

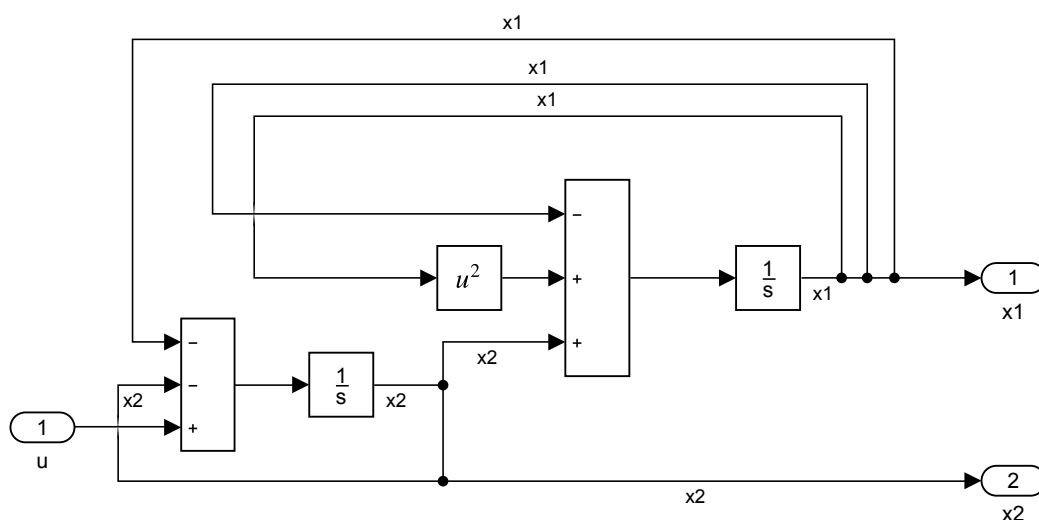
0.1 Úvodný príklad

Uvažujme nelineárny systém, opísaný stavovými rovnicami 1, ktorého bloková schéma je zobrazená na obrázku 1.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= u - x_1 - x_2\end{aligned}\quad (1)$$

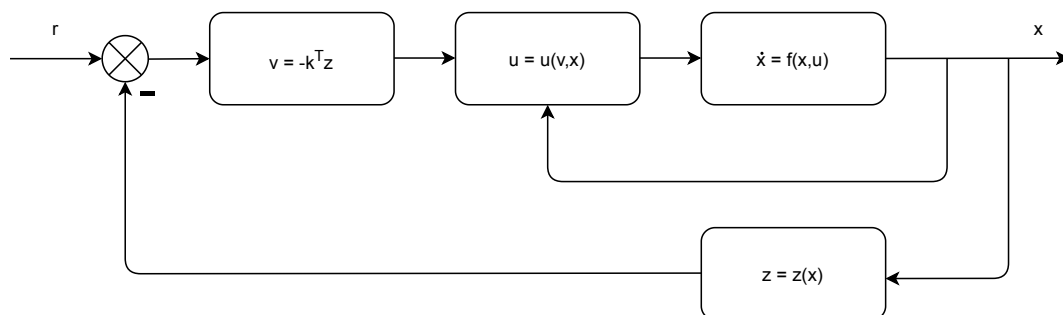
Aby sme mohli navrhnúť nelineárne riadenie najskôr overíme že je bod $x_1 = x_2 = 0$ rovnovážnym bodom. V rovnovážnom stave sú derivácie rovné nule. Z rovníc 2 vyplýva, že bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovážnym bodom.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1|_{x_1=x_2=u=0} &= 0 \\ \dot{x}_2|_{x_1=x_2=u=0} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$



Obr. 1: Bloková schéma systému 1

Na riadenie nelineárneho systému (rovnica 1), použijeme metódu vstupno-stavovej spätňoväzobnej linearizácie (obrázok 2), tak aby sme dosiahli požadovanú hodnotu r .



Obr. 2: Metóda vstupno-stavovej spätňoväzobnej linearizácie

Postup pri metóde vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie je nasledovný.

Najskôr si určíme transformačné vzťahy, tzn. určíme vektor r .

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_1^2 + x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Následne transformujeme zadaný nelineárny systém (rovnica 1), pomocou nájdenných transformačných vzťahov (rovnica 3).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 = z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= 2x_1(x_1^2 + x_2 - x_1) + u - x_1 - x_2 \\ &= 2z_1(z_2 - z_1) + u - z_1 - z_2 + z_1^2 \\ &= u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Aby sme dosiahli lineárny transformovaný systém zavedieme novú premennú v .

$$v = u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \quad (5)$$

Z transformovanej sústavy získame vzťah pre nelineárne riadenie, akčný zásah u .

$$u = v + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_1 + z_2 \quad (6)$$

Zavedením novej premennej sme získali nový transformovaný lineárny systém.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned} \quad (7)$$

Po získaní lineárneho systému môžeme zaviesť lineárny stavový regulátor (rovnica 8).

$$v = k_1z_1 + k_2z_2 \quad (8)$$

Lineárny systém s regulátorom bude vyzerat' nasledovne: rovnica 9.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= k_1z_1 + k_2z_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Na vypočítanie parametrov regulátora a nastavenie dynamiky systému potrebujeme odvodiť

charakteristickú rovnicu systému. Na získanie charakteristickej rovnice potrebujeme získať maticu A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} \end{bmatrix} \Big|_{z_1=z_2=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Charakteristickú rovnicu získame z rovnice 11.

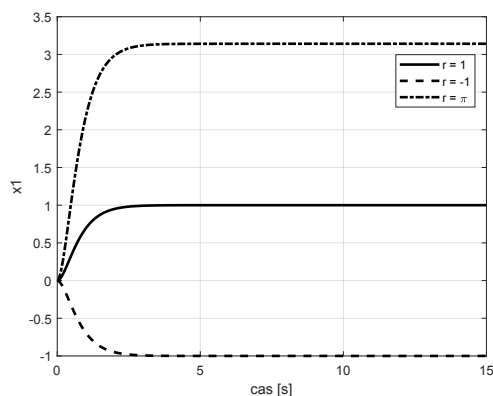
$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= 0 \\ |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -k_1 & \lambda - k_2 \end{vmatrix} \\ |\lambda I - A| &= (\lambda + 1)(\lambda - k_2) - k_1 \\ \lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Vieme, že korene charakteristickej rovnice musia ležať v zápornej polrovine. Preto si zvolíme korene $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, pomocou ktorých získame parametre k_1, k_2 (rovnica 12).

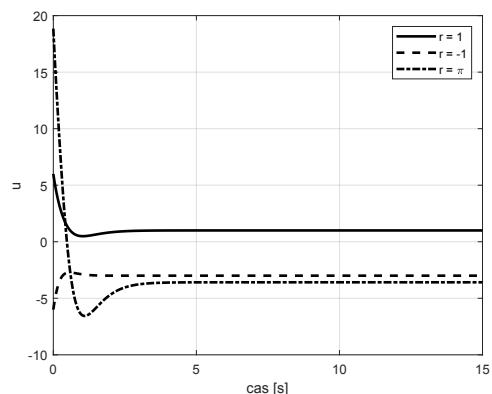
$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \\ \lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ k_1 &= -2 \\ k_2 &= -4 \end{aligned} \quad (12)$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 3.

navrhnutého riadenia pre nelineárny systém sme dokázali dosiahnuť požadovanú hodnotu r .



Obr. 4: Pribeh stavovej premennej x_1 s nelineárnym riadením



Obr. 5: Pribeh akčného zásahu u s nelineárnym riadením

Teraz môžeme pre porovnanie navrhnuť PID regulátor. Aby sme mohli navrhnuť PID regulátor potrebujeme získať prenosovú funkciu systému, preto náš systém linearizujeme v pracovnom bode $x_1 = x_2 = 0$ (rovnica 13).

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta u \end{bmatrix} \quad (13)$$

Pričom matica A má tvar:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x_1=x_2=u=0} \end{aligned} \quad (14)$$

Hľadané linearizované rovnice:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u \end{aligned} \quad (15)$$

Keď sme získali linearizované rovnice nelineárneho systému, z ktorých vyjadríme prenosovú funkciu $\frac{\Delta x_1}{\Delta u}$. Použijeme Laplaceovú transformáciu, aby sme sa získali prenosovú funkciu (rovnica 16).

$$\begin{aligned}s\Delta\dot{x}_1 &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x_1(s+1) \\ s\Delta\dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s\Delta x_1(s+1) &= -\Delta x_1 - \Delta x_1(s+1) + \Delta u \\ s\Delta x_1(s+1) + \Delta x_1 + \Delta x_1(s+1) &= \Delta u\end{aligned}\tag{16}$$

$$\Delta u = \Delta x_1(s^2 + 2s + 2)$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta u} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)}$$

Na výpočet parametrov PID regulátora použijeme metódu Pole-Placement. Aby sme ju mohli použiť vyjadríme si charakteristický polynóm ($N(s)$) z prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu G_{URO} (rovnica 17)

$$\begin{aligned}G_{URO} &= \frac{(P + Ds + \frac{I}{s})(\frac{1}{s^2+2s+2})}{1 + (P + Ds + \frac{I}{s})(\frac{1}{s^2+2s+2})} \\ N(s) &= s^3 + s^2(2 + D) + s(2 + P) + I\end{aligned}\tag{17}$$

Keď sme získali charakteristický polynóm $N(s)$, využijeme metódu Pole-Placement, ktorá spočíva v porovnaní charakteristického polynómu so želaným polynómom $P(s)$. Umiestníme póly želaného polynómu $P(s)$ do zápornej reálnej polroviny. My si zvolíme korene: $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$, čím sme zabezpečíme stabilitu lineárneho systému. Polynóm $P(s)$ potom bude mať nasledujúci tvar (rovnica 18).

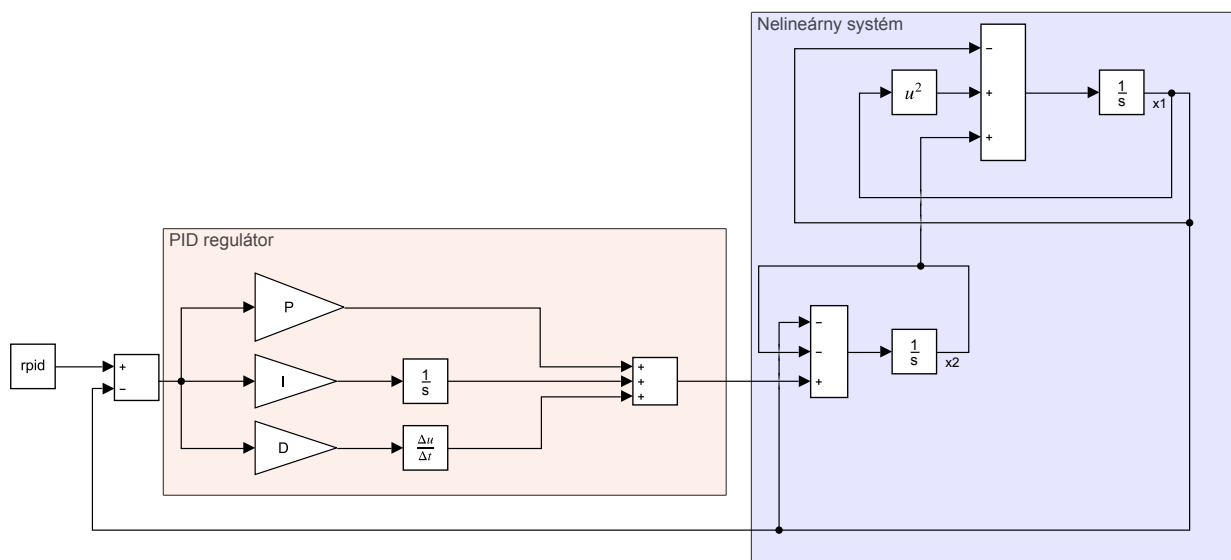
$$\begin{aligned}P(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6\end{aligned}\tag{18}$$

Porovnaním želaného polynómu $P(s)$ s charakteristickým polynómom $N(s)$ 19, dostaneme parametre regulátora 20.

$$\begin{aligned}P(s) &= N(s) \\ s^3 + 6s^2 + 11s + 6 &= s^3 + s^2(2 + D) + s(2 + P) + I\end{aligned}\tag{19}$$

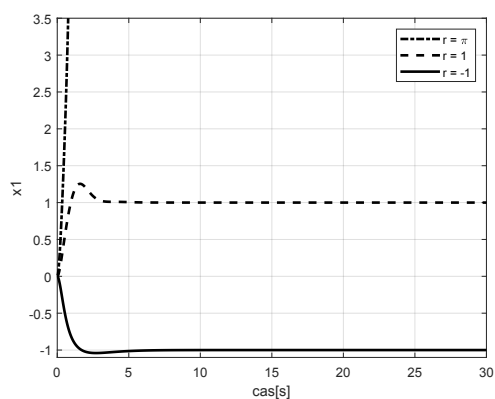
$$\begin{bmatrix} P \\ I \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}\tag{20}$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 6.

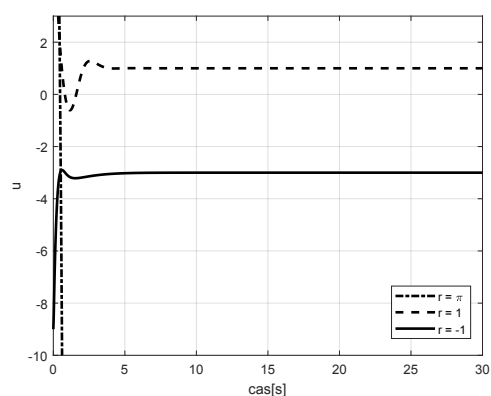


Obr. 6: Bloková schéma systému s PID regulátorom

Z výsledkov simulácie, ktoré su zobrazené na obrázkoch 7, 8, môžeme vidieť, že s pomocou PID regulátora sme dokázali dosiahnuť niektoré požadované hodnoty r , avšak pri vyšších požadovaných hodnotách bol už systém nestabilný.



Obr. 7: Priebeh stavovej premennej x_1 s PID regulátorom



Obr. 8: Priebeh akčného zásahu u s PID regulátorom