

কৌণিক দূরত্ব পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

1. 5° তে কত সেকেন্ড নির্ণয় করো।

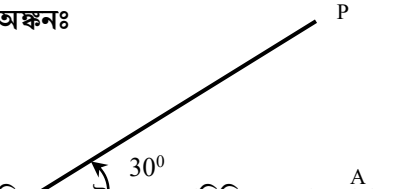
সমাধান: আমরা জানি, $1^\circ = 3600''$

$$\therefore 5^\circ = (5 \times 3600)'' = 18000''$$

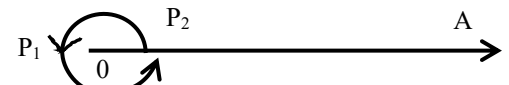
অর্থাৎ, 5° তে 18000 সেকেন্ড।

2. জ্যামিতিক রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে 30° , 360° , 380° , -20° এবং -420° কোণ আঁক।

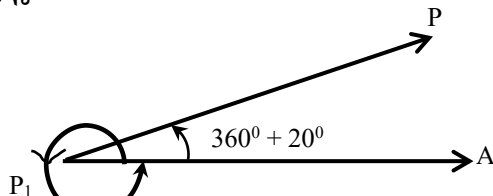
সমাধান: 30° অঙ্কনঃ

- 
- যেকোনো বিন্দু O নেই এবং জ্যামিতিক রুলার স্থাপন করে OA রশ্মি আঁকি।
 - এবার চাঁদার কেন্দ্রে O বিন্দুতে ও ডান পাশের প্রান্তভাগকে OA বরাবর মিলিয়ে স্থাপন করি যেন চাঁদার অর্ধবৃত্তাকার অংশ উপরের দিকে থাকে।
 - এবার OA রশ্মি হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে চাঁদা হতে 30 লেখা বরাবর পেন্সিল দিয়ে একটি বিন্দু P চিহ্নিত করি।
 - O, P যোগ করে OP রশ্মি আঁকি; তাহলে $\angle AOP = 30^\circ$ অঙ্কিত হলো।

360° অঙ্কনঃ

- 
- যেকোনো বিন্দু O নেই এবং জ্যামিতিক রুলার স্থাপন করে OA রশ্মি আঁকি।
 - এবার চাঁদার কেন্দ্রে O বিন্দুতে ও ডান পাশের প্রান্তভাগকে OA বরাবর মিলিয়ে স্থাপন করি যেন চাঁদার অর্ধবৃত্তাকার অংশ উপরের দিকে থাকে।
 - এবার OA রশ্মি হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে চাঁদার বামপাশে লেখা 180 বরাবর পেন্সিল দিয়ে একটি বিন্দু P1 চিহ্নিত করি। আবার, চাঁদার কেন্দ্রে O বিন্দুতে ও ডান পাশের প্রান্তভাগকে OA বরাবর মিলিয়ে স্থাপন করি যেন চাঁদার অর্ধবৃত্তাকার অংশ নিচের দিকে থাকে। এবং চাঁদার ডানপাশে লেখা 180 বরাবর আরেকটি বিন্দু P2 চিহ্নিত করি।
 - তাহলে, P2 বিন্দু OA এর সাথে সমাপতিত হয় ফলত OA রশ্মি বরাবর আমাদের 360° অঙ্কিত হলো।

380° অঙ্কনঃ

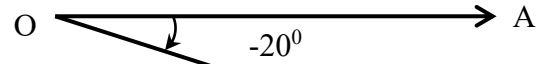


এখানে, $380^\circ = 360^\circ + 20^\circ$

অর্থাৎ, আমাদের 20° কোণ অঙ্কনই যথেষ্ট হবে কারণ 360° কোণ OA বরাবর অবস্থান করে।

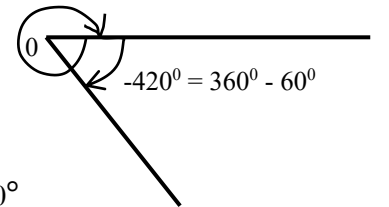
- যেকোনো বিন্দু O নেই এবং জ্যামিতিক রুলার স্থাপন করে OA রশ্মি আঁকি।
- এবার চাঁদার কেন্দ্রে O বিন্দুতে ও ডান পাশের প্রান্তভাগকে OA বরাবর মিলিয়ে স্থাপন করি যেন চাঁদার অর্ধবৃত্তাকার অংশ উপরের দিকে থাকে।
- এবার OA রশ্মি হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে চাঁদা হতে 20 লেখা বরাবর পেন্সিল দিয়ে একটি বিন্দু P চিহ্নিত করি।
- O, P যোগ করে OP রশ্মি আঁকি; তাহলে $360^\circ + 20^\circ = 380^\circ$ অঙ্কিত হলো যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।

-20° অঙ্কনঃ



- যেকোনো বিন্দু O নেই এবং জ্যামিতিক রুলার স্থাপন করে OA রশ্মি আঁকি।
- এবার চাঁদার কেন্দ্রে O বিন্দুতে ও ডান পাশের প্রান্তভাগকে OA বরাবর মিলিয়ে স্থাপন করি যেন চাঁদার অর্ধবৃত্তাকার অংশ নিচের দিকে থাকে।
- এবার OA রশ্মি হতে ঘড়ির কাটার দিকে চাঁদা হতে 20 লেখা বরাবর পেন্সিল দিয়ে একটি বিন্দু P চিহ্নিত করি।
- O, P যোগ করে OP রশ্মি আঁকি; তাহলে $\angle AOP = -20^\circ$ অঙ্কিত হলো।

-420° অঙ্কনঃ



এখানে, $-420^\circ = -360^\circ - 60^\circ$

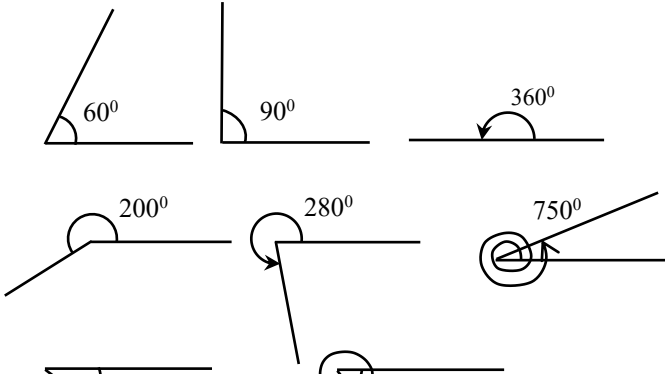
অর্থাৎ, আমাদের -60° কোণ অঙ্কনই যথেষ্ট হবে কারণ -360° কোণ OA বরাবর অবস্থান করে।

- যেকোনো বিন্দু O নেই এবং জ্যামিতিক রুলার স্থাপন করে OA রশ্মি আঁকি।
- এবার চাঁদার কেন্দ্রে O বিন্দুতে ও ডান পাশের প্রান্তভাগকে OA বরাবর মিলিয়ে স্থাপন করি যেন চাঁদার অর্ধবৃত্তাকার অংশ নিচের দিকে থাকে।
- এবার OA রশ্মি হতে ঘড়ির কাটার দিকে চাঁদা হতে 60 লেখা বরাবর পেন্সিল দিয়ে একটি বিন্দু P চিহ্নিত করি।

iv) O,P যোগ করে OP রশ্মি আঁকি; তাহলে $-360^\circ - 60^\circ = -420^\circ$ অঙ্কিত হলো যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।

3. রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে $60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 200^\circ, 280^\circ, 750^\circ, -45^\circ, -400^\circ$ কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আঁকো। এগুলো কোয়ান্ট্রেন্ট নাকি কোয়ান্ট্রেন্টাল কোণ তা নির্ণয় করো। কোণগুলো কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ করো।

সমাধান: রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে $60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 200^\circ, 280^\circ, 750^\circ, -45^\circ, -400^\circ$ কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আঁকা হলো যা নিম্নের চিত্রে অঙ্কিত।



এখন কোণগুলোর অবস্থান বিবেচনা করে পাই, $60^\circ, 200^\circ, 280^\circ, 750^\circ, -45^\circ, -400^\circ$ কোণগুলো চারটি চতুর্ভাগের যেকোন একটির ভিতরে অবস্থান করছে অর্থাৎ এরা কোয়ান্ট্রেন্ট কোণ (quadrant angle)।

আবার, $90^\circ, 180^\circ$ কোণদুটি অক্ষের উপর অবস্থান করছে অর্থাৎ এরা কোয়ান্ট্রেন্টাল কোণ (quadrantal angle)।

4. মান নির্ণয় করো :

$$\cos 135^\circ, \cot 120^\circ, \tan 390^\circ, \sin(-30^\circ), \sec 300^\circ, \cos(-570^\circ)$$

সমাধান: $\cos 135^\circ$

$$= \cos(180^\circ - 45^\circ)$$

$$= -\cos 45^\circ$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$\cot 120^\circ$

$$= \cot(180^\circ - 60^\circ)$$

$$= -\cot 60^\circ$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} [\because \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

$\tan 390^\circ$

$$= \tan(360^\circ + 30^\circ)$$

$$= \tan 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

$\sin(-30^\circ)$

$$= -\sin 30^\circ$$

$$= -\frac{1}{2} [\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$$

$\sec 300^\circ$

$$= \sec(360^\circ - 60^\circ)$$

$$= \sec 60^\circ$$

$$= 2 [\because \sec 60^\circ = 2]$$

$\csc(-570^\circ)$

$$= \csc 570^\circ$$

$$= \csc(540^\circ + 30^\circ)$$

$$= \csc 30^\circ$$

$$= 2$$

5. আদর্শ অবস্থানে A(2, 3), B(-3, 1), C(-4, -4), D(1, -2), E(-2, 0) বিন্দুগুলো দ্বারা উৎপন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করো।

সমাধান: A(2, 3)

$$\text{এখানে, } x=2, y=3 \text{ এবং } r = \sqrt{(2^2+3^2)} = \sqrt{13}$$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোঃ

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

B(-3, 1)

$$\text{এখানে, } x=-3, y=1 \text{ এবং } r = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোঃ

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-3}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{10}}{-3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

C(-4, -4)

এখানে, $x=-4$, $y=-4$ এবং $r = \sqrt{\{(-4)^2+(-4)^2\}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোঃ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{4\sqrt{2}}{-4} = -\sqrt{2}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{4\sqrt{2}}{-4} = -\sqrt{2}$$

D(1, -2)

এখানে, $x=1$, $y=-2$ এবং $r = \sqrt{\{1^2+(-2)^2\}} = \sqrt{5}$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোঃ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{5}}{-2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

E(-2,0)

এখানে, $x=-2$, $y=0$ এবং $r = \sqrt{\{(-2)^2+0^2\}} = 2$

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোঃ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{0} = \text{undefined}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{0} = \text{undefined}$$

6. নিম্নোক্ত বিন্দুগুলোকে r এবং $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

a. A(3, -2)

সমাধানঃ এখানে, $x=3$, $y=-2$

$$\therefore r = \sqrt{\{3^2+(-2)^2\}} = \sqrt{13}$$

$$\text{এবং, } \tan\theta = y/x = -2/3$$

$$\therefore A(3, -2) = (\sqrt{13}, \frac{-2}{3}) \text{ [প্রকাশ করা হলো]}$$

b. B(-2, -1)

সমাধানঃ এখানে, $x=-2$, $y=-1$

$$\therefore r = \sqrt{\{(-2)^2+(-1)^2\}} = \sqrt{5}$$

$$\text{এবং, } \tan\theta = y/x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A(-2, -1) = (\sqrt{5}, \frac{1}{2}) \text{ [প্রকাশ করা হলো]}$$

c. C(-4, 0)

সমাধানঃ এখানে, $x=-4$, $y=0$

$$\therefore r = \sqrt{\{(-4)^2+0^2\}} = 4$$

$$\text{এবং, } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$\therefore A(-4, 0) = (4, 0) \text{ [প্রকাশ করা হলো]}$$

7. রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

a. 75°30'

সমাধানঃ 75°30'

$$= 75^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ [\because 1^\circ = 60']$$

$$= 75^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$= \left\{\frac{(75 \times 2 + 1)}{2}\right\}^\circ$$

$$= \left(\frac{151}{2}\right)^\circ$$

$$= \frac{151}{2} \pi \text{ রেডিয়ান } [\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}] = \frac{151\pi}{360} \text{ রেডিয়ান}$$

b. 45°44'43"

সমাধানঃ 45°44'43"

$$= 45^\circ + \left(\frac{44}{60}\right)^\circ + \left(\frac{43}{3600}\right)^\circ [\because 1^\circ = 60' \text{ এবং } 1' = 3600'']$$

$$= \frac{\pi}{180} \left(45 + \frac{44}{60} + \frac{43}{3600}\right) \text{ রেডিয়ান } [\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}]$$

$$= \frac{\pi}{180} \times \frac{45 \times 3600 + 44 \times 60 + 43}{3600} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\pi(45 \times 3600 + 44 \times 60 + 43)}{3600 \times 1800} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{164683\pi}{648000}$$

c. 60°30'15"

সমাধানঃ 60°30'15"

$$= 60^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ + \left(\frac{15}{3600}\right)^\circ [\because 1^\circ = 60' \text{ এবং } 1' = 3600'']$$

$$= 60^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^\circ + \left(\frac{1}{240}\right)^\circ$$

$$= \frac{\pi}{180} \left(60 + \frac{1}{2} + \frac{1}{240}\right) \text{ রেডিয়ান } [\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}]$$

$$= \frac{\pi}{180} \times \frac{60 \times 240 + 1 \times 120 + 1}{240} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\pi(14400 + 120 + 1)}{240 \times 180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{14521\pi}{43200} \text{ রেডিয়ান}$$

8. ডিগ্রীতে প্রকাশ কর:

a. $\frac{4\pi}{25}$ রেডিয়ান

সমাধান: $\frac{4\pi}{25}$ রেডিয়ান

$$= \left(\frac{4\pi}{25} \times \frac{180}{\pi} \right)^\circ \left[\because 1 = \frac{180^\circ}{\pi} \right]$$

$$= \left(\frac{4\pi}{25} \times \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 28.8^\circ$$

b. 1.3177 রেডিয়ান

সমাধান: 1.3177 রেডিয়ান

$$= \left(1.3177 \times \frac{180}{\pi} \right)^\circ \left[\because 1 = \frac{180^\circ}{\pi} \right]$$

$$= \left(1.3177 \times \frac{180}{3.1416} \right)^\circ \left[\because \pi = 3.1416 \right]$$

$$= 75.4984^\circ \text{ (প্রায়)}$$

c. 0.9759 রেডিয়ান

সমাধান: 0.9759 রেডিয়ান

$$= \left(0.9759 \times \frac{180}{\pi} \right)^\circ \left[\because 1 = \frac{180^\circ}{\pi} \right]$$

$$= \left(0.9759 \times \frac{180}{3.1416} \right)^\circ \left[\because \pi = 3.1416 \right]$$

$$= 55.9148^\circ \text{ (প্রায়)}$$

9. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। যদি টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার অবস্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে $10^\circ 6' 3''$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে টেকনাফ থেকে তেঁতুলিয়ার দূরত্ব কত?

সমাধান: এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কিমি।

টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার অবস্থান দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 10^\circ 6' 3''$

$$= 10^\circ + \left(\frac{6}{60} \right)^\circ + \left(\frac{3}{3600} \right)^\circ$$

$$= 10^\circ + \left(\frac{1}{10} \right)^\circ + \left(\frac{1}{1200} \right)^\circ$$

$$= \left\{ \frac{(1200 \times 10 + 120 + 1)}{1200} \right\}^\circ$$

$$= \left(\frac{12121}{1200} \right)^\circ$$

$$= \frac{\pi}{180} \times \frac{12121}{1200} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{12121\pi}{216000} \text{ রেডিয়ান}$$

সুতরাং, টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার দূরত্ব, $s = r\theta$

$$= 6440 \times \frac{12121\pi}{216000} = 1135.328 \text{ কিমি (প্রায়)}$$

10. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ধরো, পৃথিবীর উপরে দুইটি স্যাটেলাইট এমন অবস্থানে আছে যে তারা পৃথিবীর কেন্দ্রে $33''$ কোণ উৎপন্ন করে। স্যাটেলাইট দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

সমাধান:

চিত্রে বৃত্তটিকে পৃথিবী ধরে নিয়ে সহজে আমরা এই সমস্যার সমাধান করতে পারি যেখানে,

$$OA = r = 6440 \text{ কিমি} = \text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ}$$

$$\angle POQ = \theta = 33'' = \left(\frac{33}{3600} \right)^\circ = \frac{\pi}{180} \times \frac{33}{3600} \text{ রেডিয়ান}$$

P ও Q হলো পৃথিবীর উপরে অবস্থিত দুইটি স্যাটেলাইট।

$s = P$ ও Q এর দূরত্ব বের করতে হবে।

সুতরাং, স্যাটেলাইট দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব, s

$$= r\theta$$

$$= 6440 \times \frac{\pi}{180} \times \frac{33}{3600} \text{ কি.মি.}$$

$$= 1 \text{ কি.মি. (প্রায়)}$$

