

2014 (7A)

数 学 B 問 題

(100 分)

【必答問題】 数学B受験者は **B1**, **B2**, **B3** を全問解答せよ。**B1** 次の を正しくうめよ。解答欄には答えのみを記入せよ。(1) $2b^2 + b - 1$ を因数分解すると であり, $a^2 + 3ab + 2b^2 + b - 1$ を因数分解すると (イ) である。(2) 方程式 $|x-1|=2$ の解は, $x =$ (ウ) である。また, x を実数とするとき, $|x-1|=2$ は $x=3$ であるための (エ) 。 (オ) に当てはまるものを, 下の①~④のうちから1つ選べ。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが, 十分条件ではない

③ 十分条件であるが, 必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

(3) 2次関数 $f(x) = (x+a)(x+1)$ があり, $y=f(x)$ のグラフは点 $(2, -3)$ を通る。このとき, 定数 a の値は (カ) であり, $f(x)$ の $0 \leq x \leq 3$ における最小値は (キ) である。(4) 先生2人と生徒3人がいる。この5人が円卓に着席する方法は全部で (ク) 通りあり,このうち, 先生2人が隣り合う方法は全部で (ケ) 通りある。(5) 次のデータは, ある月の連続した12日間における各日の最低気温($^{\circ}\text{C}$)を並べたものである。

7, 5, 9, 7, 5, 6, 8, 7, 6, 4, 1, 3

このデータの範囲は (コ) ($^{\circ}\text{C}$) であり, 四分位範囲は (ク) ($^{\circ}\text{C}$) である。(配点 20)**B2** 袋の中に赤玉が3個, 白玉が3個, 青玉が3個の合計9個の玉があり, 赤玉と白玉にはそれぞれ1から3までの数字が1つずつ, 青玉には4から6までの数字が1つずつ書かれている。この袋から同時に4個の玉を取り出す。

(1) 赤玉2個と白玉2個を取り出す確率を求めよ。

 $\frac{1}{14}$

(2) 取り出した4個の玉の中に, 青玉が3個含まれる確率を求めよ。また, 取り出した4個の玉の中に, 青玉が2個だけ含まれる確率を求めよ。

 $\frac{1}{21}, \frac{5}{14}$

(3) 取り出した4個の玉に書かれている数字がすべて異なる確率を求めよ。

 $\frac{1}{21}$

(配点 20)

B3 $\triangle ABC$ において、 $AB=5$, $BC=3\sqrt{5}$, $\tan A = -\frac{3}{4}$ である。

(1) $\cos A$ の値を求めよ。 $\cos A = -\frac{4}{5}$

(2) 辺 AC の長さを求めよ。 $AC = 2$

(3) $\angle BCD = 90^\circ$ かつ $CD = \frac{\sqrt{5}}{2}$ である点 D を、直線 BC に関して点 A と同じ側にとり、

直線 AC と直線 BD との交点を E とする。線分 DE の長さを求めよ。

(配点 20)

$$DE = \frac{\sqrt{185}}{2}$$

【選択問題】 数学B受験者は、次の **B4** ~ **B8** のうちから2題を選んで解答せよ。

B4 x の3次式 $P(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$ があり、 $P(2) = 0$ である。ただし、 a , b は実数の定数である。

(1) b を a を用いて表せ。 $b = -2a + 8$

(2) $P(x)$ を因数分解せよ。また、方程式 $P(x) = 0$ が2つの虚数解をもつような a の値の範囲を求めよ。 $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x + a - 4)$ $a > 5$

(3) 方程式 $P(x) = 0$ が2つの虚数解をもち、この2つの虚数解が方程式 $x^3 + px^2 + px + 21 = 0$ (p は実数の定数) の解であるとき、 a , p の値を求めよ。 $a = 11$, $p = 1$ (配点 20)

B5 O を原点とする座標平面上に、点 $A(1, 3)$ と円 $K_1: x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ がある。また、円 K_1 と半径が等しく、点 O を中心とする円を K_2 とする。

(1) 円 K_2 の方程式を求めよ。

(2) 点 A から円 K_2 に引いた2本の接線と円 K_2 の接点をそれぞれ B , C とする。接点 B , C の座標を求めよ。ただし、点 B の y 座標は点 C の y 座標より大きいものとする。

(3) (2) のとき、直線 BC の方程式を求めよ。また、円 K_1 と中心が同じ円で、直線 BC から切り取る線分の長さが $2\sqrt{2}$ になる円を K_3 とする。点 P が円 K_3 の周上を動くとき、線分 AP の長さの最大値を求めよ。

(配点 20)

$$(1) x^2 + y^2 = 25$$

$$(2) B(-1, 2), C(2, 1)$$

$$(3) y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \quad AP = 5 + 2\sqrt{3}$$

B6 関数 $y = a \cos^2 \theta + 4\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3$ ……① (a は定数) がある。また、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$y = 3$ である。

(1) a の値を求めよ。 $a = -4$

(2) ①を $y = A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C$ (A, B, C は定数) の形に表せ。

(3) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ における関数①の最大値と最小値、およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。 (配点 20)

$$(2) y = 2\sqrt{3} \sin 2\theta - 2 \cos 2\theta + 1$$

$$(3) \text{Max } 5 \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right), \text{Min } -2\sqrt{3} \left(\theta = \frac{4}{3}\pi \right)$$

B7 等差数列 $\{a_n\}$ があり、 $a_4 = 6$, $a_{10} = 12$ を満たしている。また、数列 $\{b_n\}$ があり、 $b_n = 2^{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。 $a_n = n + 2$

(2) $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ とするとき、 S_n を n を用いて表せ。 $S_n = 8 \cdot (2^n - 1)$

(3) 自然数 n を 4 で割った余りを c_n とし、 $T_n = \sum_{k=1}^{4n} b_k c_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 T_1 の値を求めよ。また、 T_n を n を用いて表せ。 (配点 20)

$$T_1 = 136, T_n = \frac{136}{15} (16^n - 1)$$

B8 $OA = 4$ である $\triangle OAB$ があり、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は内積の関係式 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 20$ を満たしている。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値を求めよ。 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$

(2) $\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OA}$ (k は実数) である点 P が $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BP}$ を満たすとき、 k の値を求めよ。

(3) (2) のとき、辺 AB を $2:1$ に内分する点を C 、直線 OC と直線 BP の交点を D とする。

このとき、 \overrightarrow{OD} を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。さらに、 $|\overrightarrow{OD}| = 2$ のとき、 $|\overrightarrow{OB}|$ を求めよ。

$$(2) k = \frac{1}{4}$$

$$(3) \overrightarrow{OD} = \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB}, |\overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{7}$$