

Topologie II

Blatt 9

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version **Top_{*}**.

1 | Kohomologieringe von projektiven Räumen

Betrachte \mathbb{RP}^n mit Unterräumen $p = \{[0 : \dots : 0 : 1 : 0]\}$, $\mathbb{RP}^{n-1} = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_n = 0\}$ und $\mathbb{RP}^1 = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_0 = \dots = x_{n-2} = 0\}$. Sofern nicht anders angegeben sind alle Koeffizienten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- (a) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert und die angegebenen Abbildungen Isomorphismen sind für $i \in \{0, 1, n-1\}$

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-i}(\mathbb{RP}^n) & \xleftarrow{\cong} & H^{n-i}(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^i) & \longrightarrow & H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^{n-i}(\mathbb{RP}^{n-i}) & \xleftarrow{\cong} & H^{n-i}(\mathbb{RP}^{n-i}, \mathbb{RP}^{n-i} \setminus \{p\}) & \xrightarrow{\cong} & H^{n-i}(\mathbb{R}^{n-i}, \mathbb{R}^{n-i} \setminus \{0\}) \end{array}$$

wobei die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{n-1} : 1 : x_n]$ gegeben ist.

- (b) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert und die angegebenen Abbildungen Isomorphismen sind

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{RP}^n) \otimes H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{RP}^n) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1}) \otimes H^{n-1}(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^1) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{p\}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}) \otimes H^{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{array}$$

- (c) Folgern Sie, dass $H^1(\mathbb{RP}^n) \otimes H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) \rightarrow H^n(\mathbb{RP}^n)$ ein Isomorphismus ist.
 (d) Folgern Sie $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ mit $|x| = 1$.
 (e) Folgern Sie analog, dass $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ mit $|x| = 2$ gilt.

2 | Cup-Produkte liefern feinere Informationen

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Cup-Produkt Räume voneinander unterscheiden kann.

- (a) Zeigen Sie, dass $H_*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$.
 (b) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$ als graduierte Gruppen.
 (c) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \not\cong H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$ als graduierte Ringe.
 (d) Folgern Sie, dass \mathbb{CP}^2 und $S^2 \vee S^4$ nicht homotopieäquivalent sind.
 (Extra: Hätten wir diese Frage schon früher beantworten können?)