

## Topologie I

### Blatt 7

---

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version **Top**<sub>\*</sub>.

#### 1 | Stegreiffragen: Höhere Homotopiegruppen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Was ist  $\pi_i(S^1)$ ?
- (b) Was ist die „Randabbildung“  $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_0(S^0)$  für die Hopf-Faserung  $S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^1$ ?
- (c) Was ist die „Randabbildung“  $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_0(\mathbb{Z})$  für die universelle Überlagerung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ?
- (d) Wahr oder falsch:  $X, Y$  topologische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f_*: \pi_i(X) \xrightarrow{\cong} \pi_i(Y)$  für alle  $i$ , dann gilt  $X \simeq Y$ .

#### 2 | Warum sind $S^2$ und $S^3$ so ähnlich?

Ziel dieser Aufgabe ist der Vergleich der Homotopiegruppen von  $S^2$  und  $S^3$ .

- (a) Berechnen Sie  $\pi_0(S^2)$  und  $\pi_0(S^3)$ .
- (b) Berechnen Sie  $\pi_1(S^2)$  und  $\pi_1(S^3)$ .
- (c) Berechnen Sie  $\pi_2(S^2)$  und  $\pi_2(S^3)$ .
- (d) Zeigen Sie  $\pi_i(S^2) \cong \pi_i(S^3)$  für  $i \geq 3$ .

(Hinweis: Falls Sie nicht alle Gruppen bestimmen können, berechnen Sie alle Homotopiegruppen in Abhängigkeit eines einzelnen Moduls  $A$  (die Berechnung von  $A$  wird sehr bald sehr leicht sein).)

#### 3 | Eckmann-Hilton = Hilton-Eckmann

Sei  $M$  eine Menge mit binären Operationen  $- \circ -: M \times M \rightarrow M$  und  $- \otimes -: M \times M \rightarrow M$  mit

- (i) Unitarität: es gibt  $1_\circ, 1_\otimes \in M$  mit  $m \circ 1_\circ = m = 1_\circ \circ m$  und  $m \otimes 1_\otimes = m = 1_\otimes \otimes m$ .
- (ii) Vertauschung:  $(a \otimes b) \circ (c \otimes d) = (a \circ c) \otimes (b \otimes d)$  für alle  $a, b, c, d \in M$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $1_\circ = 1_\otimes$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die Operationen übereinstimmen und kommutativ sind.  
(Hinweis: Zeigen Sie  $a \circ b = b \otimes a$ )
- (c) Zeigen Sie, dass die Operation assoziativ ist.

Nun zu den vielfältigen Anwendungen:

- (d) Folgern Sie, dass  $\pi_i(X)$  für  $i \geq 2$  kommutativ ist.
  - (e) Folgern Sie, dass  $\pi_1(X)$  für einen H-Raum  $X$  kommutativ ist.  
( $X$  H-Raum: es gibt  $e \in X$  und  $\mu: X \times X \rightarrow X$  mit  $\mu(e, e) = e$  und  $\mu(-, e) \simeq_e \text{id}_X \simeq_e \mu(e, -)$ )
  - (f)\* Folgern Sie, dass ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Gruppen eine abelsche Gruppe ist.
-