

# 1 Allgemein

## 1.1 stets im Hinterkopf behalten:

1. die Formeln der Quantenmechanik sind häufig nur erraten
2. *„vieles spricht dafür, dass der Zufall eine fundamentale Rolle in der Natur spielen könnte und dass das Teilchen vor der Ortsmessung gewissermaßen selbst noch nicht weiß, wo es sich materialisieren soll.“*  
→ hier: **Wahrscheinlichkeitsinterpretation**
3. eine Wellenfunktion muss bei der Wahrscheinlichkeitsinterpretation normiert sein (2)
4. physikalisches System kann nur **diskrete Werte** der Energien (z.B. Drehimpuls) annehmen

## 1.2 Postulate:

1.  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$  ist unser Zustand/Eigenfunktion des Teilchensystem (Anzahl  $N$  Teilchen), mit den Ortsvektoren  $\vec{r}$
2. **gilt universell:** jede physikalisch messbare Variable besitzt einen hermiteschen Operator ( $\hat{A}, \hat{B}, \dots$ ) (3.3).  
if  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ :
  - a)  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  sind hintereinander messbar
  - b)  $\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$  und  $\hat{B}|\psi\rangle = \mu|\psi\rangle$
3. nur die Eigenwerte ( $\lambda, \mu$  etc.) sind messbar; sie sind reelle Zahlen

## 1.3 Unterschiede Quantenmechanik (QM) zur Elektrodynamik (ED):

1. ED: **Felder** (z.B.  $\vec{B}$ ) sind die physikalische Rolle:
  - a) deren Werte bestimmen an jedem Ort, welche Kraft auf die Ladung  $q$  wirkt
2. QM: **Potentiale** sind die physikalische Rolle
  - a) z.B. das **Vektorpotential**  $A$  von  $\vec{B}$  beeinflusst die Phase einer Quantenwelle

## 2 Die statistische Quantenwelle $\psi$

### 2.1 zum Verständnis:

1. die Wahrscheinlichkeitsaussagen sind die Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.3)
2. ein  $e^-$  hat in einem Atom keine Flugbahn.  $\psi$  der  $e^-$  sagt nur wie wahrscheinlich es ist, irgendwo ein  $e^-$  anzutreffen, wenn man es experimentell misst
3. durch Messung *kollabiert*  $\psi$  zu einem Peak am gemessenen Wert
4. es gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation  $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$  (siehe 4)
5. ? es gibt diskrete Energien aber kontinuierliche Orte

### 2.2 Bedingungen aus der Statistik:

1. allgemein:  $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \int \psi_m^* \psi_n dr = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dr = \delta_{mn}$  mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(r, t) = |\psi(r, t)|^2$
2. da  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dr = 1$  muss  $\psi$  normiert sein, damit das Teilchen nicht zu einer Wahrscheinlichkeit ungleich 100 % im ganzen Raum vorfindbar ist
3. Erwartungswert/Mittelwert  $\bar{A} \equiv \langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A} \rho(r) dr$
4. Varianz  $\sigma^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

### 2.3 Schrödinger-Gleichung:

1. die Schrödinger-Gleichung hängt nur von zwei Funktionen ab:  $\psi$  und Potential  $V$
2. (allg.) zeitabhängige:  $i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V \cdot \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$ 
  - a) Separationsansatz:  $\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$
3. zeitunabhängige:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi(x) = E \psi(x)$ 
  - a) auch geschrieben als  $\hat{H} \psi = E \psi$

## 2.4 Modellsysteme für die Form des Potentials $V$ :

1. freies Teilchen (d.h.  $V = 0$ ):

a) zeitabhängiges Teilchen ist eine ebene Welle ( $\psi$  kann zum Zeitpunkt  $t = 0$  'lokalisiert' und dort **normiert** werden)

$$\rightarrow \psi = Ae^{i(kx - \omega t)} \text{ mit } \omega = \frac{E}{\hbar}$$

b) die Geschwindigkeit ist durch die Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{d}{dk}\omega$  und nicht durch die Phasengeschwindigkeit von  $\psi$  gegeben

c) **Model vom unendlichen Potentialtopf anwendbar**

2. harmonischer Oszillator ( $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ):

a) prinzipiell (mit Quantenzahl  $n$ ):

$$\psi_n(x) = \text{Normierung} * (\text{Polynom in } x) * (\text{Gauß-Funktion})$$

$$\rightarrow \psi_n(x) = N_n \cdot H_n(x) \cdot e^{-0.5x^2}$$

b)  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$c) E\psi = \hbar\omega(\hat{a}_\pm \hat{a}_\mp \pm \frac{1}{2})\psi$$

d) Leiteroperatoren  $\hat{a}_\pm$  sind Lösungsansätze der Schrödinger-Gleichung und verringern/erhöhen die Energien in diskrete Schritte:  
die Lösungen davon sind die Hermite-Funktionen

### 3 $\psi$ In der Praxis

#### 3.1 Grundregeln für Verwendung von $\psi$ :

1. die Energieniveaus spalten sich im homogenen  $\vec{B}$  auf: Zeeman-Effekt genannt
2. klassisch erlaubt:  $V < E \rightarrow$  oszillierendes Verhalten von  $\psi$
3. klassisch verboten:  $V \geq E \rightarrow$  Tunneleffekt kann auftreten
4.  $\psi$  besitzt Quantenzahlen:  $n$  bestimmt  $l$ ,  $l$  bestimmt  $m$ 
  - a) Quantenzahl  $n$  (legt die diskreten Energiestufen fest):  $n = 1, 2, 3, \dots$
  - b)  $l$  (gehört zu  $L^2$ ):  $0 \leq l \leq n - 1$
  - c)  $m$  (gehört zu  $L_z$ ):  $m = -l_{max}, \dots, +l_{max}$

#### 3.2 Photonen:

1. Wellenpakete = Überlagerung von ebenen Wellen

#### 3.3 Messung von $\psi$ mittels hermitische Operatoren:

1. Ort:  $\hat{x}$
2. Impuls:  $\hat{p}$
3. Gesamtenergie:  $\hat{H}$
4. Drehimpuls:  $\hat{L}_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$  (3.4)
  - a) "Betragsinformation":  $\hat{L}^2$
  - b) (teilweise) "Richtungsinformation":  $\hat{L}_z$

#### 3.4 die 2 Drehimpulse $L$ (Einheit: $[\hbar]$ ):

1. Bahndrehimpuls
2. Spin  $s$ : eine Art ewige Eigendrehung der Teilchen
  - a) aus dem Spin-Statistik-Theorem:
    - i. Fermionen (z.B.  $e^-$ , Proton, Neutron):  $s=0.5 \rightarrow \psi$  ist antisymmetrisch

- A. Fermionen sind „Einzelgänger“ d.h. sie können nicht am selben Ort sein
- ii. Bosonen (z.B. Photonen):  $s=1 \rightarrow \psi$  ist symmetrisch
  - A. Bosonen sind „Herdentiere“ (lieben Gleichschritt) d.h. z.B. können sich unzählige Photonen zusammentun und gemeinsam eine schwingende elektromagnetische Welle ausbilden
- b)  $s = 0.5$ :
  - i.  $s = 0.5 \rightarrow m_s = -0.5$  und  $m_s = +0.5$

### 3.5 Störung des System (Störungstheorie):

- 1. Grundannahmen:
  - a) die Lösung des ungestörten System ist bekannt
  - b) die Störung ist klein