2018 1月

数　学　B　問　題

(120 分)

【必答問題】　数学B受験者は $\boxed{\text{B}1}$, $\boxed{\text{B}2}$, $\boxed{\text{B}3}$, $\boxed{\text{B}4}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B}1}$ 2次関数 $f(x)=x^2-4ax-3a-2$ がある。ただし，a は $0<a<1$ を満たす定数とする。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表せ。

(2)　$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とするとき，M, m を a を用いて表せ。また，$M-m=8$ を満たす a の値を求めよ。　(配点　20)

(1) $(2a, -4a^2-3a-2)$

(2) $M=5a+2$, $m=-4a^2-3a-2$

$a=-1\pm\sqrt{2}$

$\boxed{\text{B}2}$ α, β は $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ を満たしている。

(1)　$\sin\alpha$, $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。また，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

(2)　$\sin(2\alpha+\beta)$ の値を求めよ。　(配点　20)

(1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$, $\sin2\alpha=\dfrac{8}{17}$

(2) $\sin(2\alpha+\beta)=\dfrac{36}{85}$

B3 立方体のさいころに1，−1，＊の目が2つずつ書かれている。点Pは最初，数直線上の原点Oにある。このさいころを投げて，以下のルールに従い点Pを数直線上で移動させる。

【ルール】 1の目が出たときは，点Pを正の向きに1だけ移動させる。
−1の目が出たときは，点Pを負の向きに1だけ移動させる。
＊の目が出たときは，点Pを原点Oに移動させる。

(1) さいころを2回投げたとき，点Pの座標が2である確率と1である確率をそれぞれ求めよ。 $\frac{1}{9}$

(2) さいころを3回投げたとき，点Pの座標が2である確率と1である確率をそれぞれ求めよ。 $\frac{2}{9}$

(3) さいころを3回投げたとき，点Pの座標が負となる確率を求めよ。また，さいころを3回投げて点Pの座標が負であるとき，2回目に＊が出ていた条件付き確率を求めよ。

$\frac{8}{27}$，$\frac{3}{8}$

（配点 40）

B4 座標平面上において，原点Oを中心とする半径5の円をC_1とし，円C_1上の点A(3, 4)における円C_1の接線をℓとする。また，円C_1と点Aで外接する半径5の円をC_2とする。

(1) 接線ℓの方程式を求めよ。また，円C_2の方程式を求めよ。

(2) 円C_1と円C_2の両方に接する接線は，直線ℓを含めて3本ある。直線ℓ以外の接線のうちy切片が正である接線mの方程式を求めよ。

(3) (2)の接線mと円C_1との接点をP，円C_2との接点をQとする。△OPQを原点Oの周りに1回転させる。このとき，辺PQが通過する領域のうち，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす部分をDとする。領域D内の点(x, y)に対して，$x+y$の最大値および最小値を求めよ。

（配点 40）

(1) ℓ: $3x+4y=25$，$(x-6)^2+(y-8)^2=25$

(2) m: $y=\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$

(3) Max $5\sqrt{5}$，Min 5.

【選択問題】 数学B受験者は，次の $\boxed{\text{B5}}$ ～ $\boxed{\text{B8}}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{\text{B5}}$ 等差数列 $\{a_n\}$：94，x，82，…… がある。また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=4$，$b_{n+1}=2b_n-2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1) x の値を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n を用いて表せ。

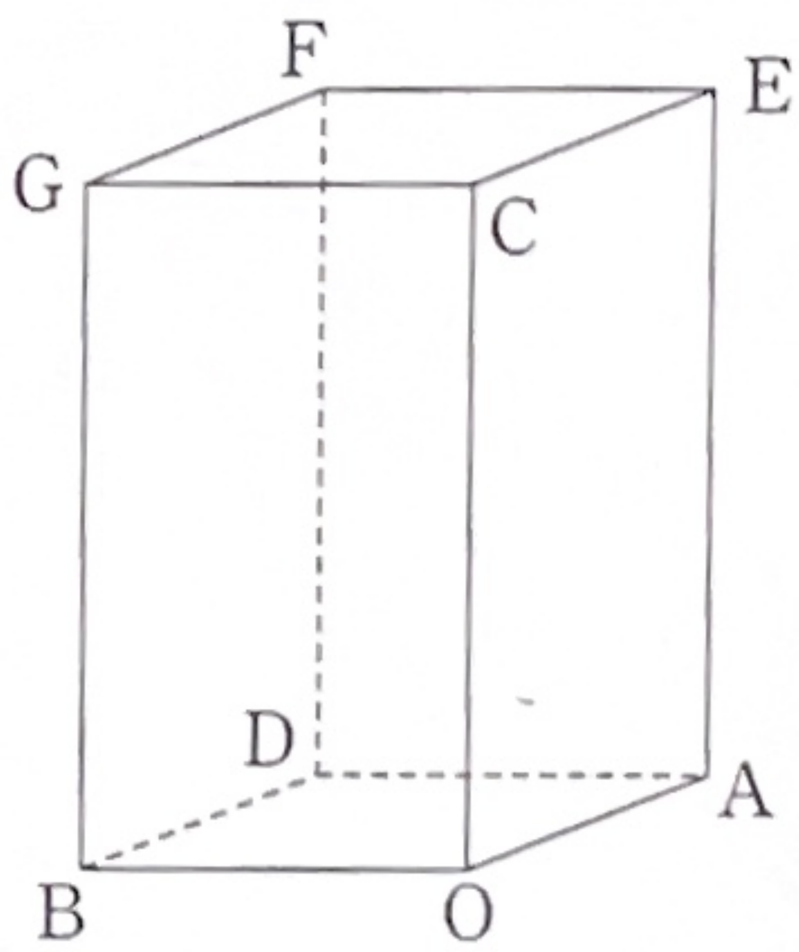
(3) 数列 $\{c_n\}$ は $\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{c_2}{a_2}+\dfrac{c_3}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{c_{n-1}}{a_{n-1}}+\dfrac{c_n}{a_n}=b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。このとき，c_1 を求めよ。また，一般項 c_n を n を用いて表せ。 （配点　40）

(1) $x=88$，$a_n=-6n+100$

(2) $b_n=2^n+2$

(3) $c_1=376$，$c_n=2^n(50-3n)$

$\boxed{\text{B6}}$ 直方体 OADB−CEFG があり，OA＝OB＝1，OC＝2，辺 EF の中点を M とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。



(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) 平面 ABC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s$，$t$ は実数）とする。このとき，$\overrightarrow{OP}$ を s，t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，点 P が線分 OM 上にあるとき，s，t の値をそれぞれ求めよ。

(3) (2)の点 P が線分 OM 上にあるとき，頂点 B から線分 PD に垂線を引き交点を H とする。$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。 （配点　40）

(1) $\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2) $\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$，$s=\frac{1}{5}$，$t=\frac{2}{5}$

(3) $\overrightarrow{OH}=\frac{32}{41}\vec{a}+\frac{29}{41}\vec{b}+\frac{6}{41}\vec{c}$

B7 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$（a，bは実数）は $f(2)=3$，$f'(3)=0$ を満たしている。

(1) a，bの値を求めよ。

(2) $-1\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値，最小値とそのときのxの値を求めよ。

(3) xについての3次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=t$ が異なる3つの実数解をもつとき，定数tのとり得る値の範囲を求めよ。またそのとき，3つの解の整数部分をl，m，nとする。$l+m+n=4$ となるようなtの値の範囲を求めよ。ただし，実数pの整数部分とは$k\leqq p<k+1$（kは整数）を満たすkの値である。

（配点　40）

(1) $a=-6, b=9$

(2) Max 5 $(x=1, 4)$，Min -15 $(x=-1)$

(3) $1<t<5$，$3<t<5$

B8 関数 $y=(\log_2 2x)\left(\log_4 \dfrac{x}{8}\right)$ がある。

(1) $x=32$，$x=2$ のとき，yの値をそれぞれ求めよ。

(2) $t=\log_2 x$ とするとき，$\log_2 2x$，$\log_4 \dfrac{x}{8}$ をそれぞれtを用いて表せ。

(3) aは $a>\dfrac{1}{8}$ を満たす定数とする。$\dfrac{1}{8}\leqq x\leqq a$ におけるyの最小値が $-\dfrac{15}{8}$ であるとき，aの値を求めよ。

（配点　40）

(1) $y=6$，$y=-2$

(2) $\log_2 2x=1+t$，$\log_4 \dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{2}(t-3)$

(3) $a=\sqrt{2}$