2017年 1月
1-1-2017

数 学 問 題

(100分)

【必答問題】 次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $a=3-2\sqrt{2}$ とする。$\dfrac{1}{a}$ の分母を有理化して簡単にすると $\boxed{(ア)}$ となる。

また，$a^2+\dfrac{1}{a^2}$ を計算すると $\boxed{(イ)}$ となる。

(2) 2次関数 $y=x^2-8x+k$（k は定数）の $2\leqq x\leqq 5$ における最小値が -6 であるとき，

$k=\boxed{(ウ)}$ であり，y の最大値は $\boxed{(エ)}$ である。

(3) 不等式 $\dfrac{5-x}{6}\geqq 3-\dfrac{x}{2}$ の解は $\boxed{(オ)}$ である。

(4) 次の $\boxed{(カ)}$ にあてはまるものを，下の **1**～**4** のうちから一つ選べ。

a, b は実数とする。$a>1$ かつ $b>1$ であることは $ab>1$ であるための $\boxed{(カ)}$。

1 必要十分条件である

2 必要条件であるが，十分条件ではない

3 十分条件であるが，必要条件ではない

4 必要条件でも十分条件でもない

(配点 20)

$\boxed{2}$ 2つの不等式

$x^2-(4+a)x+4a\leqq 0$ ……①

$|2x-7|\leqq 5$ ……②

がある。ただし，a は定数とする。

(1) $a=9$ のとき，不等式①を解け。 $4\leqq x\leqq 9$

(2) 不等式②を解け。また，$a<1$ のとき，不等式①，②をともに満たす x の値の範囲を求めよ。 $1\leqq x\leqq 6$ $1\leqq x\leqq 4$

(3) 不等式①，②をともに満たす整数 x がちょうど3個存在するような a の値の範囲を求めよ。 $1<a\leqq 2$, $6\leqq a$

(配点 20)

$\boxed{3}$ 2次関数 $f(x)=2x^2-4ax+5$ があり，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に1，y 軸方向に $-5a-2$ だけ平行移動したグラフを表す2次関数を $y=g(x)$ とする。ただし，a は正の定数とする。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。 $(a,\ -2a^2+5)$

(2) $y=g(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。また，$y=g(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分において1つずつ共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。 $\frac{1}{2} \leqq a$ / $5<a$

(3) $y=g(x)$ のグラフが x 軸の $0<x<3$ の部分とただ1つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。 $a=\frac{1}{2}$，$\frac{11}{13} \leqq a < 5$

（配点　20）

【選択問題】 次の $\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ のうちから2題を選んで解答せよ。

$\boxed{4}$ $AC=8$，$BC=7$ の鋭角三角形ABCがあり，その外接円の半径は $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ である。

(1) $\sin B$ の値を求めよ。 $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

(2) $\cos B$ の値を求めよ。また，辺ABの長さを求めよ。 $\cos B=\frac{1}{7}$，$AB=5$

(3) 平面ABC上にない点Oから平面ABCに下ろした垂線と平面ABCとの交点をHとする。$\angle OBH=45^\circ$，$\angle OCH=30^\circ$，$\angle BHC=150^\circ$ であるとき，線分OHの長さを求めよ。また，四面体OABCの体積を求めよ。 $\frac{10\sqrt{21}}{3}$

（配点　20）

$\boxed{5}$ Aの袋には，①，③，③，⑥，⑥の5個の球が入っており，Bの袋には，①，②，④，④の4個の球が入っている。A，Bの袋から球を1個ずつ取り出し，取り出された球に書かれた2つの数の最大値を記録し，球をそれぞれの袋に戻す。この試行を繰り返す。

(1) 1回の試行で6が記録される確率を求めよ。 $\frac{2}{5}$

(2) 3回の試行で1が1回，6が2回記録される確率を求めよ。 $\frac{3}{125}$

(3) 3回の試行で記録された3つの数の積が36となる確率を求めよ。 $\frac{21}{250}$

（配点　20）

（問題は次ページに続く。）

6　2つの自然数 x，y があり，$x > y$ とする。また，x，y の最大公約数を G とする。

(1)　$x = 437$，$y = 323$ とする。このとき，G の値を求めよ。　$G=19$

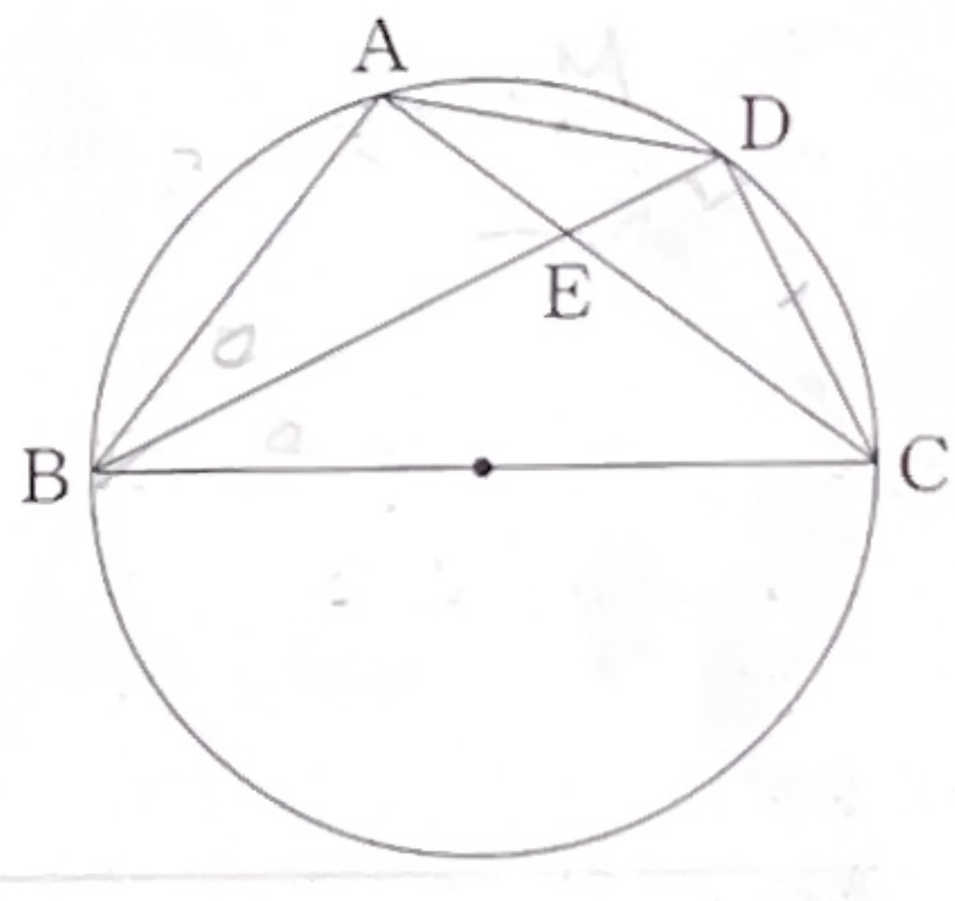
(2)　$x + y = 200$ で，G が2桁の奇数となるような G の値を求めよ。また，そのときの自然数 x，y の組 (x, y) をすべて求めよ。　$G=25$，$(x,y)=(175,25),(125,75)$

(3)　$ab - 4a + 6b = 0$ となるような自然数 a，b の組 (a, b) をすべて求めよ。また，x，y の最小公倍数を L とする。$4x - 6y = L$ を満たすとき，x，y の値をそれぞれ G を用いて表せ。

(配点　20)

$(a,b)=(8,3),(6,2),(2,1)$　$x=2G$，$y=G$

7　右の図のように，AB＝3，BC＝5，∠ABD＝∠CBD の四角形 ABCD があり，辺 BC を直径とする円に内接している。また，対角線 AC，BD の交点を E とする。



(1)　線分 AE の長さを求めよ。　$AE=\frac{3}{2}$

(2)　線分 BE の長さを求めよ。また，線分 DE の長さを求めよ。$BE=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，$DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(3)　辺 AD の中点を M とし，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。このとき，$\frac{DP}{PE}$ の値を求めよ。また，△DMP の面積を求めよ。　(配点　20)

$\frac{DP}{PE}=\frac{8}{5}$，$\triangle DMP=\frac{3}{13}$