3-4-2017

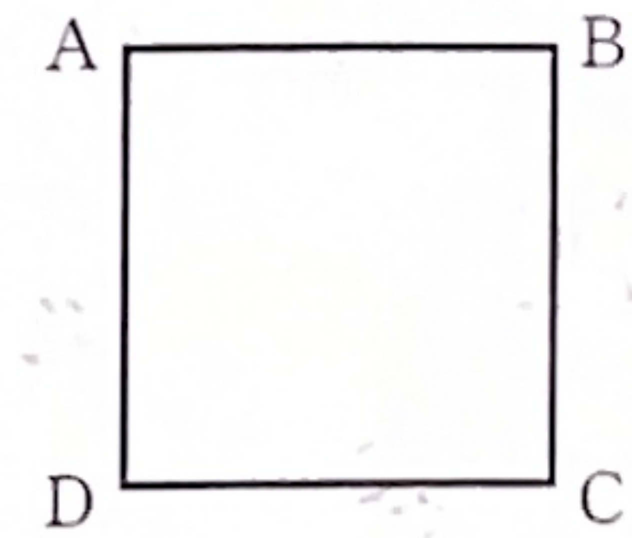
2017 4月

数　学　Y　問　題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ～ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ 図のような1辺の長さが1の正方形ABCDがあり，動点Pは最初，頂点Aの位置にある。動点Pは，1個のさいころを1回投げるごとに，目の数と同じ長さだけ正方形ABCDの辺上を時計回りに移動する。この操作を繰り返し行い，動点Pが頂点Aに止まったとき，さいころを投げることを終了するものとする。



(1) 動点Pが1回目に点Dに到達し，かつ2回目に点Cに到達する確率を求めよ。

(2) 動点Pが2回目にちょうど点Cに到達する確率を求めよ。 (配点　20)

(1) $\frac{1}{36}$, (2) $\frac{7}{36}$

$\boxed{\text{Y 2}}$ 関数 $y=2\sin x\cos x+\cos 2x$ がある。

(1) y を $r\sin(2x+\alpha)$ $(r>0,\ 0\leqq\alpha<2\pi)$ の形で表せ。

(2) $0\leqq x<2\pi$ において，$y=-\sqrt{2}$ となる x の値を求めよ。 (配点　20)

(1) $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $x=\frac{5}{8}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$

Y3 a を実数とする。座標平面上に，2つの放物線 $C_1 : y=x^2+2x+4$，$C_2 : y=x^2-10x+a$ がある。C_1 上の点 $(-2,\ 4)$ における C_1 の接線を l とする。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l が C_2 とも接するとき，a の値，および C_2 と l の接点の座標を求めよ。

(3) (2)のとき，C_1，C_2 および l で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。また，D のうち，x 軸の下側にある部分の面積を S_1，x 軸の上側にある部分の面積を S_2 とする。$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。　　(配点　40)

(1) $l : y = -2x$

(2) $a = 16$, $(4, -8)$

(3) $D = 18$, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{10}{17}$

Y4 $a>0$ とする。O を原点とする座標平面上に，直線 $l : x-2y+a=0$ と折れ線 $K : y=|x|$ がある。l と K の交点を P，Q とし，線分 PQ の中点を M とする。また，点 M を通り，l に垂直な直線を m とし，m と K の交点を R とする。ただし，(点 P の x 座標) > (点 Q の x 座標) とする。

(1) 点 M の座標を a を用いて表せ。

(2) △PQR の面積が 5 であるとき，a の値を求めよ。

(3) (2)のとき，△OQR の内接円の方程式を求めよ。　　(配点　40)

(1) $M\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{2}{3}a\right)$

(2) $a = 3\sqrt{3}$

(3) $x^2 + \left(y - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$

【選択問題】　次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合(P.10 ～ 11)】	$\boxed{\text{Y 5}}$ ～ $\boxed{\text{Y 7}}$ の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.12 ～ 13)】	$\boxed{\text{Y 7}}$ ～ $\boxed{\text{Y 10}}$ の4題中2題を解答せよ。

$\boxed{\text{Y 7}}$ 1辺の長さが2の正六角形ABCDEFがある。辺BCの中点をP，辺DEを $t:(1-t)$（$0<t<1$）に内分する点をQとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 線分APと線分BQが垂直に交わるとき，tの値を求めよ。

(3) (2)のとき，線分APと線分BQの交点をRとする。$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分ARの長さを求めよ。

（配点　40）

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

(2) $t=\frac{3}{5}$

(3) $\overrightarrow{AR}=\left(1+\frac{2}{5}s\right)\vec{a}+2s\vec{b}$, $AR=\frac{5\sqrt{7}}{17}$.

$\boxed{\text{Y 8}}$ a，bを正の定数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は2点 $(\sqrt{10},\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通る。

(1) a，bの値を求めよ。また，Cの焦点の座標を求めよ。

(2) Cと直線 $y=-x+k$ が異なる2点P，Qで交わるとき，定数kの値の範囲を求めよ。

(3) Cの2つの焦点のうち，x座標が大きい方の点をFとする。(2)のとき，$\angle\mathrm{PFQ}=90^\circ$ となるような定数kの値を求めよ。

（配点　40）

(1) $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $(2,0)$, $(-2,0)$

(2) $-4<k<4$

(3) $k=\frac{7}{2}, -1$.

Y9 Oを原点とする複素数平面上に，3点 A(α)，B(β)，C(γ) がある。複素数 α は，$|\alpha|=4$，$\arg\alpha=\frac{\pi}{3}$ を満たし，$\gamma=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)i$ とする。また，点Bは，点Cを中心とし，点Aを反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

(1) α を $a+bi$ の形で表せ。ただし，a，b は実数である。

(2) β を極形式で表せ。ただし，β の偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(3) n を自然数とする。複素数 α^n，β^n を表す点をそれぞれP，Qとする。3点O，P，Qが同一直線上に並ぶような n の最小値を求めよ。また，そのとき，$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}$ の値を求めよ。

(1) $\alpha=2+2\sqrt{3}i$

(配点　40)

(2) $\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

(3) $n=24$，$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}=64$

Y10 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$3a_2-a_5=5$，$a_6-2a_4=-7$ である。また，数列 $\{b_n\}$ は初項が p（p は定数）であり，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n，p を用いて表せ。また，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-6)=2$ が成り立つとき，p の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(b_n-6)$ を求めよ。必要ならば，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ を用いてもよい。

(1) $a_n=3n+1$

(配点　40)

(2) $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p-6)+6$，$p=7$

(3) 14