2015 ①B

# 数 学 B 問 題

(120分)

【必答問題】 数学B受験者は $\boxed{\text{B1}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{B3}}$, $\boxed{\text{B4}}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B1}}$ 2次関数 $y=ax^2-2ax+3$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ がある。ただし，$a$ は0でない定数とする。

(1) $a=1$ のとき，$y$ の最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $y$ の最小値が1のとき，$a$ の値を求めよ。

(配点 20)

(1) Max 6 $(x=-1)$ Min 2 $(x=1)$ (2) $a=-\frac{2}{3}, 2$

$\boxed{\text{B2}}$ 実数全体の集合 $U$ を全体集合とし，その部分集合 $A=\{x\mid x\leqq -a,\ a\leqq x\}$，$B=\{x\mid x^2-7x+10<0\}$ がある。ただし，$a>0$ とする。

(1) $a=3$ のとき，集合 $A\cap B$ を求めよ。 $\{x\mid 3\leqq x<5\}$.

(2) $a=7$ とする。集合 $\overline{A}$ に属する整数 $x$ の個数を求めよ。また，集合 $\overline{A\cup B}$ に属する整数 $x$ の個数を求めよ。ただし，集合 $A$ の補集合を $\overline{A}$ で表し，集合 $A\cup B$ の補集合を $\overline{A\cup B}$ で表す。 13こ，11こ

(配点 20)

$\boxed{\text{B3}}$ A，Bの2チームが毎日1回ずつ試合を行い，先に3勝した方が優勝として試合を終了する。ただし，各試合において引き分けはないものとする。1日目の試合でAが勝つ確率とBが勝つ確率はともに $\frac{1}{2}$ であるが，Aが勝った翌日にBが勝つ確率とBが勝った翌日にAが勝つ確率はともに $\frac{2}{3}$，Aが勝った翌日にもAが勝つ確率とBが勝った翌日にもBが勝つ確率はともに $\frac{1}{3}$ である。

(1) 3日目でAが優勝する確率を求めよ。 $\frac{1}{18}$

(2) 4日目でAが優勝する確率を求めよ。 $\frac{5}{27}$

(3) 1日目でAが勝ち，5日目でAが優勝する確率を求めよ。また，1日目でAが勝ち，Aが優勝する確率を求めよ。 $\frac{4}{27}$，$\frac{19}{54}$

(配点 40)

**B4** 座標平面上に4点 P(1, 0), Q(0, 2), R(−1, 0), S(0, −2) があり，四角形 PQRS の周および内部を領域 $D$ とする。また，中心が点 C(2, $a$)，半径 $r$ の円を $K$ とする。ただし，$a$，$r$ は正の定数とする。

(1) 点 P を通り直線 PQ に垂直な直線の方程式を求めよ。 $y=-2x+2$

(2) $a=1$ とする。円 $K$ と領域 $D$ が共有点をもつとき，$r$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 円 $K$ と領域 $D$ が共有点をもつとき，$r$ の最小値を $a$ を用いて表せ。 （配点 40）

(2) Max $\sqrt{13}$, Min $\frac{3}{\sqrt{5}}$ , (3) $r=\sqrt{a^2-4a+8}$

【選択問題】 数学B受験者は，次の **B5** ～ **B8** のうちから2題を選んで解答せよ。

**B5** 等比数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2+a_3=12$，$a_3=3a_2$ を満たしている。また，数列 $\{b_n\}$ があり，$b_1=3$，$b_{n+1}-b_n=2$ （$n=1$, 2, 3, ……） を満たしている。

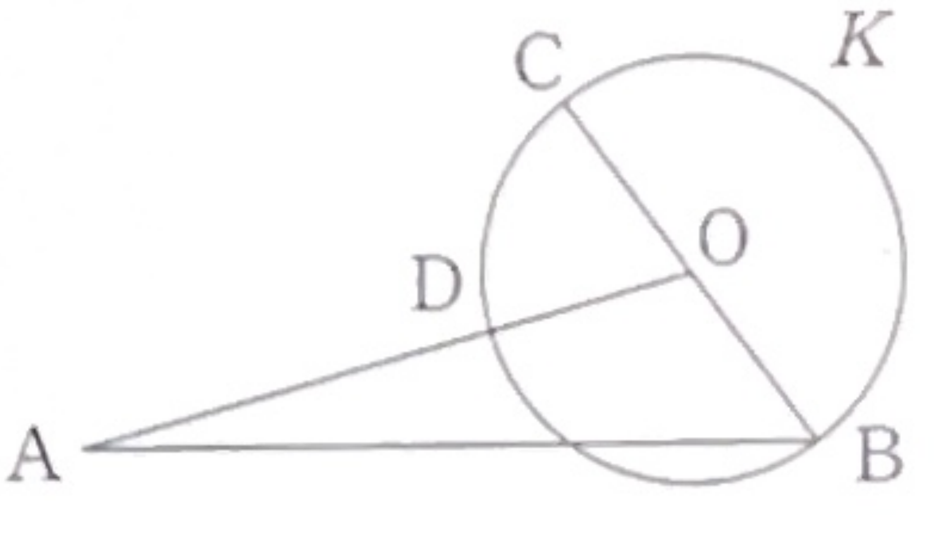
(1) 等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を $n$ を用いて表せ。 $a_n=3^{n-1}$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 $b_n$ を $n$ を用いて表せ。また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を $n$ を用いて表せ。 $b_n=2n+1$ , $S_n=n^2+2n$

(3) (2)のとき，$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k}+\frac{1}{S_{2k}}\right)$ を $n$ を用いて表せ。 （配点 40）

$\frac{3}{8}(3^{2n}-1)+\frac{n}{4(n+1)}$

**B6** 平面上に OA＝5，OB＝2 の △OAB と，点 O を中心とし OB を半径とする円 $K$ がある。円 $K$ と直線 OB の交点のうち B と異なる方を C とし，円 $K$ と辺 OA の交点を D とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{7}{2}$ とする。




(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) 直線 AB 上に $\overrightarrow{OE}=s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$ （$s$ は0でない実数） を満たす点 E をとる。点 E が円 $K$ 上にあるとき，$s$ の値を求めよ。

(3) 直線 AB と直線 CD の交点を F とするとき，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，(2)のとき，線分 EF の長さを求めよ。 （配点 40）

(1) $\overrightarrow{OC}=-\vec{b}$ $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\vec{a}$ (2) $s=\frac{5}{12}$

(3) $\overrightarrow{OK}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$ , $EF=\frac{13}{14}$

**B7** 3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$（$a$は定数）が $f'(2)=7$ を満たしている。また，$y=f(x)$ のグラフを $C$ とする。

(1) $a$の値を求めよ。　$a=-1$

(2) $C$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における $C$ の接線の方程式を求めよ。また，$C$ の接線が点 $(0,\ 1)$ を通るとき，$t$の値を求めよ。$y=(3t^2-2t-1)x-2t^3+t^2+1$　$t=0,\ \frac{1}{2}$

(3) (2)で求めた$t$の値のうち，小さい方に対する接線を $\ell$ とし，$\ell$ と $C$ との点 $(0,\ 1)$ 以外の共有点の $x$座標を $b$ とする。$0<k<b$ において，直線 $x=k$ と $\ell$，$C$ の交点をそれぞれP，Qとするとき，線分PQの長さの最大値とそのときの$k$の値を求めよ。（配点　40）

Max $\frac{4}{27}$ $\left(k=\frac{2}{3}\right)$

**B8** 関数 $f(x)=(\log_2 x)^2-\log_2 8x^3$ がある。また，$t=\log_2 x$ とする。

(1) $f(2)$ の値を求めよ。　$f(2)=-5$

(2) $f(x)$ を $t$ の式で表せ。また，$f(x)=25$ を満たす $x$ の値を求めよ。

(3) 関数 $g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x^2$ がある。$\frac{1}{8}\leqq x\leqq 8$ における $f(x)-g(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値をそれぞれ求めよ。（配点　40）

(2) $f(x)=t^2-3t-3$，$x=128,\ \frac{1}{16}$

(3) Max $12\left(x=\frac{1}{8}\right)$，Min $-4\ (x=2)$