2012 1B

1-1-2012

数　学　問　題

(100 分)

【必答問題】　次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)　$(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$ を展開し，整理すると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2)　$a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ のとき，$2a+\dfrac{1}{a}=\boxed{(イ)}$，$4a^2+\dfrac{1}{a^2}=\boxed{(ウ)}$ である。

(3)　放物線 $y=2x^2-3x+k$（k は定数）が x 軸に接するとき，$k=\boxed{(エ)}$ である。

(4)　次の $\boxed{(オ)}$ にあてはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

m，n を自然数とする。m が 3 の倍数であることは，積 mn が 3 の倍数であるための $\boxed{(オ)}$。

⓪必要十分条件である　　①必要条件であるが，十分条件ではない

②十分条件であるが，必要条件ではない　　③必要条件でも十分条件でもない

(配点　20)

$\boxed{2}$　3 つの不等式 $x^2-2x-8<0$ ……①　$x^2-10x+21>0$ ……②　$x^2-3ax+2a^2\leqq 0$ ……③

がある。ただし，a は定数である。

(1)　不等式①を解け。

(2)　$a>0$ とする。不等式③を解け。また，不等式②，③を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲を求めよ。

(3)　$a\neq 0$ とする。不等式①，②，③を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲を求めよ。

(配点　20)

3 2次関数 $f(x)=x^2+px-2$ （pは定数）がある。$y=f(x)$ のグラフの軸の方程式は $x=1$ である。また，$-2a+2\leqq x\leqq a+2$ （ただし a は正の定数）における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。

(1) pの値を求めよ。また，$y=f(x)$ のグラフの頂点を求めよ。

(2) m を a を用いて表せ。

(3) $M-m=8a-4$ となるような a の値を求めよ。

（配点　20）

【選択問題】　次の 4，5，6，7 のうちから２題を選んで解答せよ。

4 △ABCがあり，AB＝9，AC＝6，$\cos A=\frac{1}{3}$ である。また，辺ACの中点をMとする。

(1) 辺BCの長さを求めよ。

(2) $\sin B$ の値を求めよ。

(3) 辺ABのAを越える延長線上に点Nを，∠ANM＝∠ABC となるようにとる。このとき，sin∠MANの値を求めよ。また，線分MNの長さ，および△AMNの面積を求めよ。

（配点　20）

5 数直線上に２つの動点P，Qがあり，次の規則にしたがって移動する。
初め，点Pは座標が１である点にあり，点Qは原点にある。

〈規則〉

２個のさいころa，bを同時に投げる。

・点Pは，さいころaに３以下の目が出たときには正の向きに１だけ進み，
４以上の目が出たときには移動しない。

・点Qは，さいころbに４以下の目が出たときには正の向きに１だけ進み，
５以上の目が出たときには移動しない。

(1) ２個のさいころa，bを１回だけ投げた結果，点Pと点Qがどちらも移動しない確率を求めよ。

(2) ２個のさいころa，bを２回続けて投げた結果，点Pと点Qの座標が等しくなる確率を求めよ。

(3) ２個のさいころa，bを３回続けて投げた結果，点Pの座標が点Qの座標より大きい確率を求めよ。

（配点　20）

（選択問題は次ページに続く。）

6 kを2以上の整数とする。2からkまでの整数のうち，kと互いに素であるものの個数をNとする。例えば，$k=5$ とすると2から5までの整数のうち，5と互いに素であるものは2，3，4であるから，$N=3$ である。

(1) $k=7$ のとき，Nを求めよ。また，$k=14$ のとき，Nを求めよ。

(2) pを7でない素数とする。$k=7p$ のとき，Nを求めよ。

(3) p, qはともに素数であり，$p<q$ とする。$k=pq$ のとき，$N=11$ を満たすp, qの組（p，q）をすべて求めよ。

（配点　20）

7 $AB=6$，$BC=4$ の $\triangle ABC$ がある。$\triangle ABC$ の重心Gを通り，辺BCに平行な直線と辺AB，辺ACとの交点をそれぞれ，D，Eとし，直線AGと辺BCとの交点をMとする。

(1) 線分BM，DGの長さをそれぞれ求めよ。

(2) 線分ADの長さを求めよ。また，$\triangle AGE$の外接円と直線ADとの交点のうち，Aでない方をPとする。このとき，線分DPの長さを求めよ。

(3) (2)のとき，直線PEと直線AGとの交点をQとする。$\dfrac{AQ}{QG}$，$\dfrac{PQ}{QE}$ の値をそれぞれ求めよ。さらに，$AM=5$ のとき，線分PQの長さを求めよ。

（配点　20）