2015 (1月)

数 学 B 問 題

(120 分)

【必答問題】 数学B受験者は $\boxed{\text{B1}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{B3}}$, $\boxed{\text{B4}}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B1}}$ 2次関数 $y=ax^2-2ax+3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ がある。ただし，a は0でない定数とする。

(1) $a=1$ のとき，y の最大値と最小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2) y の最小値が1のとき，a の値を求めよ。

(配点 20)

$\boxed{\text{B2}}$ 実数全体の集合 U を全体集合とし，その部分集合 $A=\{x \mid x \leqq -a,\ a \leqq x\}$，$B=\{x \mid x^2-7x+10<0\}$ がある。ただし，$a>0$ とする。

(1) $a=3$ のとき，集合 $A \cap B$ を求めよ。

(2) $a=7$ とする。集合 $\overline{A}$ に属する整数 x の個数を求めよ。また，集合 $\overline{A \cup B}$ に属する整数 x の個数を求めよ。ただし，集合 A の補集合を $\overline{A}$ で表し，集合 $A \cup B$ の補集合を $\overline{A \cup B}$ で表す。

(配点 20)

$\boxed{\text{B3}}$ A，Bの2チームが毎日1回ずつ試合を行い，先に3勝した方が優勝として試合を終了する。ただし，各試合において引き分けはないものとする。1日目の試合でAが勝つ確率とBが勝つ確率はともに $\dfrac{1}{2}$ であるが，Aが勝った翌日にBが勝つ確率とBが勝った翌日にAが勝つ確率はともに $\dfrac{2}{3}$，Aが勝った翌日にもAが勝つ確率とBが勝った翌日にもBが勝つ確率はともに $\dfrac{1}{3}$ である。

(1) 3日目でAが優勝する確率を求めよ。

(2) 4日目でAが優勝する確率を求めよ。

(3) 1日目でAが勝ち，5日目でAが優勝する確率を求めよ。また，1日目でAが勝ち，Aが優勝する確率を求めよ。

(配点 40)

$\boxed{\text{B4}}$ 座標平面上に4点 $P(1,\ 0)$，$Q(0,\ 2)$，$R(-1,\ 0)$，$S(0,\ -2)$ があり，四角形PQRSの周および内部を領域 D とする。また，中心が点 $C(2,\ a)$，半径 r の円を K とする。ただし，a，r は正の定数とする。

(1) 点Pを通り直線PQに垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) $a=1$ とする。円 K と領域 D が共有点をもつとき，r の最大値と最小値を求めよ。

(3) 円 K と領域 D が共有点をもつとき，r の最小値を a を用いて表せ。　　（配点　40）

【選択問題】 数学B受験者は，次の $\boxed{\text{B5}}$ ～ $\boxed{\text{B8}}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

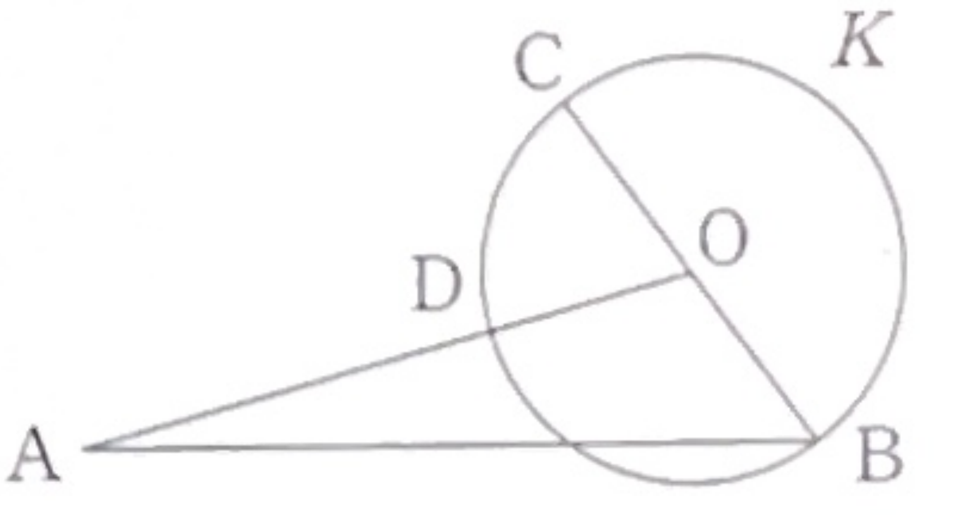
$\boxed{\text{B5}}$ 等比数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2+a_3=12$，$a_3=3a_2$ を満たしている。また，数列 $\{b_n\}$ があり，$b_1=3$，$b_{n+1}-b_n=2$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）を満たしている。

(1) 等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n を用いて表せ。また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n を用いて表せ。

(3) (2)のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k}+\frac{1}{S_{2k}}\right)$ を n を用いて表せ。　　（配点　40）

$\boxed{\text{B6}}$ 平面上に $OA=5$，$OB=2$ の $\triangle OAB$ と，点Oを中心としOBを半径とする円 K がある。円 K と直線OBの交点のうちBと異なる方をCとし，円 K と辺OAの交点をDとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{7}{2}$ とする。



(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) 直線AB上に $\overrightarrow{OE}=s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$ （s は0でない実数）を満たす点Eをとる。点Eが円 K 上にあるとき，s の値を求めよ。

(3) 直線ABと直線CDの交点をFとするとき，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，(2)のとき，線分EFの長さを求めよ。　　（配点　40）

B7 3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ （a は定数）が $f'(2)=7$ を満たしている。また，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ。また，C の接線が点 $(0,\ 1)$ を通るとき，t の値を求めよ。

(3) (2)で求めた t の値のうち，小さい方に対する接線を ℓ とし，ℓ と C との点 $(0,\ 1)$ 以外の共有点の x 座標を b とする。$0<k<b$ において，直線 $x=k$ と ℓ，C の交点をそれぞれ P，Q とするとき，線分 PQ の長さの最大値とそのときの k の値を求めよ。（配点　40）

B8 関数 $f(x)=(\log_2 x)^2-\log_2 8x^3$ がある。また，$t=\log_2 x$ とする。

(1) $f(2)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ を t の式で表せ。また，$f(x)=25$ を満たす x の値を求めよ。

(3) 関数 $g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x^2$ がある。$\dfrac{1}{8}\leqq x\leqq 8$ における $f(x)-g(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。（配点　40）