

Topologie I

Blatt 3

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

1 | Stegreiffragen: ((Umgebungs-)Deformations-)Retrakte und Kofaserungen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Ist $S^1 = \partial D^2 \hookrightarrow D^2$ ein ((Umgebungs-)Deformations-)Retrakt?
- (b) Wahr oder falsch: Jede abgeschlossene Einbettung $A \hookrightarrow X$ ist eine Kofaserung.

2 | Mit dem Abbildungszyylinder von X nach Y

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und M_f der zugehörige Abbildungszyylinder.

- (a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $Y \hookrightarrow M_f$ ein Deformationsretrakt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Inklusion $X \hookrightarrow M_f$ ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

3 | Produkte und Summen von Kofaserungen

Seien $f: A \hookrightarrow X$ und $g: B \hookrightarrow Y$ Kofaserungen.

- (a) Zeigen Sie, dass das Produkt $f \times g: A \times B \rightarrow X \times Y$ eine Kofaserung ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Summe $f \amalg g: A \amalg B \rightarrow X \amalg Y$ eine Kofaserung ist.

4 | Diesen Teil können wir ignorieren

Sei A zusammenziehbar und $i: A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.

- (a) Zeigen Sie, dass die Projektion $X \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist.
- (b) Finden Sie Gegenbeispiele, die jeweils nur eine der beiden Annahmen erfüllen.

5 | Abbildungskegel

Der Kegel CX über einem Raum X ist der Quotientenraum $CX := (X \times I)/i_1(X)$.

- (a) Zeigen Sie, dass CX für alle X zusammenziehbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $i_0: X \hookrightarrow CX$ ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

Der Abbildungskegel Cf einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist definiert als folgender Pushout:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & CX \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Cf \end{array}$$

Sei $f: A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.

- (c) Zeigen Sie, dass Cf homotopieäquivalent zum Quotienten X/A ist.
-