

数学問題

2013 (1月)
1-1-2013
(100分)

【必答問題】 次の **1**, **2**, **3** は全問解答せよ。

1 次の を正しくうめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$ を展開し、整理すると となる。

(2) 不等式 $5(x-2) \leq 2(x+1)$ の解は である。

(3) 2次方程式 $2x^2 - 2x + a + 1 = 0$ (a は定数) が重解をもつとき、 $a =$ であり、

そのときの重解は $x =$ である。

(4) 次の (イ), (ロ) にあてはまるものを、下の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) x, y は実数とする。 $x > 4$ かつ $y > 4$ であることは、 $x + y > 8$ であるための (イ)。

(ii) $\triangle ABC$ において、 $\angle A < 90^\circ$ であることは、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための

(ロ)。

①必要十分条件である

①必要条件であるが、十分条件ではない

②十分条件であるが、必要条件ではない

③必要条件でも十分条件でもない

(配点 20)

2 2つの不等式

$$x^2 - (a+1)x + a > 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|x-2| < 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

がある。ただし、 a は定数とする。

(1) $a = 3$ のとき、不等式①を解け。

(2) 不等式②を解け。また、 $a < 1$ のとき、不等式①を解け。

(3) 不等式①、②を同時に満たす整数 x がちょうど4個存在するような a の値の範囲を求めよ。

(配点 20)

3 2つの2次関数 $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$, $g(x) = x^2 - 2(k+1)x + 3k^2 - 6$ がある。ただし, k は定数とする。

(1) $g(x)$ の最小値を k を用いて表せ。

(2) $k \geq \frac{1}{2}$ とする。 $k \leq x \leq 3k$ における $f(x)$ の最大値を k を用いて表せ。

(3) $k \geq \frac{1}{2}$ とする。 $k \leq x \leq 3k$ における $f(x)$ の最大値を M , $k \leq x \leq 3k$ における $g(x)$ の最小値を m とする。 $M < m$ を満たす k の値の範囲を求めよ。 (配点 20)

【選択問題】 次の **4**, **5**, **6**, **7** のうちから2題を選んで解答せよ。

4 $AB = 4$, $AC = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$ の $\triangle ABC$ がある。辺 BC (両端を除く) 上の点 P から,

辺 AB , AC に垂線を引き, その交点をそれぞれ Q , R とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。また, $PQ = 2$ のとき, 線分 PR の長さを求めよ。

(3) $PQ = 2$ のとき, 線分 QR の長さを求めよ。また, 線分 AP の長さを求めよ。

(配点 20)

5 袋の中に赤玉1個, 青玉2個, 白玉3個の合計6個の玉が入っている。この袋の中から玉を1個取り出し色を確かめてから玉を袋に戻す。この試行を繰り返し, 青玉を2回取り出したとき, または白玉を2回取り出したときに試行を終了する。

(1) 2回目の試行で青玉を取り出して, ちょうど2回で試行が終了する確率を求めよ。

(2) 3回目の試行で青玉を取り出して, ちょうど3回で試行が終了する確率を求めよ。また, ちょうど3回で試行が終了する確率を求めよ。

(3) ちょうど4回で試行が終了する確率を求めよ。

(配点 20)

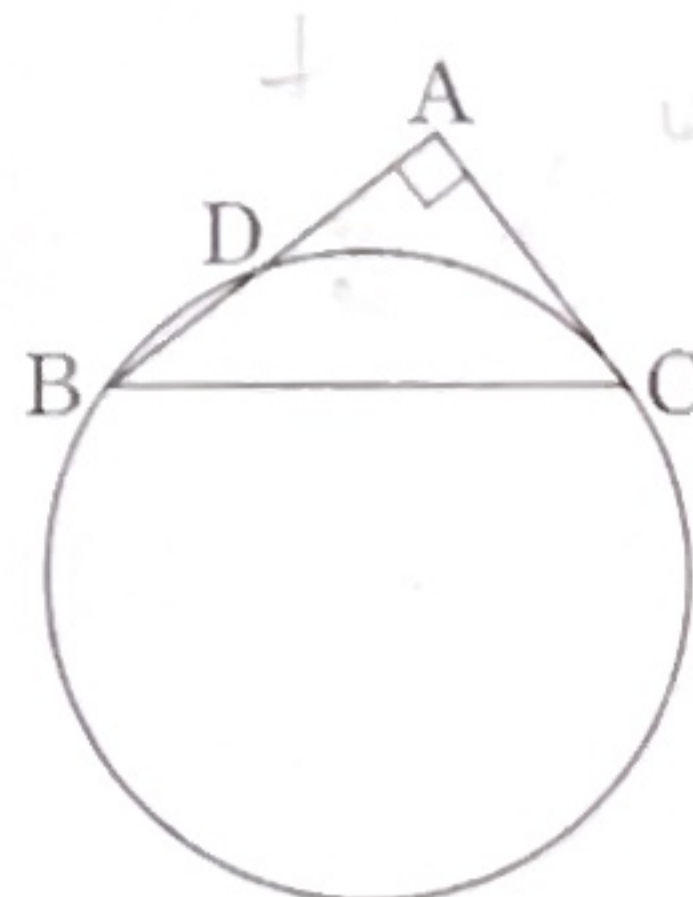
(選択問題は次ページに続く。)

6 2つの自然数 x, y がある。 x, y の最大公約数を G , 最小公倍数を L で表す。

- (1) $x=84, y=98$ とする。このとき, G の値を求めよ。また, L の値を求めよ。
- (2) x, y が, $xy=432, L=72$ を満たしている。このとき, G の値を求めよ。また, x, y の組をすべて求めよ。ただし, $x>y$ とする。
- (3) x, y が, $x+y=9G$ を満たしている。このとき, すべての x, y の組に対して, $\frac{y}{x}$ の値を求めよ。ただし, $x>y$ とする。

(配点 20)

7 図のように $AB=4, BC=5, \angle BAC=90^\circ$ の直角三角形 ABC と, 点 B を通り, 直線 AC と点 C で接する円 O がある。また, 円 O と辺 AB の交点のうち, B でない方の点を D とする。



- (1) 辺 AC の長さを求めよ。また, 線分 AD の長さを求めよ。
- (2) $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC の交点を E とするとき, 線分 BE の長さを求めよ。
- (3) (2) のとき, 線分 BE と線分 CD の交点を F とする。このとき, $\frac{BF}{FE}$ の値を求めよ。また, 四角形 $ADFE$ の面積を求めよ。

(配点 20)