Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
14.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 10

---

1 | Stehgreiffragen: Adjunktion

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Welches ist der Linksadjungierte in der „frei, vergesslich “ Adjunktion?
(b) Seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ adjungierte Funktoren. Wahr oder falsch: Der zugehörige Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ schickt Isomorphismen auf Isomorphismen.
(c) Die Inklusion von partiell geordneten Mengen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ hat einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor. Wie sehen diese aus?
(d) Wahr oder falsch: Es gibt eine $\mathbb{Z}$-indizierte Kette von Funktoren F_i mit $F_i \dashv F_{i+1}$.
(e) Wahr oder falsch in $\mathbf{Mod}_R$:
  (i) $\mathrm{Hom}(A, -) \ \dashv \ A \otimes_R -$.
  (ii) $A \otimes_R - \ \dashv \ \mathrm{Hom}(A, -)$.
  (iii) $\mathrm{Hom}(-, A) \ \dashv \ A \otimes_R -$.
  (iv) $A \otimes_R - \ \dashv \ \mathrm{Hom}(-, A)$.

2 | Keine Adjungierten für die folgenden Funktoren von Körpern

Sei U jeweils der zugehörige Vergissfunktor.

(a) Zeigen Sie $U\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Ring}$ hat weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten.
(b) Zeigen Sie $U\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Ab}$ hat weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten.
(c) Zeigen Sie $U\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Set}$ hat weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten.
(d) Zeigen Sie $(-)^\times\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Ab}$ hat weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten.

(Hinweis: Alle vier Fälle können zusammen behandelt werden)

3 | Komposition von Adjunktionen

Seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ und $F'\colon \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon G'$ zwei Paare von adjungierten Funktoren.

(a) Zeigen Sie, dass $F'F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon GG'$ ein Paar von adjungierten Funktoren ist.

4 | Zwei bekannte Funktoren, ein außergewöhnlicher und eine Adjunktion $f_* \dashv f^{-1} \dashv f_!$

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung von Mengen und $P(M)$ die Potenzmenge von M aufgefasst als partiell geordnete Menge mittels Inklusion. Definiere die folgenden Funktoren:

(i) Direktes Bild: $f_*\colon P(A) \to P(B)$, mit $M \mapsto f(M)$,
(ii) Inverses Bild: $f^{-1}\colon P(B) \to P(A)$, mit $M \mapsto f^{-1}(M)$,
(iii) Außergewöhnliches direktes Bild: $f_!\colon P(A) \to P(B)$, mit $M \mapsto \{b \in B \mid f^{-1}(b) \subseteq M\}$,

Vergewissern Sie sich zuerst, dass dies wirklich Funktoren definieren.

(a) Zeigen Sie, dass f^-1 mit Limiten und Kolimiten vertauscht.
(b) Zeigen Sie, dass $f_* \dashv f^{-1}$.
(c) Zeigen Sie, dass $f^{-1} \dashv f_!$.
