1 Allgemein

1.1 stets im Hinterkopf behalten:

1. die Formeln der Quantenmechanik sind häufig nur erraten
2. „vieles spricht dafür, dass der Zufall eine fundamentale Rolle in der Natur spielen könnte und dass das Teilchen vor der Ortsmessung gewissermaßen selbst noch nicht weiß, wo es sich materialisieren soll.“ $\rightarrow$ hier: **Wahrscheinlichkeitsinterpretation**
3. physikalisches System kann nur **diskrete Werte** der Energien (z.B. Drehimpuls) annehmen

1.2 Postulate:

1. $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t)$ ist unser Zustand/Eigenfunktion des Teichensystem
2. **gilt universell:** jede physikalisch messbare Variable besitzt einen hermitischen Operator ($\hat{A}$, $\hat{B}$, ...) (3.3).
   if $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$:
   a) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind hintereinander messbar
   b) $\hat{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$ und $\hat{B}\,|\psi\rangle = \mu\,|\psi\rangle$
3. nur die Eigenwerte (λ, μ etc.) sind messbar; sie sind reelle Zahlen

1.3 Unterschiede Quantenmechanik (QM) zur Elektrodynamik (ED):

1. ED: **Felder** (z.B. $\vec{B}$) sind die physikalische Rolle:
   a) deren Werte bestimmen an jedem Ort, welche Kraft auf die Ladung q wirkt
2. QM: **Potentiale** sind die physikalische Rolle
   a) z.B. das Vektorpotential A von $\vec{B}$ beeinflusst die Phase einer Quantenwelle

2 statistische Quantenwelle ψ

2.1 zum Verständnis:

1. die Wahrscheinlickeitsaussagen sind die Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.3)
2. ein e^- hat in einem Atom keine Flugbahn. ψ der e^- sagt nur wie wahrscheinlich es ist, irgendwo ein e^- anzutreffen, wenn man es experimentell misst
3. durch Messung *kollabiert* ψ zu einem Peak am gemessenen Wert
4. es gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ (siehe 4)
5. **?** es gibt diskrete Energien aber kontinuierliche Orte

2.2 Bedingungen aus der Statistik:

1. allgemein: $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \int \psi_m^* \psi_n \, dr = \delta_{mn}$ mit Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(r,t)|^2 = \rho(r,t)$
2. da $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) \, dr = 1$ muss ψ normiert sein, damit das Teilchen nicht zu einer Wahrscheinlichkeit ungleich 100 % im ganzen Raum vorfindbar ist
3. Erwartungswert/Mittelwert $\bar{A} \equiv \langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle$
4. Varianz $\sigma^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

2.3 Schrödinger-Gleichung:

1. die Schrödinger-Gleichung hängt nur von zwei Funktionen ab: ψ und Potential V
2. (allg.) zeitabhängige: $i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V \cdot \psi\left(x,t\right)$
   a) Separationsansatz: $\psi(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t)$
3. zeitunabhängige: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi\left(x\right) = E\psi\left(x\right)$
   a) auch geschrieben als $\hat{H}\psi = E\psi$
   b) es gibt Modellsysteme für die Form des Potentials V:
      i. freies Teichen (d.h. $V = 0$):
         A. $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi\left(x\right)$

B. **?** (NOTE: gehört das nicht zur zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung?) Teilchen ist eine ebene Welle (ψ kann zum Zeitpunkt $t = 0$ "lokalisiert"werden und dort normiert werden)

C. die Geschwindigkeit ist durch die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{d}{dk}\omega$ und <u>nicht</u> durch die Phasengeschwindigkeit von ψ gegeben

D. **Model vom unendlichen Potentialtopf anwendbar**

ii. harmonischer Oszillator ($V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$):

A. $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, ...$

B. $E\psi = \hbar\omega(\hat{a}_\pm \hat{a}_\mp \pm \frac{1}{2})\psi$

C. Leiteroperatoren $\hat{a}_\pm$ sind Lösungsansätze der Schrödinger-Gleichung und verringern/erhöhen die Energien in diskrete Schritte:
die Lösungen davon sind die Hermite-Funktionen

3 ψ in der Praxis

3.1 Grundregeln für Verwendung von ψ:

1. die Energieniveaus spalten sich im homogenen $\vec{B}$ auf: Zeeman-Effekt genannt
2. klassisch erlaubt: $V < E \rightarrow$ öszillierendes Verhalten von ψ"
3. klassisch verboten: $V \geq E \rightarrow$ Tunneleffekt kann auftreten
4. ψ besitzt Quantenzahlen: n bestimmt l, l bestimmt m
   a) n (legt die diskreten Energiestufen fest): $n = 1, 2, 3, ...$
   b) l (gehört zu L^2): $0 \leq l \leq n - 1$
   c) m (gehört zu L_z): $m = -l_{max}, ..., +l_{max}$

3.2 Photonen:

1. Wellenpackete = Überlagerung von ebenen Wellen

3.3 Messung von ψ mittels hermitische Operatoren:

1. Ort: $\hat{x}$
2. Impuls: $\hat{p}$
3. Gesamtenergie: $\hat{H}$
4. Drehimpuls: $\hat{L}_i = \sum_{jik} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$ (3.4)
   a) "Betragsinformation": $\hat{L}^2$
   b) (teilweise) "Richtungsinformation": $\hat{L}_z$

3.4 die 2 Drehimpulse L (Einheit: [$\hbar$]):

1. Bahndrehimpuls
2. Spin s: eine Art ewige Eigendrehung der Teilchen
   a) aus dem Spin-Statistik-Theorem:
      i. Fermionen (z.B. e^-, Proton, Neutron): s=0.5 $\rightarrow$ ψ ist antisymmetrisch

      A. Fermionen sind „Einzelgänger“ d.h. sie können nicht am selben Ort sein

   ii. Bosonen (z.B. Photonen): s=1 $\rightarrow \psi$ ist symmetrisch

      A. Bosonen sind „Herdentiere“ (lieben Gleichschritt) d.h. z.B. können sich unzählige Photonen zusammentun und gemeinsam eine schwingende elektromagnetische Welle ausbilden

b) $s = 0.5$:

   i. $s = 0.5 \rightarrow m_s = -0.5$ und $m_s = +0.5$

3.5 Störung des System (Störungstheorie):

1. Grundannahmen:

   a) die Lösung des ungestörten System ist bekannt

   b) die Störung ist klein