

1 Allgemein

1.1 stets im Hinterkopf behalten:

1. die Formeln der Quantenmechanik sind häufig nur erraten
2. „*vieles spricht dafür, dass der Zufall eine fundamentale Rolle in der Natur spielen könnte und dass das Teilchen vor der Ortsmessung gewissermaßen selbst noch nicht weiß, wo es sich materialisieren soll.*“
→ hier: **Wahrscheinlichkeitsinterpretation**
3. eine Wellenfunktion muss bei der Wahrscheinlichkeitsinterpretation normiert sein (2)

1.2 Postulate:

1. $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ ist unser Zustand/Eigenfunktion des Teilchensystem (Anzahl N Teilchen), mit den Ortsvektoren \vec{r}
2. **gilt universell:** jede physikalisch messbare Variable besitzt einen hermiteschen Operator (\hat{A}, \hat{B}, \dots) (3.3).
if $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$:
 - a) \hat{A} und \hat{B} sind hintereinander bzw. unabhängig voneinander messbar
→ d.h. sie besitzen gemeinsame Eigenzustände $|\psi\rangle$
 - b) $\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ und $\hat{B}|\psi\rangle = \mu|\psi\rangle$
3. nur die Eigenwerte (λ, μ etc.) sind messbar; sie sind reelle Zahlen

1.3 Unterschiede Quantenmechanik (QM) zur Elektrodynamik (ED):

1. ED: **Felder** (z.B. \vec{B}) sind die physikalische Rolle:
 - a) deren Werte bestimmen an jedem Ort, welche Kraft auf die Ladung q wirkt
2. QM: **Potentiale** sind die physikalische Rolle
 - a) z.B. das **Vektorpotential** A von \vec{B} beeinflusst die Phase einer Quantenwelle

2 Die statistische Quantenwelle ψ

2.1 zum Verständnis:

1. die Wahrscheinlichkeitsaussagen sind die Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.3)
2. ein e^- hat in einem Atom keine Flugbahn. ψ der e^- sagt nur wie wahrscheinlich es ist, irgendwo ein e^- anzutreffen, wenn man es experimentell misst
3. durch Messung *kollabiert* ψ zu einem Peak am gemessenen Wert
4. es gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ (siehe 4)

2.2 Bedingungen aus der Statistik:

1. allgemein: $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \int \psi_m^* \psi_n dr = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dr = \delta_{mn}$ mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r, t) = |\psi(r, t)|^2$
2. da $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dr = 1$ muss ψ normiert sein, damit das Teilchen nicht zu einer Wahrscheinlichkeit ungleich 100 % im ganzen Raum vorfindbar ist
3. Erwartungswert/Mittelwert $\bar{A} \equiv \langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A} \rho(r) dr$
4. Varianz $\sigma^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

2.3 Schrödinger-Gleichung:

1. die Schrödinger-Gleichung hängt nur von zwei Funktionen ab: ψ und Potential V
→ **Hinweis:** Auswahl Koordinatensystem durch Δ
2. (allg.) zeitabhängige: $i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + V \cdot \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$
a) **Separationsansatz** (um Funktionen aufzuteilen): $\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$
3. zeitunabhängige: $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x) + V(x) \cdot \psi(x) = E \psi(x)$
a) auch geschrieben als $\hat{H} \psi = E \psi$

2.4 Modellsysteme für die Form des Potentials V :

1. freies Teilchen (d.h. $V = 0$):
 - a) zeitabhängiges Teilchen ist eine ebene Welle (siehe: 1) (ψ kann zum Zeitpunkt $t = 0$ 'lokalisiert' und dort **normiert** werden)
 $\rightarrow \psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ mit $\omega = \frac{E}{\hbar}$
 - b) die Geschwindigkeit ist durch die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{d}{dk}\omega$ und nicht durch die Phasengeschwindigkeit von ψ gegeben
 - c) **Model vom unendlichen Potentialtopf anwendbar**
2. unendlicher Potentialtopf ($V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq L$, sonst $V(x) = \infty$)
 - a) $\psi(x) = A \sin(\frac{n\pi x}{L})$
 - b) $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ mit L : Länge des Topfes
 - c) **Anwendung** in der Berechnung von Absorptionsenergien (ΔE : HOMO \rightarrow LUMO) bei Molekülorbitalen
3. harmonischer Oszillator ($V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$; mit der Eigenfrequenz ω):
 - a) $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$
 - b) 2 Lösungsansätze (mit Quantenzahl n):
 - i. $\psi_n(x) = \text{Normierung} * (\text{Polynom in } x) * (\text{Gauß-Funktion})$
 $\rightarrow \psi_n(x) = A_n \cdot H_n(x) \cdot e^{-0.5x^2}$
 die Lösungen davon sind die Hermite-Polynom $H_n(x)$, die man nachschlagen kann
 - ii. Leiteroperatoren \hat{a}_{\pm} verringern/erhöhen die Energien einer bekannten Lösung in diskrete Schritte:
 $\hat{H}\psi = \hbar\omega(\hat{a}_{\pm}\hat{a}_{\mp} \pm 0.5)\psi = E\psi$, mit $\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x})$
Hinweise:
 - A. \hat{a}_{\pm} wird direkt auf ψ angewendet
 - B. $\hat{a}_{-}\psi_0 = 0$, da man vom untersten Energieniveau nicht 'absteigen' kann
 $\rightarrow \psi_n(x) = A_n \cdot (\hat{a}_{+})^n \cdot \psi_0(x)$
4. Potentialstufe ($V(x) = V_0$ für $0 \leq x$, sonst $V(x) = 0$)
 - a) Fallunterscheidung, ob $E > V_0$ oder $E < V_0$
5. Potentialbarriere ($V(x) = V_0$ für $-a \leq x \leq +a$, sonst $V(x) = 0$; mit Breite $2a$)

3 Arbeiten mit ψ

3.1 Grundregeln für Verwendung von ψ :

1. die Energieniveaus spalten sich im homogenen \vec{B} auf: Zeeman-Effekt genannt
2. klassisch erlaubt: $V < E \rightarrow$ oszillierendes Verhalten von ψ
3. klassisch verboten: $V > E \rightarrow$ Tunneleffekt kann auftreten (u.a. bei einer **Potentialbarriere** (5))
4. ψ besitzt Quantenzahlen: n bestimmt l , l bestimmt $m \rightarrow$ allgemein somit: ψ_{nlm}
 - a) Quantenzahl n (legt die diskreten *Energienstufen* fest): $n = 1, 2, 3, \dots$
 - b) Bahnquantenzahl l (gehört zu L^2 ; bestimmt die *Form* von ψ (2b)):
 $0 \leq l \leq n - 1$ (**Anmerkung:** können nur ganzzahlig oder halbzahlig sein)
 - c) magnetische Quantenzahl m (gehört zu L_z ; bestimmt die *Orientierung* von ψ und magn. Eigenschaften):
 $-l \leq m \leq +l$ (**Anmerkung:** in ganzzahligen Schritten)

3.2 Photonen:

1. Wellenpakete = Überlagerung von ebenen Wellen

3.3 Messung von ψ mittels hermitesche Operatoren:

1. Ort: \hat{x}
2. Impuls: \hat{p}
3. Gesamtenergie: \hat{H}
4. Drehimpuls: $\hat{L}_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$ (3.4)
 - a) "Betragsinformation": \hat{L}^2
 - b) (teilweise) "Richtungsinformation": \hat{L}_z

3.4 die 2 Drehimpulse L ; in 3D auftretend (Einheit: $[\hbar]$):

1. nice to know:

- a) die Eigenwerte von \hat{L}^2 sind $\lambda = \hbar^2 l(l+1)$
- b) die Eigenwerte von \hat{L}_z sind $\lambda = \hbar m$, mit Quantenzahl m
- c) $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
- d) $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$
 - i. \hat{L}_{\pm} verändert den Eigenwert von \hat{L}_z um $\pm\hbar$, was die Einheit des Drehimpuls entspricht!
 - ii. \hat{L}_{\pm} verändert nicht den Eigenwert von \hat{L}^2

2. Bahndrehimpuls:

- a) nimmt nur ganzzahlige Werte für l ein: $l = 0, 1, 2, 3, \dots$
 - i. $l = 0 \rightarrow$ s-Orbitale
 - ii. $l = 1 \rightarrow$ p-Orbitale
 - iii. $l = 2 \rightarrow$ d-Orbitale
- b) zu jedem l gibt es $(2l+1)$ mögliche Zustände für ψ , die entartet sind

3. Spin s : eine Art ewige Eigendrehung der Teilchen

Hinweis: algebraische Theorie identisch zum Bahndrehimpuls d.h. Auf-/Absteigeoperatoren, Kommutator etc.

- a) aus dem Spin-Statistik-Theorem:
 - i. Fermionen (z.B. e^- , Proton, Neutron): $s=0.5 \rightarrow \psi$ ist antisymmetrisch
 - A. Fermionen sind „Einzelgänger“ d.h. sie können nicht am selben Ort sein
 - ii. Bosonen (z.B. Photonen): $s=1 \rightarrow \psi$ ist symmetrisch
 - A. Bosonen sind „Herdentiere“ (lieben Gleichschritt) d.h. z.B. können sich unzählige Photonen zusammentun und gemeinsam eine schwingende elektromagnetische Welle ausbilden
- b) $s = 0.5$:
 - i. $s = 0.5 \rightarrow$ nur 2 mögliche Eigenzustände $|m_s\rangle$: (siehe Stern-Gerlach Versuch):

$$|m_s = -0.5\rangle \equiv |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (spin-down)}$$
$$\text{und } |m_s = +0.5\rangle \equiv |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (spin-up)}$$

3.5 Wechselwirkung Strahlung - Materie (Moleküle)

1. die einfallende elektromagnetische Welle stellt eine Störung des Systems ψ dar
2. Übergänge zwischen den Bohrschen Energieniveaus sind bei $\Delta m = 0, \pm 1$ bzw. $\Delta l = \pm 1$ möglich

4 Näherungsmethoden zum Lösen der Schrödinger-Gleichung von nicht-idealisierten Systemen

4.1 Störungstheorie (Störung des System):

1. Grundannahmen:
 - a) die Lösung des ungestörten System ψ^0 (die '0' kennzeichnet das ungestörte System) ist bekannt
 - b) die Störung ist klein
2. Folgen:
 - a) die Störung führt allgemein zur Aufhebung der Entartung

4.2 Variationsprinzip

1. Grundgedanke: Grundzustandenergie E_0 berechnen wollen
 - a) eine obere Schranke für E_0 wird durch Hilfe einer Test-Wellenfunktion errechnet, die wir dann durch Minimierung (Optimierungsprozess somit) möglichst nah in Richtung des exakten Wertes herunterrechnen.

4.3 Born-Oppenheimer Näherung (Adiabatische Näherung)

1. Anwendung: **Moleküle**
2. Grundgedanke: Separation des Problems in schnelle e^- und langsame Kerne

5 Simulation (z.B. Molekülsimulation (molecular dynamic) für die Pharma Industrie) mittels eines Quantencomputer

1. die Quantenwelle ψ 'bewegt' sich (wir wissen nicht, wo ψ liegt) im Raum (Abb. 1) und hat den Zustand $|\psi\rangle$ (als Vektor/Pfeil dargestellt)

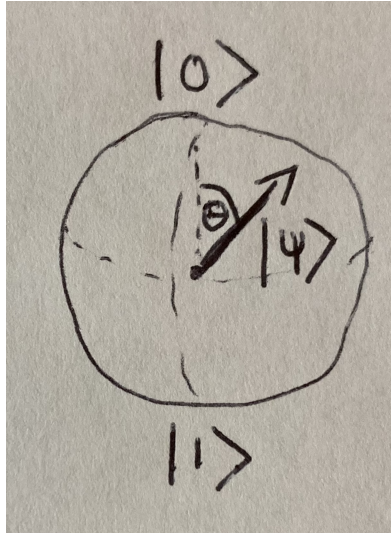


Abbildung 1: Bloch-Kugel (zur Visualisierung eines 2 Zustände ($|0\rangle$ oder $|1\rangle$) Qubit), auf der alle Zustände von $|\psi\rangle$ durch Punkte auf der Kugel Oberfläche beschrieben werden

2. Wir versuchen mathematisch eine Aussage zu machen, wie wahrscheinlich (Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ (Statistik)) es ist, dass $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ eintritt (z.B. $P(|0\rangle)=0.7$):

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle$$

mit $|\vec{x}\rangle = |0\rangle$ oder $|1\rangle$ (siehe Bloch-Kugel)

3. Da sich die Quantenwelle 'bewegt', liegen die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ vor der Messung in Superposition vor (**Gedankenexperiment**: Schrödinger Katze). Diese Superposition ist eine Teil der Kohärenzeigenschaft, worunter die Überlagerung von Wellen und Teilchen Eigenschaft, sowie die Verschränkung auch fällt. Kohärenz und die damit verbundene Zeitdauer (=Kohärenzzeit) erlaubt das Auftreten von quantenmechanischen Effekten und damit auch die quantenmechanischen Berechnungen.

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

(mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$)

hier:

$$|\psi\rangle = \cos(0.5\theta) |0\rangle + e^{i\psi} \sin(0.5\theta) |1\rangle$$

4. Sobald wir messen, kollabiert ψ auf einen messbaren Zustand ($|0\rangle$ oder $|1\rangle$) (seinen 'Eigenwert' λ). Die Superposition wird dabei zerstört, was eine Aufhebung der Kohärenz und damit verbundenes Ende der Quanteneffekte darstellt. Zusätzlich kann die Superposition auch durch Wechselwirkung mit der Umgebung ungewollt zerstört werden.
5. Beim Quantencomputer kann man vor der Messung (welche durch einen hermiteschen Operator \hat{A} , \hat{H} etc. erfolgt) den Zustand $|\psi\rangle$ durch Einsatz von Quantengatter noch ändern. Dies passiert durch Pulse von Mikrowellen auf den Qubit. Quantengatter sind z.B.:
 - a) NOT Gatter
 - b) Haddamard Gatter
 - c) Phasen Gatter

Schaltet man mehrere Quantengatter hintereinander, bildet das den Quantenalgorithmus, welcher oft auch quantum circuit bezeichnet wird. Dies ist momentan wie eine 'black box'. Die Algorithmen werden nach einem Trial and Error Prinzip entworfen, da man ja vorher nicht weiß, welche Lösung für das gestellte Problem die Richtige ist. Dies ist wie bei den Formeln der Quantenmechanik, welche häufig auch nur erraten sind. Die Grundlage der Wirklichkeit ist nicht bekannt. Vlt. werden deshalb auch die Entwicklung von Quantenalgorithmen immer eine 'black box' bleiben.

Abschließend möchte ich noch sagen, dass beim Doppelspalt-Versuch wir auch die Atome/Moleküle nur mit ihren jeweiligen kohärenten Zustand $|\psi\rangle$ auf den Bildschirmdetektor schießen.

Die Kohärenzzeit muss erhöht werden, damit das Quantenverhalten nicht so schnell verloren geht.