

24-2016

2016 (7月)

数学 Y 問題

(120分)

【必答問題】 Y1 ~ Y4 は全員全問解答せよ。

Y1 $0 \leq x \leq 3$ とする。関数 $y = 2^{2x-1} - 3 \cdot 2^x + 4$ がある。

- (1) $t = 2^x$ とおく。 t のとり得る値の範囲を求めよ。また、 y を t を用いて表せ。
- (2) y の最大値、および最小値を求めよ。また、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(配点 20)

$$(1) 1 \leq t \leq 8, y = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 4$$

$$(2) \text{Max } 12 (x=3) \\ \text{Min } -\frac{1}{2} (x=\log_2 3)$$

Y2 座標平面上に、 x 軸と 2 点で交わる円 $K: x^2 + y^2 - 4x - 2ay + 3 = 0$ (a は定数) がある。円 K と x 軸との交点を A, B とし、円 K の中心を C とする。ただし、(点 A の x 座標) < (点 B の x 座標) である。このとき、 $\triangle ABC$ の重心 G の座標は $(2, 1)$ である。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 直線 AG と円 K の交点のうち A でない方を D とする。点 D における円 K の接線の方程式を求めよ。

(配点 20)

$$(1) a=3$$

$$(2) 3x + y = 19$$

Y3 $\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}$ の 9 枚のカードが袋の中にある。この袋の中から同時に 3 枚のカードを取り出し、その 3 枚のカードに書かれた数の積を X とする。また、次の規則によって Y を定める。

〔規則〕

(ア) 3 枚のカードに書かれた数がすべて異なるときは、そのうち最大の数を Y とする。

(イ) 3 枚のカードに書かれた数のうち、2 つが同じ数であるときは、もう 1 つの数を Y とする。

(1) $X=3$ である確率を求めよ。

(2) $Y=3$ である確率を求めよ。

(3) X が偶数であったとき、 $Y=5$ である条件付き確率を求めよ。

(配点 40)

$$(1) \frac{1}{84}, (2) \frac{1}{12}, (3) \frac{9}{40}$$

Y4 座標平面上に放物線 $C: y = -x^2 + 4$ があり、放物線 C 上の点 $A(-2, 0)$ を通り傾きが m ($0 < m < 2$) である直線を l とする。放物線 C と x 軸で囲まれた部分を D とする。

(1) D のうち、直線 l の上側で、 y 軸の左側にある部分の面積を S_1 とする。 S_1 を m を用いて表せ。

(2) D のうち、直線 l の下側で、 y 軸の右側にある部分の面積を S_2 とする。 S_2 を m を用いて表せ。

(3) (1), (2) のとき、 $S = S_1 + S_2$ とする。 S を最大にする m の値とそのときの S の値を求めよ。

(配点 40)

$$(1) S_1 = \frac{16}{3} - 2m$$

$$(2) S_2 = \frac{1}{6} (m^3 - 12m^2 + 36m)$$

$$(3) m = 4 + 2\sqrt{3} \quad \therefore S = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合 (P.8 ~ 9)】	Y5 ~ Y7 の3題中2題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」, 「複素数平面」, 「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合 (P.10 ~ 11)】	Y7 ~ Y10 の4題中2題を解答せよ。

Y7 $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ である $\triangle OAB$ がある。辺 AB を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を C , 辺 OA を $2:1$ に内分する点を D とする。また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

- (1) \overrightarrow{OC} を \vec{a} , \vec{b} , t を用いて表せ。また, \overrightarrow{CD} を \vec{a} , \vec{b} , t を用いて表せ。
- (2) $OA \perp CD$ を満たしているとき, t の値を求めよ。
- (3) (2) のとき, 点 E を $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ を満たす点とし, 線分 OC と線分 BE の交点を P とする。
 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。また, $\triangle CPE$ の面積を求めよ。 (配点 40)

$$(1) \overrightarrow{OC} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \quad \overrightarrow{CD} = (t - \frac{1}{3})\vec{a} - t\vec{b}$$

$$(2) t = \frac{1}{2}$$

$$(3) \overrightarrow{OP} = \frac{5}{14}\vec{a} + \frac{5}{14}\vec{b}, \quad \triangle CPE = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

Y8 O を原点とする座標平面上に, 点 $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ を通る楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) がある。楕円 C の2つの焦点のうち, x 座標の大きい方を F とする。

- (1) a の値を求めよ。また, 点 F の座標を求めよ。
- (2) 線分 OF 上 (両端を除く) の点 $(t, 0)$ を通り, 傾きが1である直線を l とする。また, 楕円 C と直線 l の交点を P, Q とし, その x 座標をそれぞれ p, q ($p > q$) とする。
 $p - q$ を t を用いて表せ。
- (3) (2) のとき, $\triangle OPQ$ の面積を t を用いて表せ。また, 点 $(t, 0)$ が線分 OF 上 (両端を除く) を動くとき, $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。 (配点 40)

$$(1) a = 2, \quad F(\sqrt{3}, 0)$$

$$(2) p - q = \frac{4}{5}\sqrt{5-t^2}$$

$$(3) \triangle OPQ = \frac{2}{5}t\sqrt{5-t^2} \quad \text{Max} \quad \left(t = \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

Y9 $\alpha = -1 + \sqrt{3}i$, $\beta = \frac{2i}{\alpha}$ とする。ただし, i は虚数単位である。

- (1) α を $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形に表すとき, r, θ の値を求めよ。ただし, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (2) β^n が純虚数となるような最小の自然数 n の値を求めよ。
- (3) n は(2)で求めた値とする。複素数平面上で $A(\alpha)$, $B(\beta^n)$ とし, 線分 AB を対角線とする正方形の他の2つの頂点を $C(\gamma)$, $D(w)$ とする。ただし, $(\gamma \text{ の実部}) > (w \text{ の実部})$ とする。 γ を求めよ。また, 直線 CD と虚軸との交点を表す複素数を求めよ。 (配点 40)

$$(1) r=2, \theta=\frac{2}{3}\pi$$

$$(2) n=3$$

$$(3) \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i), \quad \frac{3\sqrt{3}-3}{4}i.$$

Y10 数列 $\{a_n\}$ は公比が1より大きい等比数列で, $a_2=6$, $a_1+a_3=15$ を満たしている。

また, 数列 $\{b_n\}$ は $b_1=4$, $b_{n+1}-b_n=2 \cdot 3^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たしている。

- (1) a_n を n を用いて表せ。
- (2) b_n を n を用いて表せ。
- (3) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とし, r は正の実数とする。数列 $\left\{ \frac{r^n}{b_n + S_n} \right\}$ の極限を調べよ。 (配点 40)

$$(1) a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$(2) b_n = 3^{n+1} + 3$$

$$(3) \begin{array}{ll} 0 < r < 3 & 0 \\ r = 3 & 3 \\ r > 3 & \infty \end{array}$$