

## Homologische Algebra

### Blatt 7

#### 1 | Stehgreiffragen: Limes und Kolimes

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wie sehen die Indexkategorien für Produkte und Koprodukte aus?
- (b) Was ist der Limes des Diagramms  $* \rightarrow S^1 \leftarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  die universelle Überlagerung ist?
- (c) Was ist der Kolimes des Diagramms  $\mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$  in **Grp**?
- (d) Wie kann der Kern einer Abbildung in **Mod**<sub>R</sub> als Limes aufgefasst werden?
- (e) Was ist der Limes in **Set** eines  $\mathbb{N}$  indizierten Diagramms, wobei alle  $X_i \leftarrow X_{i+1}$  injektiv sind?
- (f) Was ist der Kolimes in **Set** eines  $\mathbb{N}$  indizierten Diagramms, wobei alle  $X_i \rightarrow X_{i+1}$  injektiv sind?
- (g) Gegeben sein  $f_{i,j}: A_i \rightarrow B_j$  für  $(i,j) \in I \times J$ . Welches von beiden ist die kanonische Abbildung,  $\prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{j \in J} B_j$  oder  $\coprod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{j \in J} B_j$ , und wie ist sie definiert?

#### 2 | Faserprodukte entlang Monos (und Epis)

Sei das folgende Diagramm ein Faserprodukt diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f'} & C \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A. \end{array}$$

- (a) Zeigen Sie:  $f: B \rightarrow A$  ist ein Monomorphismus  $\Rightarrow f': P \rightarrow C$  ein Monomorphismus ist.
- (b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für:  $f: B \rightarrow A$  Epimorphismus  $\Rightarrow f': P \rightarrow C$  Epimorphismus.  
 (Hinweis: Probieren Sie eine Kategorie in der sich Epimorphismen anders als in **Set** verhalten)
- (c) Zeigen Sie:  $f: B \rightarrow A$  Isomorphismus  $\Rightarrow f': P \rightarrow C$  Isomorphismus.

#### 3 | Faserprodukte komponieren

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C' & \xrightarrow{g'} & B' & \xrightarrow{f'} & A' \\ \gamma \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ C & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

und sei  $B'$  das Faserprodukt von  $f: B \rightarrow A$  und  $\alpha: A' \rightarrow A$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $C'$  genau dann das Faserprodukt von  $g: C \rightarrow B$  und  $\beta: B' \rightarrow B$  ist, wenn es das Faserprodukt von  $f \circ g: C \rightarrow A$  und  $\alpha: A' \rightarrow A$  ist.

#### 4 | **Mod**<sub>R</sub> ist (ko)vollständig

Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt (ko)vollständig, wenn alle kleinen Diagramme einen (Ko)Limes in  $\mathcal{C}$  haben, d.h. für jede kleine Indexkategorie  $\mathcal{I}$ , besitzt jeder Funktor  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  einen (Ko)Limes.

- (a) Zeigen Sie, dass **Mod**<sub>R</sub> kovollständig ist.
- (b) Zeigen oder widerlegen Sie: **Mod**<sub>R</sub> ist vollständig.