## Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Marcus Zibrowius Jan Hennig 05.11.2024

# Topologie I Blatt 4

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

#### 1 | Stehgreiffragen: Faserungen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wahr oder falsch: Die Abbildung  $p: X \to *$  ist eine Faserung.
- (b) Wahr oder falsch: Die Abbildung  $pr_1: (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \to I$  ist eine Faserung.
- (c) Wahr oder falsch: Ist  $p \colon E \to B$  eine Faserung und  $X \subseteq E$ , dann ist  $p|_X \colon X \to B$  eine Faserung.

### 2 | Bilder von Faserungen

Sei  $p: E \to B$  eine Faserung mit  $E \neq \emptyset$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\operatorname{im}(p)$  eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von B ist. Konkret: Ist  $x \in \operatorname{im}(p)$  und  $\gamma \colon I \to B$  ein Weg von x nach  $y \in B$ , dann gilt  $y \in \operatorname{im}(p)$ .
- (b) Folgern Sie, dass eine Faserung in einen wegzusammenhängenden Raum surjektiv ist.
- (c) Finden Sie ein Beispiel für eine nicht-surjektive Faserung.

## 3 | Satz von Kieboom ★

Ziel dieser Aussge ist eine Verallgemeinerung von Blatt 3 Aufgabe 3(a) zu zeigen (Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen).

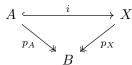
Zur Vorbereitung:

- (a) Sei  $i_a: A \hookrightarrow B$  eine Kofaserung und  $p: E \to B$  eine Faserung. Zeigen Sie, dass  $p^{-1}(i_A(A)) \hookrightarrow E$  eine Kofaserung ist.
  - (Hinweis: Die Abbildung  $u \colon B \to A$  in der Definition eines UDRs kann "besser" gewählt werden.)
- (b) Seien  $j: B \to A$  und  $i: A \to X$  Abbildungen, wobei i und  $i \circ j$  Kofaserungen sind. Zeigen Sie, dass j eine Kofaserung ist.
- (c) Betrachte das folgende kommutative Diagram, wobei  $i: A \to X$  ein (starker) Deformationsretrakt und  $p: E \to B$  eine Faserung ist. Zusätzlich gebe es ein  $u: X \to I$  mit  $u^{-1}(\{0\}) = A$ .

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & E \\
\downarrow \downarrow & & \downarrow p \\
X & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass einen Lift  $H: X \to E$  existiert.

(d) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei  $i: A \to X$  eine Kofaserung und  $p_A, p_X$  Faserungen sind:



Folgern Sie, dass  $i: A \to X$  eine Kofaserung über B ist, d.h. eine Retraktion  $r: X \times I \to M_i$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$M_{i} \xrightarrow{\operatorname{id}_{M_{i}}} M_{i}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$X \times I \xrightarrow{p_{X} \circ pr_{1}} B$$

Betrachte nun das folgende kommutative Diagram:

wobei  $i_{X_0}$ ,  $i_{B_0}$ ,  $i_{E_0}$  Kofaserungen sind, und  $p_0$ , p Faserungen sind.

- (e) Zeigen Sie, dass  $p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$  eine Kofaserung ist.
- (f) Zeigen Sie, dass  $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$  eine Kofaserung ist.
- (g) Zeigen Sie, dass  $p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}: p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \to B_0$  eine Faserung ist.
- (h) Zeigen Sie, dass  $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$  eine Kofaserung über  $B_0$  ist.
- (i) Zeigen Sie, dass  $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$  eine Kofaserung ist. (j) Zeigen Sie, dass  $\overline{p} \colon X \times_B E \to X$  eine Faserung ist.
- (k) Zeigen Sie, dass  $X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow X \times_B E$  eine Kofaserung ist.

Endlich folgt das Finale:

- (l) Zeigen Sie, dass  $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X \times_B E$  eine Kofaserung ist.
- (m) Folgern Sie, dass das Produkt zweier Kofaserungen eine Kofaserung ist (Blatt 3, Aufgabe 3(a)).