Verfeinerte enumerative Geometrie

Jan Hennig

Mathematisches Institut, Heinrich-Heine Universität Düsseldorf (GRK 2240: Algebro-Geometric Methods in Algebra, Arithmetic and Topology)

Gefördert durch Deutsche Forschungsgemeinschaft

Motivation

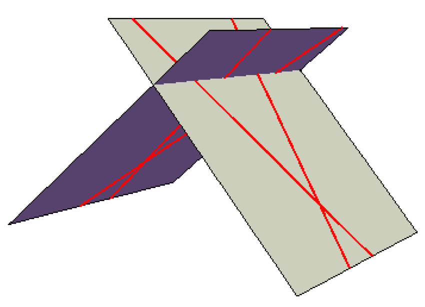
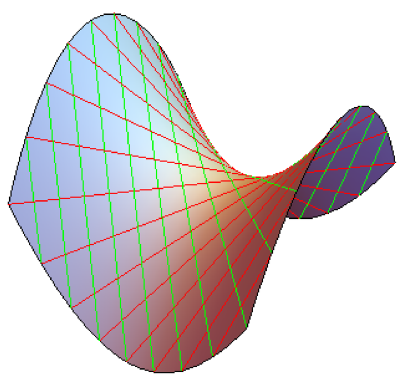
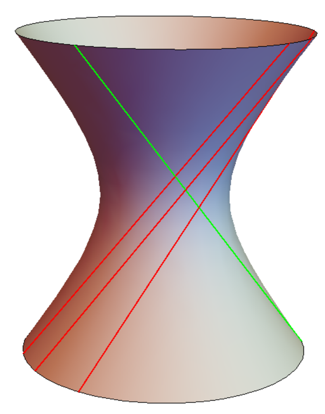
Das Ziel ist es geometrische Objekte besser zu verstehen (z.B. um diese zu klassifizieren). Eine Möglichkeit ist es dabei sich anzugucken welche Unterobjekte es gibt und wie diese liegen. Das fängt mit „Gibt es ein Objekt, das … erfüllt?“ und daraus entwickeln sich dann weitere Fragen:

- „Wie viele davon gibt es?“ ($\rightsquigarrow$ enumerativer Aspekt)
- „Kann man alle Lösungen angeben/parametrisieren?“, „Bilden diese Strukturen wieder etwas Geometrisches?“ ($\rightsquigarrow$ Modulräume)
- „Welche Situationen sind selten? Welche erwartet man häufig?“ ($\rightsquigarrow$ generische Situation/allgemeine Lage)

Teilweise sind diese Fragen selbst in einfachen Situationen erstaunlich schwierig zu lösen. Daher ist es von Vorteil, wenn es allgemeine Techniken gibt mit denen man diese Probleme angehen kann.

Konkrete Beispiele

- Wie viele Geraden gehen durch zwei verschiedene Punkte im Raum? Genau eine!
- Fixiere vier verschiedene Geraden im Raum, wie viele Geraden schneiden diese vier Geraden? Es sind 2, aber …

Grundlegende Idee

Idee: „Rechnen mit geometrischen Strukturen“

- Finden eines geometrischen Objekts in dem sich alles abspielt
  ($\rightsquigarrow$ Modulräume, z.B. Grassmannsche)
- Übersetzung von „Schnittbedingungen“ in geometrische Objekte
  ($\rightsquigarrow$ Schubertzellen/-varietäten)
- Übersetzung von geometrischen Informationen in algebraische Struktur
  ($\rightsquigarrow$ Chow-Ringe)
- Konkretes Rechnen von Beispielen
  ($\rightsquigarrow$ Schubert-Kalkühl)

„Verfeinert“

Viele der klassischen Resultate funktionieren erstmal nur für algebraisch abgeschlossene Körper (also zum Beispiel für komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, aber nicht für reellen Zahlen $\mathbb{R}$). Das hat technische Gründe.
Das „verfeinert“ (teilweise auch „quadratisch verfeinert“ genannt) bedeutet, dass die betrachteten Unterobjekte nun über eine zusätzliche Struktur verfügen. Diese Struktur ist eine reguläre Bilinearform (quadratische Form). Für diese Objekte kann man eine ähnliche Konstruktion durchführen und erhält dadurch Chow-Witt Ringe.
Der Vorteil dieses Ansatzes ist eine Ausweitung auf weitere Körper (die quadratische Form liefert diese arithmetische Information) und liefert auch genauere Resultate in den vorher erlaubten Fällen.

Beispiel einer verfeinerten Zählung

Ein klassisches Resultat: Auf einer glatten Kubik im $\mathbb{P}^3_k$ (für k algebraisch abgeschlossen) liegen immer genau 27 Geraden.
Wie sieht das z.B. über den reellen Zahlen aus?
Kass und Wickelgren („An Arithmetic Count of the Lines on a Smooth Cubic Surface“) haben gezeigt, dass die ursprüngliche „27“ in der verfeinerten Theorie nun die folgende Form annimmt:

$$\sum_{l \text{ Gerade}/_L} \mathrm{Tr}_{L/k}(\langle \text{Typ von } l\rangle) = 15 \cdot \langle 1\rangle + 12 \cdot \langle -1\rangle \in \mathrm{GW}(k).$$

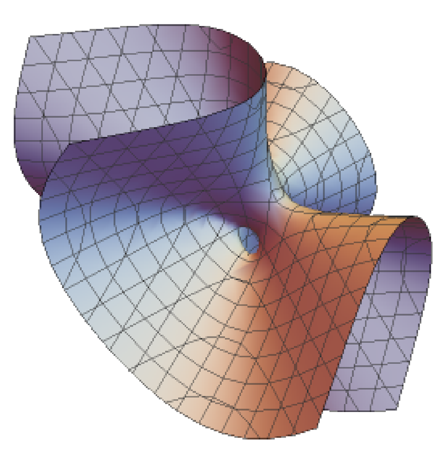
Um dieses Resultat besser zu verstehen, können wir uns $k = \mathbb{R}$ angucken. Eine Gerade ist dann über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ definiert. Die möglichen Typen:

- ± 1 für $L = \mathbb{R}$, mit $\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}/\mathbb{R}}(\langle \pm 1\rangle) = \pm 1$,
- 1 für $L = \mathbb{C}$, mit $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\langle 1\rangle) = \langle 1\rangle + \langle -1\rangle$.

Daraus kann man z.B. folgern, dass Geraden immer paarweise verschwinden oder:

$$\text{Anzahl Typ 1 Geraden} - \text{Anzahl Typ -1 Geraden} = 3.$$

Also gibt es im reellen Fall immer mindestens 3 Geraden. Tatsächlich gibt es den Fall von 27 reellen Geraden z.B. auf der Clebschen Diagonalkubik.



Weitere Fragen

Durch diese verfeinerte Theorie ergeben sich neue Möglichkeiten und neue Fragen:

- Wie kann man konkret in dieser Theorie rechnen?
  ($\rightsquigarrow$ Berechnung der Chow-Witt Ringe)
- Wie verhält sie sich anders als die klassische Variante?
- Welche Resultate können verfeinert werden?
  ($\rightsquigarrow$ Probleme mit Orientierungen)
- Was ist die geometrische Bedeutung der auftretenden quadratischen Formen/Typen der Geraden?
- Wie können untere/obere Schranken formuliert werden?
  (für ganze Zahlen: leicht, für quadratische Formen: unklar)
- Welche Fälle können ganz konkret auftreten?
  (bei der glatten Kubik über $\mathbb{R}$ sind es genau 3, 7, 15 oder 27 Geraden)

Referenzen

- D. Eisenbud, J. Harris: *3264 and all that. A second course in algebraic geometry* Cambridge University Press (2016)
- J. L. Kass, K. Wickelgren: *An arithmetic count of the lines on a smooth cubic surface* Compos. Math. 157, No. 4, 677–709 (2021)
- P. Srinivas, K. Wickelgren: *An arithmetic count of the lines meeting four lines in* $\mathbb{P}^3$ Trans. Am. Math. Soc., Volume 374, No. 5, 3427–3451 (2021)