2012-1B
1-1-2012

数　学　問　題

(100 分)

【必答問題】　次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)　$(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$ を展開し，整理すると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2)　$a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ のとき，$2a+\dfrac{1}{a}=\boxed{(イ)}$，$4a^2+\dfrac{1}{a^2}=\boxed{(ウ)}$ である。

(3)　放物線 $y=2x^2-3x+k$（k は定数）が x 軸に接するとき，$k=\boxed{(エ)}$ である。

(4)　次の $\boxed{(オ)}$ にあてはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

m，n を自然数とする。m が 3 の倍数であることは，積 mn が 3 の倍数であるための $\boxed{(オ)}$。

⓪必要十分条件である　①必要条件であるが，十分条件ではない

②十分条件であるが，必要条件ではない　③必要条件でも十分条件でもない

(配点　20)

$\boxed{2}$　3 つの不等式 $x^2-2x-8<0$ ……①　$x^2-10x+21>0$ ……②　$x^2-3ax+2a^2\leqq 0$ ……③

がある。ただし，a は定数である。

(1)　不等式①を解け。　$-2<x<4$

(2)　$a>0$ とする。不等式③を解け。また，不等式②，③を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲を求めよ。　$a\leqq x\leqq 2a$，$3\leqq a\leqq \frac{7}{2}$

(3)　$a\neq 0$ とする。不等式①，②，③を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲を求めよ。　$a\leqq -2$，$3\leqq a$

(配点　20)

$\boxed{3}$ 2次関数 $f(x)=x^2+px-2$ （p は定数）がある。$y=f(x)$ のグラフの軸の方程式は $x=1$ である。また，$-2a+2 \leqq x \leqq a+2$ （ただし~~a は正の定数~~）における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。

(1) p の値を求めよ。また，$y=f(x)$ のグラフの頂点を求めよ。 $p=-2$，$(1, -3)$

(2) m を a を用いて表せ。 $m=4a^2-4a-2\ (0<a<\frac{1}{2})$，$m=-3\ (\frac{1}{2} \leqq a)$

(3) $M-m=8a-4$ となるような a の値を求めよ。 （配点　20）

$a=1,\ \frac{5}{2}$

【選択問題】　次の $\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ のうちから２題を選んで解答せよ。

$\boxed{4}$ △ABC があり，AB＝9，AC＝6，$\cos A=\frac{1}{3}$ である。また，辺 AC の中点を M とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。 $BC=9$

(2) $\sin B$ の値を求めよ。 $\sin B=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(3) 辺 AB の A を越える延長線上に点 N を，∠ANM＝∠ABC となるようにとる。このとき，sin∠MAN の値を求めよ。また，線分 MN の長さ，および △AMN の面積を求めよ。

$\sin\angle MAN=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$MN=\frac{9}{2}$，$\triangle AMN=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ （配点　20）

$\boxed{5}$ 数直線上に２つの動点 P，Q があり，次の規則にしたがって移動する。
初め，点 P は座標が 1 である点にあり，点 Q は原点にある。

〈規則〉

2個のさいころ a，b を同時に投げる。

・点 P は，さいころ a に 3 以下の目が出たときには正の向きに 1 だけ進み，4 以上の目が出たときには移動しない。

・点 Q は，さいころ b に 4 以下の目が出たときには正の向きに 1 だけ進み，5 以上の目が出たときには移動しない。

(1) 2個のさいころ a，b を 1 回だけ投げた結果，点 P と点 Q がどちらも移動しない確率を求めよ。 $\frac{1}{6}$

(2) 2個のさいころ a，b を 2 回続けて投げた結果，点 P と点 Q の座標が等しくなる確率を求めよ。 $\frac{1}{3}$

(3) 2個のさいころ a，b を 3 回続けて投げた結果，点 P の座標が点 Q の座標より大きい確率を求めよ。 $\frac{53}{108}$ （配点　20）

(選択問題は次ページに続く。)

6 kを2以上の整数とする。2からkまでの整数のうち，kと互いに素であるものの個数をNとする。例えば，$k=5$とすると2から5までの整数のうち，5と互いに素であるものは2，3，4であるから，$N=3$である。

(1) $k=7$のとき，Nを求めよ。また，$k=14$のとき，Nを求めよ。 $N=5$, $N=5$

(2) pを7でない素数とする。$k=7p$のとき，Nを求めよ。 $N=6p-7$

(3) p, qはともに素数であり，$p<q$とする。$k=pq$のとき，$N=11$を満たすp, qの組（p, q）をすべて求めよ。 （配点　20）

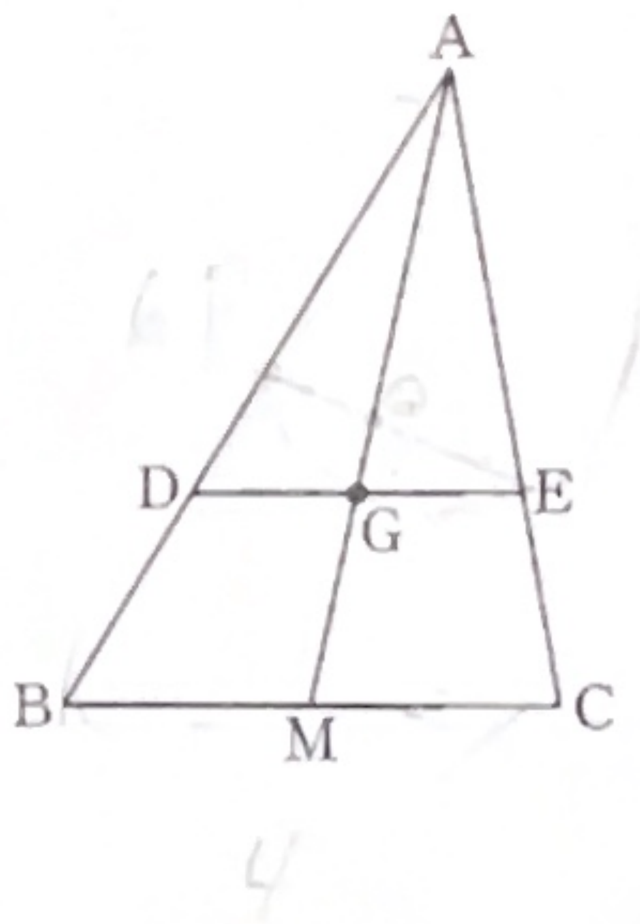
$(p, q)=(2, 13), (3, 7)$

7 AB＝6，BC＝4 の△ABCがある。△ABCの重心Gを通り，辺BCに平行な直線と辺AB，辺ACとの交点をそれぞれ，D，Eとし，直線AGと辺BCとの交点をMとする。

(1) 線分BM，DGの長さをそれぞれ求めよ。

(2) 線分ADの長さを求めよ。また，△AGEの外接円と直線ADとの交点のうち，Aでない方をPとする。このとき，線分DPの長さを求めよ。

(3) (2)のとき，直線PEと直線AGとの交点をQとする。$\frac{AQ}{QG}$，$\frac{PQ}{QE}$の値をそれぞれ求めよ。さらに，AM＝5のとき，線分PQの長さを求めよ。 （配点　20）



(1) $BM=2$, $DG=\frac{4}{3}$

(2) $AD=4$, $DP=\frac{8}{9}$

(3) $\frac{AQ}{QC}=7$, $\frac{PQ}{QE}=\frac{7}{9}$, $PQ=\frac{35}{36}$