Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
21.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 11

---

1 | Stegreiffragen: Kettenkomplexe

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: $0 \to C_*$ ist genau dann ein Quasiisomorphismus, wenn C_* exakt ist.
(b) Wahr oder falsch: Homologie vertauscht mit direkten Summen, d.h. $\bigoplus_{i\in I} H_n(A_i) \cong H_n(\bigoplus_{i\in I} A_i)$.
(c) Wahr oder falsch: Homologie vertauscht mit direkten Produkten, d.h. $\Pi_{i\in I} H_n(A_i) \cong H_n(\Pi_{i\in I} A_i)$.
(d) Was ist die Homologie von $\ldots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \ldots$?
(e) Was ist die Homologie von $\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$?
(f) Wahr oder falsch: Für einen Kettenkomplex C_* ist $0 \to C_* \xrightarrow{\cdot n} C_* \to C_*/nC_* \to 0$ immer exakt.

2 | Kerne und Kokerne können gradweise berechnet werden

Sei $f\colon A_* \to B_*$ ein Kettenkomplexmorphismus. Definiere die Kettenkomplexe $\ker(f)_n = \ker(f_n)$ und $\operatorname{coker}(f)_n = \operatorname{coker}(f_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\ker(f)_*$ mit dem durch d_*^A induziertem Differential einen Kettenkomplex definiert.
(b) Zeigen Sie, dass $\ker(f)_*$ ein Kern von f in der Kategorie der Kettenkomplexe ist.
(c) Zeigen Sie die analogen Aussagen für den Kokern $\operatorname{coker}(f)_*$.
(d) Folgern Sie, dass die Abbildung f genau dann ein Monomorphismus in der Kategorie der Kettenkomplexe ist, wenn $f_n\colon A_n \to B_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Monomorphismus ist (und die gleiche Aussage für Epimorphismen).

3 | Quasiisomorphismen über Kerne und Kokerne bestimmen

Sei $f\colon A_* \to B_*$ ein Kettenkomplexmorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\ker(f)_*$ und $\operatorname{coker}(f)_*$ exakt sind, f ein Quasiisomorphismus ist.
(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung, d.h. einen Quasiisomorphismus f aber $\ker(f)_*$, $\operatorname{coker}(f)_*$ sind nicht exakt.
(Hinweis: wählen Sie A_* und B_* exakt)

4 | Spaltend exakte Kettenkomplexe

Ein Kettenkomplex C_* heißt spaltend, wenn es Morphismen $s_n\colon C_n \to C_{n+1}$ mit $d_n = d_n \circ s_{n-1} \circ d_n$ für alle n gibt und spaltend exakt, wenn der Komplex zusätzlich exakt ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\ldots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \ldots$ exakt ist, aber nicht spaltet.
(b) Zeigen Sie, dass C_* genau dann spaltet, wenn es eine Zerlegung von R-Moduln der Form $C_n \cong Z_n \oplus B'_n$ und $Z_n = B_n \oplus H'_n$ gibt, wobei Z_n die Zykel von C_n sind und B_n die Ränder.
(c) Zeigen Sie, dass ein spaltender Kettenkomplex C_* genau dann exakt ist, wenn $H'_n = 0$.
(d) Zeigen Sie, dass C_* genau dann spaltend exakt ist, wenn die Identität $\mathrm{id}_{C_*}\colon C_* \to C_*$ nullhomotop ist.

Betrachte den Kettenkomplex $H_*(C)$ mit $(H_*(C))_n = H_n(C)$ und trivialen Differentialen.

(e) Zeigen Sie, dass C_* und $H_*(C)$ genau dann kettenhomotopieäquivalent sind, wenn C_* spaltet.

5 | Homologie von Graphen ★

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher ungerichteter Graph. Fixiere eine Orientierung für jede Kante. Definiere den Kettenkomplex C_* durch die freien R-Moduln $C_0 = R[V]$, $C_1 = R[E]$ und $C_n = 0$ für $n \neq 0, 1$. Das Differential $d_1 \colon C_1 \to C_0$ ist gegeben durch die Inzidenzmatrix, d.h. diese $|V| \times |E|$ Matrix hat an Stelle (i, j) den Eintrag $+1$, falls die Kante e_j in v_i startet, den Eintrag -1, falls die Kante e_j in v_i endet, und 0 sonst.

(a) Zeigen Sie für Γ zusammenhängend, dass $H_0(C)$ und $H_1(C)$ freie R-Moduln sind und es gilt:

$$\mathrm{rk}_R(H_0(C)) = 1, \qquad \mathrm{rk}_R(H_1(C)) = |E| - |V| + 1$$

(Was passiert für Γ nicht-zusammenhängend?)