2016 (1月)

# 数　学　B　問　題

(120 分)

【必答問題】　数学B受験者は $\boxed{\text{B1}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{B3}}$, $\boxed{\text{B4}}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B1}}$ 2次関数 $f(x)=x^2+2ax-3a$ があり，$y=f(x)$ のグラフは $x$ 軸に接している。ただし，$a$ は0でない定数とする。

(1)　$a$ の値を求めよ。　$a=-3$

(2)　$p$，$q$ は定数とし，$g(x)=f(x)+px+q$ とおく。$y=g(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に1だけ平行移動したものであるとき，$p$，$q$ の値をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

$p=2$, $q=-4$

$\boxed{\text{B2}}$ 関数 $y=\cos 2x+\cos x+3$ がある。ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする。

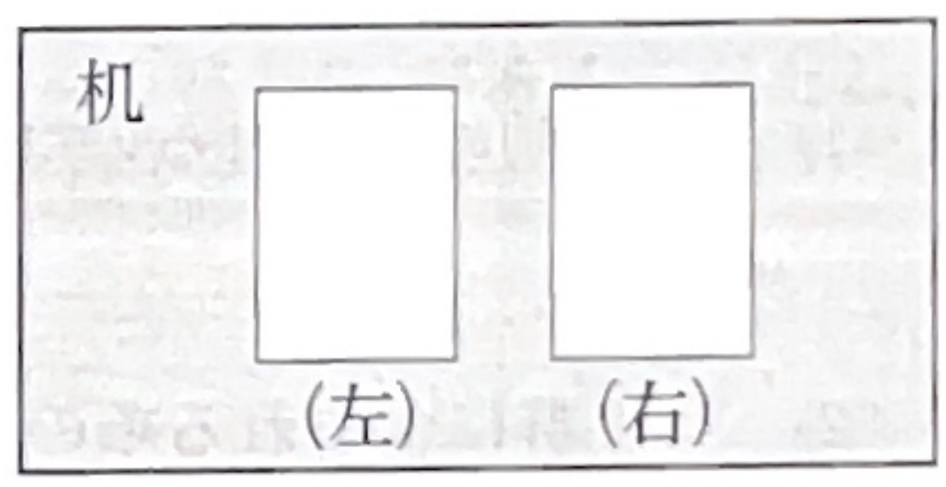
(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y$ の値を求めよ。また，$y$ を $\cos x$ の式で表せ。　$y=2$

(2)　$y$ の最小値を求めよ。また，$y$ が最小となるときの $x$ の値に対して $\sin 2x$ の値を求めよ。

(配点　20)

(2) $y=2\cos^2 x+\cos x+2$ , (3) $\dfrac{15}{8}$ , $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

$\boxed{\text{B3}}$ 片面を白色に，もう片面を黒色に塗った板が2枚あり，最初この2枚の板を上面が左から「白白」の状態で机の上に左右に並べて置いてある。次の【操作】を3回繰り返してこの板を裏返していく。




【操作】赤玉2個，青玉2個の合計4個の玉が入った袋から同時に2個の玉を取り出す。取り出した玉が

赤玉2個の場合は左側の板だけを裏返す。

青玉2個の場合は右側の板だけを裏返す。

赤玉と青玉の場合は2枚とも裏返す。

ただし，取り出した玉は1回ごとに袋に戻すものとする。

(1)　1回の操作後，2枚の板の上面が左から「白黒」の状態である確率を求めよ。

(2)　2回の操作後，2枚の板の上面が左から「黒黒」の状態である確率を求めよ。

(3)　3回の操作後，2枚の板の上面が左から「白黒」の状態である確率を求めよ。また，3回の操作後，2枚の板の上面が左から「白黒」の状態であったとき，左側の板が1回も裏返らなかった条件付き確率を求めよ。

(配点　40)

(1) $\dfrac{1}{6}$, (2) $\dfrac{1}{18}$, (3) $\dfrac{13}{54}$, $\dfrac{1}{52}$

$\boxed{\text{B4}}$ 座標平面上に円 $C : x^2+y^2-2ax-2(a-2)y+2a^2-4a+2=0$ がある。ただし，$a$ は実数とする。また，不等式 $-4 \leqq x+y \leqq 8$ の表す領域を $D$ とする。

(1) 円 $C$ の中心の座標と半径を求めよ。また，$a$ がすべての実数値をとって変化するとき，円 $C$ の中心の軌跡の方程式を求めよ。 $(a, a-2)$，$\sqrt{2}$，$y=x-2$

(2) 円 $C$ が領域 $D$ に含まれるとき，$a$ のとり得る値の範囲を求めよ。 $0 \leqq a \leqq 4$

(3) $a$ が(2)の範囲で変化するとき，円 $C$ が通過する領域を $E$ とする。点 $(x, y)$ が領域 $E$ 内を動くとき，$x^2+(y+4)^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ。 (配点 40)

Max $54+4\sqrt{26}$ Min $6-4\sqrt{2}$

**【選択問題】** 数学B受験者は，次の $\boxed{\text{B5}}$ ～ $\boxed{\text{B8}}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{\text{B5}}$ 数列 $\{a_n\}$ : $-1,\ 2,\ -1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -1,\ \cdots\cdots$

があり，数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける。

$-1,\ 2 \mid -1,\ 2,\ -3,\ 4 \mid -1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6 \mid -1,\ \cdots\cdots$

第１群　第２群　第３群　第４群

ここで，自然数 $k$ に対して，第 $k$ 群は $2k$ 個の数 $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ \cdots\cdots,\ -(2k-1),\ 2k$ からなるものとする。

(1) 20 が初めて現れるのは第何群か求めよ。また，第 20 群の $-1$ は数列 $\{a_n\}$ の第何項か求めよ。

第10群　380項

(2) 第 $k$ 群に含まれる項の総和を求めよ。また，第 $k$ 群の $-1$ は数列 $\{a_n\}$ の第何項か求めよ。

$k$　$k(k-1)+1$ 項

(3) 数列 $\{a_n\}$ の第 2017 項は第何群に含まれているか求めよ。また，$\sum_{k=1}^{2017} a_k$ を求めよ。

第45群　971

(配点 40)

$\boxed{\text{B6}}$ $\triangle$OAB において，辺 AB を 1:4 に内分する点を C とする。また，点 P を $2\overrightarrow{\text{AP}}+3\overrightarrow{\text{BP}}=\vec{0}$ を満たすようにとり，点 Q を $\overrightarrow{\text{OQ}}=3\overrightarrow{\text{OP}}$ を満たすようにとる。

(1) $\overrightarrow{\text{OC}}$ を $\overrightarrow{\text{OA}}$，$\overrightarrow{\text{OB}}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\text{OP}}$ を $\overrightarrow{\text{OA}}$，$\overrightarrow{\text{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\text{QC}}$ を $\overrightarrow{\text{OA}}$，$\overrightarrow{\text{OB}}$ を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\text{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\text{OB}}|=1$，$|\overrightarrow{\text{OP}}|=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ であるとき，内積 $\overrightarrow{\text{OA}}\cdot\overrightarrow{\text{OB}}$ を求めよ。

(3) (2)のとき，辺 OA と直線 CQ の交点を R とする。$\overrightarrow{\text{OR}}$ を $\overrightarrow{\text{OA}}$ を用いて表せ。また，内積 $\overrightarrow{\text{OQ}}\cdot\overrightarrow{\text{OR}}$ を求めよ。 (配点 40)

(1) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{5}(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})$

(2) $\overrightarrow{QC}=-\frac{2}{5}(\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB})$　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$

(3) $\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\frac{9}{4}$

**B7** 3次関数 $f(x)=ax^3-2ax^2+bx+8a^2$ があり，$f'(2)=0$ を満たしている。ただし，$a$，$b$ は定数で，$a \neq 0$ とする。

(1) $b$ を $a$ を用いて表せ。 $b=-4a$.

(2) $a>0$ とする。$f(x)$ の極大値，極小値をそれぞれ $a$ を用いて表せ。また，このときの $x$ の値をそれぞれ求めよ。 極大 $8a^2+\frac{40}{27}a$ $\left(x=-\frac{2}{3}\right)$ 極小 $8a^2-8a$ $(x=2)$

(3) $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の共有点がちょうど3個となるような $a$ の値の範囲を求めよ。

$-\frac{5}{27}<a<0$

（配点　40）

**B8** 2つの関数 $f(x)=\log_3(x+5)+\log_3(7-x)$，$g(x)=4^x-(4^a+1)2^x+4^a$ がある。ただし，$a$ は定数とする。

(1) $f(4)$ の値を求めよ。また，$g(1)=0$ のとき，$a$ の値を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)<3$ を解け。

(3) $a>0$ とする。連立不等式 $\begin{cases} f(x)<3 \\ g(x)<0 \end{cases}$ を満たす整数 $x$ が1個だけ存在するような $a$ の値の範囲を求めよ。

（配点　40）

(1) $f(4)=3$ 　 $a=\frac{1}{2}$

(2) $-5<x<2$, $4<x<7$

(3) $\frac{5}{2}a<a\leqq 3$