Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
17.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 6

---

1 | Stehgreiffragen: (Ko)Produkte und (Ko)Kerne

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien mit Produkten und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Wie ist die kanonische Abbildung $F(X \times Y) \to F(X) \times F(Y)$ definiert?
(b) Wahr oder falsch: Jeder Funktor **Set** $\to$ **Set** erhält Produkte.
(c) Was sind Produkte und Koprodukte in partiell geordneten Mengen?
(d) Was sind Produkte und Koprodukte in der Kategorie der natürlichen Zahlen und Morphismen $k \to n$ genau dann, wenn $k \mid n$ („k teilt n“)?
(e) Wie sehen Kerne und Kokerne in der Kategorie **Ring** aus?
(f) Was bedeutet es für eine Kategorie mit einem Objekt, Produkte zu besitzen? Können Sie ein nicht-triviales Beispiel finden?

2 | (Ko)Produkte von Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{D}$ hat binäre Produkte $\Rightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ hat binäre Produkte.
(b) Zeigen Sie: $\mathcal{D}$ hat binäre Koprodukte $\Rightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ hat binäre Koprodukte.

3 | Produkterhaltend oder nicht produkterhaltend

Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien mit Produkten.

(a) Finden Sie einen Funktor F mit $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$ für alle Objekte A und B, der nicht produkterhaltend ist.
(b) Formulieren Sie genau, was der Unterschied ist.

4 | Binäre Produkte + terminale Objekt $\Rightarrow$ alle endlichen Produkte

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit binären Produkten und einem terminalen Objekt.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ alle endlichen Produkte hat.
(b) Formulieren Sie die duale Aussage.

(Hinweis: Es gibt mehrere Wege endliche Produkte aus binären zu bauen. Warum sind die äquivalent?)

5 | In $\mathbf{Mod}_R$: Kern = Mono = monisch

Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus in $\mathbf{Mod}_R$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) f ist ein Kern, d.h. es gibt einen Morphismus $g\colon B \to C$ mit $f = \ker(g)$.
   (ii) f ist ein Monomorphismus, d.h. für $h_1, h_2\colon T \to A$ mit $f \circ h_1 = f \circ h_2$ folgt $h_1 = h_2$.
   (iii) f ist monisch, d.h. für $h\colon T \to A$ mit $f \circ h = 0$ folgt $h = 0$.
(b) Formulieren Sie die duale Aussage.
