Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
07.01.2025

Topologie I
Blatt 10

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

1 | Stegreiffragen: CW-Komplexe

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Finden Sie eine zelluläre Struktur für $S^1 \times S^1$ mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle.
(b) Finden Sie eine zelluläre Struktur für $S^1 \times S^1$ mit einer 0-Zelle, drei 1-Zellen und zwei 2-Zellen.
(c) Finden Sie eine zelluläre Struktur für $S^1 \times S^1$ mit vier 0-Zellen, acht 1-Zellen und vier 2-Zellen.
(d) Fällt Ihnen etwas an den obigen Zahlen auf?
(e) Wie viele verschiedene CW-Komplexe mit zwei 0-Zellen und vier 1-Zellen gibt es?
(f) Wie viele verschiedene CW-Komplexe mit einer 0-Zelle, einer 1-Zelle und einer 2-Zelle gibt es?
(g) Wahr oder falsch: Es gibt einen zu S^2 homotopieäquivalenten 127-dimensionalen CW-Komplex.

2 | Schwache Homotopieäquivalenz

Ziel dieser Aufgabe ist es zu sehen, dass schwache Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

(a) Seien $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass wenn zwei der Abbildungen f, g, $g \circ f$ schwache Homotopieäquivalenzen sind, so auch die dritte.

Zwei Räume X und Y heißen schwach homotopieäquivalent, falls eine endliche Sequenz von schwachen Homotopieäquivalenzen der Form

$$X = X_0 \longrightarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longleftarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = Y$$

existiert.

(b) Zeigen Sie, dass schwache Homotopieäquivalenz so eine Äquivalenzrelation definiert.

Sei $Y = S^1 \vee S^2$ und $f\colon X \to Y$ die zweifache Überlagerung.

(c) Zeigen Sie $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$ für alle $n \geq 0$.
(d) Zeigen Sie, dass f keine schwache Homotopieäquivalenz ist.

3 | Reduktion des 0-Skeletts

Sei X ein wegzusammenhängender CW-Komplex.

(a) Zeigen Sie, dass X homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit einer 0-Zelle ist.

4 | Keine CW-Struktur möglich

Sei $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ und X ein CW-Komplex.

(a) Zeigen Sie, dass es keine schwache Homotopieäquivalenz von $A \to X$ gibt.
(b) Gibt es eine schwache Homotopieäquivalenz $X \to A$?
