2}$ A，Bの2つのチームがあり，試合を3回行う。各試合でAがBに勝つ確率は $\frac{2}{5}$，BがAに勝つ確率は $\frac{2}{5}$，引き分けとなる確率は $\frac{1}{5}$ である。3試合して，2勝以上したチームがあったときはそのチームを優勝とし，2勝以上したチームがなければ【優勝なし】とする。

(1) 3試合とも引き分けとなる確率を求めよ。また，Aが1勝1敗1引き分けとなる確率を求めよ。

(2) 【優勝なし】となる確率を求めよ。また，【優勝なし】であったとき，Aが1勝1敗1引き分けである条件付き確率を求めよ。 (配点 20)

$\boxed{\mathrm{Z}\,3}$ 整数 A がある。

(1) $10 \leqq A \leqq 20$ とする。$A(A-1)$ が4で割り切れるような A をすべて求めよ。

(2) $100 \leqq A \leqq 200$ とする。A^2-A が25で割り切れるような A をすべて求めよ。
また，A^2 と A の下2桁(けた)が一致するような A をすべて求めよ。 (配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z4}}$, $\boxed{\text{Z5}}$ から1題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z4}}$ a は定数とし，e は自然対数の底とする。関数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{e^x}$ があり，$f'(0)=2$ を満たしている。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の増減，極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ を用いてもよい。

(3) Oを原点とする座標平面上に曲線 $y=f(x)$ があり，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における接線と y 軸との交点をQとする。△OPQの面積が最大となるような t の値を求めよ。

(配点　40)

$\boxed{\text{Z5}}$ p は正の実数とする。複素数 $\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+pi$ があり，$|\alpha|=\sqrt{2}$ である。ただし，i は虚数単位である。

(1) p の値を求めよ。また，α を極形式で表せ。ただし，偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

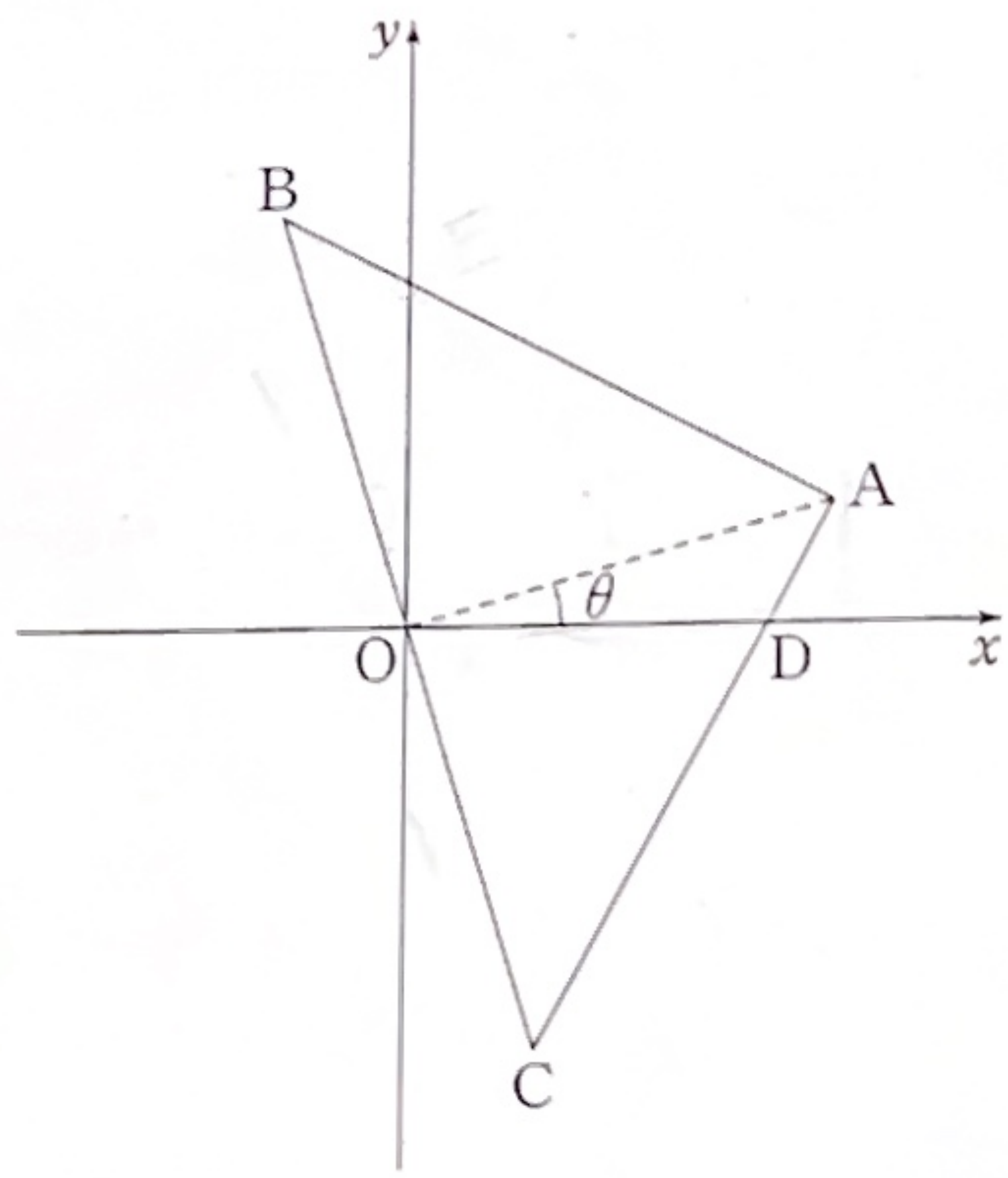
(2) α^6 の値を求めよ。また，α^n が正の整数となるような最小の自然数 n を k とする。k の値を求めよ。

(3) (2)のとき，複素数平面上で $\dfrac{\alpha^6}{|\alpha^6|}$ を表す点をA，$\dfrac{\alpha^k}{|\alpha^k|}$ を表す点をBとし，$w=\dfrac{1}{z-1}$ とする。点 z が線分ABの垂直二等分線上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(配点　40)

【必答問題】 $\boxed{Z6}$ ～ $\boxed{Z8}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{Z6}$ 右の図のように，O を原点とする座標平面上に $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC があり，$AB=AC=\sqrt{2}$ である。また，点 A は第 1 象限，点 B は第 2 象限，点 C は第 4 象限にあり，線分 BC の中点は O である。さらに，直線 AC と x 軸との交点を D とし，$\angle AOD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。



(1) $\angle ODA$ を θ を用いて表せ。また，$\sin\angle ODA$ を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) 線分 AD の長さを $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) 直線 AB と y 軸との交点を E とし，△ADE の面積を S とする。$S=\frac{1}{6}$ となるような θ の値を求めよ。

(配点　40)

$\boxed{Z7}$ p を定数とする。

$$a_1=3,\ a_4=9,\ a_{n+1}=a_n+p\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) p の値を求めよ。また，a_n を n を用いて表せ。

(2) b は 0 でない定数とする。数列 $\{b_n\}$ において

$$b_1=b,\ b_{n+1}=2b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots),\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=1$$

が成り立つとき，b の値を求めよ。また，b_n を n を用いて表せ。

(3) (2)のとき，$T_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。T_n を n を用いて表せ。

また，r は 0 でない定数とする。$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n-2}{nr^n}=4$ となるような r の値を求めよ。

(配点　40)

$\boxed{\textbf{Z8}}$ 四面体OABCがあり，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ である。△OACの重心をGとし，線分BGの中点をMとする。また，3点O，B，Cを通る平面をα，点Aから平面αに下ろした垂線をAHとする。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 平面α上の点をPとする。AP+PMが最小となるようなPを$\mathrm{P_0}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（配点　40）