

34-2019

2019 4月

数 学 Y 問 題

(120分)

【必答問題】 **Y1** ~ **Y4** は全員全問解答せよ。

Y1 2つの袋 X, Y があり, 袋 X には赤玉 3 個, 白玉 1 個が入っていて, 袋 Y には赤玉 2 個, 青玉 1 個が入っている。X, Y の袋の中から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した玉の色を記録してもとの袋の中に戻す操作を 2 回行う。

- (1) 赤色が 2 回, かつ青色が 2 回記録された確率を求めよ。
- (2) 青色が 2 回記録された確率を求めよ。また, 青色が 2 回記録されたとき, 記録された玉の色が 2 種類である条件付き確率を求めよ。 (配点 20)

Y2 関数 $f(x) = a \sin x + b \cos 2x$ (a, b は定数) があり, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ である。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) $0 \leq x < 2\pi$ のとき, $f(x) = -\frac{3}{2}$ となる x の値を求めよ。 (配点 20)

Y3 座標平面上に、放物線 $C: y = x^2 - x + 3$ がある。C上の点 A (1, 3) における Cの接線を ℓ とする。また、 ℓ と x 軸の交点を B とする。

- (1) ℓ の方程式を求めよ。
- (2) C上の点を P ($p, p^2 - p + 3$) (p は定数) とし、P を通り y 軸に平行な直線が ℓ と交わる点を Q とする。Q が線分 AB (両端の 2 点 A, B を除く) 上にあるとき、 $\triangle BPQ$ をつくり、 $\triangle BPQ$ の面積を T とする。 T を p を用いて表せ。また、 T が最大となるときの p の値を求めよ。
- (3) p を(2)で求めた値とする。Cと直線 ℓ 、および線分 BP で囲まれた部分の面積を求めよ。

(配点 40)

Y4 a を正の定数とする。O を原点とする座標平面上に、円 $C_1: x^2 + y^2 + 10x + 2y + 1 = 0$ と直線 $\ell: 3x + 4y = a$ があり、 C_1 と ℓ は接している。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) ℓ に関して C_1 と対称な円を C_2 とする。 C_2 の方程式を求めよ。
- (3) (2)のとき、O から C_2 に引いた接線のうち傾きが正であるものを m とする。また、 C_2 と m の接点を P とし、 C_2 上の点を Q とする。Q が P を除く C_2 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値とそのときの Q の座標を求めよ。

(配点 40)

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合 (P.10 ~ 11)】	Y5 ~ Y7 の 3 題中 2 題を解答せよ。
【数学Ⅲの「2次曲線」, 「複素数平面」, 「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合 (P.12 ~ 13)】	Y7 ~ Y10 の 4 題中 2 題を解答せよ。

Y7 平行四辺形 OACB があり, $OA = 3$, $OB = 2$, $\cos \angle AOB = -\frac{1}{6}$ である。対角線 AB

を 3:1 に内分する点を D とし, O から対角線 AB に引いた垂線と対角線 AB との交点を H とする。また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。また, \overrightarrow{OD} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 直線 OH と直線 DC の交点を E とする。 \overrightarrow{OE} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。また, 線分 DE の長さを求めよ。

(配点 40)

Y8 a, b を正の定数とする。楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は点 A (0, 1) を通り, その焦点の 1 つ

は F (1, 0) である。また, 直線 AF と C の 2 つの交点のうち, A と異なるものを B とする。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) B の座標を求めよ。また, 線分 AB の長さを求めよ。
- (3) 直線 AB に平行な直線 ℓ が C と第 1 象限において接するとき, C と ℓ の接点を P とする。 $\triangle PAB$ の面積を求めよ。

(配点 40)

Y9 x の 2 次方程式 $x^2 - 3x + 3 = 0$ の虚数解のうち、虚部が正であるものを α とし、 O を原点とする複素数平面上で、 α を表す点を A とする。また、 O を中心として A を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を B とし、点 B を表す複素数を β とする。

- (1) α, β をそれぞれ $a+bi$ (a, b は実数) の形に表せ。
- (2) β を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。また、 β^6 を計算せよ。
- (3) $\gamma = 1+i$ とする。不等式 $|\gamma^m| \leq |\beta^6|$ を満たすような自然数 m のうち、最大のものを M とする。また、 γ, γ^M を表す点をそれぞれ P, Q とする。3 点 P, Q, R が正三角形の頂点となるときの、点 R を表す複素数を $x+yi$ (x, y は実数) の形に表せ。 (配点 40)

Y10 数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} = a_n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たし、第 5 項から第 10 項までの和は 147 である。また、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n = 2b_n - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしている。

- (1) a_n を n を用いて表せ。
- (2) b_n を n を用いて表せ。
- (3) a_n を 2 で割ったときの余りを c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 $T_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{c_k}{b_k + 1}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) とするとき、 T_{2m} を m の式で表せ。また、 $\lim_{m \rightarrow \infty} T_{2m}$ を求めよ。

(配点 40)