

## Homologische Algebra Blatt 10

---

### 1 | Stehgreiffragen: Adjunktion

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Welches ist der Linksadjungierte in der „frei, vergesslich“ Adjunktion?
- (b) Seien  $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$  adjungierte Funktoren. Wahr oder falsch: Der zugehörige Isomorphismus  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$  schickt Isomorphismen auf Isomorphismen.
- (c) Die Inklusion von partiell geordneten Mengen  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$  hat einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor. Wie sehen diese aus?
- (d) Wahr oder falsch: Es gibt eine  $\mathbb{Z}$ -indizierte Kette von Funktoren  $F_i$  mit  $F_i \dashv F_{i+1}$ .
- (e) Wahr oder falsch: Ist  $F \dashv G$  und  $G \dashv H$ , so gilt  $F \dashv H$ .
- (f) Wahr oder falsch in  $\mathbf{Mod}_R$ :
  - (i)  $\text{Hom}(A, -) \dashv A \otimes_R -$ .
  - (ii)  $A \otimes_R - \dashv \text{Hom}(A, -)$ .
  - (iii)  $\text{Hom}(-, A) \dashv A \otimes_R -$ .
  - (iv)  $A \otimes_R - \dashv \text{Hom}(-, A)$ .

### 2 | Keine Adjungierten für die folgenden Funktoren von Körpern

Sei  $U$  jeweils der zugehörige Vergissfunktoren.

- (a) Zeigen Sie, dass  $U: \mathbf{Field} \rightarrow \mathbf{Ring}, \mathbf{Ab}$  oder  $\mathbf{Set}$  weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten hat.
- (b) Zeigen Sie, dass  $(-)^{\times}: \mathbf{Field} \rightarrow \mathbf{Ab}$  weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten hat.

(Hinweis: Alle vier Fälle können zusammen behandelt werden)

### 3 | Komposition von Adjunktionen

Seien  $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$  und  $F': \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{E}: G'$  zwei Paare von adjungierten Funktoren ( $F \dashv G, F' \dashv G'$ ).

- (a) Zeigen Sie, dass  $F'F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}: GG'$  ein Paar von adjungierten Funktoren ist ( $F'F \dashv GG'$ ).

### 4 | Zwei bekannte Funktoren, ein außergewöhnlicher und eine Adjunktion $f_* \dashv f^{-1} \dashv f_!$

Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung von Mengen und  $P(M)$  die Potenzmenge von  $M$  aufgefasst als partiell geordnete Menge mittels Inklusion. Definiere die folgenden Funktoren:

- (i) Direktes Bild:  $f_*: P(A) \rightarrow P(B)$ , mit  $M \mapsto f(M)$ ,
- (ii) Inverses Bild:  $f^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ , mit  $M \mapsto f^{-1}(M)$ ,
- (iii) Außergewöhnliches direktes Bild:  $f_!: P(A) \rightarrow P(B)$ , mit  $M \mapsto \{b \in B \mid f^{-1}(b) \subseteq M\}$ ,

Vergewissern Sie sich zuerst, dass dies wirklich Funktoren definieren.

- (a) Zeigen Sie, dass  $f^{-1}$  mit Limiten und Kolimiten vertauscht.
  - (b) Zeigen Sie, dass  $f_* \dashv f^{-1}$ .
  - (c) Zeigen Sie, dass  $f^{-1} \dashv f_!$ .
-