

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

RIADENIE NELINEÁRNYCH SPOJITÝCH SYSTÉMOV
TÍMOVÝ PROJEKT

Študijný program:	Robotika a kybernetika
Študijný odbor:	Kybernetika
Školiace pracovisko:	Ústav robotiky a kybernetiky
Vedúci projektu:	Prof. Ing. Ján Murgaš, PhD.

Bratislava 2020

Bc. Eva Štalmachová
Bc. Marek Trebul'a
Bc. Denis Vasko
Bc. Ján Urdianyk

TÍMOVÝ PROJEKT ZADANIE

Študijný program:	Robotika a kybernetika
Študijný odbor:	Kybernetika
Vedúci projektu:	Prof. Ing. Ján Murgaš, PhD.
Miesto vypracovania projektu:	Ústav robotiky a kybernetiky
Riešitelia:	

Názov projektu: *Riadenie nelineárnych spojitých systémov*

Špecifikácia zadania:

Cieľom projektu je navrhnúť a overiť metódy nelineárneho riadenia vybraných nelineárnych systémov za účelom pedagogického využitia.

Úlohy:

1. Pre zadané metódy nelineárneho riadenia spojitých systémov vypracujte príklady využitia v rozsahu:

- Návrh riadenia
- Simulačné overenie
- Pedagogické spracovanie

2. Vypracujte a predneste prezentáciu.

3. Vypracujte posudok na projekt druhého tímu

4. Pri riešení postupujte podľa zásad tímového projektu.

Termín odovzdania projektu: 15.5.2020

Obsah

Zoznam použitých skratiek	4
1 Úvod	5
2 Matematické základy	6
Stavový opis	6
Rovnvoážné stavy	7
Linearizácia	8
Riešenie preurčenej sústavy rovníc	10
Parciálne derivácie	11
3 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-stavová	13
Úvodný príklad	13
4 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-výstupná	29
Príklad prvý	29
5 Integrácia do predmetu RNS	43
6 Záver	44
Literatúra	45

Zoznam použitých skratiek

1 Úvod

V tímovom projekte sa venujeme definovaniu niekoľkých modelov systémov v stavovom opise, vhodných na demonštráciu návrhu nelineárneho riadenia pomocou metód vstupno-stavovej a vstupno-výstupnej linearizácie a návrhom nelineárneho riadenia pre dané modely. Navrhnuté nelineárne riadenie porovnávame s lineárnym PID regulátorom a uvádzame aj základné matematické princípy, využívané pri návrhu pomocou uvedených metód.

V časti 2 sa venujeme niektorým matematickým princípom, ktorých znalosť je nevyhnutná pre pochopenie metód, ale aj ďalšieho textu, v celom rozsahu. Konkrétne táto časť zahŕňa opakovanie k nasledujúcim témam: stavový opis systému, rovnovážne stavy a linearizácia.

Časť 3 sa zaoberá návrhom nelineárneho riadenia pomocou metódy vstupno-stavovej linearizácie. Sú tu prezentované dva príklady, ku každému je vypracovaný návrh riadenia danou metódou a pre porovnanie je navrhnutý aj PID regulátor pre linearizáciu systému v rovnovážnom stave.

Návrhu pomocou metódy vstupno-výstupnej linearizácie sa venujeme v časti 4. Podobne ako v predchádzajúcej časti, aj tu sa venujeme okrem návrhu pomocou hlavnej metódy aj návrhu PID regulátora pre linearizovaný systém.

V časti ?? opisujeme program, písaný v matlabe, vhodný na ukážku navrhnutých zákonov riadenia pre jednoduchý príklad riadenia polohy matematického kyvadla. V programe sú implementované nelineárne zákony riadenia a aj dva PID regulátory navrhnuté pre linearizáciu kyvadla v stabilnom a v nestabilnom rovnovážnom stave.

V časti 5 stručne opíšeme spôsoby ako by sa daný materiál dal integrovať do predmetu Riadenie Nelineárnych Systémov.

2 Matematické základy

Stavový opis

Stavový opis je jedna z foriem opisu dynamického lineárneho systému. Základom je definovanie vnútorných stavov systému, ako sa tieto stavy menia v čase a ako vyzerá výstup zo systému.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{1}$$

Pre SISO systémy je C vektor (riadkový) a D skalár. Pre MIMO systémy je C matica a D je vektor (stĺpcový). Majme systém opísaný rovnicami 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 6u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{2}$$

Tento systém môžeme napísať aj v maticovom tvare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Laplaceovou transformáciou získame rovnice 3.

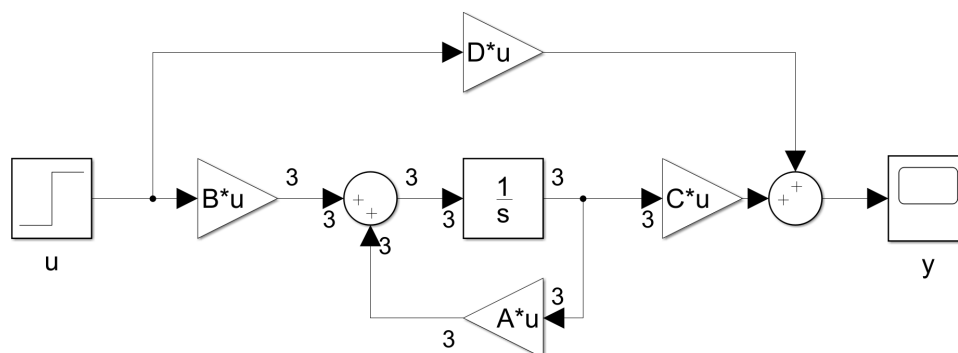
$$Ys^3 = -Y + 8Ys + 3Ys^2 - 6U\tag{3}$$

$$Y(s^3 - 3s^2 - 8s + 1) = -6U\tag{4}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-6}{s^3 - 3s^2 - 8s + 1} = G(s)\tag{5}$$

kde rovnica 5 predstavuje prenosovú funkciu nášho systému.

Simulačná schéma je na obr. 1. V bloku integrátor je možné nastaviť počiatočné hodnoty stavov (počiatočné podmienky). Pri tejto schéme je dôležité uviesť si dimenzie (rozmer, či je to matica, vektor alebo skalár) jednotlivých signálov.



Obr. 1: Simulačná schéma systému definovaného pomocou stavového opisu

Rovnovážne stavy

Rovnovážny stav \dot{x}_r systému je definovaný ako stav, kedy sa stavové premenné nelineárneho systému nemenia v čase.

V rovnovážnom stave platí pre vstup u , že je v každom čase nulový, $u(t) = 0$. Pre stavové premenné platí $\dot{x}|_{x=x_r} = 0$.

Uvažujme príklad 2 a nájdime jeho rovnovážne stavy. Ako prvé položíme všetky derivácie (označené bodkami nad premennými v stavovom opise) rovné 0 ($\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{x}_3 = 0$). Dostaneme tak sústavu 6.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= x_3 \\ 0 &= -x_1 + 8x_2 + 3x_3 \end{aligned} \tag{6}$$

hodnoty x_2 a x_3 vieme priamo vyčítať z rovnice vyššie, majú byť $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$. Hodnotu x_1 musíme vypočítať. Našťastie, pre tento jednoduchý prípad, stačí dosadiť $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$ do tretej rovnice sústavy 6 a dostaneme $x_1 = 0$.

Bod $[x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}] = [0, 0, 0]$ je riešením sústavy rovníc 6, preto je rovnovážnym stavom systému rovníc 2.

Uvažujme teraz systém opísaný rovnicami 7 a nájdime jeho rovnovážne stavy.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{g}{L}\sin(x_1) \end{aligned} \quad (7)$$

Položíme derivácie rovné nule, z čoho dostaneme sústavu 8.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{g}{L}\sin(x_1) \implies \sin(x_1) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Riešení sústavy 8 je niekoľko. Rovnovážnym bodom je nielen bod $[x_{r1}, x_{r2}] = [0, 0]$, ale všetky body $[x_{r1}, x_{r2}] = [k * \pi, 0]$, $k \in Z$, kde $k \in Z$ znamená, že k je z množiny Z , kde Z je množina celých čísel, teda, že k je celé číslo.

Linearizácia

Linearizácia je proces, pri ktorom z nelineárneho systému spravíme lineárny. Tento lineárny systém opisuje pôvodný systém "presne" len v okolí pracovného bodu. Veľkosť tohto okolia závisí od priebehu funkcií. Používa sa pri tom rozvoj do Taylorovho radu (rovnica 1), kedy použijeme len prvý člen.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (9)$$

kde $f^{(n)}$ je n -tá derivácia funkcie f v bode a , v prípade funkcie viacerých premenných je to gradient. Funkcia f musí byť diferencovateľná.

Pri linearizácii pôvodná nelineárna funkcia nahradí prvý člen Taylorovho radu (ostatné členy členy niesú linearárne, pretože majú faktor $(x - a)^n$ s $n > 1$), ktorý je daný 10.

$$f(x) \approx \frac{f^{(1)}(x)}{1!} (x - x_0)^1 = \frac{\partial f}{\partial x}|_a (x - x_0) = \nabla f|_a \Delta x \quad (10)$$

Majme systém opísaný rovnicami 11.

$$x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta u \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) - u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Keďže sa v sústave 11 vyskytujú aj nelineárne členy (všetko čo nieje konštanta po derivácii je nelineárne, napríklad: sínus, kosínus a ich súčin), tento systém je nelineárny.

Pri linearizácii tohto systému musíme počítať gradient každej rovnice podľa stavového vektora a vstupov, ďalej len vektora parametrov funkcií x . Nech bod $P [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ je pracovným bodom, v ktorom budeme systém linearizovať.

$$\begin{aligned} \nabla \dot{x}_1 &= \left[\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \right] = [1, 1 + \cos(x_2), -1, 0] \\ \nabla \dot{x}_2 &= \left[\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \right] = [-1, -1, 0, 0] \\ \nabla \dot{x}_3 &= \left[\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2}, \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3}, \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial u} \right] = [0, -\sin^2(x_2) + \cos^2(x_2), -\cos(x_2), -1] \\ y &= \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \frac{\partial y}{\partial u} \right] = [1, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{12}$$

Gradient v pracovnom bode dostaneme dosadením hodnôt pracovného bodu.

$$\begin{aligned} \nabla \dot{x}_1|_P &= [1, 1 + \cos(0), -1, 0] = [1, 2, -1, 0] \\ \nabla \dot{x}_2|_P &= [-1, -1, 0, 0] \\ \nabla \dot{x}_3|_P &= [0, -\sin^2(0) + \cos^2(0), -\cos(0), -1] = [0, 1, -1, -1] \\ \nabla y|_P &= [1, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{13}$$

Ak vynásobíme gradienty v pracovnom bode vektorom x , dostaneme linearizovanú sústavu diferenciálnych rovníc, ktoré opisujú správanie sa systému v

okolí pracovného bodu P , rovnice 14.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_3 &= \Delta x_2 - \Delta x_3 - \Delta u \\ \Delta y &= \Delta x_1\end{aligned}\tag{14}$$

Riešenie preurčenej sústavy rovníc

Preurčená sústava rovníc, obsahuje viac rovníc ako neznámych premenných. Pri riešení preurčene sústavy rovníc použijeme metódu najmenších štvorcov. Pomocou metódy najmenších štvorcov určíme riešenie preurčenej sústavy rovníc 15 s najmenšou chybou.

$$Ax = b\tag{15}$$

Uvažujeme nasledovnú preurčenú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\ 2x + 4y + 10 &= 8 \\ x + 5y &= 15 \\ -2x + 4y + 10 &= 8\end{aligned}\tag{16}$$

Preurčenú sústavu rovníc 16 môžeme maticovo zapísať v tvare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 15 \\ -2 \end{bmatrix}\tag{17}$$

Na výpočet neznámych premenných x, y použijeme metódu najmenších štvorcov:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= (A^T A)^{-1} A^T b \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.4265 \\ 0.9559 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{18}$$

Parciálne derivácie

Majme funkciu f o viacerých premenných $f(x, y, z, \dots)$. Parciálna derivácia funkcie f , je derivácia funkcie f vzhľadom na 1 premennú, pričom o ostatných premenných uvažujeme ako o konštantách.

Parciálnu deriváciu budeme označovať $\frac{\partial f(x,y,z,\dots)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z,\dots)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z,\dots)}{\partial z} \dots$

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie 19.

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (19)$$

pričom najskôr vypočítame parciálnu deriváciu podľa premennej x . Aplikujeme pravidlo o derivácií podielu dvoch funkcií h, g : $(\frac{h}{g})' = \frac{h'g - g'h}{g^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x}x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{1(x^2 + y^2) - 2xx}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Parciálna derivácia podľa premennej y má nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} &= x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= x(x^2 + y^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Ako druhú ukážku, parciálne derivácie funkcie danej rovniciou 22.

$$f(x, y) = \sin(xy) + \frac{1}{2}\cos(y) \quad (22)$$

pričom najskôr vypočítame parciálnu deriváciu podľa premennej x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy) + \frac{1}{2}\cos(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\cos(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &= \cos(xy)y\end{aligned}\tag{23}$$

Parciálnu deriváciu podľa premennej y vieme vypočítať nasledovne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy) + \frac{1}{2}\cos(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\cos(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{1}{2}\sin(y) \\ &= \cos(xy)x - \frac{1}{2}\sin(y)\end{aligned}\tag{24}$$

3 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-stavová

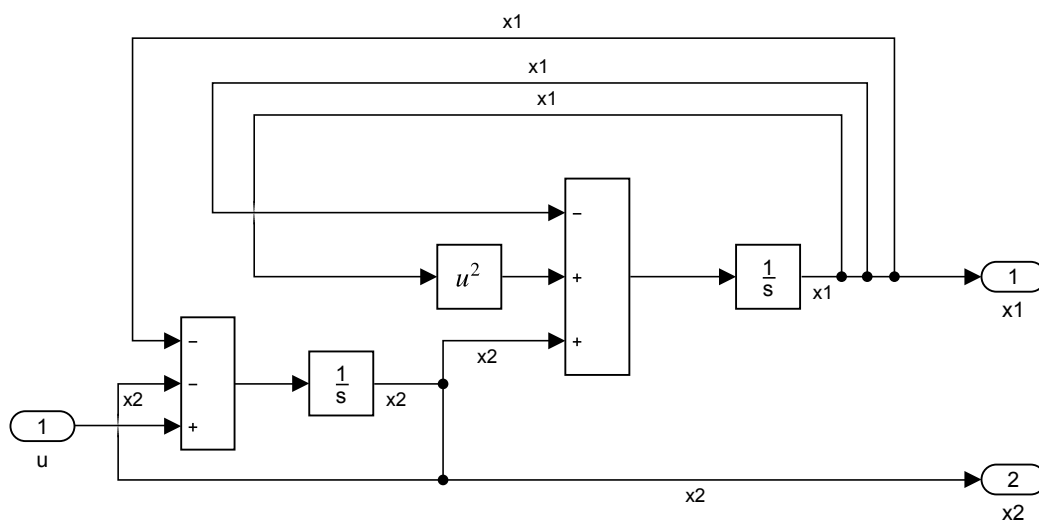
Úvodný príklad

Uvažujme nelineárny systém, opísaný stavovými rovnicami 25, ktorého bloková schéma je zobrazená na obrázku 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= u - x_1 - x_2\end{aligned}\tag{25}$$

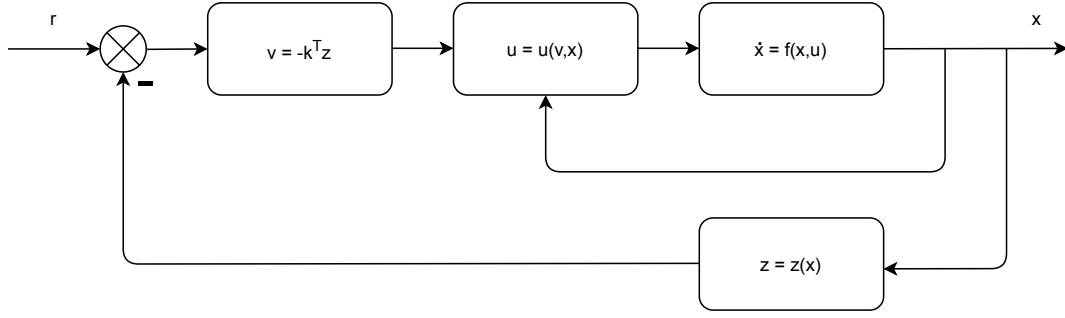
Aby sme mohli navrhnúť nelineárne riadenie najskôr overíme že je bod $x_1 = x_2 = 0$ rovnovážnym bodom. V rovnovážnom stave sú derivácie rovné nule. Z rovníc 26 vyplýva, že bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovážnym bodom.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1|_{x_1=x_2=u=0} &= 0 \\ \dot{x}_2|_{x_1=x_2=u=0} &= 0\end{aligned}\tag{26}$$



Obr. 2: Bloková schéma systému 25

Na riadenie nelineárneho systému (rovnica 25), použijeme metódu vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie (obrázok 3), tak aby sme dosiahli požadovanú hodnotu r .



Obr. 3: Metóda vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie

Postup pri metóde vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie je nasledovný. Najskôr si určíme transformačné vzťahy, tzn. určíme vektor r .

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_1^2 + x_2 \end{aligned} \tag{27}$$

Následne transformujeme zadaný nelineárny systém (rovnica 25), pomocou nájdených transformačných vzťahov (rovnica 27).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 = z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= 2x_1(x_1^2 + x_2 - x_1) + u - x_1 - x_2 \\ &= 2z_1(z_2 - z_1) + u - z_1 - z_2 + z_1^2 \\ &= u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \end{aligned} \tag{28}$$

Aby sme dosiali lineárny transformovaný systém zavedieme novú premennú v .

$$v = u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \tag{29}$$

Z transformovanej sústavy získame vzťah pre nelineárne riadenie, akčný zásah u .

$$u = v + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_1 + z_2 \tag{30}$$

Zavedením novej premennej sme získali nový transformovaný lineárny systém.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}\tag{31}$$

Po získaní lineárneho systému môžeme zaviesť lineárny stavový regulátor (rovnica 32).

$$v = k_1 z_1 + k_2 z_2\tag{32}$$

Lineárny systém s regulátorom bude vyzerat' nasledovne: rovnica 33.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= k_1 z_1 + k_2 z_2\end{aligned}\tag{33}$$

Na vypočítanie parametrov regulátora a nastavenie dynamiky systému potrebujeme odvodiť charakteristickú rovnicu systému. Na získanie charakteristickej rovnice potrebujeme získať maticu A .

$$\begin{aligned}A &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} \end{array} \right]_{|z_1=z_2=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{34}$$

Charakteristickú rovnicu získame z rovnice 35.

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= 0 \\ |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -k_1 & \lambda - k_2 \end{vmatrix} \\ |\lambda I - A| &= (\lambda + 1)(\lambda - k_2) - k_1 \\ \lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= 0\end{aligned}\tag{35}$$

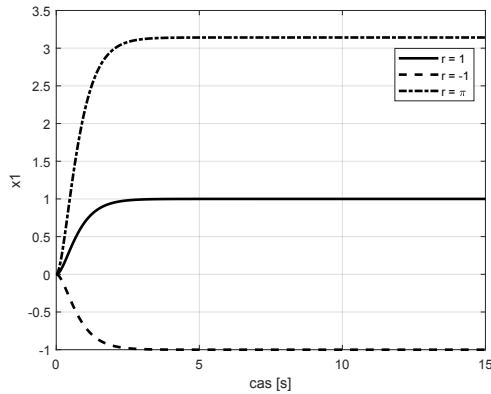
Vieme, že korene charakteristickej rovnice musia ležať v zápornej polrovine. Preto si zvolíme korene $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, pomocou ktorých získame parametre

k_1, k_2 (rovnica 36).

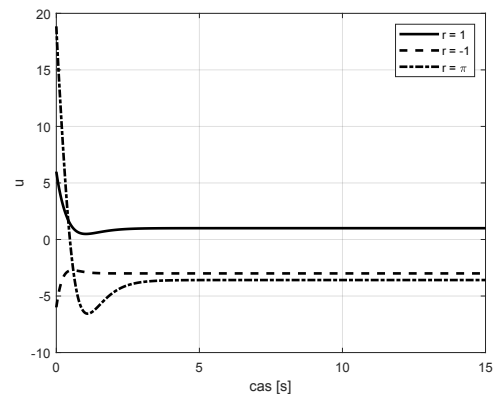
$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \\ \lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ k_1 &= -2 \\ k_2 &= -4\end{aligned}\tag{36}$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 4.

vidieť, že s pomocou navrhnutého riadenia pre nelineárny systém sme dokázali dosiahnuť požadovanú hodnotu r .



Obr. 5: *Priebeh stavovej premennej x_1 s nelineárnym riadením*



Obr. 6: *Priebeh akčného zásahu u s nelineárnym riadením*

Návrh PID regulátora

Teraz môžeme pre porovnanie navrhnuť PID regulátor. Aby sme mohli navrhnuť PID regulátor potrebujeme získať prenosovú funkciu systému, preto náš systém linearizujeme v pracovnom bode $x_1 = x_2 = 0$ (rovnica 37).

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta u \end{bmatrix} \quad (37)$$

Pričom matica A má tvar:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{x_1=x_2=u=0} \end{aligned} \quad (38)$$

Hľadané linearizované rovnice:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u\end{aligned}\tag{39}$$

Keď sme získali linearizované rovnice nelineárneho systému, z ktorých vyjadríme prenosovú funkciu $\frac{\Delta x_1}{\Delta u}$. Použijeme Laplaceovú transformáciu, aby sme sa získali prenosovú funkciu (rovnica 40).

$$\begin{aligned}s\Delta \dot{x}_1 &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x_1(s+1) \\ s\Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s\Delta x_1(s+1) &= -\Delta x_1 - \Delta x_1(s+1) + \Delta u \\ s\Delta x_1(s+1) + \Delta x_1 + \Delta x_1(s+1) &= \Delta u\end{aligned}$$

$$\Delta u = \Delta x_1(s^2 + 2s + 2)$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta u} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)}\tag{40}$$

Na výpočet parametrov PID regulátora použijeme metódu Pole-Placement. Aby sme ju mohli použiť vyjadríme si charakteristický polynóm ($N(s)$) z prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu G_{URO} (rovnica 41)

$$\begin{aligned}G_{URO} &= \frac{(P + Ds + \frac{I}{s})(\frac{1}{s^2+2s+2})}{1 + (P + Ds + \frac{I}{s})(\frac{1}{s^2+2s+2})} \\ N(s) &= s^3 + s^2(2 + D) + s(2 + P) + I\end{aligned}\tag{41}$$

Keď sme získali charakteristický polynóm $N(s)$, využijeme metódu Pole-Placement, ktorá spočíva v porovnaní charakteristického polynómu so želaným polynómom $P(s)$. Umiestníme póly želaného polynómu $P(s)$ do zápornej reálnej polroviny. My si zvolíme korene: $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$, čím sme zabezpečíme stabilitu lineárneho systému. Polynóm $P(s)$ potom bude mať nasledujúci

tvár (rovnica 42).

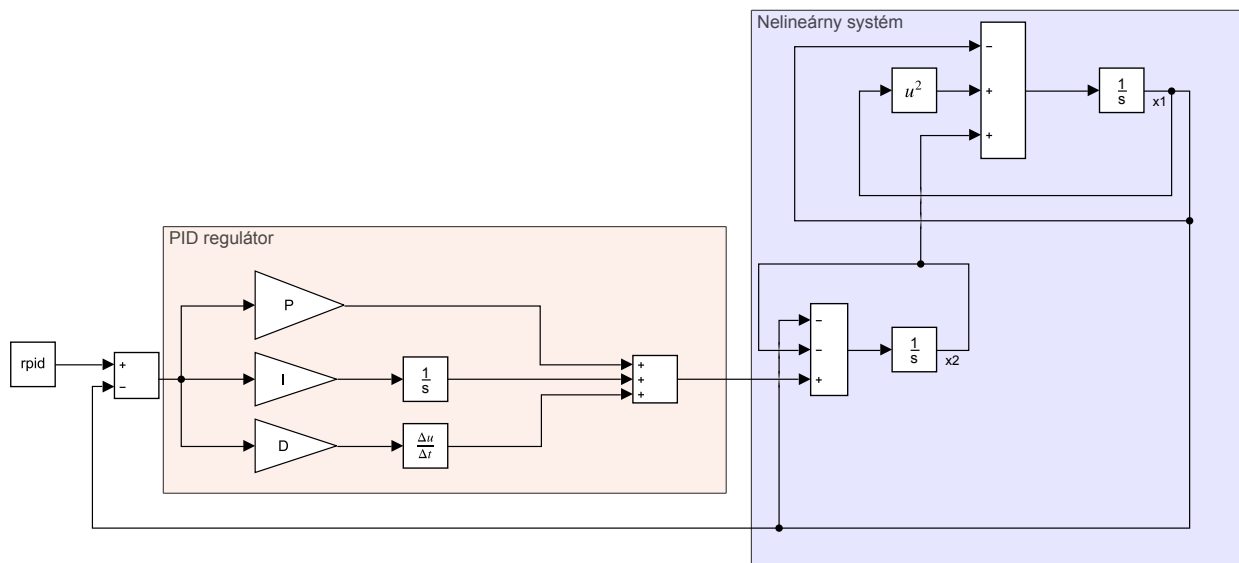
$$\begin{aligned} P(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \end{aligned} \quad (42)$$

Porovnaním želaného polynómu $P(s)$ s charakteristickým polynómom $N(s)$ 43, dostaneme parametre regulátora 44.

$$\begin{aligned} P(s) &= N(s) \\ s^3 + 6s^2 + 11s + 6 &= s^3 + s^2(2+D) + s(2+P) + I \end{aligned} \quad (43)$$

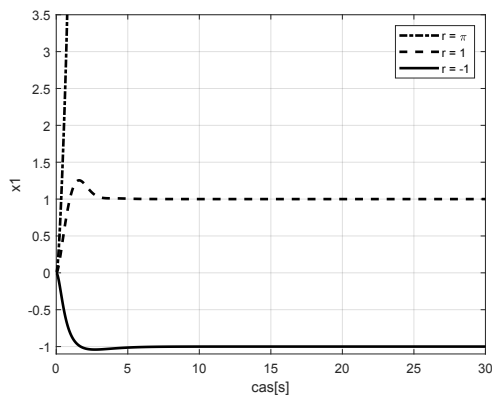
$$\begin{bmatrix} P \\ I \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 7.

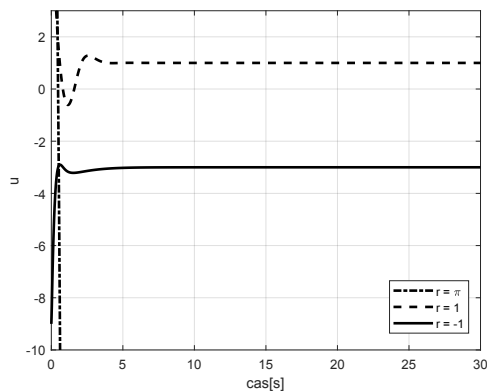


Obr. 7: Bloková schéma systému s PID regulátorom

Z výsledkov simulácie, ktoré sú zobrazené na obrázkoch 8, 9, môžeme vidieť, že s pomocou PID regulátora sme dokázali dosiahnuť niektoré požadované hodnoty r , avšak pri vyšších požadovaných hodnotách bol už systém nestabilný.



Obr. 8: *Priebeh stavovej premennej x_1 s PID regulátorom*

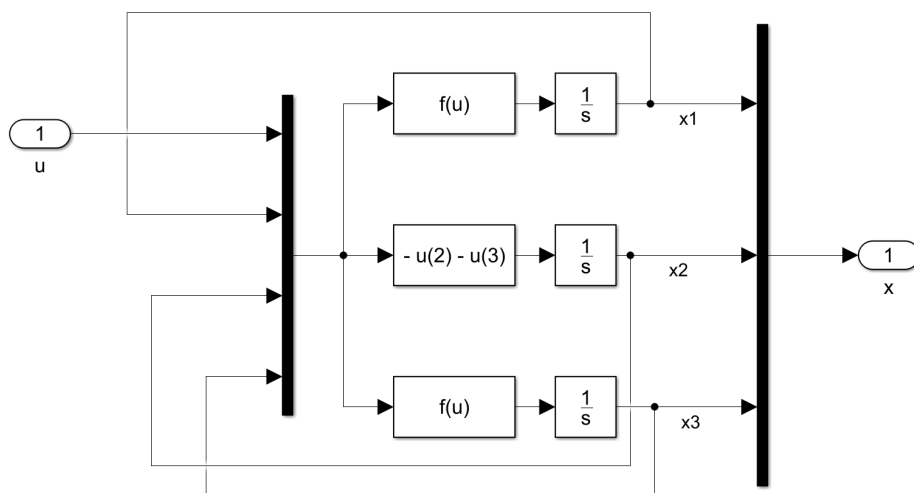


Obr. 9: *Priebeh akčného zásahu u s PID regulátorom*

Príklad druhý

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (45). Bloková schéma systému je na obr. 10.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) \\
 \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \\
 \dot{x}_3 &= \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) - u \\
 y &= x_1
 \end{aligned}
 \tag{45}$$



Obr. 10: *Bloková schéma systému z rovn. (45)*

Tento systém má stavy x_1 , x_2 a x_3 . Stav x_1 je zároveň výstupom systému. Bod $[0 \ 0 \ 0]$ je rovnovážny stav systému. V tomto bode sú časové derivácie všetkých stavových premenných rovné nule.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 1 + \sin(0) = 0 \\
\dot{x}_2|_{x_1=x_2=x_3=0} &= -0 - 0 = 0 \\
\dot{x}_3|_{x_1=x_2=x_3=0} &= \cos(0)\sin(0) - 0\cos(0) - 0 = 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Naším cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup y dosiahol žiadanú hodnotu r . Systém obsahuje nelinearity v dvoch rovniciach, preto je ťažké určiť zákon riadenia len pohľadom na tieto rovnice. Použijeme metódu Vstupno-stavovej linearizácie, pri ktorej navrhujeme linearizačnú slučku, s ktorou sa náš systém bude správať ako lineárny. Pre tento lineárny systém potom navrhujeme regulátor, ktorý zabezpečí že sa výstup systému ustáli na žiadanej hodnote.

Prvým krokom metódy je určenie transformačných vzťahov rovn. (47).

$$\begin{aligned}
z_1 &= -x_2 \\
z_2 &= x_1 + x_2 \\
z_3 &= \sin(x_2) - x_3
\end{aligned} \tag{47}$$

Druhým krokom je transformácia nášho systému zo stavov x_1 , x_2 a x_3 na stavy z_1 , z_2 a z_3 . To dosiahneme derivovaním transformačných vzťahov (v čase) a dosadením vzťahov z pôvodných rovníc.

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\dot{x}_2 \\
&= x_1 + x_2 \\
&= z_2
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\
&= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) - x_1 - x_2 \\
&= z_3
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_3 &= \cos(x_2)\dot{x}_2 - \dot{x}_3 \\
&= \cos(x_2)(-x_1 - x_2) - \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) + u \\
&= u - \cos(z_1)(z_2 + z_3)
\end{aligned} \tag{50}$$

Transformovaný systém potom opisujú rovn. (51).

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= u - \cos(z_1)(z_2 + z_3)\end{aligned}\tag{51}$$

Na základe rovn. (51) dokážeme zvoliť taký zákon riadenia, ktorý vykompenzuje nelinearity pôvodného systému, rovn. (52). Prvý člen tejto rovnice zabezpečí linearizáciu systému, tvorí linearizačnú slučku. Druhý člen v zabezpečí stabilitu dynamiky systému, rovn. (54). Posledný člen r predstavuje našu žiadanú hodnotu. Keďže náš linearizovaný systém nemusí mať jednotkové zosilnenie, musíme túto hodnotu predeliť statickým zosilnením linearizovaného systému K . Druhou možnosťou je zvoliť také konštanty k_1 , k_2 a k_3 aby zosilnenie bolo rovné jednej.

$$u(z, v, r) = \cos(z_1)(z_2 + z_3) + v + r/K\tag{52}$$

$$u(x, v, r) = \cos(x_2)(x_1 + x_2 + \sin(x_2) - x_3) + v + r/K\tag{53}$$

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3\tag{54}$$

Dosadením zákona riadenia do nášho transformovaného systému dosiahneme lineárny systém, rovn. (55).

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 + \frac{r}{K}\end{aligned}\tag{55}$$

Tento systém môžeme zapísať v kanonickej forme riaditeľnosti pomocou matice A a vektorov b , c a d .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prenosová funkcia systému $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1}{K} \frac{1}{s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1} \quad (56)$$

Zosilnenie systému získame ak limitujeme s k nule. Potom dostaneme rovn. (57), z ktorého si vyjadríme konštantu K , rovn. (58).

$$\frac{1}{K} \frac{1}{k_1} = 1 \quad (57)$$

$$K = \frac{1}{k_1} \quad (58)$$

Konštanty k_1 , k_2 a k_3 majú zabezpečiť stabilitu dynamiky systému. Môže ich určiť na základe vlastných čísel matice A . Aby bol systém stabilný, musí matica A mať záporne definitné vlastné čísla.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_1 & k_2 & \lambda + k_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + k_3 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0 \quad (59)$$

Nech všetky tri λ majú hodnotu -1, dostaneme tak žiadaný polynóm pre vlastné čísla, rovn. (60).

$$(\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \quad (60)$$

Porovnaním rovn. (59) a rovn. (60) získame vzťahy, z ktorých určíme koeficienty, rovn. (61).

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 3 \\ k_3 &= 3 \end{aligned} \quad (61)$$

Z toho určíme zosilnenie K , rovn. (62).

$$K = 1 \quad (62)$$

Návrh riadenia pomocou obyčajnej linearizácie s PID regulátorom - príklad 2

Rozvojom do Taylorovho radu dostaneme z pôvodných rovn. (45) nové rovn. (63). Pracovný bod nech je $[0 \ 0 \ 0]$. Po linearizácii dokážeme odvodiť prenosovú funkciu rovn. (64) a navrhnuť PID regulátor pomocou PPM.

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}_1 &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\ \dot{\Delta x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_3 &= \Delta x_1 - \Delta x_3 - \Delta u\end{aligned}\tag{63}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s + 2}\tag{64}$$

$$R(s) = \frac{I + Ps + Ds^2}{s}\tag{65}$$

$$G_{URO}(s) = \frac{(s+1)(I + Ps + Ds^2)}{Ds^3 + (P+D)s^2 + (I+P)s + I}\tag{66}$$

Nech požadované póly uzavretého regulačného obvodu sú -1, -0.5 a -0.5. Porovnaním žiadaného polynómu (rovn. (67)) a polynómu uzavretého regulačného obvodu (rovn. (68)) dostaneme vzťahy na výpočet parametrov PID regulátora rovn. (69).

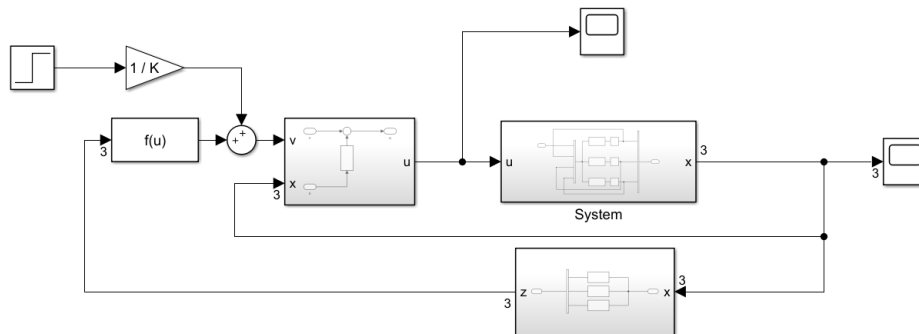
$$s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 = 0\tag{67}$$

$$Ds^3 + (P+D)s^2 + (I+P)s + I = 0\tag{68}$$

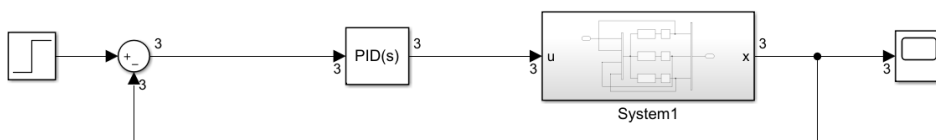
$$\begin{aligned}P &= 1 \\ I &= 0.25 \\ D &= 1\end{aligned}\tag{69}$$

Simulácie - príklad 2

Navrhnuté riadenia môžeme porovnať pomocou simulácie v prostredí Matlab-simulink. Simulačná schéma s nelineárnym riadením je na obr. 11 a s PID regulátorom je na obr. 12. Pri nelineárnom riadení urobíme skok žiadanej hodnoty na 10. Pri PID regulátore urobíme dva skoky, na hodnotu 0.1 a 1, aby sme zostali čo najbližšie pri pracovnom bode.



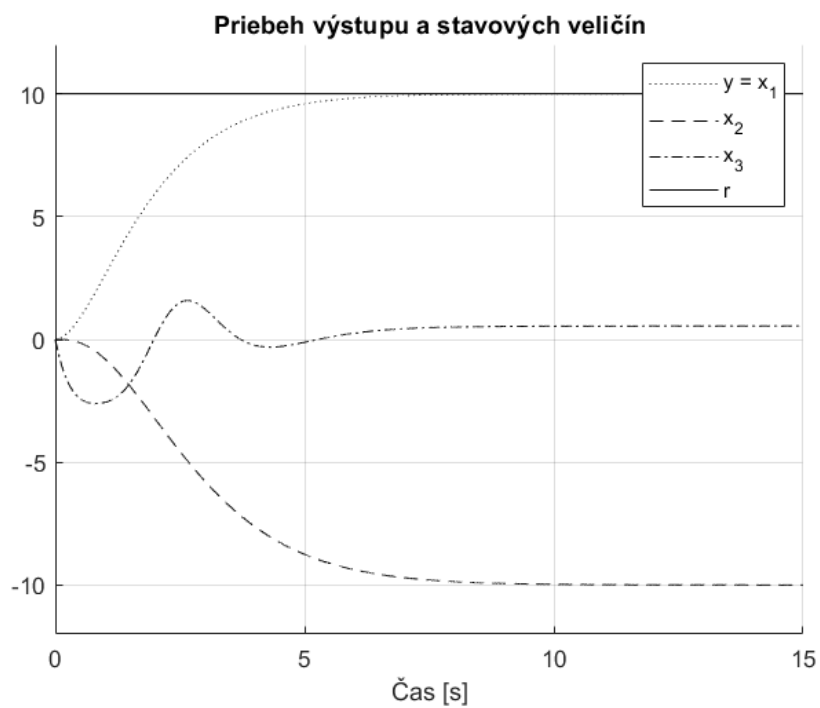
Obr. 11: Bloková schéma systému s nelineárnym riadením



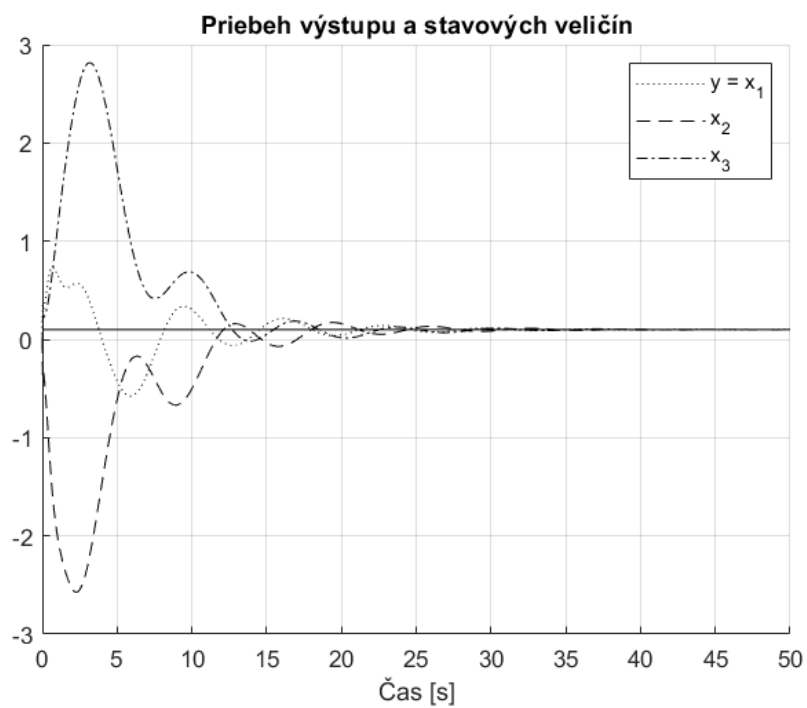
Obr. 12: Bloková schéma systému s PID regulátorom

Na obr. 14 môžeme vidieť, že takto navrhnutý PID regulátor dokáže pri malom skoku uradiť náš systém. Pri väčšom skoku (obr. 15) sa náš uzavretý systém stal nestabilným. Je to spôsobené tým, že pri väčšej vzdialenosti od pracovného bodu sa chyba spôsobená linearizáciou zväčšuje a systému má iné vlastnosti ako systém, pre ktorý sme daný regulátor navrhovali.

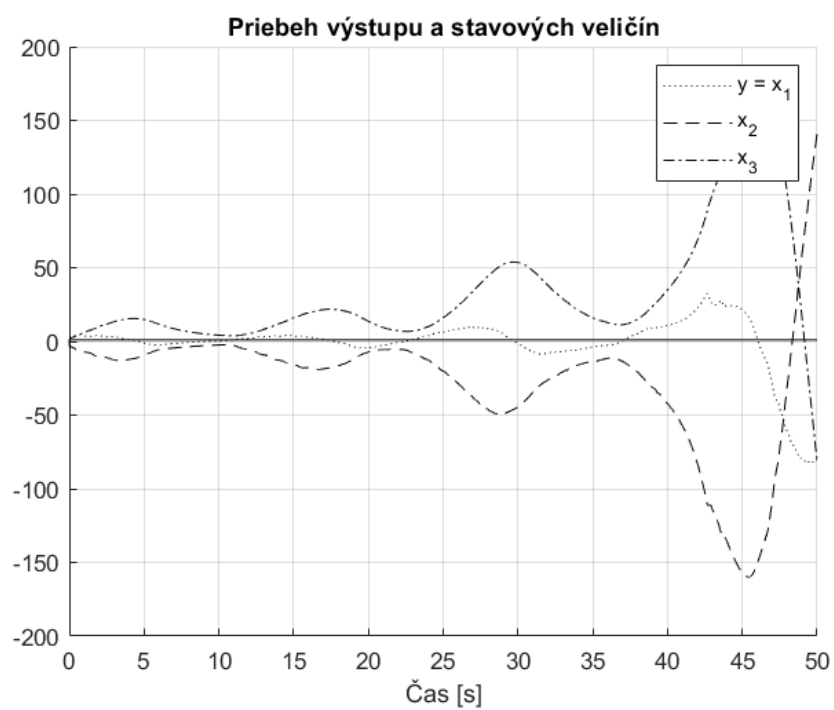
Na obr. 13 a obr. 16 je vidieť, že nelineárny regulátor dokázal uradiť náš systém bez problémov aj na hodnotu 10.



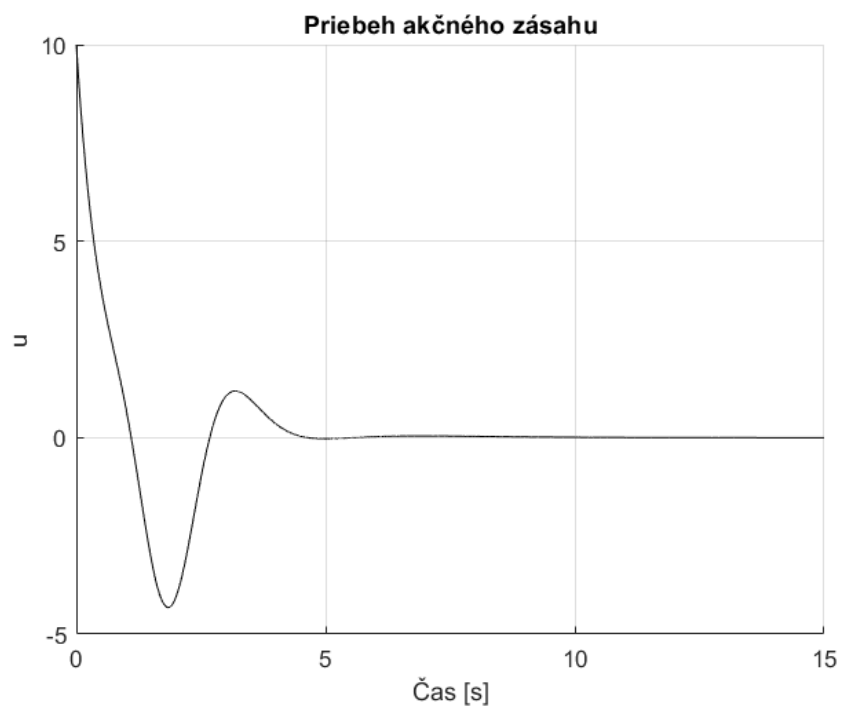
Obr. 13: Priebeh výstupu a stavových veličín s nelineárnym riadením



Obr. 14: Priebeh výstupu a stavových veličín s PID (skok na 0.1)



Obr. 15: Priebeh výstupu a stavových veličín s PID (skok na 1)



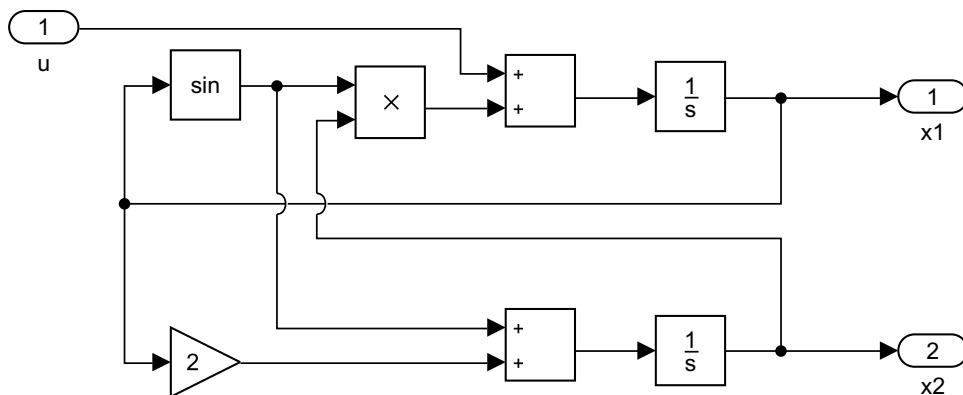
Obr. 16: Priebeh akčného zásahu s nelineárnym riadením

4 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-výstupná

Príklad prvý

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (70). Bloková schéma systému je na obr. 17.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u + \sin(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + \sin(x_1) \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (70)$$



Obr. 17: Bloková schéma systému z rovn. (70)

Rovnovážny stav systému

Bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovážnym bodom tohto systému, čo si môžeme overiť dosadením:

$$\dot{x}_1|_{(x_1=x_2=0)} = \sin(0)0 = 0$$

$$\dot{x}_2|_{(x_1=x_2=0)} = 0 + \sin(0) = 0$$

všimnime si, že v tomto bode sú derivácie stavových premenných v čase nulové, čo je charakteristické pre rovnovážne body.

Predpokladajme, že chceme tento systém riadiť tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu r a aplikujme nelineárne riadenie navrhnuté metódou vstupno-výstupnej spätnoväzobnej linearizácie. Metódu vysvetlíme rovno počas návrhu.

Prvý krok metódy - derivácia rovnice výstupu

Prvým krokom metódy je derivácia vzťahu pre výstup systému y . Derivujeme toľkokrát koľkokrát je potrebné, nato aby sa vstup systému u objavil v rovnici.

$$\begin{aligned}y &= x_2 \\ \implies \dot{y} &= \dot{x}_2 = 2x_1 + \sin(x_1) \\ \implies \ddot{y} &= \ddot{x}_2 \\ &= 2 + \cos(x_1)\dot{x}_1 \\ &= 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2)\end{aligned}$$

vo výsledku dostaneme vzťah rovn. (71).

$$\ddot{y} = 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \quad (71)$$

Druhý krok - voľba zákona linearizácie

Teraz si všimnime, že ak zvolíme vstup u do systému, tak ako je rovn. (72)

$$u = -\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} \quad (72)$$

po dosadení do rovn. (71) dostaneme:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \\ &= 2 + \cos(x_1)\left(-\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} + \sin(x_1)x_2\right) \\ &= 2 + \cos(x_1)\left(\frac{v}{2 + \cos x_1}\right) \\ &= v\end{aligned}$$

Dostávame tak vzťah medzi výstupom systému y a vstupom do zákona linearizácie v v rovn. (73).

$$\ddot{y} = v \quad (73)$$

Voľba takéhoto zákona, nazvime ho zákonom linearizácie, pre vstup u do systému, je druhým krokom metódy.

Tretí krok - návrh zákona riadenia linearizovaného systému

Ako posledný krok, musíme zvoliť tvar v , tak aby sme dosiahli požadovanú dynamiku systému.

Zvolme si v podľa rovn. (74).

$$\begin{aligned} v &= \ddot{r} + k_1 \dot{e} + k_0 e \\ &= -k_1 \dot{y} + k_0 e \text{ keďže } r \text{ je konšt., tak jeho derivácie sú } 0 \end{aligned} \quad (74)$$

potom dosadením rovn. (74) do rovn. (73) dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{r} + k_1 \dot{e} + k_0 e \\ 0 &= \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \end{aligned}$$

pre takúto voľbu v bude teda pre systém platiť rovn. (75).

$$0 = \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \quad (75)$$

kde k_1 a k_0 sú voliteľné parametre.

Parametre k_1 a k_0 vieme tiež navrhnuť podľa potreby. Ak si prepíšeme rovn. (75) na rovn. (76).

$$r_e = \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \quad (76)$$

kde r_e bude žiadaná hodnota odchýlky (ktorá je 0), tak vieme vyjadriť prenos $\frac{e}{r_e}$:

$$\begin{aligned} r_e &= \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \\ R_e &= Es^2 + k_1 Es + k_0 E \\ R_e &= E(s^2 + k_1 s + k_0) \\ \frac{E}{R_e} &= \frac{1}{s^2 + k_1 s + k_0} \end{aligned}$$

charakteristický polynóm teda bude rovn. (77).

$$s^2 + k_1 s + k_0 = 0 \quad (77)$$

zvolíme žiadanú polohu pólov p_1, p_2 potom žiadaný charakteristický polynóm

bude rovn. (78).

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2 \quad (78)$$

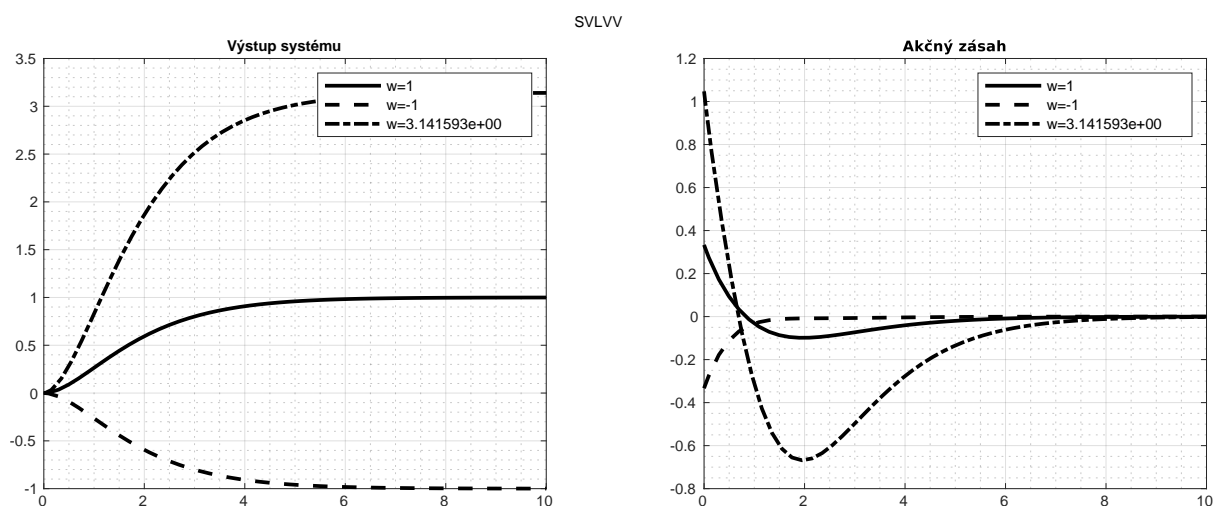
porovnaním rovn. (77) a rovn. (78) dostaneme sústavu rovníc rovn. (79).

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= k_0 \\ -(p_1 + p_2) &= k_1 \end{aligned} \quad (79)$$

cez ktoré vieme vypočítať k_1 a k_0 pre ľubovoľné žiadané póly.

Zvolme si $p_1 = -1$ a $p_2 = -1$ potom z rovn. (79) dostaneme $k_1 = 2$ a $k_0 = 1$

Máme tak navrhnutý regulátor. Výsledok overíme simuláciou, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu. Priebehy zo simulácie sú na obr. 18.



Obr. 18: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej rovn. (70)

Zhrnutie krokov metódy

Kroky návrhu sumarizujeme v 3 bodoch:

1. Derivácia rovnice výstupu, až kým sa v rovnici neobjaví vstupná premenná
2. Voľba zákona linearizácie (napríklad odčítanie nelineárnych zložiek)
3. Návrh zákona riadenia (regulátora) pre linearizovaný systém

Porovnanie s PID

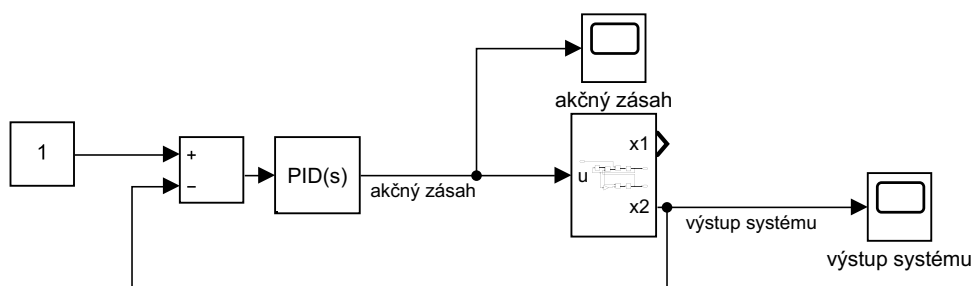
Pre porovnanie skúsme navrhnuť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovážnom bode $x_1 = x_2 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (80).

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta u \\ \Delta \dot{x}_2 &= 3\Delta x_1 \\ \Delta y &= \Delta x_2\end{aligned}\tag{80}$$

Vyjadriť si prenosovú funkciu systému, pre jednoduchší návrh parametrov regulátora. Vyjadrenie prebieha v rovn. (81). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Delta x_2 = \frac{1}{s}3\Delta x_1 = \frac{1}{s^2}3\Delta u \\ \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{3}{s^2}\end{aligned}\tag{81}$$

Zapojme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 19. Ktorý má prenos rovn. (82), kde P , D , I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie ešte prenosy systému a regulátora roznásobíme, dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (83).



Obr. 19: Zapojenie PID regulátora

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s}\tag{82}$$

$$G_{ORO} = 3 \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}\tag{83}$$

Následne vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa známeho

pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (84). Dostaneme tak prenos rovn. (85).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{3 \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}}{1 + 3 \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}} \\ &= \frac{3(Ps + Ds^2 + I)}{s^3 + 3Ps + 3Ds^2 + 3I} \end{aligned} \quad (85)$$

Využime teraz metódu pole-placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na týchto pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -1, p_2 = -1, p_3 = -1$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladíme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly, teda roznásobením rovn. (86).

$$\begin{aligned} P(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \\ &= (s + 1)(s + 1)(s + 1) \\ &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \end{aligned} \quad (86)$$

Tento želaný polynóm porovnáme s charakteristickým polynómom uzavretého regulačného obvodu, teda rovn. (87), dostaneme tak rovnice rovn. (88) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

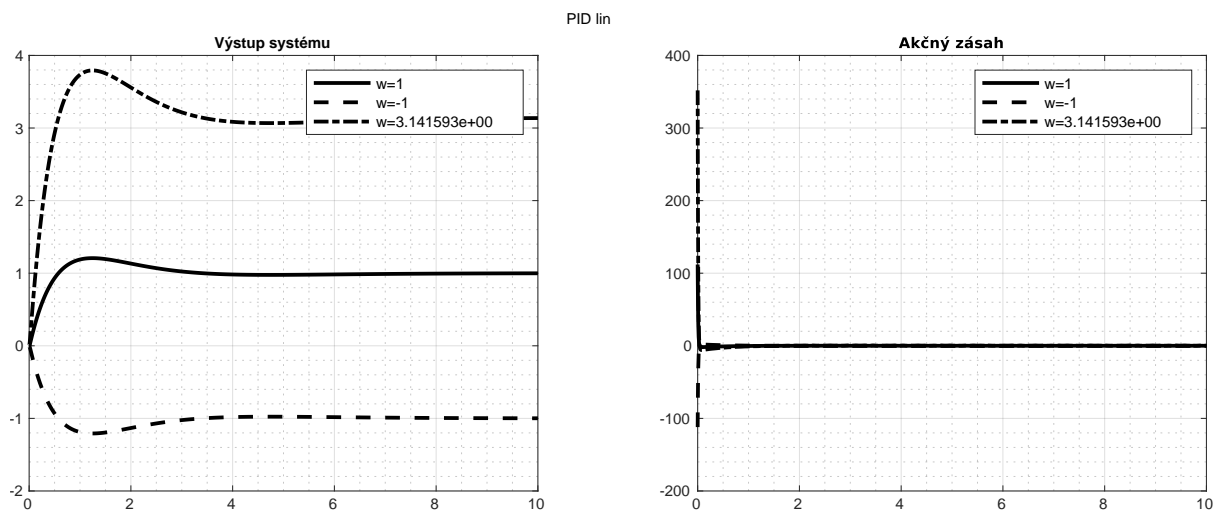
$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = s^3 + 3Ps + 3Ds^2 + 3I \quad (87)$$

$$\begin{aligned} 3P &= 3 & P &= 1 \\ 3D &= 3 & \implies D &= 1 \\ 3I &= 1 & I &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (88)$$

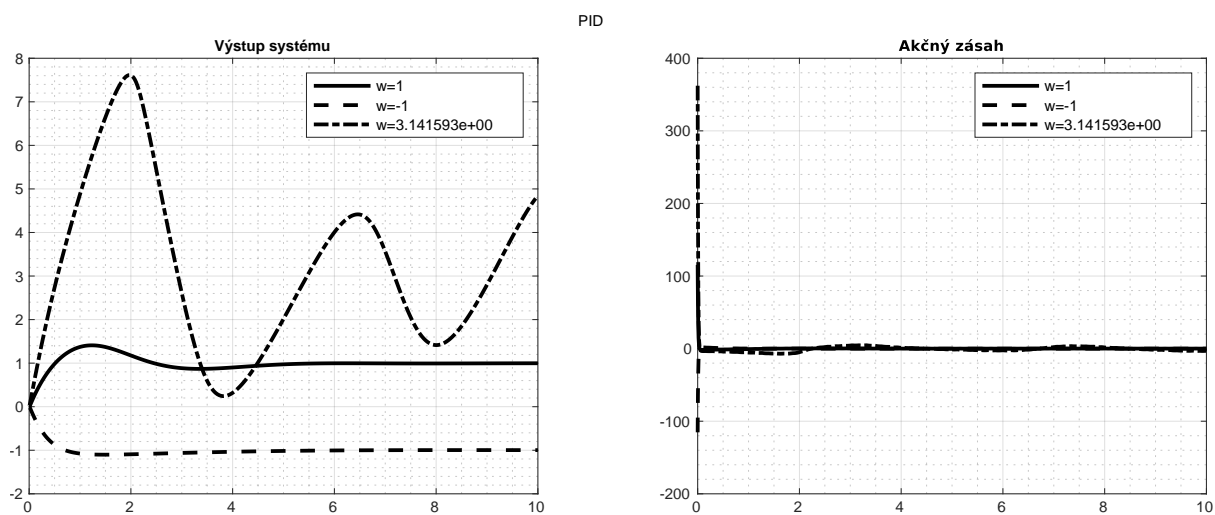
Najprv aplikujme tento regulátor na linearizovaný systém, aby sme si overili návrh. Výsledok zo simulácie je na obr. 20.

Aplikujme teraz PID regulátor aj na nelineárny systém, ktorý chceme riadiť. Výsledok zo simulácie je na obr. 21.

Vidíme ako PID regulátor zvláda riadenie pre istú oblasť žiadaných hodnôt,



Obr. 20: PID regulátor na linearizácii systému v pracovnom bode



Obr. 21: PID regulátor na nelineárnom systéme

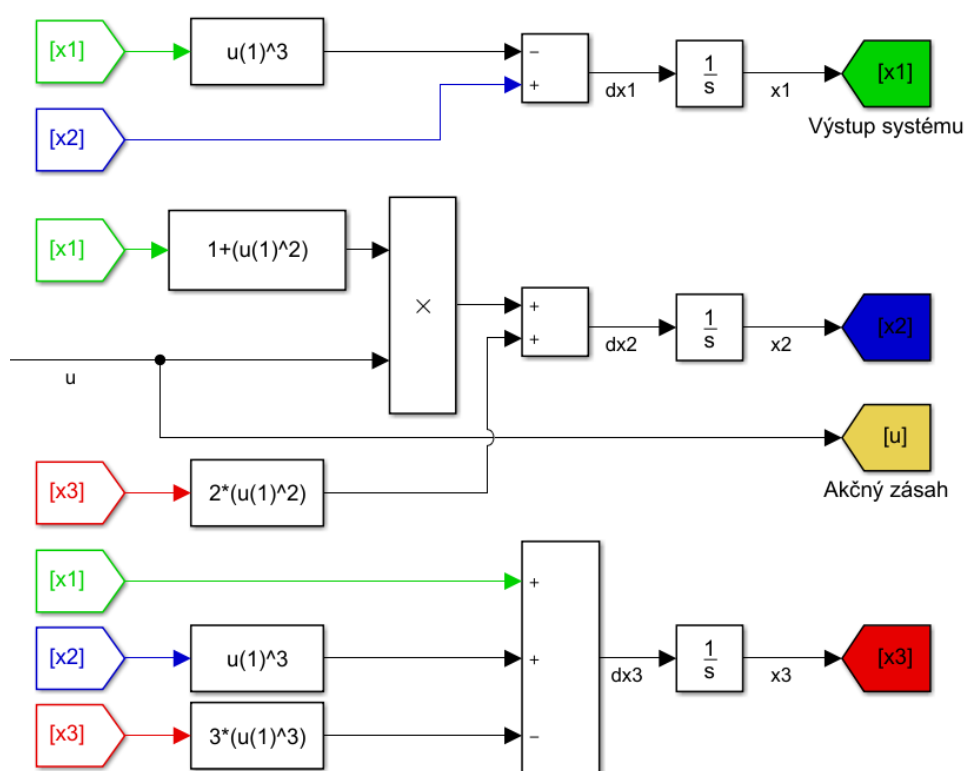
kde sa linearizácia nelineárneho systému nelíši do veľkej miery od pôvodného systému.

Avšak pre väčšie skoky PID regulátor prestáva fungovať ako to vidíme pre skok $w = \pi$. Z výsledku môžeme usúdiť, že použiť nelineárne riadenie je v niektorých prípadoch nevyhnutné.

Príklad 2

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (89). Bloková schéma systému je na obr. 22.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2^3 - 3x_3^3 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (89)$$



Obr. 22: Bloková schéma systému z rovn. (89)

Návrh riadenia - príklad 2

Teraz overíme, že bod $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, je rovnovážný bodom systému. Systém sa nachádza v rovnováhe, keď časové derivácie všetkých stavových

premenných sú nulové.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 - 0 = 0 \\ \dot{x}_2|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 = 0 \\ \dot{x}_3|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 0 = 0\end{aligned}\tag{90}$$

Ako vidíme v bode $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ sú derivácie stavových premenných v čase nulové, teda bod $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ je rovnovážny bod systému.

Naším cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu r .

Aplikujeme nelineárne riadenie, opäť navrhnuté metódou vstupno výstupnej spätnoväzobnej linearizácie použitú aj v predchádzajúcom príklade.

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade je prvým krokom derivovanie vzťahu pre výstup systému y . Tento vzťah je potrebné derivovať pokiaľ sa v ňom neobjaví vstupný signál u .

$$\begin{aligned}y &= x_1 \\ \implies \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\ \implies \ddot{y} &= \dot{x}_2 - 3x_1^2\dot{x}_1 \\ \implies \ddot{y} &= 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 \\ &= 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2 + 1)u\end{aligned}\tag{91}$$

Pre zjednodušenie do budúcnosti upravme výslednú rovn. (91) nasledovne:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2 + 1)u \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5\end{aligned}\tag{92}$$

Ak zvolíme vstup do systému, tak ako je v rovn. (93), po dosadení dostaneme rovn. (94). Voľba takéhoto zákona je nazývaná zákonom linearizácie, pre vstup u do systému.

$$u = \frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + 1}\tag{93}$$

$$\ddot{y} = 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2 + 1)\frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + 1} \quad (94)$$

$$\ddot{y} = v$$

Posledný krok. Ak si zvolíme v podľa rovn. (95), tak dostávame rovnicu pre dynamiku odchýlky rovn. (96). Ak zvolíme koeficienty k všetky kladné, dynamika odchýlky bude vždy stabilná a bude konvergovať k 0. Voľba tohto zákona, pre v , povedzme zákona riadenia linearizovaného systému. Pozn. $e = (r - y)$

$$v = \ddot{r} - k_1(\dot{y} - \dot{r}) - k_2(y - r) \quad (95)$$

$$v = \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2e$$

$$\implies \ddot{y} = \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2e \quad (96)$$

$$\implies 0 = \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2e$$

Máme navrhnutý lineárny regulátor. Kompletný systém vidíme na obr. 23. Výsledky zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 25.

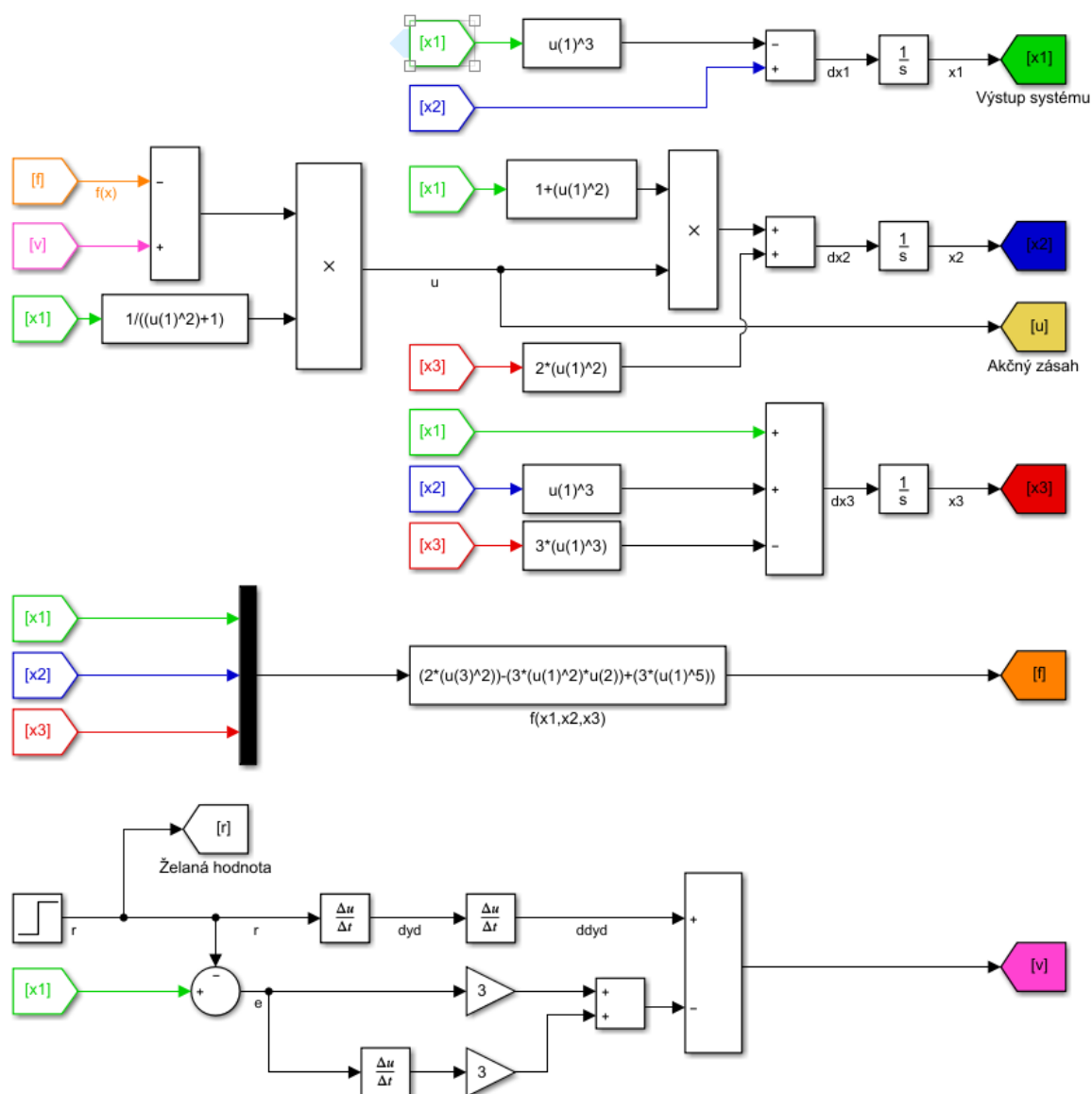
Návrh PID - príklad 2

Pre porovnanie skúsme navrhnuť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovážnom bode $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (97).

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x}_2 &= \Delta u \\ \Delta\dot{x}_3 &= \Delta x_1 \\ \Delta y &= \Delta x_1 \end{aligned} \quad (97)$$

Pre jednoduchší návrh parametrov regulátora si vyjadríme prenosovú funkciu systému. Vyjadrenie je ukázané v rovn. (98). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta x_1 = \frac{1}{s}\Delta x_2 = \frac{1}{s^2}\Delta u \\ \implies \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (98)$$

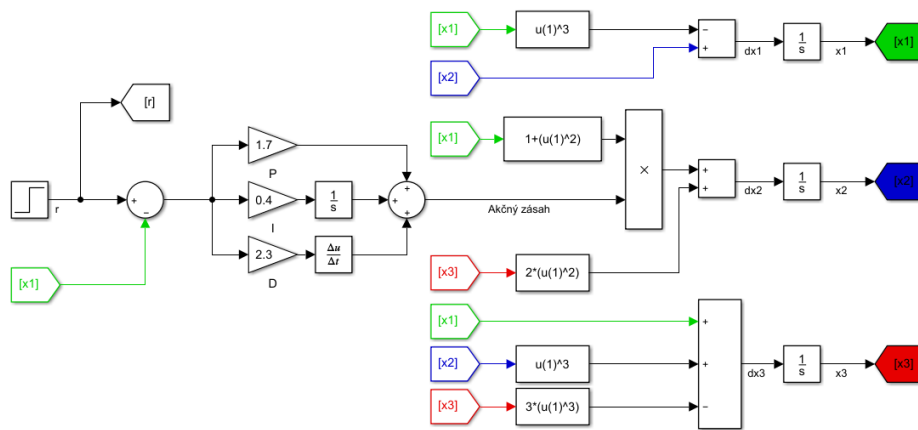


Obr. 23: Kompletná schéma riadného systému pomocou nelineárneho riadenia.

Zapojíme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 24. Ktorý má prenos rovn. (99), kde P, D, I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie, prenosy systému a regulátora roznásobíme a dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (100).

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s} \quad (99)$$

$$G_{ORO} = \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3} \quad (100)$$



Obr. 24: Zapojenie PID regulátora

Vyjadríme prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (101). Dostaneme tak prenos rovn. (102).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{\frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}}{1 + \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}} \\ &= \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3 + Ps + Ds^2 + I} \end{aligned} \quad (102)$$

Využijeme metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -1, p_2 = -0.8, p_3 = -0.5$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladíme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly (rovn. (103)).

$$\begin{aligned} P(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \\ &= (s + 1)(s + 0.8)(s + 0.5) \\ &= s^3 + 2.3s^2 + 1.7s + 0.4 \end{aligned} \quad (103)$$

Tento želaný polynóm porovnáme s charakteristickým polynómom URO, teda rovn. (104), dostaneme tak rovnice rovn. (105) z ktorých vypočítame parametre

regulátora.

$$s^3 + 2.3s^2 + 1.7s + 0.4 = s^3 + Ps + Ds^2 + I \quad (104)$$

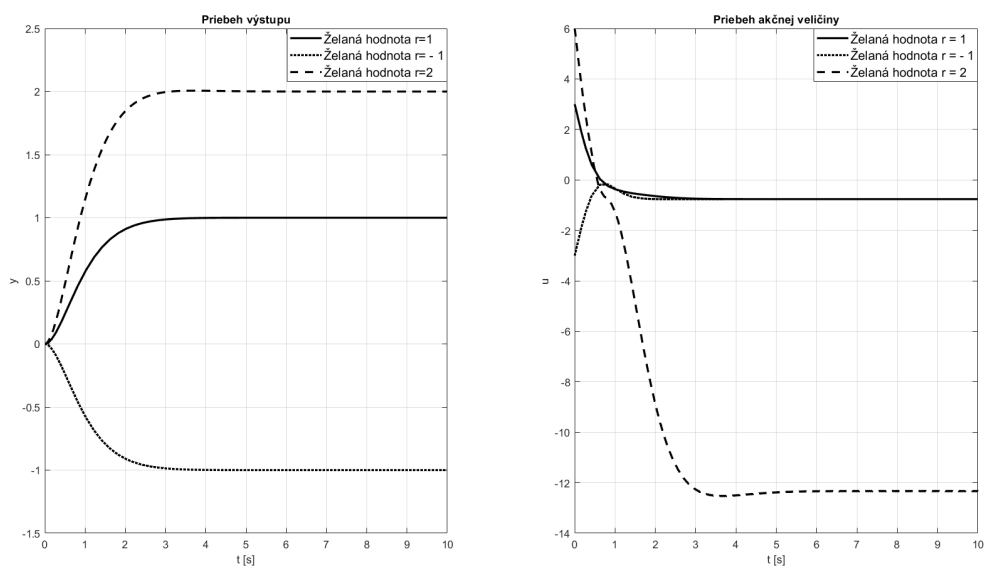
$$P = 1.7$$

$$D = 2.3 \quad (105)$$

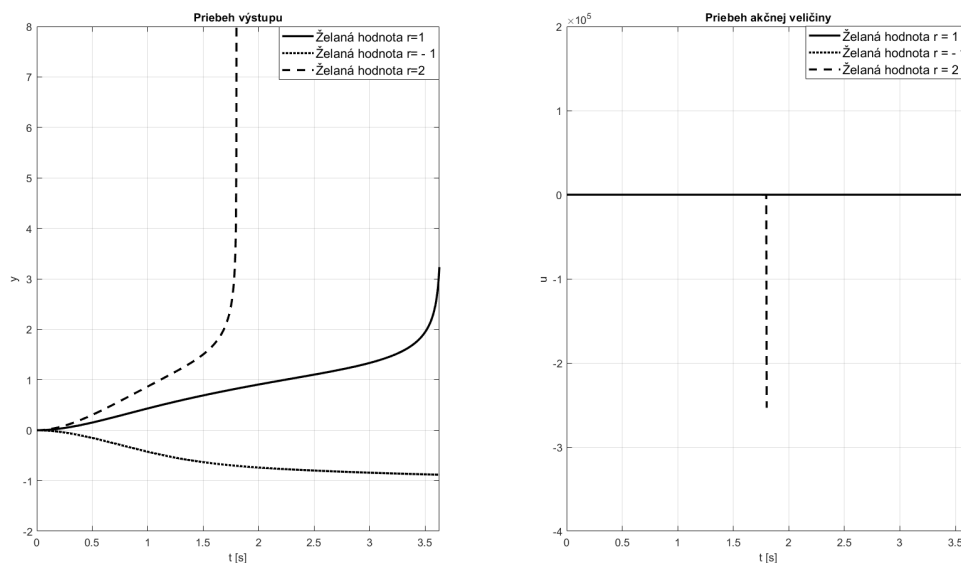
$$I = 0.4$$

Aplikujme PID regulátor na nelineárny systém (obr. 24), ktorý chceme riadiť. Výsledok zo simulácie je na obr. 26.

Porovnanie riadenia - príklad 2



Obr. 25: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätnoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej.



Obr. 26: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement

Záver - príklad 2

Z výsledku môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné. Systém regulovaný PID regulátorom nebol schopný sa stabilizovať v takom okolí pracovného bodu ako to dokázal systém s regulátorom navrhnutým pomocou metódy vstupno-výstupnej spätnoväzbovej linearizácie.

5 Integrácia do predmetu RNS

Vyššie uvedené príklady, môžu byť integrované do predmetu Riadenie Nelineárnych systémov napríklad priamo prezentovaním na prednáške.

Alebo môžu byť poskytnuté ako dodatočný materiál s vypracovanými príkladmi k prednáškam, na precvičenie metód návrhu.

Keďže obsahujú aj porovnanie s PID, čo zahŕňa návrh lin. regulátora v rovноваžnom stave linearizáciou, môžu byť využité na porovnanie lin. riadenia s nelineárnym, ale aj ako príklady na precvičenie linearizácie.

Je možné výsledok návrhu pomocou jednotlivých metód demonštrovať pomocou priloženej animácie riadenia polohy kyvadla v programe Matlab.

6 Záver

Tak ako sme vyššie demonštrovali, pre riadenie niektorých systémov je využitie nelineárneho riadenia nevyhnutné, v takýchto prípadoch nám metóda vstupno-stavovej linearizácie a metóda vstupno-výstupnej linearizácie poskytujú spôsob ako riadenie syntetizovať, v iných prípadoch však riadenie pomocou lineárneho PID regulátora, ktorý má parametre navrhnuté pre systém linearizovaný v rovноваžnom stave, postačuje a je jednoduchší z hľadiska návrhu. Preto je nutné pre každý systém určiť, či je riadenie pomocou PID regulátora postačujúce a ak nie, využiť napríklad jednu z vyššie uvedených metód.

V prípade použitia uvedených metód návrhu nelineárneho riadenia, je potrebné analyzovať aj výsledný tvar nelineárneho zákona riadenia, pretože tento nemusí byť definovaný, pre všetky hodnoty stavových premenných.

Literatúra

- [1] SLOTINE, Jean-Jacques E., et al. Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.