

## Topologie II

### Blatt 9

---

Sofern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räume und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**, bzw. der punktierten Version **Top<sub>\*</sub>**.

#### 1 | Kohomologieringe von projektiven Räumen

Betrachte  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  mit Unterräumen  $p = \{[0 : \dots : 0 : 1 : 0]\}$ ,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_n = 0\}$  und  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_0 = \dots = x_{n-2} = 0\}$ . Sofern nicht anders angegeben sind alle Koeffizienten  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert und die angegebenen Abbildungen Isomorphismen sind für  $i \in \{0, 1, n-1\}$

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-i}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xleftarrow{\cong} & H^{n-i}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^i) & \longrightarrow & H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^{n-i}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-i}) & \xleftarrow{\cong} & H^{n-i}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-i}, \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-i} \setminus \{p\}) & \xrightarrow{\cong} & H^{n-i}(\mathbb{R}^{n-i}, \mathbb{R}^{n-i} \setminus \{0\}) \end{array}$$

wobei die Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  durch  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{n-1} : 1 : x_n]$  gegeben ist.

- (b) Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert und die angegebenen Abbildungen Isomorphismen sind

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \otimes H^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \otimes H^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^1) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \{p\}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}) \otimes H^{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{array}$$

- (c) Folgern Sie, dass  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \otimes H^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow H^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  ein Isomorphismus ist.  
 (d) Folgern Sie  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$  mit  $|x| = 1$ .  
 (e) Folgern Sie analog, dass  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$  mit  $|x| = 2$  gilt.

#### 2 | Cup-Produkte liefern feinere Informationen

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Cup-Produkt Räume voneinander unterscheiden kann.

- (a) Zeigen Sie, dass  $H_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$ .  
 (b) Zeigen Sie, dass  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$  als graduierte Gruppen.  
 (c) Zeigen Sie, dass  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) \not\cong H^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z})$  als graduierte Ringe.  
 (d) Folgern Sie, dass  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  und  $S^2 \vee S^4$  nicht homotopieäquivalent sind.  
 (Extra: Hätten wir diese Frage schon früher beantworten können?)