2016 1月　　1-1-2016

数　学　問　題

(100分)

【必答問題】　次の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は全問解答せよ。

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$ の分母を有理化して簡単にすると $\boxed{(ア)}$ となる。

(2)　$(x+2)(x-2)(x^2+4)$ を展開し，整理すると $\boxed{(イ)}$ となる。

(3)　1以上15以下の整数の集合を U とし，U の部分集合 A，B を

$A=\{3n \mid n\text{は整数}\}$，$B=\{2n \mid n\text{は整数}\}$

とするとき，集合 $A\cap B$ の要素を書き並べて表すと，$A\cap B=\{\boxed{(ウ)}\}$ である。

(4)　2次方程式 $x^2+x+k+1=0$（k は定数）が重解をもつとき，$k=\boxed{(エ)}$ である。

(5)　2次関数 $y=2x^2+8x+11$ のグラフは，2次関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{(オ)}$，y 軸方向に $\boxed{(カ)}$ だけ平行移動したものである。

(配点　20)

$\boxed{2}$　x についての2次不等式

$x^2-2x-8>0$ ……①，$(x-1)(x-4a)<0$ ……②

がある。ただし，a は定数とする。

(1)　不等式①を解け。

(2)　$a>\dfrac{1}{4}$ のとき，不等式②を解け。またこのとき，不等式①，②を同時に満たす x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　$a\neq\dfrac{1}{4}$ とする。不等式①，②を同時に満たす整数 x が1つだけ存在するような a の値の範囲を求めよ。

(配点　20)

3 2次関数 $f(x)=-x^2+ax-3a+8$ がある。ただし，a は定数とする。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲における $f(x)$ の最小値が 0 となるような a の値を求めよ。

(3) $a-1 \leqq x \leqq a+1$ の範囲における $f(x)$ の最大値を M とする。$M>0$ であるような a の値の範囲を求めよ。 (配点 20)

【選択問題】 次の **4**，**5**，**6**，**7** のうちから2題を選んで解答せよ。

4 AB＝5，BC＝7，$\cos B=\dfrac{3}{5}$ の △ABC がある。また，△ABC の外接円の中心をOとする。

(1) 辺 AC の長さを求めよ。

(2) 線分 OA の長さを求めよ。また，∠AOB の大きさを求めよ。

(3) 直線 AC に関して点Bと反対側に，点Pを AP＝AC となるようにとる。△APC の面積が △OAB の面積の $\dfrac{8}{5}$ 倍となるとき，tan ∠PAC の値を求めよ。 (配点 20)

5 座標平面上に点Pがあり，次の規則にしたがって点Pが移動する操作を繰り返し行う。初め，点Pは原点にある。

【規則】

1個のさいころを投げて，

(ア) 1，2，3のいずれかの目が出たときは，x 軸方向に1だけ移動する。

(イ) 4，5のいずれかの目が出たときは，y 軸方向に1だけ移動する。

(ウ) 6の目が出たときは，y 軸方向に2だけ移動する。

(1) 3回の操作で，点Pが点 (3，0) に到達する確率を求めよ。

(2) 3回の操作で，点Pが点 (2，1) に到達する確率を求めよ。また，4回の操作で，点Pが点 (2，2) に到達する確率を求めよ。

(3) ちょうど5回目の操作で，点Pの y 座標が初めて3以上になる確率を求めよ。

(配点 20)

(問題は次ページに続く。)

6 10進法で表された自然数 N がある。

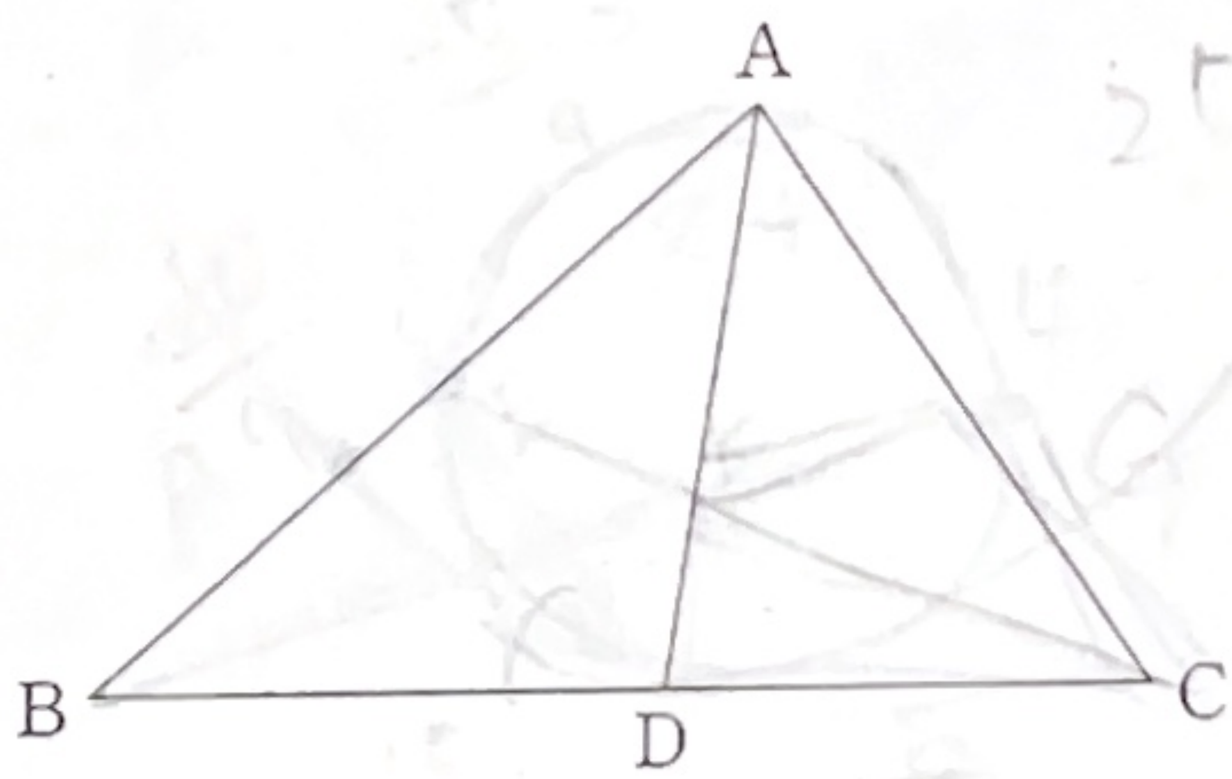
(1) N を5進法で表すと，$2324_{(5)}$ となった。このとき，N の値を求めよ。

(2) N を5進法で表すと4桁で表された。このような N のうち，最大の数と最小の数をそれぞれ求めよ。

(3) 5進法で表すと4桁で表される N のうち，9の倍数であり，かつ5進法で表したときの各位の数の和が4の倍数になるものを考える。このような N のうち，最大の数と最小の数をそれぞれ求めよ。

(配点　20)

7 右の図のように，AB＝5，BC＝6，CA＝4 である △ABC があり，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。



(1) 線分 BD の長さを求めよ。

(2) 点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と，辺 AB との交点のうち A でない方を E とする。線分 BE の長さを求めよ。また，線分 AD と線分 CE の交点を F，直線 BF と辺 CA の交点を G とする。$\dfrac{AG}{GC}$ の値を求めよ。

(3) (2)のとき，$\dfrac{AF}{FD}$ の値を求めよ。また，△FCG の面積を S_1，△FCD の面積を S_2 とする。$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(配点　20)