Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
26.04.2024

Homologische Algebra
Blatt 3

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufagben werden in der Übung besprochen.

1 | Stehgreiffragen: Etwas zu Moduln und Kategorienäquivalenz

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Mod}_R$ spaltet genau dann, wenn $\mathrm{Hom}(M,-)$ für jedes R-Modul M exakt ist.
(b) Wie viele abelsche Gruppen von Ordnung p für p prim, 64 und 360 gibt es?
(c) Ist $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring?
(d) Wahr oder falsch: Gegeben sei folgendes kommutative Diagramm von kurzen exakten Sequenzen,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

dann ist $B \cong B'$.
(e) Wahr oder falsch: Das Skeleton eines Gruppoids hat nur ein einziges Objekt.

2 | Lokalisierung ist exakt

Sei R ein kommutativer Ring und S eine unter Multiplikation abgeschlossene Teilmenge von R (d.h. $1 \in S$ und $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$). Definiere die Lokalisierung $S^{-1}R$ durch

$$S^{-1}R = (R \times S)/\sim, \quad (x,s) \sim (t,y) \iff \exists u \in S : (xt - ys)u = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Definiere die Addition und Multiplikation durch:

$$(x,s) + (y,t) = (xt + ys, st), \qquad (x,s) \cdot (y,t) = (xy, st).$$

(c) Zeigen Sie, dass die Operationen auf $S^{-1}R$ wohldefiniert sind.
(d) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Ring ist.
(e) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R = 0 \iff 0 \in S$.

Die obige Definition kann direkt wörtlich auf R-Moduln verallgemeinert werden. Sei M ein R-Modul. Das lokalisierte Modul $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}R$-Modul.

(f) Zeigen Sie, dass $S^{-1} \colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_{S^{-1}R}$ ein exakter Funktor ist.

3 | Gruppenringe

Sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe. Elemente im Gruppenring $R[G]$ sind formale R-Linearkombinationen von Elementen aus G, d.h.

$$R[G] = \left\{ \sum_{g \in G} f(g) \cdot g \mid f \colon G \to R, f(g) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } g \in G \right\}.$$

Definiere die Addition und Multiplikation wie folgt:

$$\left(\sum_{g\in G} f(g)\cdot g\right) + \left(\sum_{g\in G} h(g)\cdot g\right) = \sum_{g\in G} (f(g)+h(g))\cdot g$$
$$\left(\sum_{g\in G} f(g)\cdot g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} h(g)\cdot g\right) = \sum_{g,g'\in G} (f(g)h(g'))\cdot gg'$$

(a) Zeigen Sie, dass $R[G]$ eine R-Algebra ist.
(b) Zeigen Sie, dass $R[G]$ genau dann kommutativ ist, wenn G abelsch ist.
(c) Zeigen Sie, dass $R[G]$ nicht-triviale Nullteiler hat, wenn G Elemente endlicher Ordnung hat.

Kaplanskys Vermutung ist „G torsionsfrei $\Rightarrow R[G]$ hat keine nicht-trivialen Nullteiler". Auch wenn sie für viele Klassen von Gruppen bekannt ist, ist sie im Allgemeinen offen.

4 | Invariante Basis Eigenschaft

Ein Ring hat die „invariante Basis Eigenschaft", wenn $R^m \cong_{\mathbf{Mod}_R} R^n \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass ein kommutativer Ring die invariante Basis Eigenschaft hat.
(Hinweis: Krulls Theorem besagt, dass jeder Ring ein maximales Ideal besitzt.)

Die Aussage gilt für jeden Ring, der einen Ringhomomorphismus zu einem Divisionsring hat.

(b) Finden Sie einen nicht-trivialen Ring, der nicht die invariante Basis Eigenschaft besitzt.
(Hinweis: Starten Sie mit einem freien R-Modul von unendlichem Rang für beliebiges R.)

Die folgenden Aussagen sind nicht-äquivalente Abwandlungen der obigen Eigenschaft.

(i) $R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (invariante Basis Eigenschaft),
(ii) $R^m \cong R^n \oplus K \Rightarrow m \geqslant n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$,
(iii) $R^n \cong R^n \oplus K \Rightarrow K = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $R \neq 0$.

(c) Zeigen Sie (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Es gibt Gegenbeispiele für die jeweiligen umgekehrten Richtungen.