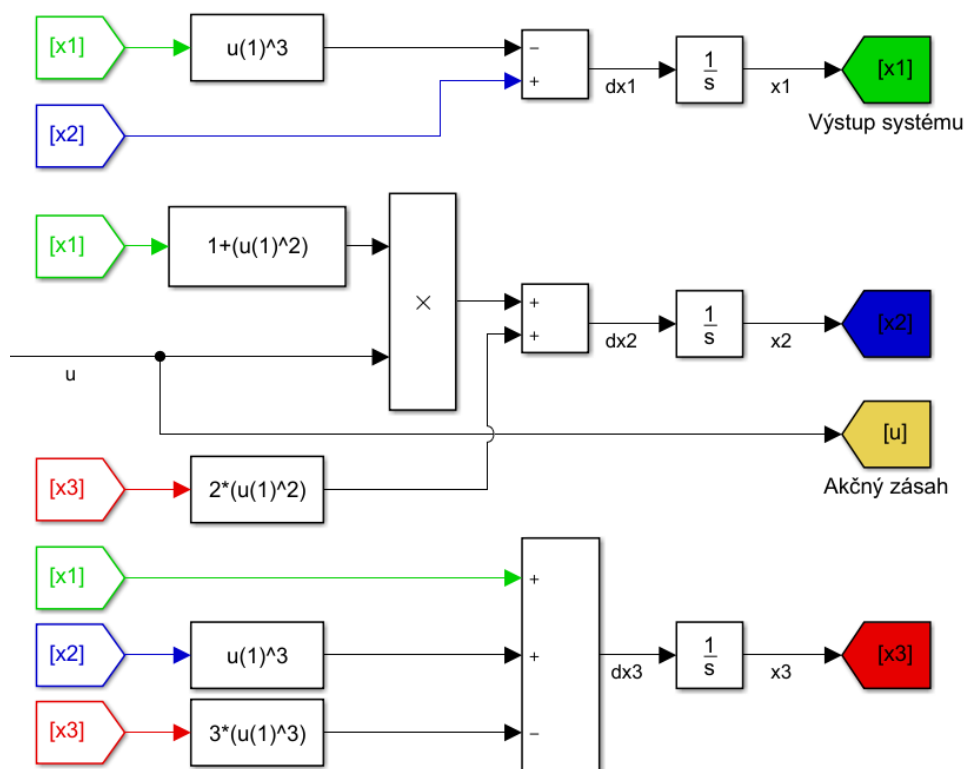


## Príklad 2

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (1). Bloková schéma systému je na obr. 1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2^3 - 3x_3^3 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 1: Bloková schéma systému z rovn. (1)

## Návrh riadenia - príklad 2

Teraz overíme, že bod  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , je rovnovážný bodom systému. Systém sa nachádza v rovnováhe, keď časové derivácie všetkých stavových premenných sú nulové.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 - 0 = 0 \\ \dot{x}_2|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 = 0 \\ \dot{x}_3|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 0 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ako vidíme v bode  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  sú derivácie stavových premenných v čase nulové,

teda bod  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  je rovnovážny bod systému.

Naším cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu  $r$ .

Aplikujeme nelineárne riadenie, opäť metódu vstupno výstupnej spätnoväzobnej linearizácie použitú aj v predchádzajúcom príklade.

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade je prvým krokom derivovanie vzťahu pre výstup systému  $y$ . Tento vzťah je potrebné derivovať pokiaľ sa v ňom neobjaví vstupný signál  $u$ .

$$\begin{aligned}
 y &= x_1 \\
 \implies \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\
 \implies \ddot{y} &= \dot{x}_2 - 3x_1^2\dot{x}_1 \\
 \implies \ddot{y} &= 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 \\
 &= 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2 + 1)u
 \end{aligned} \tag{3}$$

Pre zjednodušenie do budúcnosti upravme výslednú rovn. (3) nasledovne:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} &= f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2 + 1)u \\
 f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5
 \end{aligned} \tag{4}$$

Ak zvolíme vstup do systému, tak ako je v rovn. (5), po dosadení dostaneme rovn. (6). Voľba takéhoto zákona je nazývaná zákonom linearizácie, pre vstup  $u$  do systému.

$$u = \frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + 1} \tag{5}$$

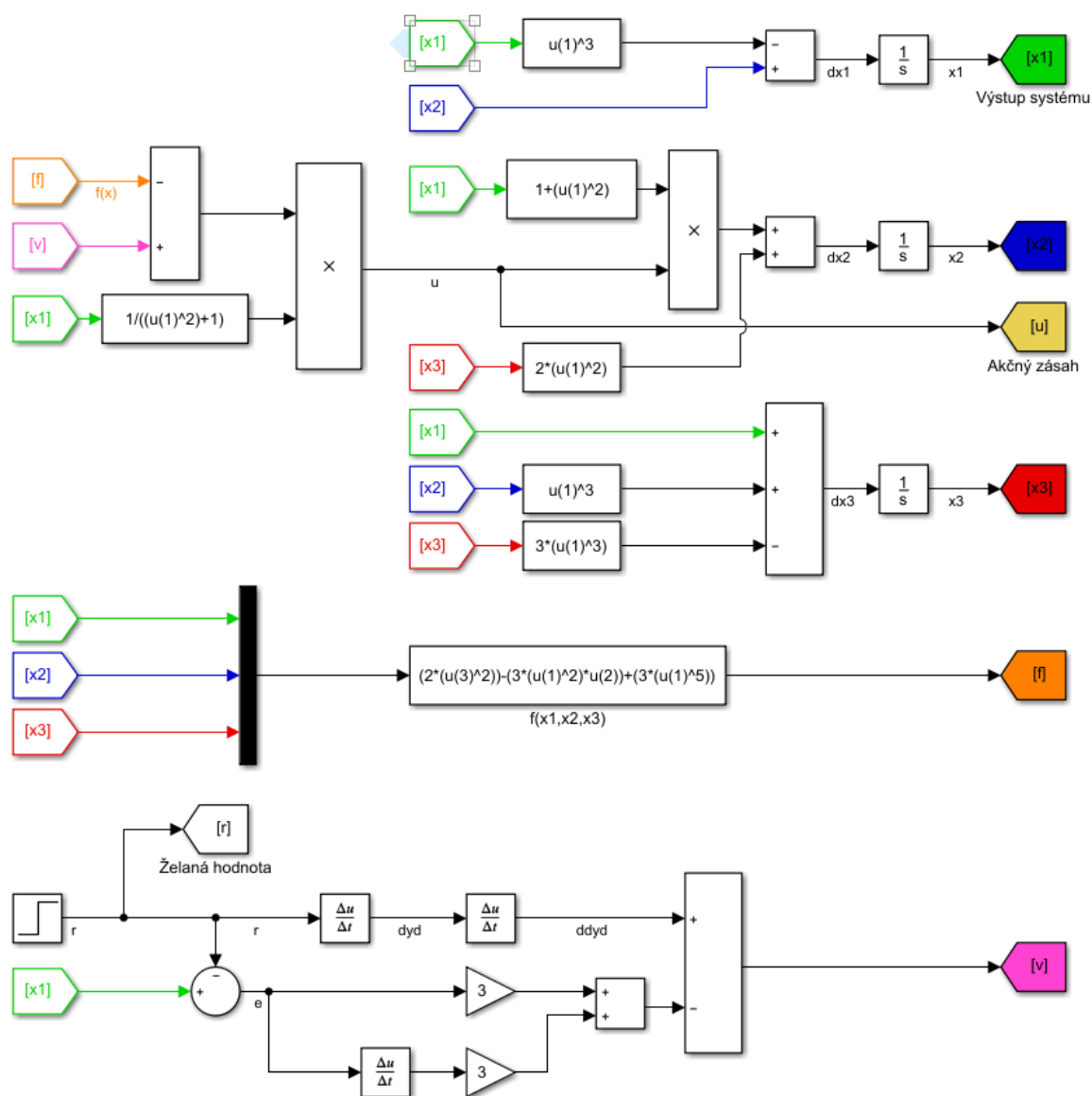
$$\begin{aligned}
 \ddot{y} &= 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2 + 1)\frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + 1} \\
 \ddot{y} &= v
 \end{aligned} \tag{6}$$

Posledný krok. Ak si zvolíme  $v$  podľa rovn. (7), tak dostávame rovnicu pre dynamiku odchýlky rovn. (8). Ak zvolíme koeficienty  $k$  všetky kladné, dynamika odchýlky bude vždy stabilná a bude konvergovať k 0. Voľba tohto zákona, pre  $v$ , povedzme zákona riadenia linearizovaného systému. Pozn.  $e = (r - y)$

$$v = \ddot{r} - k_1(\dot{y} - \dot{r}) - k_2(y - r) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 v &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2e \\
 \implies \ddot{y} &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2e \\
 \implies 0 &= \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2e
 \end{aligned} \tag{8}$$

Máme navrhnutý lineárny regulátor. Kompletný systém vidíme na obr. 2. Výsledky zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 4.



Obr. 2: Kompletná schéma riadného systému pomocou nelineárneho riadenia.

## Návrh PID - príklad 2

Pre porovnanie skúsme navrhnuť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovážnom bode  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (9).

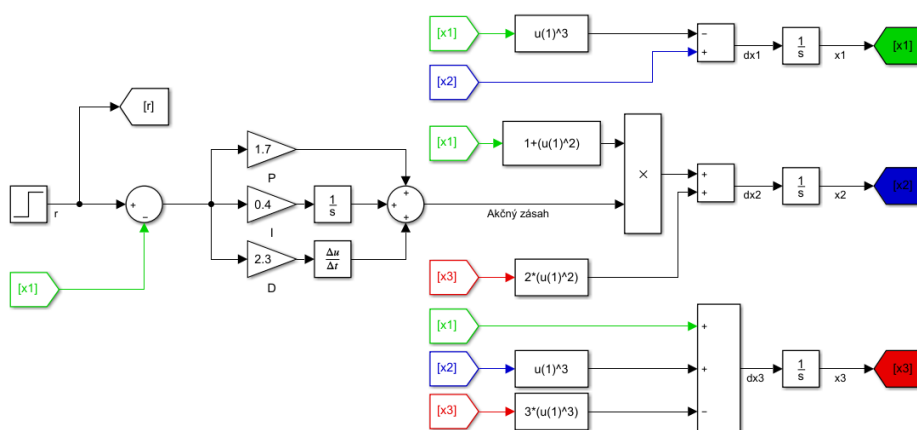
$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\
 \Delta \dot{x}_2 &= \Delta u \\
 \Delta \dot{x}_3 &= \Delta x_1 \\
 \Delta y &= \Delta x_1
 \end{aligned} \tag{9}$$

Pre jednoduchší návrh parametrov regulátora si vyjadríme prenosovú funkciu systému. Vyjadrenie je ukázané v rovn. (10). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor

a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta x_1 = \frac{1}{s} \Delta x_2 = \frac{1}{s^2} \Delta u \\ \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Zapojíme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 3. Ktorý má prenos rovn. (11), kde  $P, D, I$  sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie, prenasy systému a regulátora roznásobíme a dostaneme tak prenos otvoreného obvodu  $G_{ORO}$  daný rovn. (12).



Obr. 3: Zapojenie PID regulátora

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s} \quad (11)$$

$$G_{ORO} = \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3} \quad (12)$$

Vyjadríme prenos uzavretého regulačného obvodu  $G_{URO}$  podľa pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (13). Dostaneme tak prenos rovn. (14).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{\frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}}{1 + \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}} \\ &= \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3 + Ps + Ds^2 + I} \end{aligned} \quad (14)$$

Využijeme metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny  $p_1 = -1, p_2 = -0.8, p_3 = -0.5$ . Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladíme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa,

ktorých korene sú zvolené póly (rovn. (15)).

$$\begin{aligned} P(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \\ &= (s + 1)(s + 0.8)(s + 0.5) \\ &= s^3 + 2.3s^2 + 1.7s + 0.4 \end{aligned} \quad (15)$$

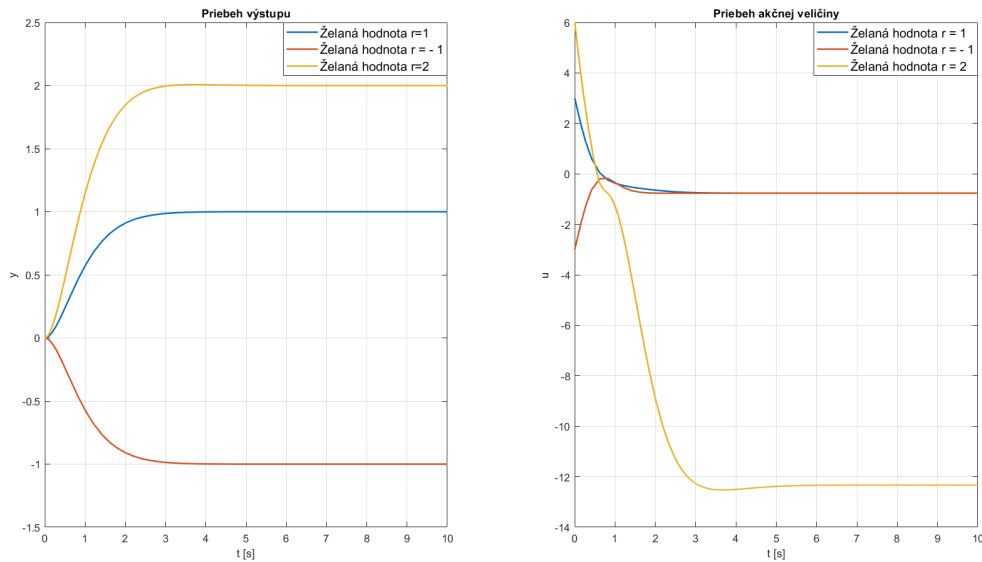
Tento želaný polynóm porovnáme s charakteristickým polynómom URO, teda rovn. (16), dostaneme tak rovnice rovn. (17) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

$$s^3 + 2.3s^2 + 1.7s + 0.4 = s^3 + Ps + Ds^2 + I \quad (16)$$

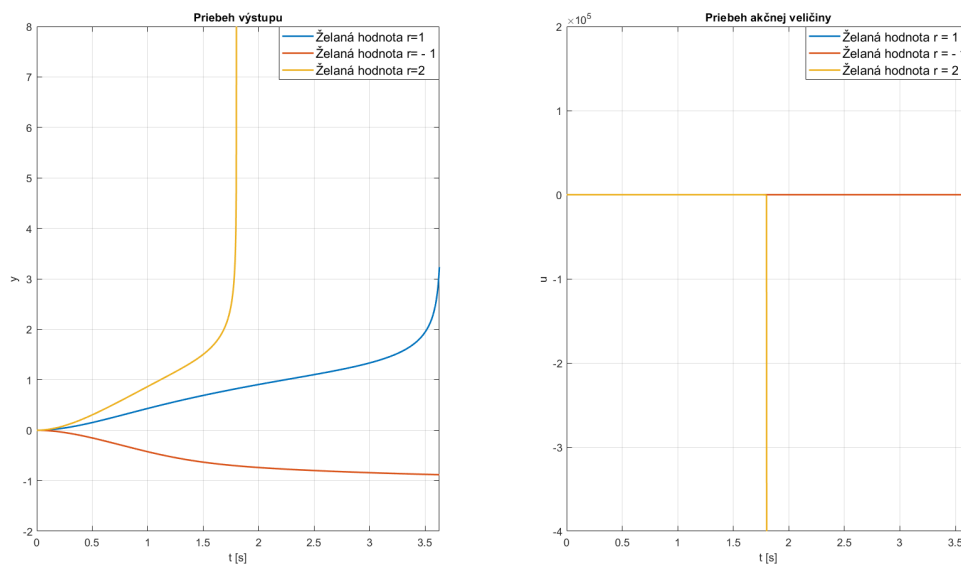
$$\begin{aligned} P &= 1.7 \\ D &= 2.3 \\ I &= 0.4 \end{aligned} \quad (17)$$

Aplikujme PID regulátor na nelineárny systém (obr. 3), ktorý chceme riadiť. Výsledok zo simulácie je na obr. 5.

## Porovnanie riadenia - príklad 2



Obr. 4: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätnoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej.



Obr. 5: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement

## Záver - príklad 2

Z výsledku môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné. Systém regulovaný PID regulátorom nebol schopný sa stabilizovať v takom okolí pracovného bodu ako to dokázal systém s regulátorom navrhnutým pomocou metódy vstupno-výstupnej spätnoväzbovej linearizácie.