

Homologische Algebra Blatt 9

1 | Stehgreiffragen: Tensorprodukt

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wahr oder falsch: Für $A \rightarrow B \rightarrow C$ exakt, ist auch $A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M$ exakt.
- (b) Wahr oder falsch: Tensorprodukte vertauschen mit Produkten.

2 | R -biadditiv \neq R -bilinear

Sei $R = \{m + n\sigma \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sigma^2 = 1\}$. Sei $A = B = \mathbb{Z}$, mit der R -Modulstruktur gegeben durch $(m + n\sigma)x = (m - n)x$ wobei $x \in \mathbb{Z}$. Sei $G = \mathbb{Z}$, mit der R -Modulstruktur gegeben durch $(m + n\sigma)x = (m + n)x$. Definiere $f: A \times B \rightarrow G$ durch die Multiplikation $(a, b) \mapsto ab$.

- (a) Zeigen Sie, dass die obigen Definitionen für A , B und G wirklich R -Modulstrukturen definieren.
- (b) Zeigen Sie, dass f R -biadditiv ist.
- (c) Zeigen Sie, dass f nicht R -bilinear ist.

3 | Tensorvielfache endlich-erzeugter Moduln verschwinden nicht

Sei $M \neq 0$ ein endlich-erzeugter R -Modul.

- (a) Zeigen Sie, dass $M^{\otimes k} \neq 0$ für $k > 0$,
- (b) Finden Sie ein Beispiel für $M^{\otimes k} = M$.

Warum ist das kein Widerspruch zu einer vorherigen Aussage?

4 | Invarianten und Koinvarianten

Sei G eine Gruppe und A ein links $\mathbb{Z}[G]$ -Modul. Definiere die \mathbb{Z} -Moduln

- (i) Invarianten von A : $A^G = \{a \in A \mid g \cdot a = a \ \forall g \in G\}$,
- (ii) Koinvarianten von A : $A_G = A / \langle g \cdot a - a \mid g \in G, a \in A \rangle$.

Fasse \mathbb{Z} als links $\mathbb{Z}[G]$ -Modul mittels trivialer Wirkung auf $((g, n) \mapsto n)$ und sei $\tau(A)$ das zu A gehörige rechts $\mathbb{Z}[G]$ -Modul $((a, g) \mapsto g^{-1} \cdot a)$

- (a) Zeigen Sie, dass $A^G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]\text{-Mod}}(\mathbb{Z}, A)$, $a \mapsto (\varphi_a: n \mapsto n \cdot a)$ einen natürlichen Isomorphismus definiert.
 - (b) Zeigen Sie, dass $A_G \rightarrow \tau(A) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$, $[a] \mapsto a \otimes 1$ einen natürlichen Isomorphismus definiert.
 - (c) Zeigen Sie für G endlich, dass $(\mathbb{Z}[G])^G \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.
 - (d) Zeigen Sie für G unendlich, dass $(\mathbb{Z}[G])^G \cong_{\mathbb{Z}} 0$.
 - (e) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}[G])_G \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.
-