3-7-2020　2020 ~~(千葉)~~ 7

Z7 Oを原点とする座標平面上に，放物線 $C_1 : y^2 = 8px$ $(p>0)$ と楕円 C_2 がある。C_2 は中心がO，長軸が y 軸上，短軸が x 軸上にあり，短軸の長さが2で，点 $\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{3}\right)$ を通る。

(1) C_1 の焦点の座標と準線の方程式をそれぞれ p を用いて表せ。

(2) C_2 の方程式を求めよ。また，C_1 と C_2 の共有点の x 座標を p を用いて表せ。

(3) C_1 の焦点をPとし，(2)の共有点のうち，第1象限にあるものをQとする。また，C_2 の焦点をF，F′とする。$\mathrm{FQ}+\mathrm{F'Q}+\mathrm{PQ}=7$ となるとき，p の値を求めよ。　（配点　40）

Z8 2次方程式 $x^2+2x+2=0$ の虚数解のうち，虚部が正であるものを α とする。また，Oを原点とする複素数平面上で，α を表す点をA，$\frac{1}{\alpha}$ を表す点をBとする。

(1) $|\alpha|$，$\arg\alpha$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$ とする。

(2) α^n（n は自然数）を表す点をPとする。3点O，B，Pが，この順に同一直線上に並ぶような最小の n の値を求めよ。

(3) (2)の n の値に対して，α^n を表す点をCとする。3点O，A，Cを通る円周上に点Qを，$\angle\mathrm{ACQ}=\frac{\pi}{4}$ となるようにとるとき，Qを表す複素数を求めよ。　（配点　40）

Z9 数列 $\{a_n\}$ は公比が正である等比数列で，$a_1=1$，$a_2+a_3=\dfrac{3}{4}$ を満たしている。また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=b$，$b_{n+1}=3b_n-2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。ただし，b は定数である。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n，b を用いて表せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3^n}=1$ となるとき，b の値を求めよ。

(3) p を 0 でない実数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3^n}=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}p^k a_k(b_k-1)=1-2p$ となるような p の値を求めよ。

（配点　40）