

Topologie II

Blatt 12

Sofern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version **Top_{*}**.

1 | Stegreiffragen: Fundamentalklassen und Eulercharakteristik

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Wie eindeutig ist die Fundamentalklasse einer n -dimensionalen kompakten R -orientierbaren Mannigfaltigkeit für $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$?
- (b) Wahr oder falsch: $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

2 | Verbundene Summe

Seien M_1, M_2 n -dim. zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeiten. Seien $B_i \subseteq M_i$ abgeschlossene n -Bälle, die in größere Bälle in M_i einbetten. Definiere $M_1 \# M_2 := (M_1 \setminus \overset{\circ}{B}_1) \cup_f (M_2 \setminus \overset{\circ}{B}_2)$ für einen Homöomorphismus $f: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$.

- (a) Zeigen Sie, dass $H_i(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) \cong H_i(M_1; \mathbb{Z}) \oplus H_i(M_2; \mathbb{Z})$ für $1 \leq i \leq n-2$.
- (b) Zeigen Sie, dass $H_{n-1}(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(M_1; \mathbb{Z}) \oplus H_{n-1}(M_2; \mathbb{Z})$, für M_1 oder M_2 orientierbar.
- (c) Zeigen Sie, dass $H_{n-1}(M_1 \# M_2; \mathbb{Z})$ aus $H_{n-1}(M_1; \mathbb{Z}) \oplus H_{n-1}(M_2; \mathbb{Z})$ durch Ersetzen eines der beiden $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Summanden durch ein \mathbb{Z} entsteht, für M_1 und M_2 nicht-orientierbar.
- (d) Zeigen Sie, dass $\chi(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^n)$.

3 | Homologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Sei M eine kompakte zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit.

- (a) Berechnen Sie $H_2(M; \mathbb{Z})$ in Abhängigkeit von $H_1(M; \mathbb{Z})$.
- (b) Folgern Sie, aus (a) eine notwendige Bedingung an $H_1(M; \mathbb{Z})$ für nicht-Orientierbarkeit.
(Betachte Sie jetzt nochmal die Aufgabe 3 auf Blatt 11.)
- (c) Zeigen Sie, dass es keine weiteren Relationen in der Homologie von M gibt. Konkret: Konstruieren Sie eine kompakte zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit M mit folgender Homologie:

$$H_i(M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i = 0 \\ \mathbb{Z}^{r+\varepsilon} \oplus \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z} & , i = 1 \\ \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\varepsilon & , i = 2 \\ \mathbb{Z}^{1-\varepsilon} & , i = 3 \end{cases}$$

für $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}_0$ und $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}$.

(Sie brauchen nicht zu zeigen, dass die Räumen $P = (S^2 \times I)/(x, 0) \sim (-x, 1)$ und der zum Kettenkomplex $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ assoziierte Raum wirklich Mannigfaltigkeiten sind.)