2016 1A

数　学　B　問　題

(120 分)

【必答問題】　数学B受験者は $\boxed{\text{B1}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{B3}}$, $\boxed{\text{B4}}$ を全問解答せよ。

$\boxed{\text{B1}}$ 2次関数 $f(x)=x^2+2ax-3a$ があり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸に接している。ただし，a は0でない定数とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　p，q は定数とし，$g(x)=f(x)+px+q$ とおく。$y=g(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に1だけ平行移動したものであるとき，p，q の値をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

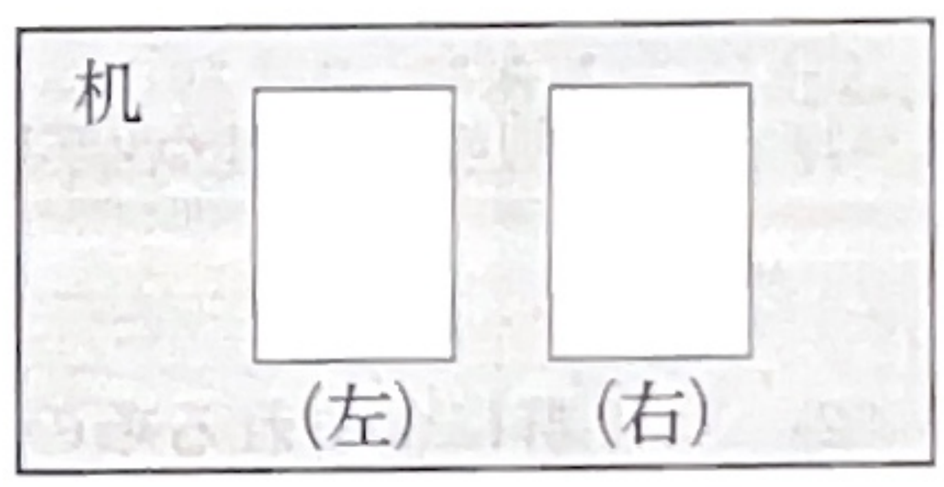
$\boxed{\text{B2}}$ 関数 $y=\cos 2x+\cos x+3$ がある。ただし，$0\leqq x\leqq \pi$ とする。

(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，y の値を求めよ。また，y を $\cos x$ の式で表せ。

(2)　y の最小値を求めよ。また，y が最小となるときの x の値に対して $\sin 2x$ の値を求めよ。

(配点　20)

$\boxed{\text{B3}}$ 片面を白色に，もう片面を黒色に塗った板が2枚あり，最初この2枚の板を上面が左から「白白」の状態で机の上に左右に並べて置いてある。次の【操作】を3回繰り返してこの板を裏返していく。



【操作】赤玉2個，青玉2個の合計4個の玉が入った袋から同時に2個の玉を取り出す。取り出した玉が

赤玉2個の場合は左側の板だけを裏返す。

青玉2個の場合は右側の板だけを裏返す。

赤玉と青玉の場合は2枚とも裏返す。

ただし，取り出した玉は1回ごとに袋に戻すものとする。

(1)　1回の操作後，2枚の板の上面が左から「白黒」の状態である確率を求めよ。

(2)　2回の操作後，2枚の板の上面が左から「黒黒」の状態である確率を求めよ。

(3)　3回の操作後，2枚の板の上面が左から「白黒」の状態である確率を求めよ。また，3回の操作後，2枚の板の上面が左から「白黒」の状態であったとき，左側の板が1回も裏返らなかった条件付き確率を求めよ。

(配点　40)

$\boxed{\text{B4}}$ 座標平面上に円 C : $x^2+y^2-2ax-2(a-2)y+2a^2-4a+2=0$ がある。ただし，a は実数とする。また，不等式 $-4 \leqq x+y \leqq 8$ の表す領域を D とする。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。また，a がすべての実数値をとって変化するとき，円 C の中心の軌跡の方程式を求めよ。

(2) 円 C が領域 D に含まれるとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲で変化するとき，円 C が通過する領域を E とする。点 (x, y) が領域 E 内を動くとき，$x^2+(y+4)^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ。 (配点 40)

【選択問題】 数学B受験者は，次の $\boxed{\text{B5}}$ ～ $\boxed{\text{B8}}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{\text{B5}}$ 数列 $\{a_n\}$: $-1,\ 2,\ -1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -1,\ \cdots\cdots$ があり，数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける。

$$\underbrace{-1,\ 2}_{\text{第1群}}\ \Big|\ \underbrace{-1,\ 2,\ -3,\ 4}_{\text{第2群}}\ \Big|\ \underbrace{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6}_{\text{第3群}}\ \Big|\ \underbrace{-1,\ \cdots\cdots}_{\text{第4群}}$$

ここで，自然数 k に対して，第 k 群は $2k$ 個の数 $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ \cdots\cdots,\ -(2k-1),\ 2k$ からなるものとする。

(1) 20 が初めて現れるのは第何群か求めよ。また，第 20 群の -1 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か求めよ。

(2) 第 k 群に含まれる項の総和を求めよ。また，第 k 群の -1 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の第 2017 項は第何群に含まれているか求めよ。また，$\sum_{k=1}^{2017} a_k$ を求めよ。

(配点 40)

$\boxed{\text{B6}}$ $\triangle$OAB において，辺 AB を 1:4 に内分する点を C とする。また，点 P を $2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{0}$ を満たすようにとり，点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たすようにとる。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{QC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ であるとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。

(3) (2)のとき，辺 OA と直線 CQ の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を求めよ。 (配点 40)

B7 3次関数 $f(x)=ax^3-2ax^2+bx+8a^2$ があり，$f'(2)=0$ を満たしている。ただし，a, b は定数で，$a \neq 0$ とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $a>0$ とする。$f(x)$ の極大値，極小値をそれぞれ a を用いて表せ。また，このときの x の値をそれぞれ求めよ。

(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点がちょうど3個となるような a の値の範囲を求めよ。

（配点　40）

B8 2つの関数 $f(x)=\log_3(x+5)+\log_3(7-x)$, $g(x)=4^x-(4^a+1)2^x+4^a$ がある。ただし，a は定数とする。

(1) $f(4)$ の値を求めよ。また，$g(1)=0$ のとき，a の値を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)<3$ を解け。

(3) $a>0$ とする。連立不等式 $\begin{cases} f(x)<3 \\ g(x)<0 \end{cases}$ を満たす整数 x が1個だけ存在するような a の値の範囲を求めよ。

（配点　40）