**Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf**
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

**Wintersemester 2024**
28.01.2025

# Topologie I
# Blatt 13

---

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version $\mathbf{Top}_*$.

## 1 | Stegreiffragen: Eilenberg-MacLane Räume

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

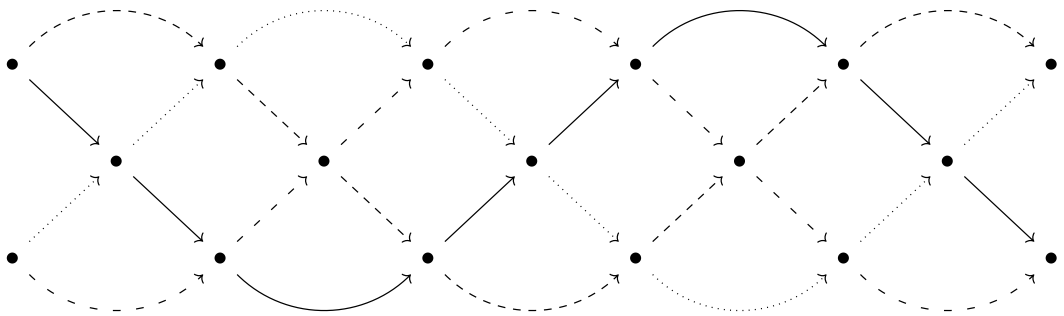
(a) Sei $F_k$ die freie Gruppe auf $k$ Erzeugern. Wie sieht $K(F_k, 1)$ aus?
(b) Wie sieht $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ aus?
(c) Wahr oder falsch: $K(\mathbb{Z}^k, 2) \cong \prod_{i=1}^k S^2$
(d) Was ist $\Omega K(G, n)$?

## 2 | Lange exakte Sequenz von Tripeln

Seien $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $A \hookrightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist, $H_k(X, A) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Betrachte das folgende kommutative Diagramm von vier verwobenen Kettenkomplexen.



(b) Zeigen Sie, dass wenn drei der vier Sequenzen exakt sind, so auch die vierte.
(c) Seien $B \subseteq A \subseteq X$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz exakt ist

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}^{(X,A,B)}} H_k(X, B) \longrightarrow H_k(X, A) \longrightarrow H_{k-1}(A, B) \xrightarrow{\partial_k^{(X,A,B)}} \dots,$$

wobei das Differential $\partial_k^{(X,A,B)}\colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(A, B)$ die Verknüpfung des Differentials für das Paar $(X, A)$ und der Abbildung aus der langen exakten Sequenz für $(A, B)$ ist, und die anderen Abbildungen durch die entsprechenden Inklusionen induziert sind.

## 3 | Homologiegruppen von Einhängungen

Sei $\Sigma X = (X \times [-1, 1])/\sim$ für $(x, -1) \sim (x', -1)$, $(x, 1) \sim (x', 1)$ die (nicht reduzierte) Einhängung.

(a) Zeigen Sie, dass es Isomorphismen $H_k(X, \{x_0\}) \to H_{k+1}(\Sigma X, \{(x_0, 0)\})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt.
(b) Zeigen Sie, dass $H_k(S^n) \cong H_{k-n}(*) \oplus H_k(*)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.
(Hinweis: Überlegen Sie, wie sich $H_k(X)$ in Abhängigkeit von $H_k(X, \{*\})$ ausdrücken lässt)

---