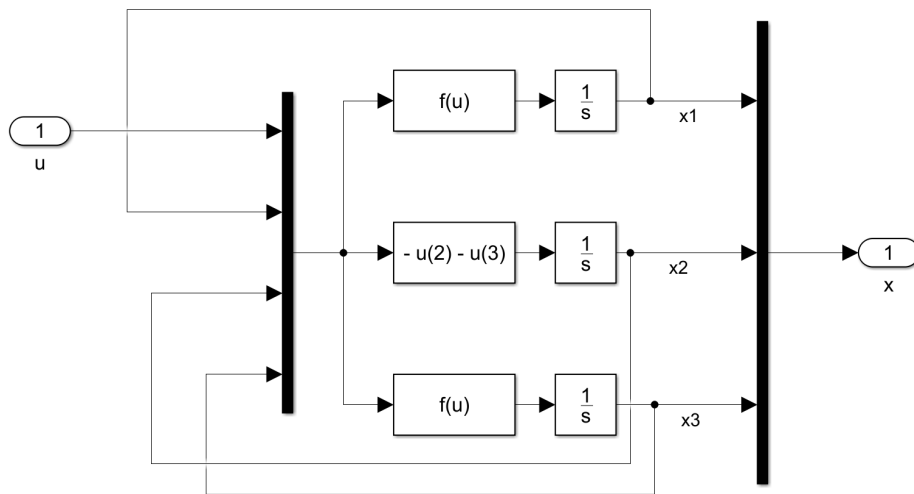


0.1 Príklad druhý

0.1.1 Opis systému

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (1). Bloková schéma systému je na obr. 1.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) - u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1}$$



Obr. 1: Bloková schéma systému z rovn. (1)

0.1.2 Rovnovážne stavy

Tento systém má stavy x_1 , x_2 a x_3 . Stav x_1 je zároveň výstupom systému. Bod $[0 \ 0 \ 0]$ je rovnovážny stav systému. V tomto bode sú časové derivácie všetkých stavových premenných rovné nule.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 1 + \sin(0) = 0 \\ \dot{x}_2|_{x_1=x_2=x_3=0} &= -0 - 0 = 0 \\ \dot{x}_3|_{x_1=x_2=x_3=0} &= \cos(0)\sin(0) - 0\cos(0) - 0 = 0\end{aligned}\tag{2}$$

0.1.3 Prvý krok - nájdenie transformačných vzťahov

Naším cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup y dosiahol žiadajú hodnotu r . Systém obsahuje nelinearity v dvoch rovniciach, preto je ťažké určiť zákon riadenia len pohľadom na tieto rovnice. Použijeme metódu Vstupno-stavovej linearizácie, pri ktorej navrhujeme linearizačnú slučku, s ktorou sa náš systém bude správať ako lineárny. Pre tento lineárny systém potom navrhujeme regulátor, ktorý zabezpečí, že sa výstup systému ustáli na žiadanej hodnote.

Prvým krokom metódy je určenie transformačných vzťahov rovn. (3).

$$\begin{aligned} z_1 &= -x_2 \\ z_2 &= x_1 + x_2 \\ z_3 &= \sin(x_2) - x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

0.1.4 Druhý krok - transformácia systému

Druhým krokom je transformácia nášho systému zo stavov x_1 , x_2 a x_3 na stavy z_1 , z_2 a z_3 . To dosiahneme derivovaním transformačných vzťahov (v čase) a dosadením vzťahov z pôvodných rovníc.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\dot{x}_2 \\ &= x_1 + x_2 \\ &= z_2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) - x_1 - x_2 \\ &= z_3 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \cos(x_2)\dot{x}_2 - \dot{x}_3 \\ &= \cos(x_2)(-x_1 - x_2) - \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) + u \\ &= u - \cos(z_1)(z_2 + z_3) \end{aligned} \tag{6}$$

Transformovaný systém potom opisujú rovn. (7).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= u - \cos(z_1)(z_2 + z_3) \end{aligned} \tag{7}$$

Na základe rovn. (7) dokážeme zvoliť taký zákon riadenia, ktorý vykompenzuje nelinearity pôvodného systému, rovn. (8). Prvý člen tejto rovnice zabezpečí linearizáciu systému, tvorí linearizačnú slučku. Druhý člen v zabezpečí stabilitu dynamiky systému, rovn. (10). Posledný člen r predstavuje našu žiadanú hodnotu. Keďže náš linearizovaný systém nemusí mať jednotkové zosilnenie, musíme túto hodnotu predeliť statickým zosilnením linearizovaného systému K . Druhou možnosťou je zvoliť také konštanty k_1 , k_2 a k_3 aby zosilnenie bolo rovné jednej.

$$u(z, v, r) = \cos(z_1)(z_2 + z_3) + v + r/K \tag{8}$$

$$u(x, v, r) = \cos(x_2)(x_1 + x_2 + \sin(x_2) - x_3) + v + r/K \tag{9}$$

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 \quad (10)$$

Dosadením zákona riadenia do nášho transformovaného systému dosiahneme lineárny systém, rovn. (11).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 + \frac{r}{K} \end{aligned} \quad (11)$$

0.1.5 Tretí krok - návrh parametrov lineárneho regulátora

Tento systém môžeme zapísať v kanonickej forme riaditeľnosti pomocou matice A a vektorov b, c a d .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix} \quad d = 0$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prenosová funkcia systému $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1}{K} \frac{1}{s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1} \quad (12)$$

Zosilnenie systému získame ak limitujeme s k nule. Potom dostaneme rovn. (13), z ktorého si vyjadríme konštantu K , rovn. (14).

$$\frac{1}{K} \frac{1}{k_1} = 1 \quad (13)$$

$$K = \frac{1}{k_1} \quad (14)$$

Konštanty k_1, k_2 a k_3 majú zabezpečiť stabilitu dynamiky systému. Môže ich určiť na základe vlastných čísel matice A . Aby bol systém stabilný, musí matica A mať záporne definitné vlastné čísla.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_1 & k_2 & \lambda + k_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + k_3 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0 \quad (15)$$

Nech všetky tri λ majú hodnotu -1, dostaneme tak žiadaný polynóm pre vlastné čísla, rovn. (16).

$$(\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \quad (16)$$

Porovnaním rovn. (15) a rovn. (16) získame vzťahy, z ktorých určíme koeficienty, rovn. (17).

$$\begin{aligned}k_1 &= 1 \\k_2 &= 3 \\k_3 &= 3\end{aligned}\tag{17}$$

Z toho určíme zosilnenie K , rovn. (18).

$$K = 1\tag{18}$$

0.1.6 Návrh PID regulátora pre linearizáciu systému

Rozvojom do Taylorovho radu dostaneme z pôvodných rovn. (1) nové rovn. (19). Pracovný bod nech je [0 0 0]. Po linearizácii dokážeme odvodiť prenosovú funkciu rovn. (20) a navrhnuť PID regulátor pomocou PPM.

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}_1 &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\ \dot{\Delta x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_3 &= \Delta x_1 - \Delta x_3 - \Delta u\end{aligned}\tag{19}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+s+2}\tag{20}$$

$$R(s) = \frac{I + Ps +Ds^2}{s}\tag{21}$$

$$G_{URO}(s) = \frac{(s+1)(I + Ps +Ds^2)}{Ds^3 + (P+D)s^2 + (I+P)s + I}\tag{22}$$

Nech požadované póly uzavretého regulačného obvodu sú -1, -0.5 a -0.5. Porovnaním žiadaného polynómu (rovn. (23)) a polynómu uzavretého regulačného obvodu (rovn. (24)) dostaneme vzťahy na výpočet parametrov PID regulátora rovn. (25).

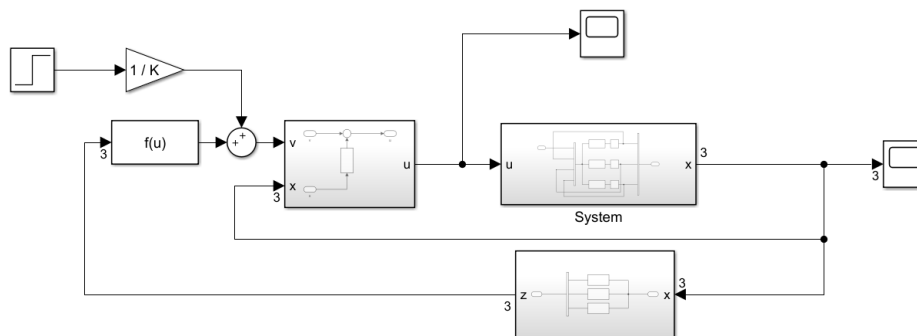
$$s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 = 0\tag{23}$$

$$Ds^3 + (P+D)s^2 + (I+P)s + I = 0\tag{24}$$

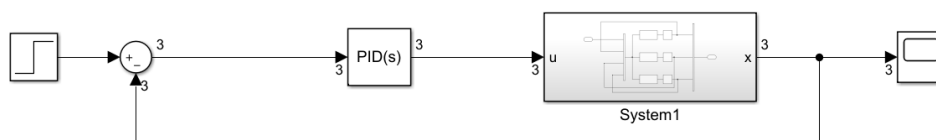
$$\begin{aligned}P &= 1 \\ I &= 0.25 \\ D &= 1\end{aligned}\tag{25}$$

0.1.7 Simulačné overenie návrhu

Navrhnuté riadenia môžeme porovnať pomocou simulácie v prostredí Matlab-simulink. Simulačná schéma s nelineárnym riadením je na obr. 2 a s PID regulátorom je na obr. 3. Pri nelineárnom riadení urobíme skok žiadanej hodnoty na 10. Pri PID regulátore urobíme dva skoky, na hodnotu 0.1 a 1, aby sme zostali čo najbližšie pri pracovnom bode.



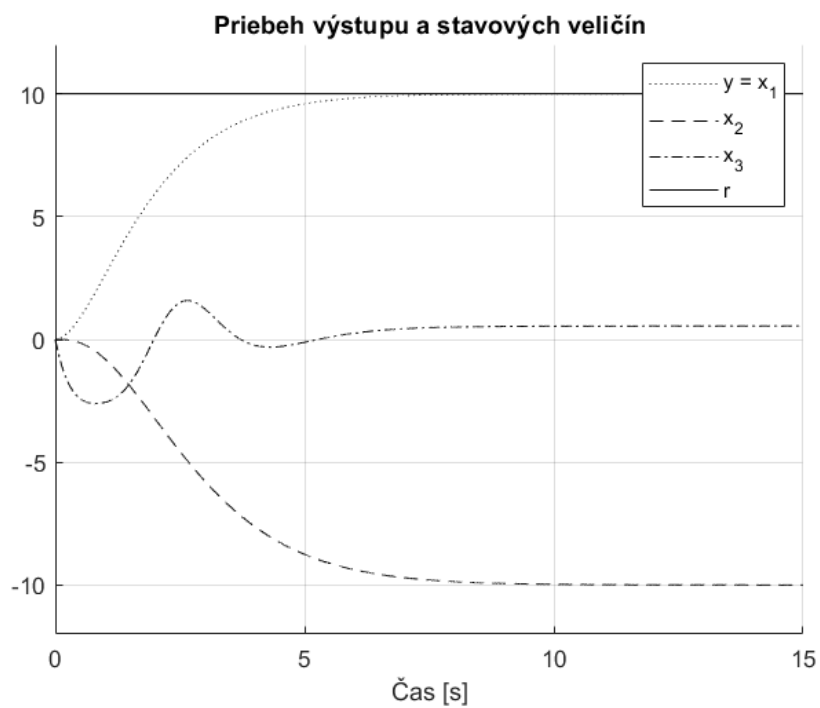
Obr. 2: Bloková schéma systému s nelineárnym riadením



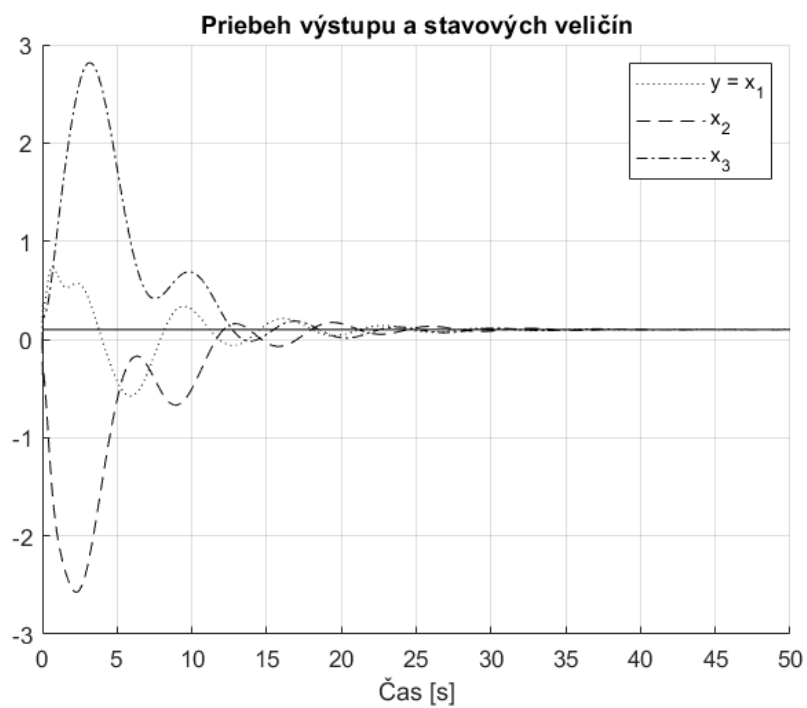
Obr. 3: Bloková schéma systému s PID regulátorom

Na obr. 5 môžeme vidieť, že takto navrhnutý PID regulátor dokáže pri malom skoku uradiť náš systém. Pri väčšom skoku (obr. 6) sa náš uzavretý systém stal nestabilným. Je to spôsobené tým, že pri väčšej vzdialenosti od pracovného bodu sa chyba spôsobená linearizáciou zväčšuje a systému má iné vlastnosti ako systém, pre ktorý sme daný regulátor navrhovali.

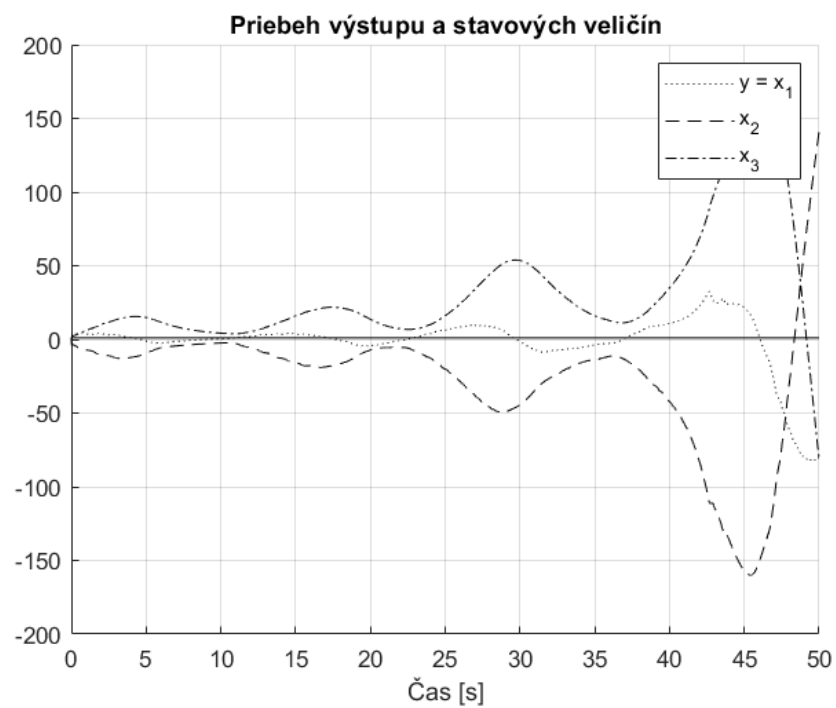
Na obr. 4 a obr. 7 je vidieť, že nelineárny regulátor dokázal uradiť náš systém bez problémov aj na hodnotu 10.



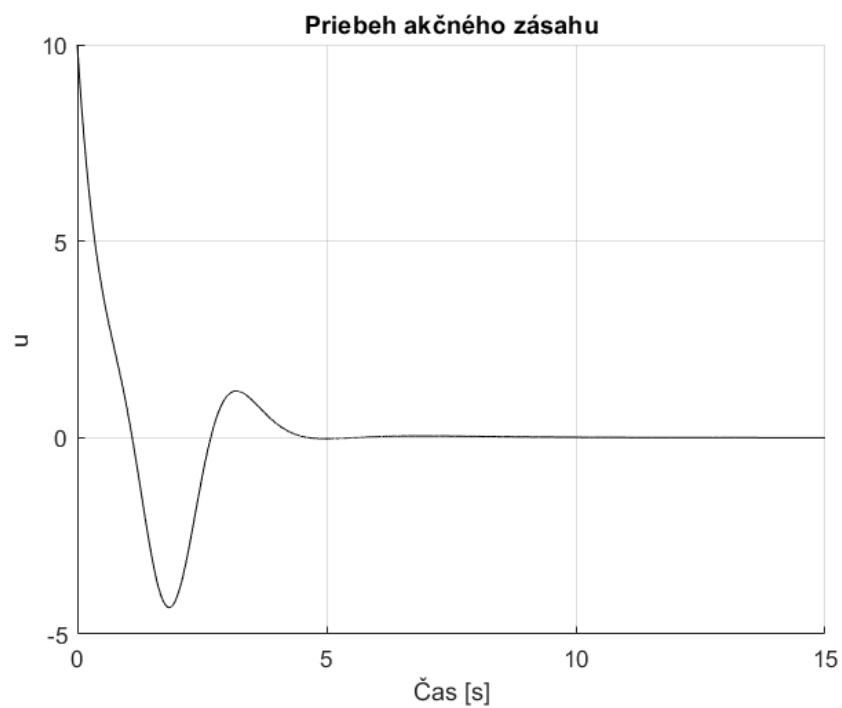
Obr. 4: *Priebeh výstupu a stavových veličín s nelineárnym riadením*



Obr. 5: *Priebeh výstupu a stavových veličín s PID (skok na 0.1)*



Obr. 6: *Pribeh výstupu a stavových veličín s PID (skok na 1)*



Obr. 7: *Pribeh akčného zásahu s nelineárnym riadením*