Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
30.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 8

1 | Stehgreiffragen: Tensorprodukt

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Das Tensorprodukt in $\mathbf{Mod}_R$ ist das kategorielle Produkt/Koprodukt.
(b) Was ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
(c) Was ist $R[x] \otimes_R R[y]$?
(d) Was ist $R/I \otimes_R M$, für ein Ideal $I \subseteq R$?
(e) Wahr oder flasch: Es gilt $(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)$ in $\mathbf{Mod}_R$.
(f) Wahr oder falsch: Es gilt $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.
(g) Wahr oder falsch: Es gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$.
(h) Wahr oder falsch: $A \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0 \Rightarrow A = 0$ in $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$.
(i) Sei K/F eine Körpererweiterung. Ist $K \otimes_F K$ ein Körper?

2 | Wie exakt ist eigentlich das Tensorprodukt?

Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Mod}_R$ und M ein R-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass der kontravariante Funktor $- \otimes_R M$ rechtsexakt ist, d.h. die folgende Sequenz ist exakt:

$$A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes_R id_M} B \otimes_R M \xrightarrow{g \otimes_R id_M} C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

(b) Zeigen Sie, dass $- \otimes_R M$ im Allgemeinen nicht exakt ist, d.h. $f \otimes_R \mathrm{id}_M$ ist nicht injektiv.
(c) Sei $M \cong R^{\oplus I}$ frei. Zeigen Sie, dass $- \otimes_R M$ exakt ist.

Ein R-Modul M heißt flach, wenn $- \otimes_R M$ exakt ist.

(d) Sei C flach. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz, für beliebiges M, exakt ist:

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes_R id_M} B \otimes_R M \xrightarrow{g \otimes_R id_M} C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2 \times \{0\} \in \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2}$ flach, aber nicht frei ist.

3 | Tensorprodukte aus der Geometrie ★

Die algebraische Geometrie liefert ein nützliches Wörterbuch, um geometrische Objekte (Nullstellen von Polynomen $f \in \mathbb{C}[x, y]$) in algebraische Objekte (Quotienten $\mathbb{C}[x, y]/(f)$) zu übersetzen.

(a) Berechnen Sie, $\mathbb{C}[x, y]/(xy - 1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y)$
(b) Berechnen Sie, $\mathbb{C}[x, y]/(xy - 1) \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y)$

Diese Berechnungen entsprechen den beiden Faserprodukten

$$\begin{tikzcd}
\{xy-1=0\} \times \{x^2-y=0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{x^2-y=0\} \arrow[d] \\
\{xy-1=0\} \arrow[r] & \{*\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{xy-1=0\} \cap \{x^2-y=0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{x^2-y=0\} \arrow[d] \\
\{xy-1=0\} \arrow[r] & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}$$