

Homologische Algebra

Blatt 5

1 | Stehgreiffragen: Repräsentierbarkeit

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Was sind die repräsentierenden Objekte für die Funktoren, die eine kleine Kategorie auf die Menge der Objekte/Morphismen/komponierbaren Morphismen abbildet?
- (b) Was ist das repräsentierende Objekt für die Identität $\text{id}_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$?

2 | Repräsentierbarkeit

Finden Sie die repräsentierenden Objekte für die folgenden Funktoren:

- (a) $\text{Hom}(- \times A, B) : \mathbf{Set}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, der eine Menge X auf die Menge der Abbildungen $X \times A \rightarrow B$ abbildet.
- (b) $\mathcal{T} : \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, der einen topologischen Raum auf die Menge der offenen Abbildungen schickt und stetige Abbildungen auf deren Urbildfunktion
- (c) Was ändert sich, wenn für $\mathcal{T} : \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ abgeschlossene Mengen genommen werden?
- (d) $\text{Path} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, der einen topologischen Raum auf die Menge der Pfade abbildet.
- (e) $\text{Loop} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Set}$, der einen topologischen Raum auf die Menge der (punktierten) Schleifen abbildet.

3 | Nicht-Repräsentierbarkeit

Es gibt den Slogan „die meisten Funktoren sind nicht repräsentierbar“.

- (a) Zeigen Sie, dass der kovariante(!) Potenzmengenfunktoren nicht repräsentierbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass repräsentierbare Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ Monomorphismen erhalten.

4 | Yoneda oder: Wie falsch dualisiert wurde

Es gibt das Yoneda Lemma für ko- und kontravariante Funktoren. Folgende Version gibt es aber nicht. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein Funktor und c ein Objekt von \mathcal{C} .

- (a) Zeigen Sie, dass es keine natürliche Bijektion $\text{Hom}(F, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, -)) \cong F(c)$ gibt.
- (b) Können Sie den Fehler identifizieren, der hier bei dualisieren passiert ist?

5 | Äquivalenzen sind verträglich mit Repräsentierbarkeit ★

Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ zwei Funktoren, $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien, sodass GH und F natürlich isomorph sind.

- (a) Zeigen Sie: G ist repräsentierbar $\Rightarrow F$ ist repräsentierbar.
 - (b) Zeigen Sie: F ist repräsentierbar $\Rightarrow G$ ist repräsentierbar.
-