প্রকৃতি ও প্রযুক্তিতে বহুপদী রাশি

১. তিনটি বাস্তব উদাহরণ থেকে বহুপদী রাশি গঠন করো।

সমাধানঃ (i) টাকা জমানোর প্লান এর উদাহরণঃ

রহিমের কাছে 100 টাকা আছে এবং সে প্রতি মাসে 50 টাকা করে জমাতে চায়। তাহলে n মাস পর তার জমা টাকার পরিমাণ S(n) হলে, উক্ত টাকা জমানোর প্লানের বহুপদী রাশিঃ $S(n) = 50n + 100$

(ii) চাল-ডালের হিসাবের উদাহরণঃ

করিম বাজারে গিয়ে দেখল প্রতি কেজি চাল ও ডালের দাম যথাক্রমে x ও y টাকা। তিনি 6 কেজি চাল ও 2 কেজি ডাল কিনলেন। তাহলে, করিম সাহেবের চাল ডাল বাবদ খরচকে আমরা নিম্নোক্ত বহুপদী রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি।

মোট খরচ $= 6x + 2y$

(iii) জমির ক্ষেত্রফলের উদাহরণঃ

সমরেশ বাবুর একখন্ড আয়তাকার জমি আছে যার দৈর্ঘ্য x ও প্রস্থ y. তাহলে, সমরেশ বাবুর জমির ক্ষেত্রফলকে আমরা বহুপদী রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি যা নিম্নরুপ।

জমির ক্ষেত্রফল $= xy$

২. নিচের নির্দেশনা মোতাবেক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও।

i) এক চলক, ত্রিমাত্রিক, দ্বিপদী
ii) এক চলক, ত্রিমাত্রিক, চতুপদী
iii) দুই চলক, ত্রিমাত্রিক, দ্বিপদী
iv) দুই চলক, ত্রিসমমাত্রিক, ত্রিপদী
v) চার চলক, চক্রক্রমিক, চতুর্মাত্রিক

সমাধানঃ (i) $3x^3-2x$
(ii) $3x^3-2x^2-3x+2$
(iii) x^3+y^3
(iv) $x^3+x^2y+xy^2$
(v) $x^4+y^4+z^4+m^4$

[আমাদের এই অংশ বা অধ্যায়ের নাম প্রকৃতি ও প্রযুক্তিতে বহুপদী রাশি, যা অনুশীলনীভিত্তিক সমাধান নিয়ে সাজানো। আমাদের সাথে থাকার জন্য ধন্যবাদ।]

৩. উদাহরণ দাও:

i) সমমাত্রিক, প্রতিসম, চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি,
ii) সমমাত্রিক, প্রতিসম বহুপদী রাশি কিন্তু চক্রক্রমিক নয়,
iii) সমমাত্রিক, চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি কিন্তু প্রতিসম নয়,
iv) প্রতিসম, চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি, কিন্তু সমমাত্রিক নয়।

সমাধানঃ (i) $x^2+y^2+z^2$
(ii) $x^2+y^2-z^2$
(iii) $xy+yz+zx$
(iv) $x^3+y^3+z^3-3x^2y^2z^2$

8. i) ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $x^4 - 3x^2 + 1$ কে $2x^2 - 3$ দ্বারা ভাগ করো।

সমাধানঃ $2x^2-3\ )\ x^4 - 3x^2 + 1\ (\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}$

$$-(x^4 - \frac{3}{2}x^2)$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 1$$

$$-(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4})$$

$$-\frac{5}{4}$$

∵ নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4} - \frac{\frac{5}{4}}{2x^2-3}$

ii) ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $5x^3 - 3x - 2$ কে $3x - 2$ দ্বারা ভাগ করো এবং ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে তোমার পাওয়া ভাগশেষের সত্যতা যাচাই করো।

সমাধানঃ $3x-2\ )\ 5x^3 - 3x - 2\ (\ \frac{5}{3}x^2 + \frac{10}{9}x - \frac{7}{27}$

$$-(5x^3 - \frac{10}{3}x^2)$$

$$\frac{10}{3}x^2 - 3x$$

$$-(\frac{10}{3}x^2 - \frac{20}{9}x)$$

$$-\frac{7}{9}x - 2$$

$$-(-\frac{7}{9}x + \frac{14}{27})$$

$$-\frac{68}{27}$$

∵ প্রাপ্ত ভাগশেষ $= -\frac{68}{27}$

<u>ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে প্রাপ্ত ভাগশেষের সত্যতা যাচাইঃ</u>

এখানে, $P(x) = 5x^3 - 3x - 2$

এবং $3x - 2$, P(x) এর একটি উৎপাদক।

তাহলে, $x = \frac{2}{3}$ ধরে P(x) এর মান নির্ণয় করি।

$$P(\frac{2}{3}) = 5(\frac{2}{3})^3 - 3(\frac{2}{3}) - 2$$
$$= 5.\frac{8}{27} - 2 - 2$$
$$= \frac{40}{27} - 4$$
$$= \frac{40-108}{27}$$
$$= -\frac{68}{27}$$

= প্রাপ্ত ভাগশেষের সমান [সত্যতা যাচাই করা হলো]

৫. নিচের বহুপদী রাশিগুলোর কোনটি বাস্তব মৌলিক রাশি তা নির্ণয় করো। যেগুলো বাস্তব মৌলিক রাশি নয় সেগুলোকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

i) $x^2 - 5x - 14$

সমাধানঃ ধরি, $P(x) = x^2 - 5x - 14$

এখন, x = 7 হলে,

$P(7) = 7^2 - 5.7 - 14 = 49 - 35 - 14 = 49 - 49 = 0$

∵ (x-7), প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক, অর্থাৎ $x^2 - 5x - 14$ একটি বাস্তব মৌলিক রাশি নয়।

উৎপাদকে বিশ্লেষণঃ $x^2 - 5x - 14$

$= x^2 - 7x + 2x - 14$

$= x(x-7) + 2(x-7)$

$= (x-7)(x+2)$

ii) $x^2 - 5x + 2$

সমাধানঃ আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

তাহলে, $x^2 - 5x + 2 = 0$ এর ক্ষেত্রে,

বা, $x = \frac{5 \pm \sqrt{\{(5)^2 - 4.1.2\}}}{2.1}$

$\therefore \ x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

এখন $\sqrt{17}$ একটি অমূলদ সংখ্যা, সেহেতু x এর এই মানের জন্য $x^2 - 5x + 2$ কে সরল বহুপদী রাশির মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে না। এমতাবস্থায়, $x^2 - 5x + 2$, $[x \neq 0]$ দ্বিঘাত রাশিটি একটি বাস্তব মৌলিক রাশি।

iii) $2x^2 + 3x + 1$

সমাধানঃ ধরি,$P(x) = 2x^2 + 3x + 1$

এখন, $x = -1$ হলে,

$P(-1) = 2.(-1)^2 + 3.(-1) + 1 = 2 - 3 + 1 = 3 - 3 = 0$

$\because$ (x+1), প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক, অর্থাৎ $2x^2 + 3x + 1$ একটি বাস্তব মৌলিক রাশি নয়।

উৎপাদকে বিশ্লেষণঃ $2x^2 + 3x + 1$

$= 2x^2 + 2x + x + 1$

$= 2x(x+1) + 1(x+1)$

$= (x+1)(2x+1)$

iv) $3x^2 + 4x - 1$

সমাধানঃ আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

তাহলে, $3x^2 + 4x - 1 = 0$ এর ক্ষেত্রে,

বা, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{\{4^2 - 4.3.-1\}}}{2.3}$

$\therefore \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6}$

এখন $\sqrt{28}$ একটি অমূলদ সংখ্যা, সেহেতু x এর এই মানের জন্য $3x^2 + 4x - 1$ কে সরল বহুপদী রাশির মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে না। এমতাবস্থায়, $3x^2 + 4x - 1$, $[x \neq 0]$ দ্বিঘাত রাশিটি একটি বাস্তব মৌলিক রাশি।

৬. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

i) $x^3 - 5x + 4$

সমাধানঃ ধরি, $P(x) = x^3 - 5x + 4$

এখন, x=1 হলে,

$P(1) = 1^3 - 5.1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$

তাহলে, (x-1) হলো $x^3 - 5x + 4$ এর একটি উৎপাদক।

অতএব, $x^3 - 5x + 4$

$= x^2(x-1) + x(x-1) - 4(x-1)$

$= (x-1)(x^2+x-4)$ [Ans.]

ii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

সমাধানঃ ধরি, $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

এখন, x= 2 হলে,

$P(2) = 2^3 - 3.2^2 + 3.2 - 2 = 8 - 12 + 6 - 2 = 14 - 14 = 0$

তাহলে, (x-2) হলো $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ এর একটি উৎপাদক।

অতএব, $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

$= x^2(x-2) - x(x-2) + 1(x-2)$

$= (x-2)(x^2-x+1)$ [Ans.]

iii) $x^5 - 16xy^4$

সমাধানঃ $x^5 - 16xy^4$

$= x(x^4 - 16y^4)$

$= x\{x^4 - (2y)^4\}$

$= x[\{(x^2)^2 - \{(2y)^2\}^2]$

$= x\{x^2 + (2y)^2\}\{(x^2 - (2y)^2\}$

$= x(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$ [Ans.]

৭. একটি ঘনক আকৃতির চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য অন্য একটি ঘনক আকৃতির চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্যের বিপরীত গুণিতক। চৌবাচ্চা দুইটির দৈর্ঘ্যের যোগফল 3 ফুট হলে, তাদের আয়তনের যোগফল কত?

সমাধানঃ ধরি, ১ম ঘনক আকৃতির চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য = x

$\because$ ২য় ঘনক আকৃতির চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য = $\frac{1}{x}$

শর্তানুসারে, $x + \frac{1}{x} = 3$

বা, $x^2 + 1 = 3x$ [উভয়পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^2 - 3x + 1 = 0$

এখন, আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

তাহলে, $x^2 - 3x + 1 = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$x = \frac{3 \pm \sqrt{\{(-3)^2 - 4.1.1\}}}{2.1}$

বা, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

বা, x = 0.38196 ফুট (প্রায়)

অথবা, x = 2.61803 ফুট (প্রায়)

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{0.38196} = 2.61803$ ফুট (প্রায়)

অথবা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2.61803} = 0.38196$ ফুট (প্রায়)

তাহলে, ঘনক দুইটির আয়তনের যোগফল

$= x^3 + (\frac{1}{x})^3$

$= (0.38196)^3 + (2.61803)^3$

$= 18$ ঘন ফুট (প্রায়) [Ans.]

৮. আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

i) $\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

সমাধানঃ এর সমাধান পরে দেওয়া হবে, ধন্যবাদ।

ii) $\frac{x^3+1}{x^2+1}$

সমাধানঃ $x^2 + 1$) $x^3 + 1$ (x

$-(x^3 + x)$

$-x + 1$

এখানে, ভাগফল = x ও ভাগশেষ = -x+1 $\therefore \frac{x^3+1}{x^2+1}$

$= x + \frac{-x+1}{x^2+1}$

$= x - \frac{x-1}{x^2+1}$

অর্থাৎ, $\frac{x-1}{x^2+1}$ একটি আংশিক ভগ্নাংশ।