

## Topologie I

### Blatt 6

---

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version **Top**<sub>\*</sub>.

#### 1 | Stegreiffragen: Faserungen und ...

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wahr oder falsch:  $\text{pr}_1: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ oder } x = y\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Faserung.
- (b) Was ist die universelle Eigenschaft des Smash-Produkts? (Kommt Ihnen diese bekannt vor?)

#### 2 | Smash-Produkte

Seien  $X, Y, Z$  Objekte in **Top**<sub>\*</sub>.

- (a) Zeigen Sie, dass es folgende natürliche Isomorphismen gibt:
  - (i)  $(X \times Y)_+ \cong X_+ \wedge Y_+$
  - (ii)  $X \wedge Y \cong Y \wedge X$
  - (iii)  $* \wedge X \cong *$
  - (iv)  $S^0 \wedge X \cong X$
  - (v)  $X \wedge (Y \vee Z) \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
  - (vi)  $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$
- (b) Zeigen Sie, dass die Assoziativität (vi) für  $X = Y = (\mathbb{Q}, 0)$  und  $Z = (\mathbb{Z}, 0)$  nicht gilt.  
(Hinweis:  $\mathbb{Z}$  ist lokal kompakt, aber  $\mathbb{Q}$  nicht. Betrachten Sie die Quotientenabbildungen.)

#### 3 | Kokomposition

Seien  $X, Y, Z, T$  Objekte in **Top**<sub>\*</sub> und  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  Morphismen.

- (a) Zeigen Sie:

$$[Z, T] \xrightarrow{g^*} [Y, T] \xrightarrow{f^*} [X, T] \text{ ist exakte Sequenz von punktierten Mengen}$$
$$\Leftrightarrow \forall t: Y \rightarrow T \quad \exists \bar{t}: Z \rightarrow T : \quad t \circ f \simeq \text{const}_* \Rightarrow \bar{t} \circ g \simeq t$$

---