Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
05.07.2024

Homologische Algebra
Blatt 13

---

1 | Stehgreiffragen: Injektiv und projektiv

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Ist das Nullobejekt injektiv/projektiv?
(b) Was ist ein Beispiel für einen projektiven, aber nicht freien Modul?
(c) Was ist ein Beispiel für einen projektiven, aber nicht injektiven Modul?
(d) Was ist ein Beispiel für einen injektiven, aber nicht projektiven Modul?
(e) Wie sieht die injektive Auflösung eines injektiven Objekts aus?
(f) Was ist ein Beispiel für eine abelsche Kategorie, die nicht genügend injektive Objekte besitzt?
(g) Wahr oder falsch: Für $0 \to M \to C_0 \to C_{-1} \to \dots$ exakt, ist $M[0] \to C_*$ ein Quasiisomorphismus.
(h) Ist $\mathbf{Ab}$ äquivalent zu $\mathbf{Ab}^{op}$?

2 | Die Kategorie $\mathbf{Mod}_R$ hat genügend injektive Objekte

Sei A ein R-Modul. Wir zeigen die Aussage zuerst für $R = \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie für $A \neq 0$, dass $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.
(b) Sei $I_{\mathbb{Z}}(A) := \prod_{f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $I_{\mathbb{Z}}(A)$ injektiv ist.
(c) Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $e_A \colon A \to I_{\mathbb{Z}}(A)$ injektiv ist.
(d) Zeigen Sie, dass jedes $\mathbb{Z}$-Modul A eine injektive Auflösung besitzt.

Wir zeigen die Aussage nun für allgemeine Ringe R.

(e) Sei $F \colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} \colon G$ ein Paar von additiven adjungierten Funktoren ($F \dashv G$), mit F exakt. Zeigen Sie, dass G injektive Objekte erhält.
(f) Formulieren Sie die duale Aussage.
(g) Zeigen Sie für eine injektive abelsche Gruppe I, dass $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I)$ ein injektiver R-Modul ist.
(h) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Mod}_R$ genügend injektive Objekte besitzt.
(i) Zeigen Sie, dass jeder R-Modul eine injektive Auflösung besitzt.

3 | Nicht so kurze injektive Auflösungen

Sei $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein injektiver $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modul ist.
(Gilt die Aussage, R/rR ist injektiv über R/rR für $r \in R$, allgemein für Hauptidealringe?)
(b) Angenommen es gibt $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $p|d$ und $p|\frac{m}{d}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ kein injektiver $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modul ist.
(Erweiterung: Zeigen Sie für $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, dass projektive und injektive Objekte übereinstimmen. Gilt die Aussage für beliebige Hauptidealringquotienten R/rR für $r \in R \setminus \{0\}$ bzw. $r = 0$?)
(c) Finden Sie eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Modul.
(Hinweis: Der Titel ist nicht willkürlich gewählt)
