3-7-2016

2016 (7A)

数 学 Z 問 題

(120分)

【選択問題】 次の Z1 ～ Z3 の3題の中から2題選択し，解答せよ。

Z1 座標平面上において，円 C は2点 A(0, 3)，B(0, 5) を通り，半径が $\sqrt{5}$ である。また，円 C の中心は第1象限にある。

(1) 円 C の中心の座標を求めよ。

(2) 直線 $\ell : y = mx$ （m は定数）がある。円 C が直線 ℓ から切り取る線分の長さが線分 AB の長さに等しいとき，m の値を求めよ。

(配点 20)

Z2 関数 $f(x) = \sin 2x + 4\sin x - \cos x + a$ があり，$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ である。ただし，a は定数とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $f(x) \leqq 0$ を解け。

(配点 20)

Z3

(1) $5x - 7y = 3$ を満たす1桁の自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(2) 5で割ると2余り，7で割ると5余る3桁の自然数の個数を求めよ。

(配点 20)

【選択問題】 次の $\boxed{\text{Z4}}$, $\boxed{\text{Z5}}$ から1題選択し，解答せよ。

$\boxed{\text{Z4}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ がある。$f(x)$ が極大値をとるときの x の値を a とする。

(1) $f(x)$ の増減を調べ，a の値を求めよ。

(2) $1<t<a$ とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線に垂直で，点Pを通る直線を ℓ とする。また，ℓ と x 軸との交点をQとし，$\mathrm{R}(t,\ 0)$ とする。線分QRの長さを t を用いて表せ。

(3) t が $1<t<a$ の範囲で変化するとき，(2)の線分QRの長さが最大になる t の値を求めよ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z5}}$ 方程式 $z^2-6\sqrt{2}z+27=0$ の解のうち，虚部が正であるものを α とする。また，Oを原点とする複素数平面上に2点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ があり，$\triangle\mathrm{OAB}$ の重心を表す複素数は $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+\dfrac{7}{3}i$ である。

(1) α を求めよ。また，β を求めよ。

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ。また，$\angle\mathrm{OBA}$ の大きさを求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\angle\mathrm{OBA}$ の三等分線と辺OAとの交点のうち，Oに近い方をCとする。点Cを表す複素数を求めよ。

（配点　40）

【必答問題】 $\boxed{\text{Z6}}$ ～ $\boxed{\text{Z8}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Z6}}$ 袋の中に，0，1，2の数が1つずつ書かれたカードが各2枚ずつ，計6枚入っている。1枚の硬貨を1回投げ，表が出たら袋の中からカードを3枚同時に取り出し，裏が出たら袋の中からカードを4枚同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた数の総和を X とする。

(1) $X=1$ である確率を求めよ。

(2) $X=3$ である確率を求めよ。

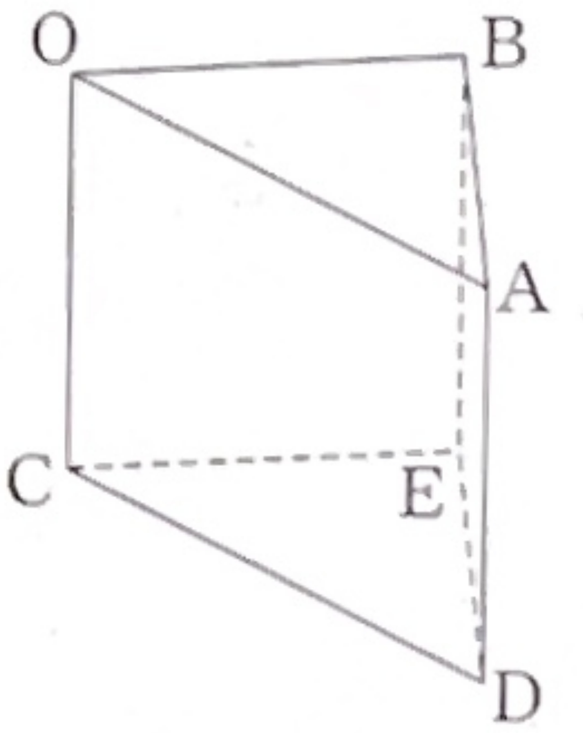
(3) X が奇数であるという条件のもとで，取り出されたカードに書かれた数が3種類である条件付き確率を求めよ。

（配点　40）

$\boxed{\text{Z7}}$ 右の図のような三角柱OAB-CDEがあり，3辺OC，AD，BEはそれぞれ上面OAB，底面CDEに垂直で

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=2,\ \mathrm{OC}=2,\ \cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{3}$$

である。辺BEを2：1に内分する点をF，辺CDを2：1に内分する点をGとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線FGと3点O，D，Eを通る平面との交点をPとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) (2)のとき，直線OB上に点QをOQ⊥PQとなるようにとる。線分PQの長さを求めよ。

（配点　40）

Z8 等差数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{7}{2}$ である。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また，数列 $\{b_n\}$ は，0 でない定数 p に対して

$$pb_1+p^2b_2+p^3b_3+\cdots\cdots+p^nb_n=2^n-1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしている。

(1) S_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を p，n を用いて表せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{2}$ であるとき，p の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_kb_k$ を求めよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ を用いてよい。

（配点　40）