2015 1A

15-1-2015

数　学　問　題

(100 分)

【必答問題】　次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)　$\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}$ の分母を有理化して簡単にすると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2)　不等式 $\dfrac{2x-7}{3}<\dfrac{5x-6}{4}$ の解は $\boxed{(イ)}$ である。

(3)　$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ を全体集合とし，U の部分集合を A，B とする。
$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{3, 6, 9\}$ のとき，集合 $\overline{A}\cap B=\{\boxed{(ウ)}\}$ である。
ただし，$\overline{A}$ は A の補集合とする。

(4)　グラフが点 $(1, 3)$ を頂点とし，かつ点 $(2, 5)$ を通る放物線となるような 2 次関数は，
$y=\boxed{(エ)}$ である。

(5)　2 次関数 $y=x^2-6x+k-2$（k は定数）のグラフが x 軸と共有点をもたないような k の値の範囲は $\boxed{(オ)}$ である。

(配点　20)

$\boxed{2}$　2 つの不等式

$$x^2+5x+4\leqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(a-2)(x^2-a^2)>0 \qquad \cdots\cdots ②$$

がある。ただし，a は正の定数とする。

(1)　不等式①を解け。　$-4\leqq x\leqq 1$

(2)　$a=3$ のとき，不等式②を解け。また，$a=\sqrt{3}$ のとき，不等式②を解け。

(3)　a は 2 でない正の定数とする。不等式①，②をともに満たす x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(配点　20)

(2)　$x<-3, 3<x$　,　$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

(3)　$2<a<4$

3 2つの2次関数 $f(x)=-x^2+4ax-3a^2$, $g(x)=x^2-10x+27$ がある。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f(x)$ の最大値を a を用いて表せ。 a^2

(2) $y=f(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さが 10 以下であるような a の値の範囲を求めよ。 $0<a\leqq 5$

(3) a が(2)の値の範囲で変化するとき，$f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲における $g(x)$ の最小値が 3 であるような a の値を求めよ。 $a=2, 4$

（配点 20）

【選択問題】 次の **4**，**5**，**6**，**7** のうちから２題を選んで解答せよ。

4 $AB=2$, $AC=1$, $\cos\angle BAC=-\frac{1}{4}$ の $\triangle ABC$ がある。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。 $BC=\sqrt{6}$

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ。また，$\cos\angle ABC$ の値を求めよ。 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

(3) $\triangle ABC$ の外接円の点 A を含まない弧 BC 上に，点 D を $\angle BAD=90^\circ$ となるようにとる。辺 BC と線分 AD の交点を E とするとき，$\sin\angle BED$ の値を求めよ。また，$\triangle BDE$ の外接円の半径を求めよ。 $\frac{3\sqrt{6}}{8}$, $\frac{16\sqrt{15}}{45}$

（配点 20）

5 1個のさいころを投げ，次の規則に従って赤玉，白玉，青玉を左から横一列に並べていく。

【規則】

さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは赤玉を 2 個，4，5 のときは白玉を 1 個，6 のときは青玉を 1 個並べる。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，すでにある列の右側に並べていく。

例えば，さいころを 3 回投げ，その出た目が順に 2，5，6 であったとすると，左から順に赤赤白青の玉が並び，玉の個数は 4 個で，左から 4 番目の玉は青玉である。

(1) さいころを 3 回投げたとき，赤玉が 6 個並んでいる確率を求めよ。 $\frac{1}{8}$

(2) さいころを 2 回投げたとき，並んだ玉の個数が 3 個で，赤玉が 2 個，白玉が 1 個並んでいる確率を求めよ。また，さいころを 3 回投げたとき，並んだ玉の個数が 3 個で，白玉が 2 個，青玉が 1 個並んでいる確率を求めよ。 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{18}$

(3) さいころを 4 回投げたとき，並んだ玉の個数が 5 個で，左から 4 番目の玉が赤玉である確率を求めよ。 $\frac{1}{8}$

（配点 20）

（問題は次ページに続く。）

6 2つの自然数 m, n があり，m, n の最大公約数を G, 最小公倍数を L とする。

(1) $m=63$, $n=105$ とする。G と L の値をそれぞれ求めよ。

(2) m, n は2桁の自然数で，$m>n$ であるとする。$G=13$, $L=455$ のとき，m と n の値をそれぞれ求めよ。

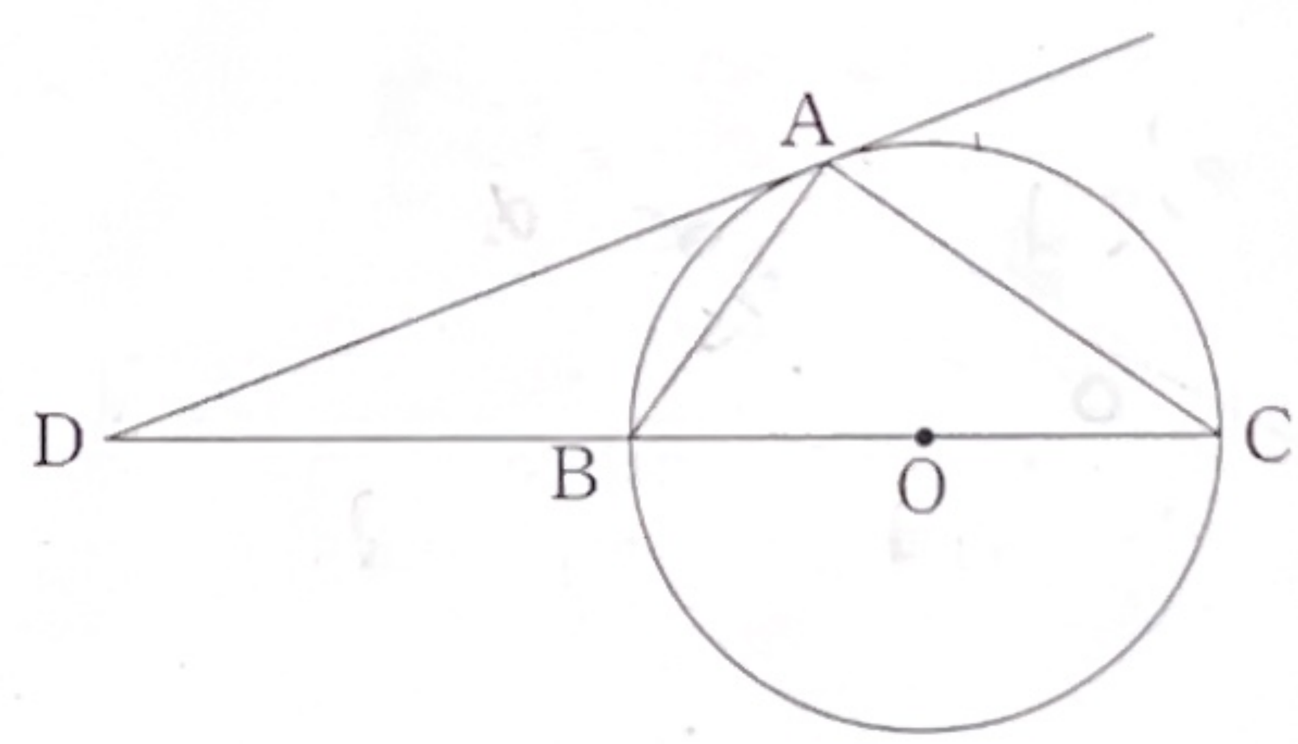
(3) m と n を(2)で求めた値とする。$mx+ny=13$ を満たす整数 x, y の組のうち，$\sqrt{x+y}$ の値が30以下の整数となるような x, y の組は全部で何組あるか求めよ。（配点 20）

(1) $G=21$, $L=315$

(2) $(m, n)=(91, 65)$

(3) 15組

7 右の図のように，BC＝6 である △ABC があり，辺 BC は △ABC の外接円 O の直径である。点 A における円 O の接線と直線 BC との交点を D とすると，BD＝6 となった。



(1) 線分 AD の長さを求めよ。

(2) $\dfrac{AC}{AB}$ の値を求めよ。また，辺 AC の長さを求めよ。

(3) 点 D を通り直線 BC に垂直な直線と直線 AC との交点を E とする。線分 CE の長さを求めよ。また，∠BCA の二等分線と線分 AD, DE との交点をそれぞれ F, G とする。$\dfrac{CF}{FG}$ の値を求めよ。（配点 20）

(1) $AD=6\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$, $AC=2\sqrt{6}$

(3) $CE=6\sqrt{6}$, $\dfrac{CF}{FG}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$