3-4-2016
2016 (4B)

数　学　Y　問　題

(120分)

【必答問題】 $\boxed{\text{Y 1}}$ ～ $\boxed{\text{Y 4}}$ は全員全問解答せよ。

$\boxed{\text{Y 1}}$ $0 \leqq x \leqq 3$ とする。関数 $y=2^{2x-1}-3\cdot 2^{x}+4$ がある。

(1) $t=2^{x}$ とおく。t のとり得る値の範囲を求めよ。また，y を t を用いて表せ。

(2) y の最大値，および最小値を求めよ。また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

$\boxed{\text{Y 2}}$ 座標平面上に，x 軸と 2 点で交わる円 $K: x^2+y^2-4x-2ay+3=0$ (a は定数) がある。円 K と x 軸との交点を A，B とし，円 K の中心を C とする。ただし，(点 A の x 座標)<(点 B の x 座標) である。このとき，△ABC の重心 G の座標は (2，1) である。

(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AG と円 K の交点のうち A でない方を D とする。点 D における円 K の接線の方程式を求めよ。

(配点　20)

Y3 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ の9枚のカードが袋の中にある。この袋の中から同時に3枚のカードを取り出し，その3枚のカードに書かれた数の積を X とする。また，次の規則によって Y を定める。

〔規則〕

(ア) 3枚のカードに書かれた数がすべて異なるときは，そのうち最大の数を Y とする。

(イ) 3枚のカードに書かれた数のうち，2つが同じ数であるときは，もう1つの数を Y とする。

(1) $X=3$ である確率を求めよ。

(2) $Y=3$ である確率を求めよ。

(3) X が偶数であったとき，$Y=5$ である条件付き確率を求めよ。 （配点　40）

Y4 座標平面上に放物線 $C: y=-x^2+4$ があり，放物線 C 上の点 A$(-2,\ 0)$ を通り傾きが m $(0<m<2)$ である直線を l とする。放物線 C と x 軸で囲まれた部分を D とする。

(1) D のうち，直線 l の上側で，y 軸の左側にある部分の面積を S_1 とする。S_1 を m を用いて表せ。

(2) D のうち，直線 l の下側で，y 軸の右側にある部分の面積を S_2 とする。S_2 を m を用いて表せ。

(3) (1), (2)のとき，$S=S_1+S_2$ とする。S を最大にする m の値とそのときの S の値を求めよ。

（配点　40）

【選択問題】 次の指示に従って解答しなさい。

【数学Ⅲを学習していない場合（P.8 ～ 9)】	Y5 ～ Y7 の３題中２題を解答せよ。
【数学Ⅲの「２次曲線」,「複素数平面」,「数列の極限」のいずれかの学習を終えている場合（P.10 ～ 11)】	Y7 ～ Y10 の４題中２題を解答せよ。

Y7 OA＝3，OB＝2，$\angle \mathrm{AOB}=60^\circ$ である △OAB がある。辺 AB を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を C，辺 OA を 2：1 に内分する点を D とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OA}\perp\mathrm{CD}$ を満たしているとき，t の値を求めよ。

(3) (2)のとき，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たす点とし，線分 OC と線分 BE の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，△CPE の面積を求めよ。

（配点　40)

Y8 O を原点とする座標平面上に，点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通る楕円 $C:\ \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ がある。楕円 C の２つの焦点のうち，x 座標の大きい方を F とする。

(1) a の値を求めよ。また，点 F の座標を求めよ。

(2) 線分 OF 上（両端を除く）の点 $(t,\ 0)$ を通り，傾きが 1 である直線を l とする。また，楕円 C と直線 l の交点を P，Q とし，その x 座標をそれぞれ p，q $(p>q)$ とする。$p-q$ を t を用いて表せ。

(3) (2)のとき，△OPQ の面積を t を用いて表せ。また，点 $(t,\ 0)$ が線分 OF 上（両端を除く）を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

（配点　40)

Y 9 $\alpha=-1+\sqrt{3}\,i$, $\beta=\dfrac{2i}{\alpha}$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) α を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の形に表すとき，r，θ の値を求めよ。ただし，$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) β^n が純虚数となるような最小の自然数 n の値を求めよ。

(3) n は(2)で求めた値とする。複素数平面上で $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta^n)$ とし，線分 AB を対角線とする正方形の他の 2 つの頂点を $\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(w)$ とする。ただし，(γ の実部) $>$ (w の実部) とする。γ を求めよ。また，直線 CD と虚軸との交点を表す複素数を求めよ。（配点　40）

Y 10 数列 $\{a_n\}$ は公比が 1 より大きい等比数列で，$a_2=6$，$a_1+a_3=15$ を満たしている。また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=4$，$b_{n+1}-b_n=2\cdot3^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とし，r は正の実数とする。数列 $\left\{\dfrac{r^n}{b_n+S_n}\right\}$ の極限を調べよ。（配点　40）