2014 (1月)

数 学 B 問 題

(120 分)

【必答問題】 数学B受験者は $\boxed{\text{B1}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{B3}}$, $\boxed{\text{B4}}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B1}}$ 放物線 $C_1 : y=x^2-2x-3$ がある。C_1 が x 軸から切り取る線分の長さを L とする。

(1) L を求めよ。

(2) 放物線 C_1 を y 軸方向に a だけ平行移動して得られる放物線を C_2 とする。C_2 が x 軸から切り取る線分の長さが $\dfrac{\sqrt{3}}{2}L$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

(配点 20)

$\boxed{\text{B2}}$ 3つの集合 $A=\{a+3,\ a+6\}$, $B=\{-a+5,\ -a+7\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ がある。ただし，a は整数の定数とする。

(1) 集合 A の2つの要素 $a+3$, $a+6$ がともに集合 C に属するとき，a の値を求めよ。

(2) $A\subset C$ または $B\subset C$ であるとき，$A\cap B=\phi$ となるような a の値を求めよ。ただし，ϕ は空集合を表す。

(配点 20)

$\boxed{\text{B3}}$ 数直線上に点Pがあり，はじめ点Pは原点にある。袋の中に1から4までの数字が書かれた玉がいずれも1個ずつ，合計4個あり，袋の中から玉を1個ずつ取り出していく。ただし，取り出した玉は元に戻さないものとする。取り出した玉に書かれた数だけ点Pを数直線の正の方向へ動かし，点Pの座標が7以上となったとき終了とする。終了までに取り出した玉の個数を n とし，終了したときの点Pの座標を X とする。

(1) $n=2$ となる確率を求めよ。

(2) $n=4$ となる確率を求めよ。また，$n\leqq 3$ となる確率を求めよ。

(3) $n=3$ となる事象を A, $X=7$ となる事象を B とする。事象 A と B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ を求めよ。また，A が起こったときの B が起こる条件付き確率を求めよ。

(配点 40)

$\boxed{\text{B4}}$ 座標平面上に半径 r $(r>1)$ の円 C と図形 $F: y=m|x-2|$ (m は正の定数) がある。また，円 C は点 $(2,\ 1)$ を通り，x 軸と y 軸に接している。

(1) r の値を求めよ。

(2) C と F が共有点を3個だけもつとき，m の値を求めよ。

(3) m は(2)で求めた値とする。x 軸に接し，F と共有点を1個だけもつような円の中心の軌跡を求めよ。

(配点　40)

【選択問題】　数学B受験者は，次の $\boxed{\text{B5}}$ ～ $\boxed{\text{B8}}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{\text{B5}}$ 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2,\ a_{n+1}=pa_n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。ただし，p は正の定数とする。

(1) $p=1$ のとき，a_{20} を求めよ。

(2) $a_3-a_1=15$ であるとき，p の値を求めよ。また，このとき，a_n を n を用いて表せ。

(3) (2)のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(a_k+3)$ を n を用いて表せ。

(配点　40)

$\boxed{\text{B6}}$ $\mathrm{OA}=2,\ \mathrm{OB}=1,\ \angle\mathrm{AOB}=120^\circ$ の $\triangle\mathrm{OAB}$ がある。点Cを $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で定め，点Pを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(0<k<1)$ で定める。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 線分ACを $1:2$ に内分する点をD，線分OCの中点をMとし，$\triangle\mathrm{PDM}$ の重心をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $k,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ。また，点Gが辺OB上にあるとき，k の値を求めよ。

(3) (2)の点Gが辺OB上にあるとき，点Gから直線PDに引いた垂線と直線PDとの交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ と表されるとき，実数 t の値を求めよ。

(配点　40)

B7 3 次関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+8$（a, b は実数）があり，$f'(1)=0$ である。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 方程式 $f'(x)=0$ を解け。また，$f(x)$ が $x=1$ で極小値をとるとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) (2)のとき，$f(x)$ の極大値を M，極小値を m とする。M を a を用いて表せ。さらに，m が正のとき，M のとり得る値の範囲を求めよ。（配点 40）

B8 2 つの関数 $f(x)=2^x$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ がある。

(1) $f(0)$，$g(0)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=g(x)$ を解け。また，$f(\alpha)-g(\alpha)=31$ を満たす α の値を求めよ。

(3) (2)の α に対して，曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と直線 $y=f(\alpha)$ で囲まれた部分 D（境界線を含む）を図示せよ。また，D に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，格子点とは x 座標，y 座標がともに整数である点のことである。（配点 40）