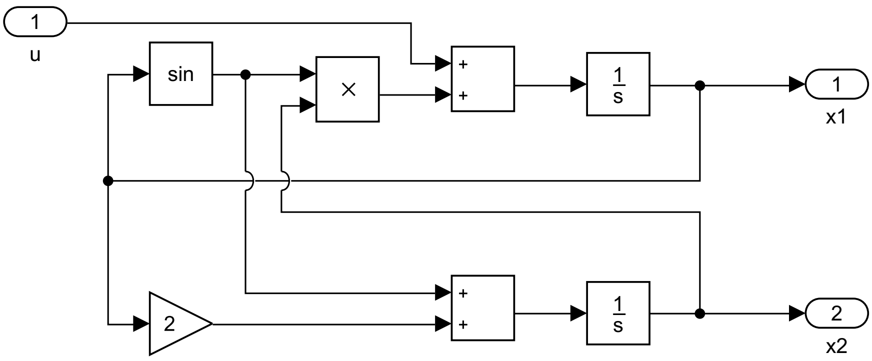
0.1 Úvodný príklad

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (1). Bloková schéma systému je na obr. 1.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u + \sin(x_1)x_2 \\ \dot{x_2} &= 2x_1 + sin(x_1) \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1: Bloková schéma systému z rovn. (1)

Overme teraz, že bod $x_1 = x_2 = 0$, je rovnovažný bodom systému.

$$\begin{aligned} \dot{x_1}|_{x_1=x_2=0} &= \sin(0)0 = 0 \\ \dot{x_2}|_{x_1=x_2=0} &= 0 + sin(0) = 0 \end{aligned}$$

Všimnime si, že v tomto bode sú derivácie stavových premenných v čase nulové, čo je charakteristické pre rovnovažné body.

Predpokladajme, že chceme tento systém riadiť tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu r.

Aplikujme nelineárne riadenie, konkrétne metódu vstupno výstupnej spätnoväzobnej linearizácie. Túto metódu vysvetlíme rovno počas návrhu.

Najprv derivujeme vzťah pre výstup systému y, tak ako v rovn. (2). Toto je prvým krokom metódy.

$$\begin{aligned} & y = x_2 \\ \implies & \dot{y} = \dot{x_2} = 2x_1 + sin(x_1) \\ \implies & \ddot{y} = \ddot{x_2} \\ & \quad = 2 + cos(x_1)\dot{x_1} \\ & \quad = 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Teraz si všimnime, že ak zvolíme vstup do systému, tak ako je rovn. (3), po dosadení dostaneme rovn. (4). Voľba takéhoto zákona, nazvyme ho zákonom linearizácie, pre vstup u do systému, je druhým krokom metódy.

$$u = -\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \\ &= 2 + \cos(x_1)(-\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} + \sin(x_1)x_2) \\ &= 2 + \cos(x_1)(\frac{v}{2 + \cos x_1}) \\ &= v \end{aligned} \tag{4}$$

Nakoniec ak zvolíme v podľa rovn. (5), tak pre dostávame rovnicu pre dynamiku odchýlky rovn. (6). Ak zvolíme koeficienty k všetky kladné, dynamika odchýlky bude vždy stabilná a bude konvergovať k 0. Voľba tohto zákona, pre v, povedzme zákona riadenia linearizovaného systému, je posledným krokom tejto metódy.

$$\begin{aligned} v &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ &= -k_1\dot{y} + k_2 e \text{ keďže } r \text{ je konšt., tak jeho derivácie sú 0} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} v &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ \Longrightarrow \ddot{y} &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ \Longrightarrow 0 &= \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e \end{aligned} \tag{6}$$

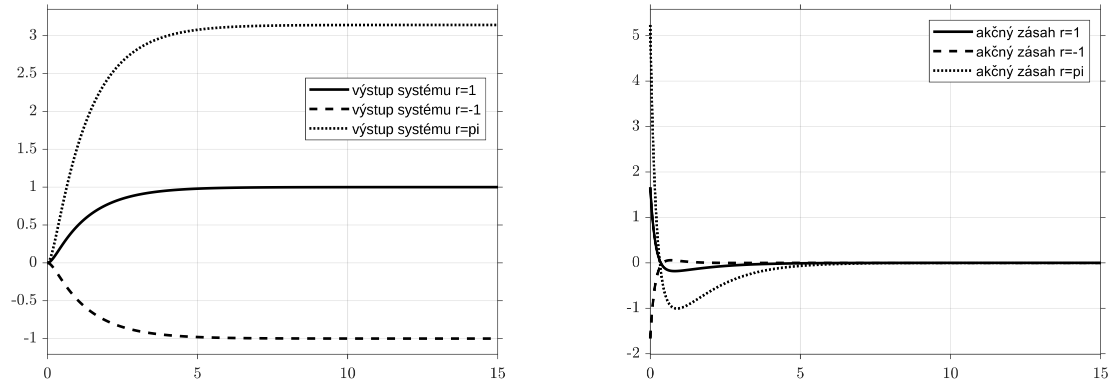
Máme tak navrhnutý regulátor a výsledok zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 2.

Pre porovnanie skúsme navrhnúť ešte regulátor pre tento systém, ktorý linearizujeme v rovnovažnom bode $x_1 = x_2 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (7).

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x_1} &= \Delta u \\ \Delta\dot{x_2} &= 3\Delta x_1 \\ \Delta y &= \Delta x_2 \end{aligned} \tag{7}$$

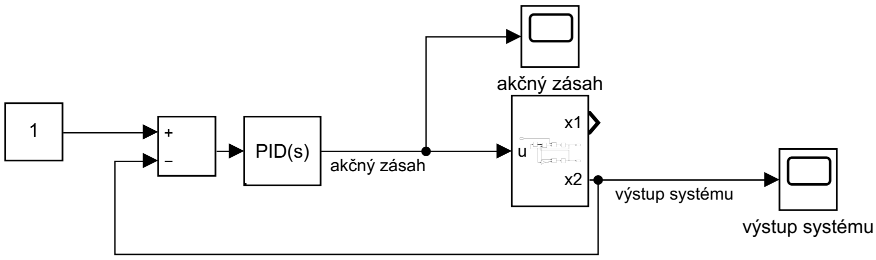
Vyjadrime si prenosovú funkciu systému, pre jednoduchší návrh parametrov regulátora. Vyjadrenie prebieha v rovn. (8). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned} \Delta y = \Delta x_2 &= \frac{1}{s}3\Delta x_1 = \frac{1}{s^2}3\Delta u \\ \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{3}{s^2} \end{aligned} \tag{8}$$



Obr. 2: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätnoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej rovn. (1)

Zapojme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 3. Ktorý mý prenos rovn. (9), kde P, D, I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie ešte prenosy systému roznásobme, dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (10).



Obr. 3: Zapojenie PID regulátora

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s} \tag{9}$$

$$G_{ORO} = 3\frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3} \tag{10}$$

Následne vyjadrime prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa známeho pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (11). Dostaneme tak prenos rovn. (12).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
G_{URO} &= \frac{3\frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}}{1+3\frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}} \\
&= \frac{3(Ps+Ds^2+I)}{s^3+3Ps+3Ds^2+3I}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Využime teraz metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -5, p_2 = -4, p_3 = -3$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladieme dôraz.

Polynóm ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynmov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly, teda roznásobením rovn. (13).

$$
\begin{aligned}
P(s) &= (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) \\
&= (s+1)(s+0.5)(s+0.5) \\
&= s^3+2s^2+1.25s+0.25
\end{aligned} \tag{13}
$$

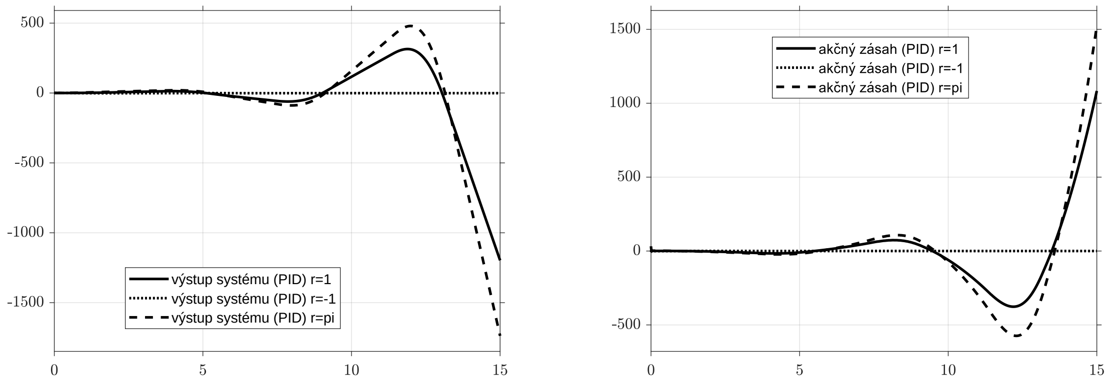
Tento želaný polynóm porovnáme s CHPOLY URO, teda rovn. (14), dostaneme tak rovnice rovn. (15) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

$$
s^3+2s^2+1.25s+0.25 = s^3+3Ps+3Ds^2+3I \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
3P &= 2.00 & & P &= \tfrac{2.00}{3} \\
3D &= 1.25 & \Longrightarrow\quad & D &= \tfrac{1.25}{3} \\
3I &= 0.25 & & I &= \tfrac{0.25}{3}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Skúsme tento regulátor aplikovať na nelineárny systém, ktorý chceme riadiť. Výsledok zo simulácie je na obr. 4.

Z tohto môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné.



Obr. 4: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement