3-4-2018

2018 (TA)

数学Y問題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ～ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ 箱の中に，1から4までの数が1つずつ書かれたカードが計4枚入っている。箱の中から1枚のカードを取り出して，数を確認して箱の中に戻す作業を3回行う。

(1) 取り出されたカードに書かれた3つの数がすべて異なる確率を求めよ。

(2) 取り出されたカードに書かれた3つの数の最大値が奇数である確率を求めよ。また，取り出されたカードに書かれた3つの数の最大値が奇数であるとき，3つの数がすべて異なる条件付き確率を求めよ。

(配点　20)

$\boxed{\text{Y 2}}$ 関数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ (a は定数) があり，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ である。

(1) a の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

Y 3 O を原点とする座標平面上に，放物線 $C: y=x^2$ があり，C 上の点 A $(a,\ a^2)$ における C の接線を ℓ とする。ただし，a は正の定数とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と x 軸との交点の x 座標を a を用いて表せ。また，C，ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。

(3) 点 A を通り，ℓ に垂直な直線と y 軸との交点を B とする。C，線分 AB，線分 OB で囲まれた図形の面積を S_2 とする。(2)で求めた S_1 に対し，$S_2=10S_1$ となる a の値を求めよ。

(配点　40)

Y 4 座標平面上の 3 点 $(-3,\ 2)$，$(1,\ 4)$，$(5,\ -4)$ を通る円を C_1 とする。

(1) C_1 の中心の座標と半径を求めよ。

(2) C_1 の接線で傾きが $-\dfrac{3}{4}$ であるもののうち，y 切片が正であるものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

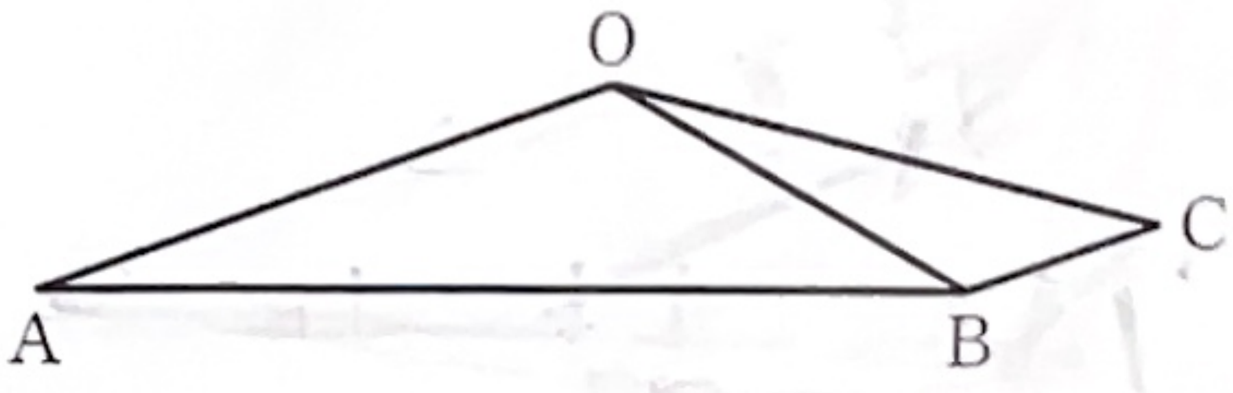
(3) (2)のとき，C_1 の中心を通り，y 軸および ℓ に接する円を C_2 とする。C_2 の方程式を求めよ。

(配点　40)

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合(P.10 ～ 11)】	Y5 ～ Y7 の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.12 ～ 13)】	Y7 ～ Y10 の4題中2題を解答せよ。

Y7 右の図のように，$OA=3$，$OB=2$，$BC=1$，$\cos\angle AOB=-\dfrac{2}{3}$，$OA \parallel CB$ である台形OABCがある。線分ABを2:1に内分する点をD，線分OCの中点をEとし，直線DEと直線OAの交点をFとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 点Gを $\overrightarrow{DG}=k\overrightarrow{DE}$（$k$ は実数）を満たす点とする。$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，k を用いて表せ。また，点Gが点Fに一致するとき，k の値を求めよ。

(3) 点Hを $\overrightarrow{OH}=t\vec{b}$（$t$ は0でない実数）を満たす点とする。$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{CH}$ であるとき，t の値を求めよ。また，このとき △AFH の面積を求めよ。　　（配点　40）

Y8 Oを原点とする座標平面上に，焦点の1つが点 $(\sqrt{2},\ 0)$ である楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ がある。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点A $(0,\ 2)$ から C に異なる2つの接線 ℓ_1，ℓ_2 を引く。ℓ_1，ℓ_2 の方程式を求めよ。ただし，(ℓ_1 の傾き)$>$(ℓ_2 の傾き）とする。

(3) 点Pが C の $y<0$ の部分を動くとする。(2)で求めた ℓ_1，ℓ_2 に対して，点Pから ℓ_1 に引いた垂線と ℓ_1 との交点を H_1 とし，点Pから ℓ_2 に引いた垂線と ℓ_2 との交点を H_2 とする。四角形 AH_1PH_2 の面積が $\dfrac{9}{8}$ となるとき，点Pの座標を求めよ。　　（配点　40）

$\boxed{\textbf{Y 9}}$ p を実数の定数とする。x の 2 次方程式 $x^2-2px+p^2+3=0$ の虚数解のうち，虚部が正であるものを α とし，O を原点とする複素数平面上で，α を表す点を A とする。

(1) α を p を用いて表せ。

(2) 点 A を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，さらに原点からの距離を $\dfrac{1}{2}$ 倍にした点を $\mathrm{B}(\beta)$ とすると，β の虚部が $2\sqrt{3}$ となった。このとき，p の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$\triangle$OAB の外接円の周上に 2 点 C，D を $\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$，$\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\pi}{6}$ となるようにとる。2 点 C，D を表す複素数を求めよ。ただし，3 点 B，C，D はこの順に反時計回りにあるものとする。

（配点　40）

$\boxed{\textbf{Y 10}}$ 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n-3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=b$ (b は定数)，$b_{n+1}=b_n+a_n-3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n，b を用いて表せ。

(3) r を正の数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{r^n}=1$ であるとき，r の値を求めよ。さらに，このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{r^{2k}}=3$ となる b の値を求めよ。

（配点　40）