SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

RIADENIE NELINEÁRNYCH SPOJITÝCH SYSTÉMOV

TÍMOVÝ PROJEKT

Študijný program:	Robotika a kybernetika
Študijný odbor:	Kybernetika
Školiace pracovisko:	Ústav robotiky a kybernetiky
Vedúci projektu:	Prof. Ing. Ján Murgaš, PhD.

Bratislava 2020

Bc. Eva Štalmachová
Bc. Marek Trebuľa
Bc. Denis Vasko
Bc. Ján Urdianyk

STU FEI
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY
ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

TÍMOVÝ PROJEKT

ZADANIE

Študijný program:	**Robotika a kybernetika**
Študijný odbor:	**Kybernetika**
Vedúci projektu:	***Prof.Ing. Ján Murgaš, PhD.***
Miesto vypracovania projektu:	**Ústav robotiky a kybernetiky**
Riešitelia:	

Názov projektu: ***Riadenie nelineárnych spojitých systémov***

Špecifikácia zadania:
Cieľom projektu je navrhnúť a overiť metódy nelineárneho riadenia vybraných nelineárnych systémov za účelom pedagogického využitia.

Úlohy:

1.Pre zadané metódy nelineárneho riadenia spojitých systémov vypracujte príklady využitia v rozsahu:

- Návrh riadenia
- Simulačné overenie
- Pedagogické spracovanie

2. Vypracujte a predneste prezentáciu.
3. Vypracujte posudok na projekt druhého tímu
4. Pri riešení postupujte podľa zásad tímového projektu.

Termín odovzdania projektu: ***15.5.2020***

Obsah

Zoznam použitých skratiek

1 Úvod

V tímovom projekte sa venujeme definovaniu neikoľkých modelov systémov v stavovom opise, vhodných na demonštráciu návrhu nelineárneho riadenia pomocou metód vstupno-stavovej a vstupno-výstupnej linearizácie. Navrhnuté nelineárne riadenie porovnávame s lineárnym PID regulátorom a uvádzame aj základné matematické princípy, využívané pri návrhu pomocou uvedených metód.

V časti 2 sa venujeme niektorým matematickým princípom, ktorých znalosť je nevyhnutná pre pochopenie metód, ale aj ďalšieho textu, v celom rozsahu. Konkrétne táto časť zahrňa opakovanie k nasledujúcim témam: stavový opis systému, rovnovažné stavy a linearizácia.

Časť 3 sa zaoberá návrhom nelineárneho riadenia pomocou metódy vstupno-stavovej linearizácie. Sú tu prezentované dva príklady, ku každému je vypracovaný návrh riadenia danou metódou a riadenie systému PID navrhnuté pre linearizáciu v rovnovažnom stave.

Návrhu pomocou metódy vstupno-výstupnej linearizácie sa venujeme v časti 4. Podobne ako v predchádzajúcej časti, aj tu sa venujeme okrem návrhu pomcou hlavnej metódy aj návrhu PID regulátora pre linearizovaný systém.

V časti **??** opisujeme program, písaný v matlabe, vhodný na kvalitatívne porovnanie navrhnutých riadení na jednoduchom prípade riadenia polohy matematického kyvadla. V programe sú implementované nelineárne formy raidenia a aj PID navrhnuté pre linearizáciu kyvadla v stabilon aj nestabilnom rovnovažnom stave.

Opisu spôsobu, akým by sa mohol, v tomto dokumente, prezentovaný materiál integrovať do predmetu Riadenie Nelineárnych Systémov, sa venujeme v časti 5.

2 Matematické základy

Stavový opis

Stavový opis je jedna z foriem opisu dynamického lineárneho systému. Základom je definovanie vnútorných stavov systému, ako sa tieto stavy menia v čase a ako vyzerá výstup zo systému.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

Pre SISO systémy je C vektor (riadkový) a D skalár. Pre MIMO systémy je C matica a D je vektor (stĺpcový). Majme systém opísaný rovnicami 2.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= x_3 \\ \dot{x_3} &= -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 6u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Tento systém môžeme napísať aj v maticovom tvare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Laplaceovou transformáciou získame rovnice 3.

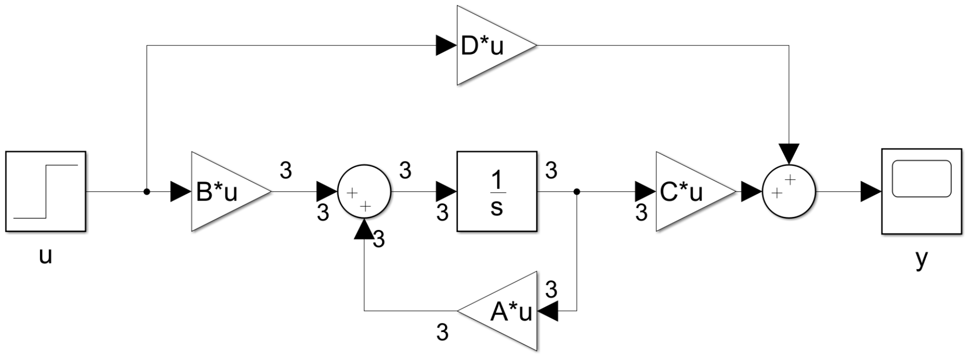
$$Ys^3 = -Y + 8Ys + 3Ys^2 - 6U \tag{3}$$

$$Y(s^3 - 3s^2 - 8s + 1) = -6U \tag{4}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-6}{s^3 - 3s^2 - 8s + 1} = G(s) \tag{5}$$

kde rovnica 5 predstavuje prenosovú funkciu nášho systému.

Simulačná schéma je na obr. 1. V bloku integrátor je možné nastaviť počiatočné hodnoty stavov (počiatočné podmienky). Pri tejto schéme je dôležité uvedomiť si dimenzie (rozmer, či je to matica, vektor alebo skalár) jednotlivých signálov.



Obr. 1: *Simulačná schéma systému definovaná pomocou stavového opisu*

Rovnvoažné stavy

Rovnovážny stav $\dot{x_r}$ systému je definovaný ako stav, kedy sa stavové premenné nelineárneho systému nemenia v čase.

V rovnovažnom stave platí pre vstup u, že je v každom čase nulový, $u(t) = 0$. Pre stavove premenné platí $\dot{x}|_{x=x_r} = 0$.

Uvažujme príklad 2 a nájdime jeho rovnovážne stavy. Ako prvé položíme všetky derivácie (označené bodkami nad premennými v stavovom opise) rovné 0 ($\dot{x_1} = 0, \dot{x_2} = 0, \dot{x_3} = 0$). Dostaneme tak sústavu 6.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= x_3 \\ 0 &= -x_1 + 8x_2 + 3x_3 \end{aligned} \tag{6}$$

hodnoty x_2 a x_3 vieme priamo vyčítať z rovnice vyššie, majú byť $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$. Hodnotu x_1 musíme vypočítať. Našťastie, pre tento jednoduchí prípad, stačí dosadiť $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$ do tretej rovnice sústavy 6 a dostaneme $x_1 = 0$.

Bod $[x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}] = [0, 0, 0]$ je riešením sústavy rovníc 6, preto je rovnovažným stavom systému rovníc 2.

Uvažujme teraz systém opisaný rovnicami 7 a nájdime jeho rovnovážne stavy.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{g}{L}sin(x_1) \end{aligned} \tag{7}$$

Položíme derivácie rovné nule, z čoho dostaneme sútavu 8.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{g}{L}sin(x_1) \implies sin(x_1) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Riešení sútavy 8 je niekoľko. Rovnovážnym bodom je nielen bod $[x_{r1}, x_{r2}] = [0, 0]$, ale všetky body $[x_{r1}, x_{r2}] = [k * \pi, 0], k \in Z$, kde $k \in Z$ znamená, že k je z množiny Z, kde Z je množina celých čísel, teda, že k je celé číslo.

Linearizácia

Linearizácia je proces, pri ktorom z nelineárneho systému spravíme lineárny. Tento lineárny systém opisuje pôvodný systém "presne"len v okolí pracovného bodu. Veľkosť tohto okolia záleží od priebehu funkcií. Používa sa pri tom rozvoj do Taylorovho radu (rovnica 1), kedy použijeme len prvý člen.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{inf} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{9}$$

kde $f^{(n)}$ je n-tá derivácia funkcie f v bode a, v prípade funkcie viacerých premenných je to gradient. Funkcia f musí byť diferencovateľná.

Pri linearizácií pôvodná nelineárna funkcia nahradí prvý člen Taylorovho radu (ostatné členy členy niesú linearárne, pretože majú faktor $(x-a)^n$ s $n > 1$), ktorý je daný 10.

$$f(x) \approx \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(x-x_0)^1 = \frac{\partial f}{\partial x}|_a(x-x_0) = \nabla f|_a \Delta x \tag{10}$$

Majme systém opísaný rovnicami 11.

$$x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta u \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 + x_2 - x_3 + sin(x_2) \\ \dot{x_2} &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x_3} &= cos(x_2)(sin(x_2) - x_3) - u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Keďže sa v sústave 11 vyskytujú aj nelineárne členy (všetko čo nieje konštanta po derivácii je nelineárne, napríklad: sínus, kosínus a ich súčin), tento systém je nelineárny.

Pri linearizácií tohto systému musíme počítať gradient každej rovnice podľa stavového vektora a vstupov, ďalej len vektora parametrov funkcií x. Nech bod P [0 0 0 0] je pracovným bodom, v ktorom budeme systém linearizovať.

$$\begin{aligned} \nabla\dot{x_1} &= [\frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_3}, \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial u}] = [1, 1 + cos(x_2), -1, 0] \\ \nabla\dot{x_2} &= [\frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_2}, \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_3}, \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial u}] = [-1, -1, 0, 0] \\ \nabla\dot{x_3} &= [\frac{\partial\dot{x_3}}{\partial x_1}, \frac{\partial\dot{x_3}}{\partial x_2}, \frac{\partial\dot{x_3}}{\partial x_3}, \frac{\partial\dot{x_3}}{\partial u}] = [0, -sin^2(x_2) + cos^2(x_2), -cos(x_2), -1] \\ y &= [\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \frac{\partial y}{\partial u}] = [1, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{12}$$

Gradient v pracovnom bode dostaneme dosadením hodnôt pracovného bodu.

$$\begin{aligned} \nabla\dot{x_1}|_P &= [1, 1 + cos(0), -1, 0] = [1, 2, -1, 0] \\ \nabla\dot{x_2}|_P &= [-1, -1, 0, 0] \\ \nabla\dot{x_3}|_P &= [0, -sin^2(0) + cos^2(0), -cos(0), -1] = [0, 1, -1, -1] \\ \nabla y|_P &= [1, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{13}$$

Ak vynásobíme gradienty v pracovnom bode vektorom x, dostaneme linearizovanú sústavu diferenciálnych rovníc, ktoré opisujú správanie sa systému v okolí pracovného bodu P, rovnice 14.

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x_1} &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\
\Delta \dot{x_2} &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\
\Delta \dot{x_3} &= \Delta x_2 - \Delta x_3 - \Delta u \\
\Delta y &= \Delta x_1
\end{aligned} \tag{14}$$

Riešenie preurčenej sústavy rovníc

Preurčená sústava rovníc, obsahuje viac rovníc ako neznámych premenných. Pri riešení preurčene sústavy rovníc použijeme metódu najmenších štvorcov. Pomocou metódy najmenších štvorcov sa budeme snažiť aproximovať riešenie x preurčenej sústavy rovníc 15.

$$Ax \approx b \tag{15}$$

Uvažujeme nasledovnú preurčenú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}
x + y &= 5 \\
2x + 4y + 10 &= 8 \\
x + 5y &= 15 \\
-2x + 4y + 10 &= 8
\end{aligned} \tag{16}$$

Preurčenú sústavu rovníc 16 môžeme maticovo zapísať v tvare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 15 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Na výpočet neznámych premenných x,y použijeme metódu najmenších štvorcov:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= (A^T A)^{-1} A^T b \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.4265 \\ 0.9559 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

Parciálne derivácie

Majme funkciu f o viacerých premenných $f(x, y, z, ...)$. Parciálna derivácia funkcie f, je derivácia funkcie f vzhľadom na 1 premennú, pričom o ostatných premenných uvažujeme ako o konštantách.

Parciálnu deriváciu budeme označovať $\frac{\partial f(x,y,z,...}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial z} \ldots$.

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie 19.

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{19}$$

pričom najskôr vypočítame parciálnu deriváciu podľa premennej x. Aplikujeme pravidlo o derivácií podielu dvoch funkcií h, g: $(\frac{h}{g})' = \frac{h'g - g'h}{g^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{1(x^2 + y^2) - 2xx}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \tag{20}$$

Parciálna derivácia podľa premennej y má nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} &= x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= x(x^2 + y^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \tag{21}$$

Ako druhú ukážku, parciálne derivácie funkcie danej ronvicou 22.

$$f(x, y) = sin(xy) + \frac{1}{2}cos(y) \tag{22}$$

pričom najskôr vypočítame parciálnu deriváciu podľa premennej x.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(sin(xy) + \frac{1}{2}cos(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}sin(xy) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}cos(y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}sin(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &= cos(xy)y \end{aligned} \tag{23}$$

Parciálnu deriváciu podľa podľa premennej y vieme vypočítať nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(sin(xy) + \frac{1}{2}cos(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}sin(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}cos(y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}sin(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{1}{2}sin(y)) \\ &= cos(xy)x - \frac{1}{2}sin(y) \end{aligned} \tag{24}$$

3 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-stavová

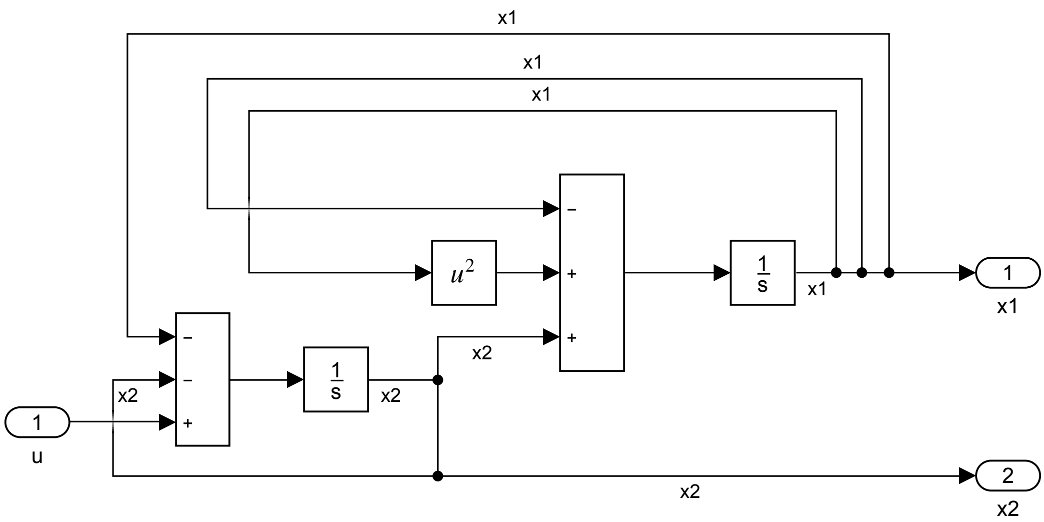
Úvodný príklad

Uvažujme nelineárny systém, opísaný stavovými rovnicami 25, ktorého bloková schéma je zobrazená na obrázku 2.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1^2 + x_2 - x_1 \\ \dot{x_2} &= u - x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{25}$$

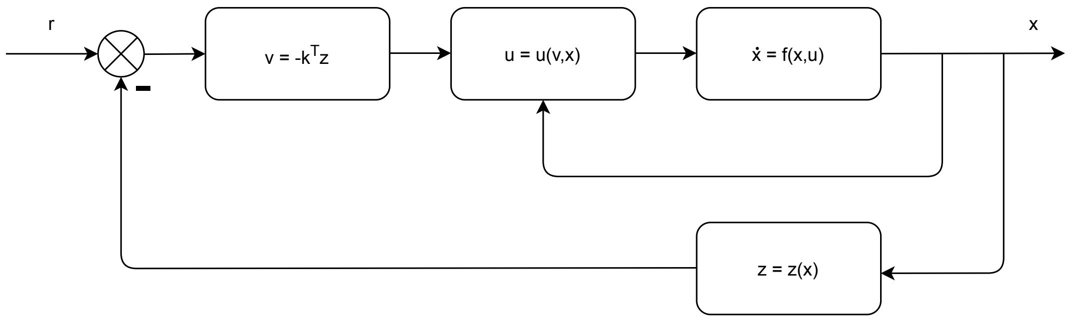
Aby sme mohli navrhnúť nelineárne riadenie najskôr overíme že je bod $x_1 = x_2 = 0$ rovnovážnym bodom. V rovnovážnom stave sú derivácie rovné nule. Z rovníc 26 vyplýva, že bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovážnym bodom.

$$\begin{aligned} \dot{x_1}|_{x_1=x_2=u=0} &= 0 \\ \dot{x_2}|_{x_1=x_2=u=0} &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$



Obr. 2: *Bloková schéma systému 25*

Na riadenie nelineárneho systému (rovnica 25), použijeme metódu vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie (obrázok 3), tak aby sme dosiahli požadovanú hodnotu r.



Obr. 3: *Metóda vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie*

Postup pri metóde vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie je nasledovný.

Najskôr si určíme transformačné vzťahy, tzn. určíme vektor r.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_1^2 + x_2 \end{aligned} \tag{27}$$

Následne transformujeme zadaný nelineárny systém (rovnica 25), pomocou nájdených transformačných vzťahov (rovnica 27).

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= \dot{x_1} = z_2 - z_1 \\ \dot{z_2} &= 2x_1\dot{x_1} + \dot{x_2} \\ &= 2x_1(x_1^2 + x_2 - x_1) + u - x_1 - x_2 \\ &= 2z_1(z_2 - z_1) + u - z_1 - z_2 + z_1^2 \\ &= u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \end{aligned} \tag{28}$$

Aby sme dosiali lineárny transformovaný systéme zavedieme novú premennú v.

$$v = u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \tag{29}$$

Z trasformovanej sústavy získame vzťah pre nelineárne riadenie, akčný zásah u.

$$u = v + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_1 + z_2 \tag{30}$$

Zavedením novej premennej sme získali nový transformovaný lineárny systém.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned} \tag{31}$$

Po získaní lineárneho systému môžeme zaviesť lineárny stavový regulátor (rovnica 32).

$$v = k_1z_1 + k_2z_2 \tag{32}$$

Lineárny systém s regulátorom bude vyzerať nasledovne: rovnica 33.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 &= k_1z_1 + k_2z_2 \end{aligned} \tag{33}$$

Na vypočítanie parametrov regulátora a nastavenie dynamiky systému potrebujeme odvodiť charakteristickú rovnicu systému. Na získanie charakteristickej rovnice potrebujeme získať maticu A.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}_{|z_1=z_2=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

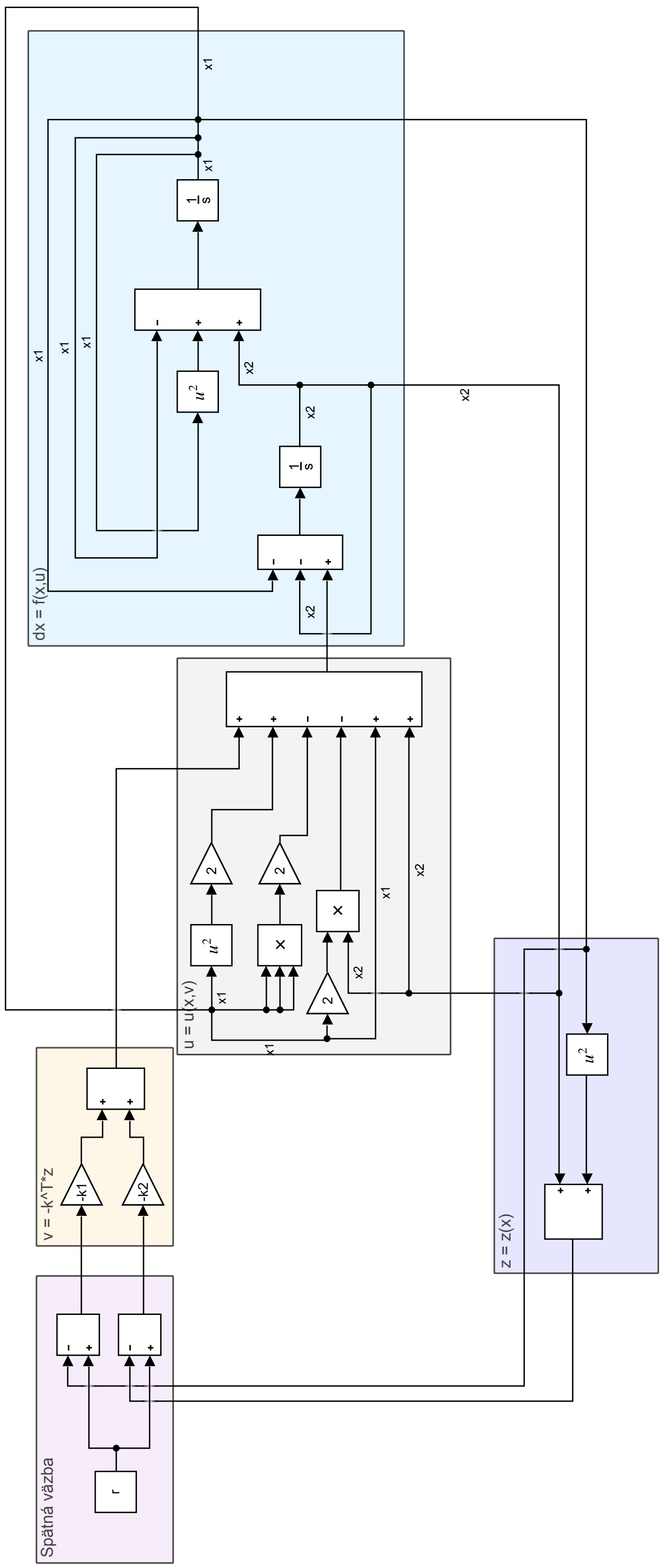
Charakteristickú rovnicu získame z rovnice 35.

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= 0 \\
|\lambda I - A| &= \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -k_1 & \lambda - k_2 \end{bmatrix} \\
|\lambda I - A| &= (\lambda + 1)(\lambda - k_2) - k_1 \\
\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= 0
\end{aligned} \tag{35}
$$

Vieme, že korene charakteristickej rovnice musia ležať v zápornej polrovine. Preto si zvolíme korene $\lambda_1 = -1$,$\lambda_2 = -2$, pomocou ktorých získame parametre k_1, k_2 (rovnica 36).

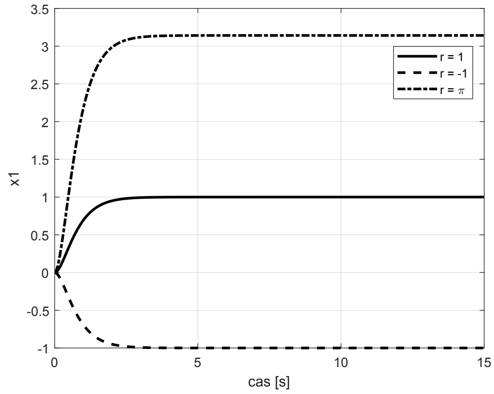
$$
\begin{aligned}
\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \\
\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\
k_1 &= -2 \\
k_2 &= -4
\end{aligned} \tag{36}
$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 4.

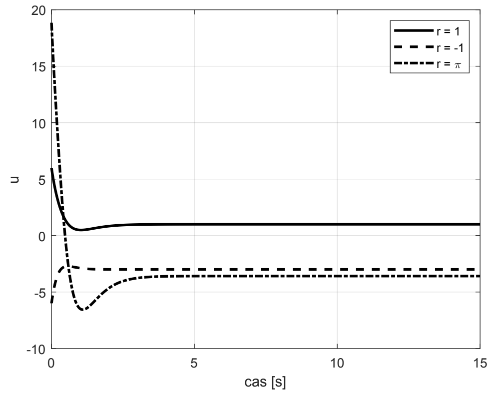


Obr. 4: *Bloková schéma systému s nelineárnym riadením*

Z výsledkov simulácie, ktoré su zobrazené na obrázkoch 8, 9, môžeme vidieť, že s pomocou navrhnutého riadenia pre nelinárny systém sme dokázali dosiahnúť požadovanú hodnotu r.



Obr. 5: *Priebeh stavovej premennej x_1 s nelineárnym riadením*



Obr. 6: *Priebeh akčného zásahu u s nelineárnym riadením*

Teraz môžeme pre porovnanie navrhnúť PID regulátor. Aby sme mohli navrhnúť PID regulátor potrebujeme získať prenosovú funkciu systému, preto náš systém linearzijeme v pracovnom bode $x_1 = x_2 = 0$ (rovnica 37).

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x_1} \\ \Delta\dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta u \end{bmatrix} \tag{37}$$

Pričom matica A má tvar:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial u} \\ \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial u} \end{bmatrix}_{|x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{|x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{|x_1=x_2=u=0} \end{aligned} \tag{38}$$

Hľadané linearizované rovnice:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x_1} &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x_2} &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u\end{aligned} \tag{39}$$

Keď sme získali linearizované rovnice nelineárneho systému, z ktorých vyjadríme prenosovú funkciu $\frac{\Delta x_1}{\Delta u}$.Použijeme Laplaceovú transformáciu, aby sme sa získali prenosovú funkciu (rovnica 40).

$$\begin{aligned}s\Delta\dot{x_1} &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 => \Delta x_2 = \Delta x_1(s+1) \\ s\Delta\dot{x_2} &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s\Delta x_1(s+1) &= -\Delta x_1 - \Delta x_1(s+1) + \Delta u \\ s\Delta x_1(s+1) + \Delta x_1 + \Delta x_1(s+1) &= \Delta u\end{aligned}$$

$$\Delta u = \Delta x_1(s^2 + 2s + 2)$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta u} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)} \tag{40}$$

Na výpočet parametrov PID regulátora použijeme metódu Pole-Placement. Aby sme ju mohli použiť vyjadríme si charakteristický polynóm (N(s)) z prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu G_{URO} (rovnica 41)

$$\begin{aligned}G_{URO} &= \frac{(P + Ds + \frac{I}{s})(\frac{1}{s^2+2s+2})}{1 + (P + Ds + \frac{I}{s})(\frac{1}{s^2+2s+2})} \\ N(s) &= s^3 + s^2(2 + D) + s(2 + P) + I\end{aligned} \tag{41}$$

Keď sme získali charakteristický polynóm N(s), využijeme metódu Pole-Placement, ktorá spočíva v porovnaní charakteristického polynómu so žalaným polynómom P(s). Umiestníme póly žalaného polynómu P(s) do zápornej reálnej polroviny. My si zvolíme korene: $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$, čím sme zabezpečíme stabilitu lineárneho systému. Polynóm P(s) potom bude mať nasledujúci tvar (rovnica 42).

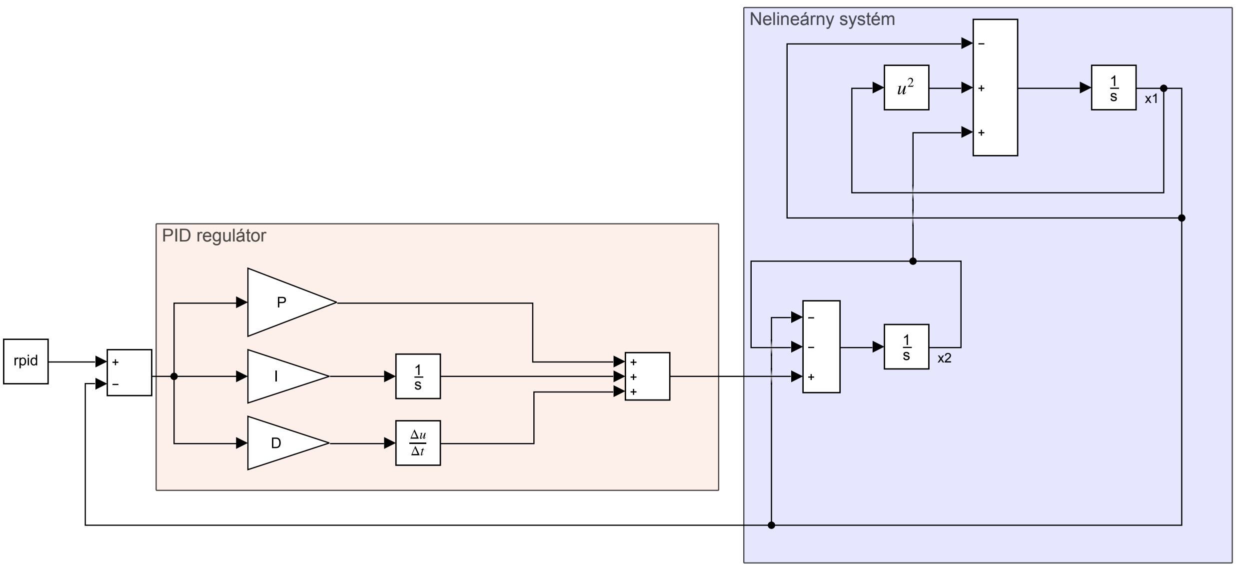
$$
\begin{aligned}
P(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) \\
&= s^3 + 6s^2 + 11s + 6
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Porovnaním želaného polynómu P(s) s charakteristickým polynómom N(s) 43, dostaneme parametre regulátora 44.

$$
\begin{aligned}
P(s) &= N(s) \\
s^3 + 6s^2 + 11s + 6 &= s^3 + s^2(2+D) + s(2+P) + I
\end{aligned}
\tag{43}
$$

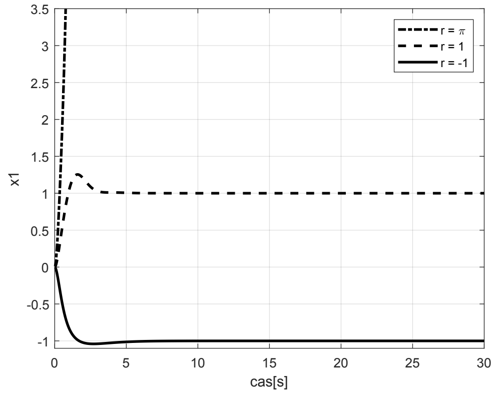
$$
\begin{bmatrix} P \\ I \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}
\tag{44}
$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 7.

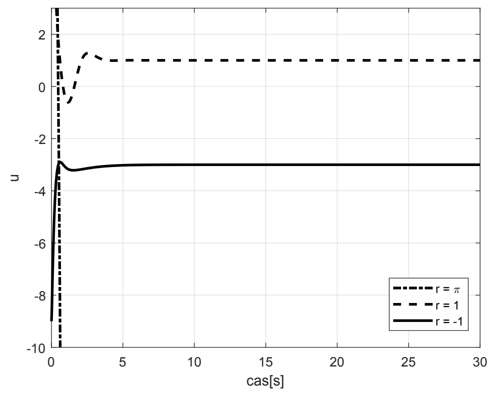


Obr. 7: *Bloková schéma systému s PID regulátorom*

Z výsledkov simulácie, ktoré su zobrazené na obrázkoch 8, 9, môžeme vidieť, že s pomocou PID regulátora sme dokázali dosiahnúť niektoré požadované hodnoty r, avšak pri vyšších požadovaných hodnotách bol už systém nestabilný.



Obr. 8: *Priebeh stavovej premennej x_1 s PID regulátorom*

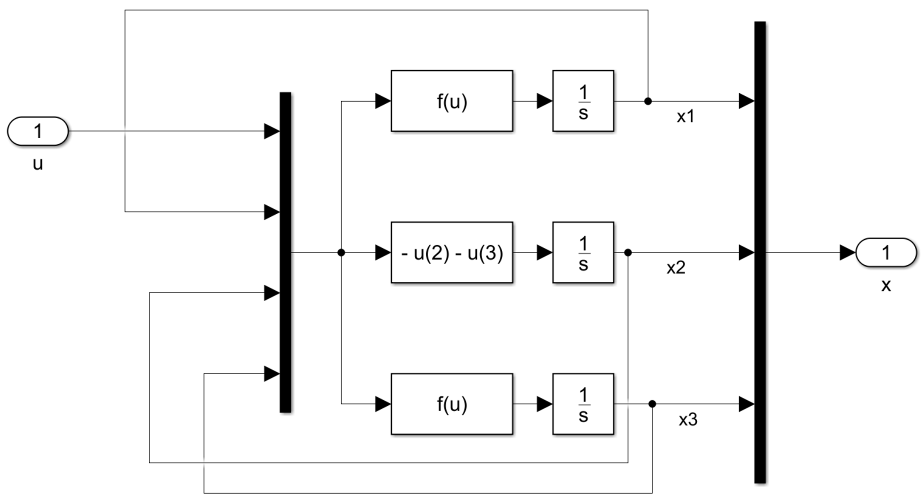


Obr. 9: *Priebeh akčného zásahu u s PID regulátorom*

Príklad 2

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (45). Bloková schéma systému je na obr. 10.

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_1 + x_2 - x_3 + sin(x_2)\\ \dot{x_2} &= -x_1 - x_2\\ \dot{x_3} &= cos(x_2)(sin(x_2) - x_3) - u\\ y &= x_1\end{aligned} \tag{45}$$



Obr. 10: *Bloková schéma systému z rovn.* (45)

Tento systém ma stavy x_1, x_2 a x_3. Stav x_1 je zároveň výstupom systému. Bod [0 0 0] je rovnovážny stav systému. V tomto bode sú časové derivácie všetkých stavových premenných rovné nule.

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 1 + sin(0) = 0 \\
\dot{x_2}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= -0 - 0 = 0 \\
\dot{x_3}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= cos(0)sin(0) - 0cos(0) - 0 = 0
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Návrh riadenia pomocou Vstupno-stavovej linearizácie - príklad 2

Našim cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup y dosiahol žiadanú hodnotu r. Systém obsahuje nelinearity v dvoch rovniciach, preto je ťažké určiť zákon riadenia len pohľadom na tieto rovnice. Použijeme metódu Vstupno-stavovej linearizácie, pri ktorej navrhneme linearizačnú slučku, s ktorou sa náš systém bude správať ako lineárny. Pre tento lineárny systém potom navrhneme regulátor, ktorý zabezpečí že sa výstup systému ustáli na žiadanej hodnote.

Prvým krokom metódy je určenie transformačných vzťahov rovn. (47).

$$\begin{aligned} z_1 &= -x_2 \\ z_2 &= x_1 + x_2 \\ z_3 &= sin(x_2) - x_3 \end{aligned} \tag{47}$$

Druhým krokom je transformácia nášho systému zo stavov x_1, x_2 a x_3 na stavy z_1, z_2 a z_3. To dosiahneme derivovaním transformačných vzťahov (v čase) a dosadením vzťahov z pôvodných rovníc.

$$\dot{z_1} = -\dot{x_2} = x_1 + x_2 = z_2 \tag{48}$$

$$\dot{z_2} = \dot{x_1} + \dot{x_2} = x_1 + x_2 - x_3 + sin(x_2) - x_1 - x_2 = z_3 \tag{49}$$

$$\dot{z_3} = cos(x_2)\dot{x_2} - \dot{x_3} = cos(x_2)(-x_1 - x_2) - cos(x_2)(sin(x_2) - x_3) + u = u - cos(z_1)(z_2 + z_3) \tag{50}$$

Transformovaný systém potom opisujú rovn. (51).

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= z_3 \\ \dot{z_3} &= u - cos(z_1)(z_2 + z_3) \end{aligned} \tag{51}$$

Na základe rovn. (51) dokážeme zvoliť taký zákon riadenia, ktorý vykompenzuje nelinearity pôvodného systému, rovn. (52). Prvý člen tejto rovnice zabezpečí linearizáciu systému, tvorí linearizačnú slučku. Druhý člen v zabezpečí stabilitu dynamiky systému, rovn. (54). Posledný člen r predstavuje našu žiadanú hodnotu. Keďže náš linearizovaný systém nemusí mať jednotkové zosilnenie, musíme túto hodnotu predeliť statickým zosilnením linearizovaného systému K. Druhou možnosťou je zvoliť také konštanty k_1, k_2 a k_3 aby zosilnenie bolo rovné jednej.

$$u(z, v, r) = cos(z_1)(z_2 + z_3) + v + r/K \tag{52}$$

$$u(x, v, r) = cos(x_2)(x_1 + x_2 + sin(x_2) - x_3) + v + r/K \tag{53}$$

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 \tag{54}$$

Dosadením zákona riadenia do nášho transformovaného systému dosiahneme lineárny systém, rovn. (55).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 + \frac{r}{K} \end{aligned} \tag{55}$$

Tento systém môžeme zapísať v kanonickej forme riaditeľnosti pomocou matice A a vektorov b, c a d.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prenosová funkcia systému $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1}{K} \frac{1}{s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1} \tag{56}$$

Zosilnenie systému získame ak limitujeme s k nule. Potom dostaneme rovn. (57), z ktorého si vyjadríme konštantu K, rovn. (58).

$$\frac{1}{K}\frac{1}{k_1} = 1 \tag{57}$$

$$K = \frac{1}{k_1} \tag{58}$$

Konštanty k_1, k_2 a k_3 majú zabezpečiť stabilitu dynamiky systému. Môže ich určiť na základe vlastných čísiel matice A. Aby bol systém stabilný, musí matica A mať záporne definitné vlastné čísla.

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_1 & k_2 & \lambda + k_3 \end{bmatrix} = \lambda^3 + k_3\lambda^2 + k_2\lambda + k_1 = 0 \tag{59}$$

Nech všetky tri λ majú hodnotu -1, dostaneme tak žiadaný polynóm pre vlastné čísla, rovn. (60).

$$(\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \tag{60}$$

Porovnaním rovn. (59) a rovn. (60) získame vzťahy, z ktorých určíme koeficienty, rovn. (61).

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 3 \\ k_3 &= 3 \end{aligned} \tag{61}$$

Z toho určíme zosilnenie K, rovn. (62).

$$K = 1 \tag{62}$$

Návrh riadenia pomocou obyčajnej linearizácie s PID regulátorom - príklad 2

Rozvojom do Taylorovho radu dostaneme z pôvodných rovn. (45) nové rovn. (63). Pracovný bod nech je [0 0 0]. Po linearizácií dokážeme odvodiť prenosovú funkciu rovn. (64) a navrhnúť PID regulátor pomocou PPM.

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\ \Delta\dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x}_3 &= \Delta x_1 - \Delta x_3 - \Delta u \end{aligned} \tag{63}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s + 2} \tag{64}$$

$$R(s) = \frac{I + Ps + Ds^2}{s} \tag{65}$$

$$G_{URO}(s) = \frac{(s+1)(I + Ps + Ds^2)}{Ds^3 + (P+D)s^2 + (I+P)s + I} \tag{66}$$

Nech požadované póly uzavretého regulačného obvodu sú -1, -0.5 a -0.5. Porovnaním žiadaného polynómu (rovn. (67)) a polynómu uzavretého regulačného obvodu (rovn. (68)) dostaneme vzťahy na výpočet parametrov PID regulátora rovn. (69).

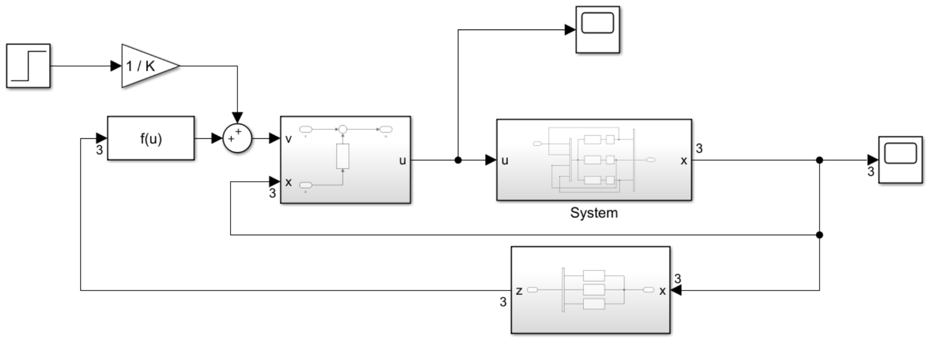
$$s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 = 0 \tag{67}$$

$$Ds^3 + (P+D)s^2 + (I+P)s + I = 0 \tag{68}$$

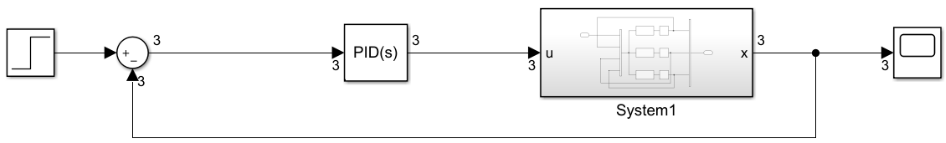
$$\begin{aligned} P &= 1 \\ I &= 0.25 \\ D &= 1 \end{aligned} \tag{69}$$

Simulácie - príklad 2

Navrhnuté riadenia môžeme porovnať pomocou simulácie v prostredí Matlab-simulink. Simulačná schéma s nelineárnym riadením je na obr. 11 a s PID regulátorom je na obr. 12. Pri nelineárnom riadení urobíme skok žiadanej hodnoty na 10. Pri PID regulátore urobime dva skoky, na hodnotu 0.1 a 1, aby sme zostali čo najbližšie pri pracovnom bode.

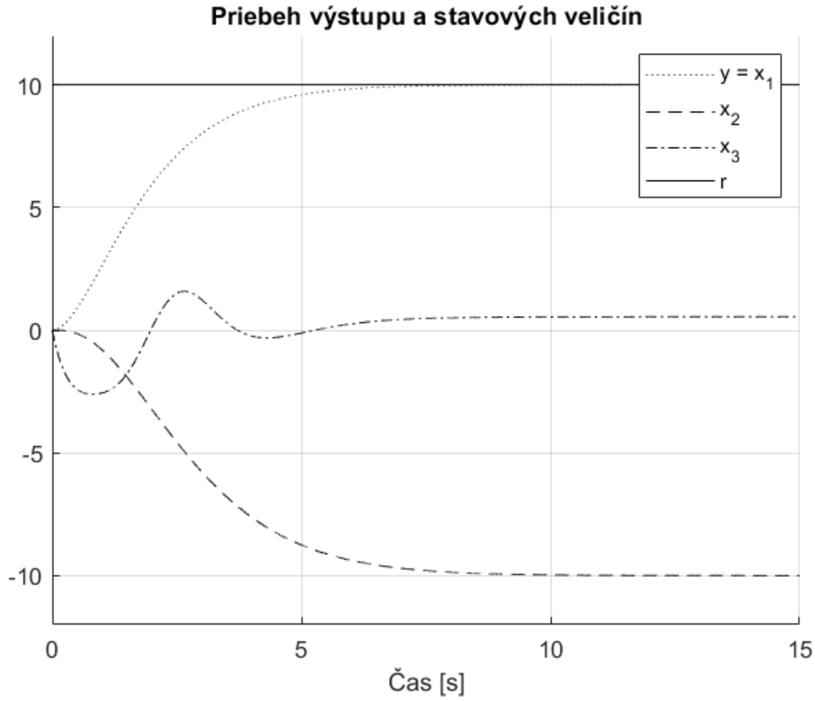


Obr. 11: *Bloková schéma systému s nelineárnym riadením*

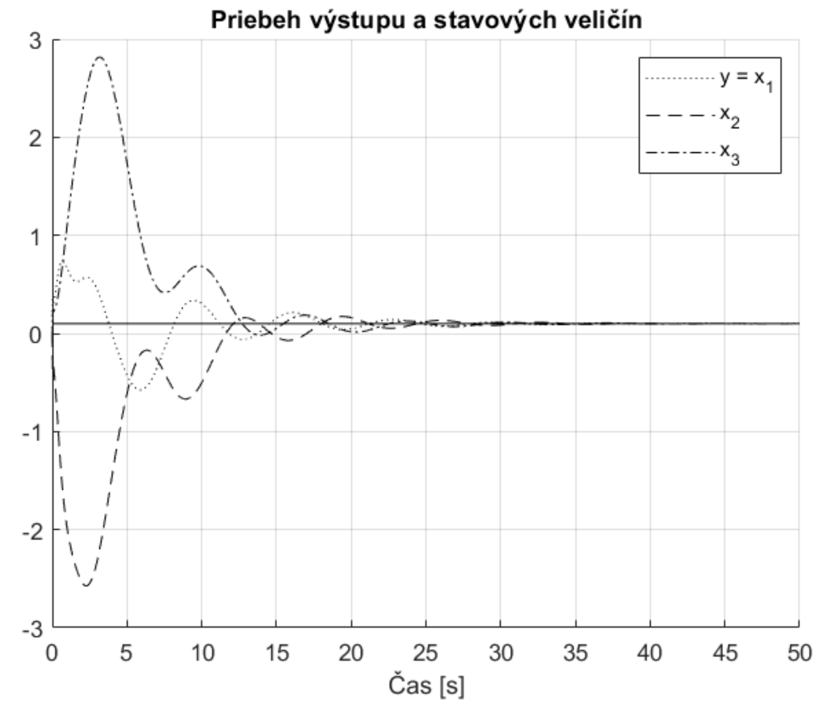


Obr. 12: *Bloková schéma systému s PID regulátorom*

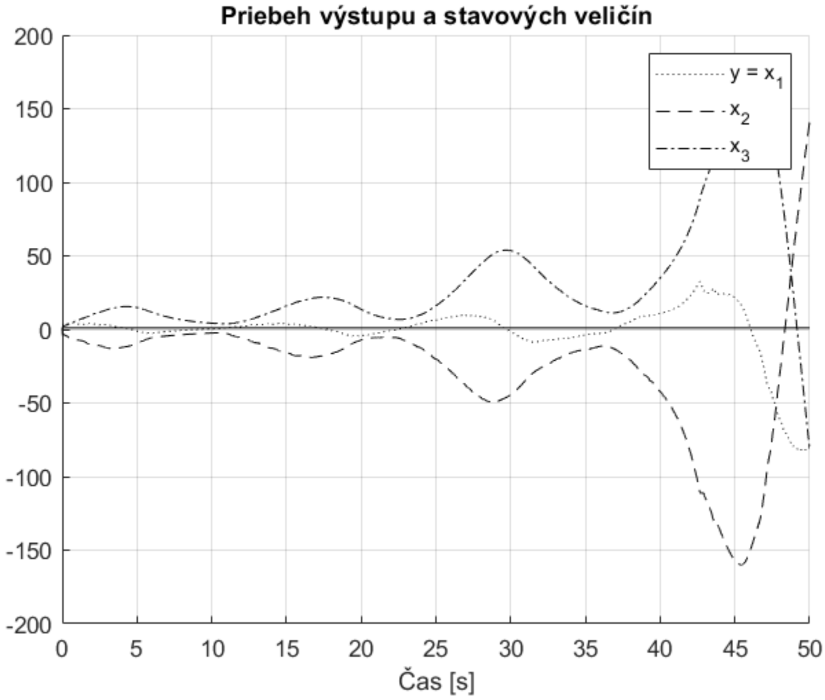
Na obr. 14 môžeme vidieť, že takto navrhnutý PID regulátor dokáže pri malom skoku uriadiť náš systém. Pri väčšom skoku (obr. 15) sa náš uzavretý systém stal nestabilným. Je to spôsobené tým, že pri väčšej vzdialenosti od pracovného bodu sa chyba spôsobená linearizáciou zväčšuje a systému má iné vlastnosti ako systém, pre ktorý sme daný regulátor navrhovali. Na obr. 13 a obr. 16 je vidieť, že nelineárny regulátor dokázal uriadiť náš systém bez problémov aj na hodnotu 10.



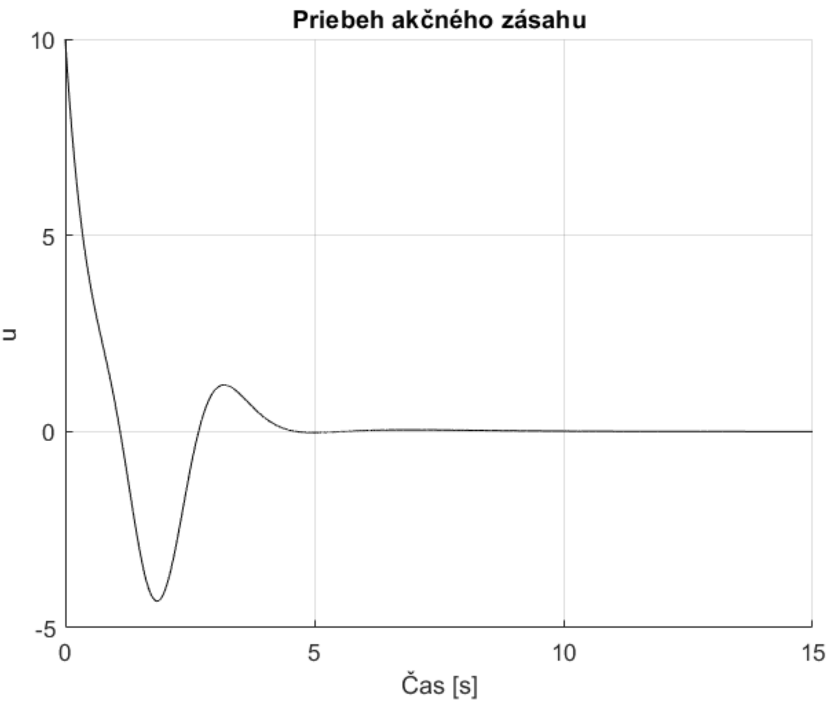
Obr. 13: *Priebeh výstupu a stavových veličín s nelineárnym riadením*



Obr. 14: *Priebeh výstupu a stavových veličín s PID (skok na 0.1)*



Obr. 15: *Priebeh výstupu a stavových veličín s PID (skok na 1)*



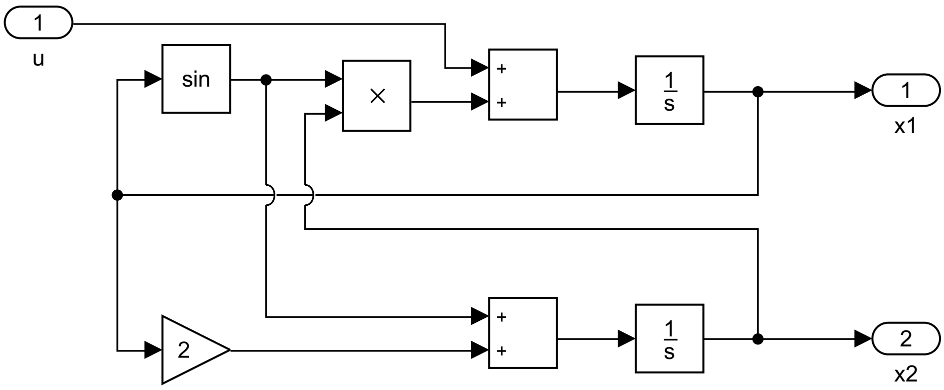
Obr. 16: *Priebeh akčného zásahu s nelineárnym riadením*

4 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-výstupná

Príklad prvý

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (70). Bloková schéma systému je na obr. 17.

$$\dot{x_1} = u + \sin(x_1)x_2$$
$$\dot{x_2} = 2x_1 + sin(x_1) \tag{70}$$
$$y = x_2$$



Obr. 17: *Bloková schéma systému z rovn.* (70)

Rovnovažný stav systému

Bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovažným bodom tohto systému, čo si môžeme overiť dosadením:

$$\dot{x_1}|_{(x_1=x_2=0)} = \sin(0)0 = 0$$
$$\dot{x_2}|_{(x_1=x_2=0)} = 0 + sin(0) = 0$$

všimnime si, že v tomto bode sú derivácie stavových premenných v čase nulové, čo je charakteristické pre rovnovažné body.

Predpokladajme, že chceme tento systém riadiť tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu r a aplikujme nelineárne riadenie navrhnuté metódou vstupno výstupnej spätnoväzobnej linearizácie. Metódu vysvetlíme rovno počas návrhu.

Prvý krok metódy - derivácia rovnice výstupu

Prvým krokom metódy je derivácia vzťahu pre výstup systému y. Derivujeme toľkokrát koľkokrát je potrebné, nato aby sa vstup systému u objavil v rovnici.

$$\begin{aligned} & y = x_2 \\ \Longrightarrow\ & \dot{y} = \dot{x_2} = 2x_1 + sin(x_1) \\ \Longrightarrow\ & \ddot{y} = \ddot{x_2} \\ & \quad = 2 + cos(x_1)\dot{x_1} \\ & \quad = 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \end{aligned}$$

vo výsledku dostaneme vzťah rovn. (71).

$$\ddot{y} = 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \tag{71}$$

Druhý krok - voľba zákona linearizácie

Teraz si všimnime, že ak zvolíme vstup u do systému, tak ako je rovn. (72)

$$u = -\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} \tag{72}$$

po dosadení do rovn. (71) dostaneme section 4.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \\ &= 2 + \cos(x_1)(-\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} + \sin(x_1)x_2) \\ &= 2 + \cos(x_1)(\frac{v}{2 + \cos x_1}) \\ &= v \end{aligned}$$

Dostáme tak vzťah medzi výstupom systému y a vstupom do zákona linearizácie v v rovn. (73).

$$\ddot{y} = v \tag{73}$$

Voľba takéhoto zákona, nazvyme ho zákonom linearizácie, pre vstup u do systému, je druhým krokom metódy.

Tretí krok - návrh zákona riadenia linearizovaného systému

Ako posledný krok, musíme zvoliť tvar v, tak aby sme dosiahli požadovanú dynamiku systému.

Zvolme si v podľa rovn. (74).

$$\begin{aligned} v &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_0 e \\ &= -k_1\dot{y} + k_0 e \text{ keďže } r \text{ je konšt., tak jeho derivácie sú 0} \end{aligned} \tag{74}$$

potom dosadením rovn. (74) do rovn. (73) dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_0 e \\ 0 &= \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0 e \end{aligned}$$

pre takúto voľbu v bude teda pre systém platiť rovnica rovn. (75).

$$0 = \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0 e \tag{75}$$

kde k_1 a k_0 sú volitelné parametre.

Parametre k_1 a k_0 vieme tiež navrhnuť podľa potreby. Ak si prepíšeme rovnicu rovn. (75) na rovn. (76).

$$r_e = \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0 e \tag{76}$$

kde r_e bude žiadaná hodnota odchýlky (ktorá je 0), tak vieme vyjadriť prenos $\frac{e}{r_e}$:

$$\begin{aligned} r_e &= \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0 e \\ R_e &= Es^2 + k_1 Es + k_0 E \\ R_e &= E(s^2 + k_1 s + k_0) \\ \frac{E}{R_e} &= \frac{1}{s^2 + k_1 s + k_0} \end{aligned}$$

charakteristický polýnóm teda bude rovn. (77).

$$s^2 + k_1 s + k_0 = 0 \tag{77}$$

zvolíme žiadanú polohu pólov p_1, p_2 potom žadaný charakteristický polýnóm bude rovn. (78).

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2 \tag{78}$$

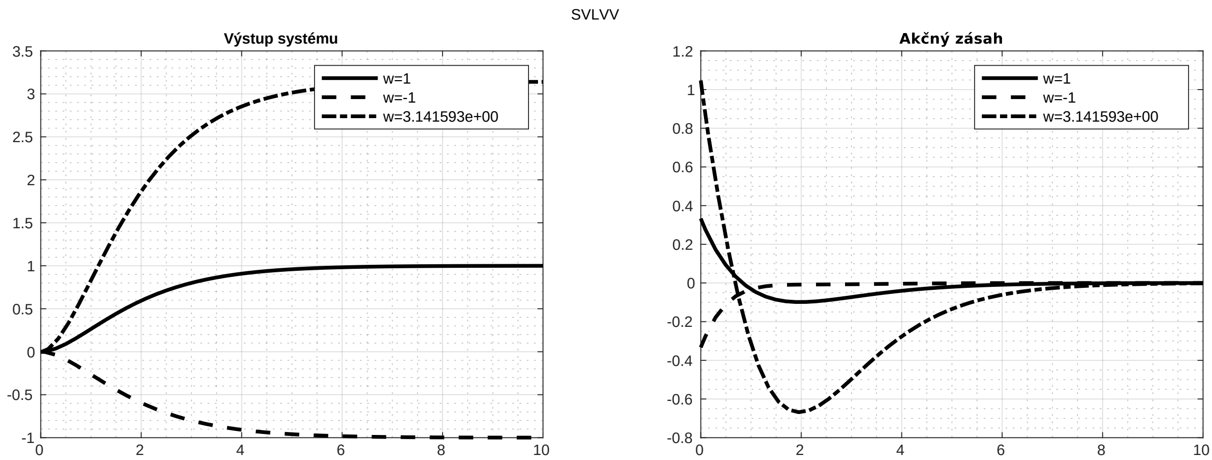
porovnaním rovn. (77) a rovn. (78) dostaneme sústavu rovníc rovn. (79).

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= k_0 \\ -(p_1 + p_2) &= k_1 \end{aligned} \tag{79}$$

cez ktoré vieme vypočítať k_1 a k_0 pre ľubovoľné žiadané póly.

Zvolme si $p_1 = -1$ a $p_2 = -1$ potom z rovn. (79) dostaneme $k_1 = 2$ a $k_2 = 1$

Máme tak navrhnutý regulátor a výsledok zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 18.



Obr. 18: *Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätnoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej rovn.* (70)

Zhrnutie krokov metódy

Kroky návrhu sumarizujeme v 3 bodoch:

1. Derivácia rovnice výstupu, až kým sa v rovnici neobjavý vstupná premenná

2. Voľba zákona linearizácie (napríklad odčítanie nelineaárnych zložiek)

3. Návrh zákona riadenia (regulátora) pre linearizovaný systém

Porovnanie s PID

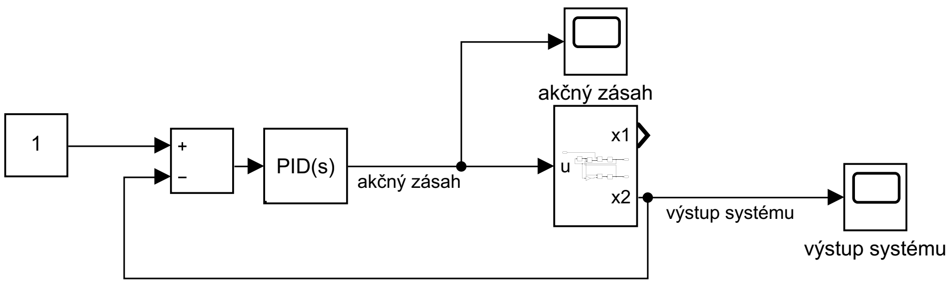
Pre porovnanie skúsme navrhnúť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovažnom bode $x_1 = x_2 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (80).

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x_1} &= \Delta u \\ \Delta \dot{x_2} &= 3\Delta x_1 \\ \Delta y &= \Delta x_2 \end{aligned} \tag{80}$$

Vyjadrime si prenosovú funkciu systému, pre jednoduchší návrh parametrov regulátora. Vyjadrenie prebieha v rovn. (81). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned} \Delta y = \Delta x_2 = \frac{1}{s} 3\Delta x_1 = \frac{1}{s^2} 3\Delta u \\ \implies \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{3}{s^2} \end{aligned} \tag{81}$$

Zapojme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 19. Ktorý mý prenos rovn. (82), kde P, D, I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie ešte prenosy systému a regulátora roznásobme, dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (83).



Obr. 19: *Zapojenie PID regulátora*

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s} \tag{82}$$

$$G_{ORO} = 3\frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3} \tag{83}$$

Následne vyjadrime prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa známeho pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (84). Dostaneme tak prenos rovn. (85).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{3\frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}}{1 + 3\frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}} \\ &= \frac{3(Ps + Ds^2 + I)}{s^3 + 3Ps + 3Ds^2 + 3I} \end{aligned} \tag{85}$$

Využime teraz metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -1, p_2 = -0.5, p_3 = -0.5$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladieme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly, teda roznásobením rovn. (86).

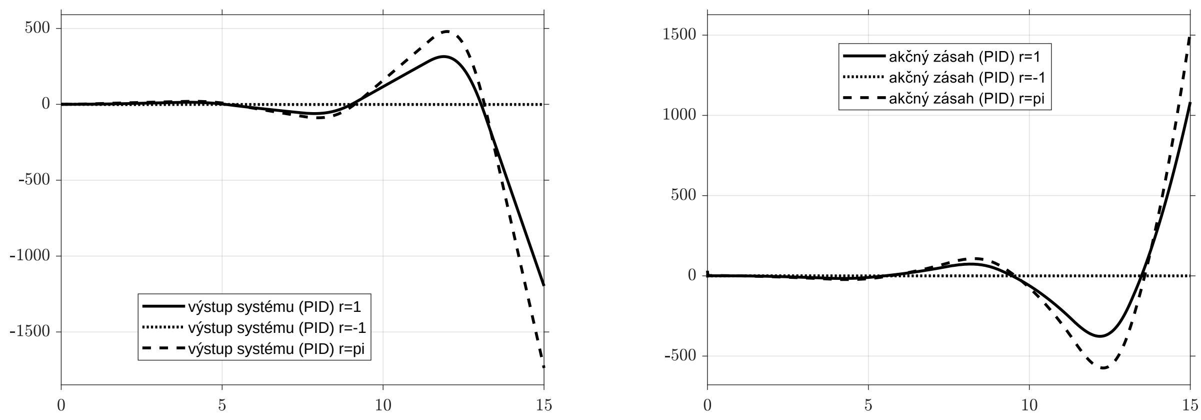
$$\begin{aligned} P(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \\ &= (s + 1)(s + 0.5)(s + 0.5) \\ &= s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 \end{aligned} \tag{86}$$

Tento želaný polynóm porovnáme s CHPOLY URO, teda rovn. (104), dostaneme tak rovnice rovn. (105) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

$$s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 = s^3 + 3Ps + 3Ds^2 + 3I \tag{87}$$

$$\begin{aligned} 3P &= 2.00 & & P &= \tfrac{2.00}{3} \\ 3D &= 1.25 & \Longrightarrow \quad & D &= \tfrac{1.25}{3} \\ 3I &= 0.25 & & I &= \tfrac{0.25}{3} \end{aligned} \tag{88}$$

Aplikujme tento regulátor aplikovať na nelineárny systém, ktorý chceme riadiť. Výsledok zo simulácie je na obr. 20. Z výsledku môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné.



Obr. 20: *Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement*

Príklad 2

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (89). Bloková schéma systému je na obr. 21.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x_2} &= 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u \\ \dot{x_3} &= x_1 + x_2^3 - 3x_3^3 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{89}$$

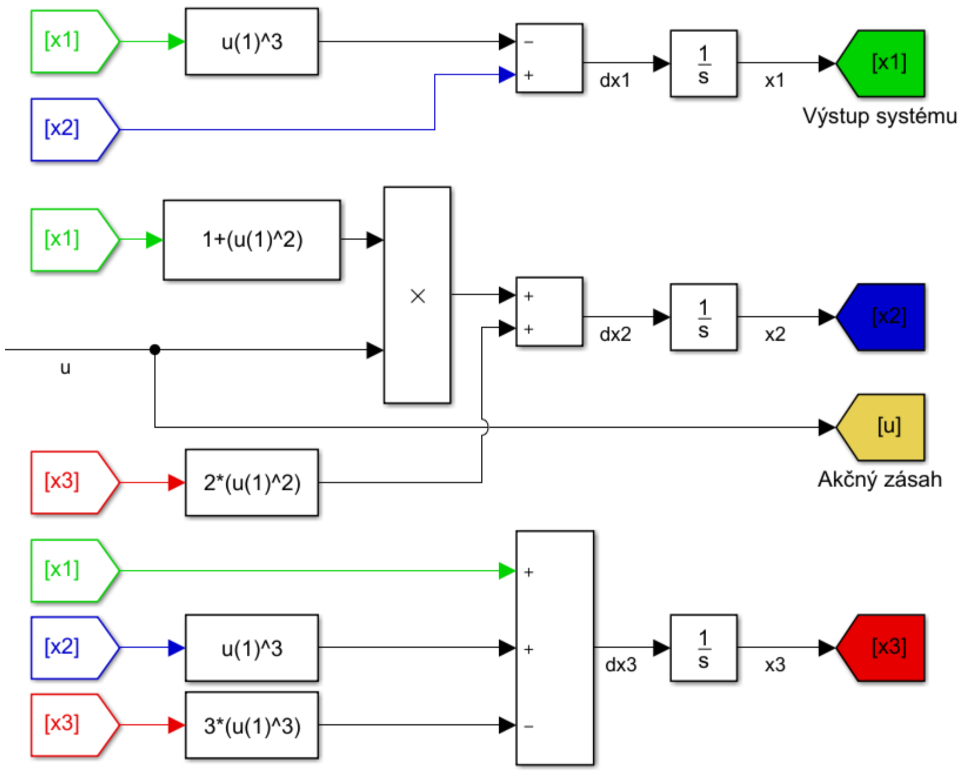
Návrh riadenia - príklad 2

Teraz overíme, že bod $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, je rovnovažný bodom systému. Systém sa nachádza v rovnováhe, keď časové derivácie všetkých stavových premenných sú nulové.

$$\begin{aligned} \dot{x_1}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 - 0 = 0 \\ \dot{x_2}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 = 0 \\ \dot{x_3}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 0 = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Ako vidíme v bode $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ sú derivácie stavových premenných v čase nulové, teda bod $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ je rovnovážny bod systému.

Našim cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu



Obr. 21: *Bloková schéma systému z rovn.* (89)

r.

Aplikujeme nelineárne riadenie, opäť metódu vstupno výstupnej spätnoväzobnej linearizácie použitú aj v predchádzajúcom príklade.

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade je prvým krokom derivovanie vzťahu pre výstup systému y. Tento vzťah je potrebné derivovať pokiaľ sa v ňom neobjaví vstupný signál u.

$$
\begin{aligned}
& y = x_1 \\
\implies \quad & \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\
\implies \quad & \ddot{y} = \dot{x}_2 - 3x_1^2\dot{x}_1 \\
\implies \quad & \ddot{y} = 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 \\
& \quad = 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2 + 1)u
\end{aligned}
\tag{91}
$$

Pre zjednodušenie do budúcna upravme výslednú rovn. (91) nasledovne:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2 + 1)u \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_3^2 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1^5 \end{aligned} \tag{92}$$

Ak zvolíme vstup do systému, tak ako je v rovn. (93), po dosadení dostaneme rovn. (94). Voľba takéhoto zákona je nazývaná zákonom linearizácie, pre vstup u do systému.

$$u = \frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + 1} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{y} = 2x_3^2 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2 + 1)\frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + 1} \\ &\ddot{y} = v \end{aligned} \tag{94}$$

Posledný krok. Ak si zvolíme v podľa rovn. (95), tak dostávame rovnicu pre dynamiku odchýlky rovn. (96). Ak zvolíme koeficienty k všetky kladné, dynamika odchýlky bude vždy stabilná a bude konvergovať k 0. Voľba tohto zákona, pre v, povedzme zákona riadenia linearizovaného systému. Pozn. $e = (r - y)$

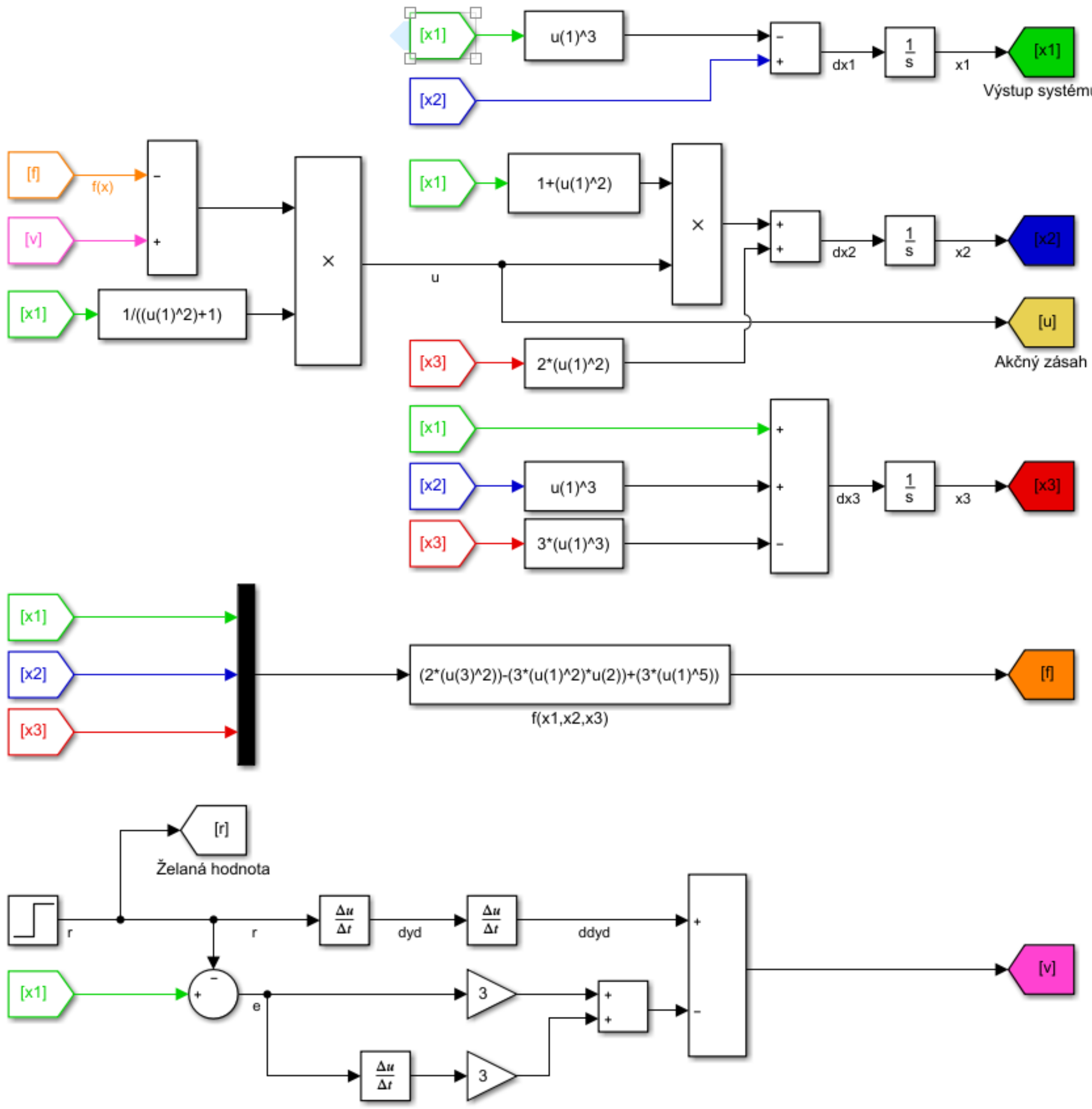
$$v = \ddot{r} - k_1(\dot{y} - \dot{r}) - k_2(y - r) \tag{95}$$

$$\begin{aligned} v &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ \Longrightarrow \quad \ddot{y} &= \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ \Longrightarrow \quad 0 &= \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e \end{aligned} \tag{96}$$

Máme navrhnutý lineárny regulátor. Kompletný systém vidíme na obr. 22. Výsledky zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 24.

Návrh PID - príklad 2

Pre porovnanie skúsme navrhnúť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovážnom bode $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar



Obr. 22: *Kompletná schéma riadného systému pomocou nelineárneho riadenia.*

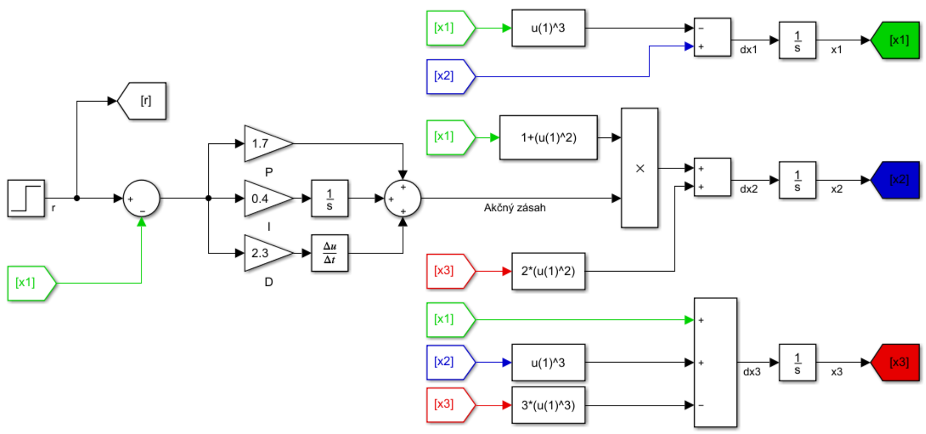
rovn. (97).

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\
\Delta\dot{x}_2 &= \Delta u \\
\Delta\dot{x}_3 &= \Delta x_1 \\
\Delta y &= \Delta x_1
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Pre jednoduchší návrh parametrov regulátora si vyjadríme prenosovú funkciu systému. Vyjadrenie je ukázané v rovn. (98). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned} \Delta y = \Delta x_1 = \frac{1}{s}\Delta x_2 = \frac{1}{s^2}\Delta u \\ \implies \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{98}$$

Zapojíme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 23. Ktorý má prenos rovn. (99), kde P, D, I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie, prenosy systému a regulátora roznásobíme a dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (100).



Obr. 23: *Zapojenie PID regulátora*

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s} \tag{99}$$

$$G_{ORO} = \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3} \tag{100}$$

Vyjadríme prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (101). Dostaneme tak prenos rovn. (102).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \tag{101}$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{\frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}}{1 + \frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}} \\ &= \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3 + Ps + Ds^2 + I} \end{aligned} \tag{102}$$

Využijeme metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -1, p_2 = -0.8, p_3 = -0.5$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladieme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly (rovn. (103)).

$$\begin{aligned} P(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \\ &= (s + 1)(s + 0.8)(s + 0.5) \\ &= s^3 + 2.3s^2 + 1.7s + 0.4 \end{aligned} \tag{103}$$

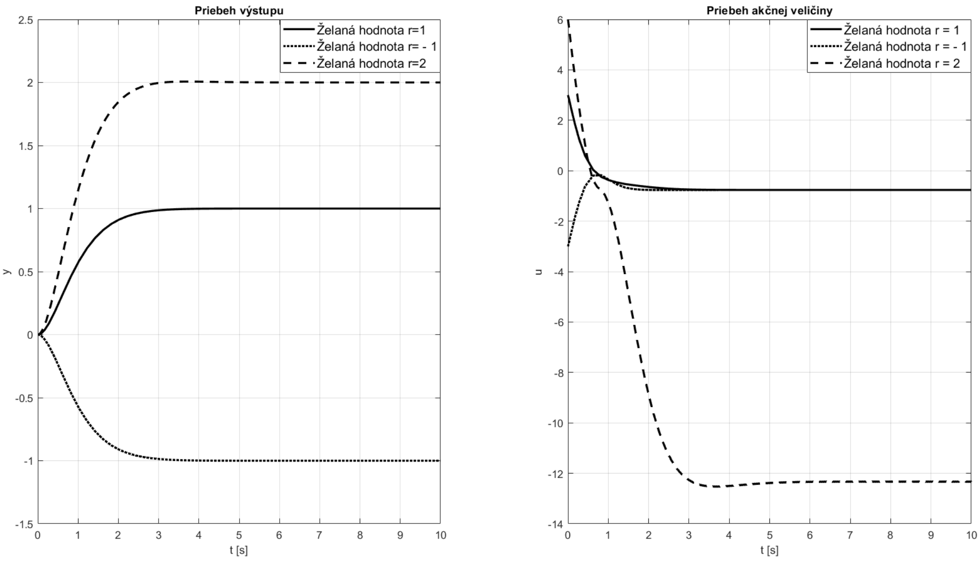
Tento želaný polynóm porovnáme s charakteristickým polynómom URO, teda rovn. (104), dostaneme tak rovnice rovn. (105) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

$$s^3 + 2.3s^2 + 1.7s + 0.4 = s^3 + Ps + Ds^2 + I \tag{104}$$

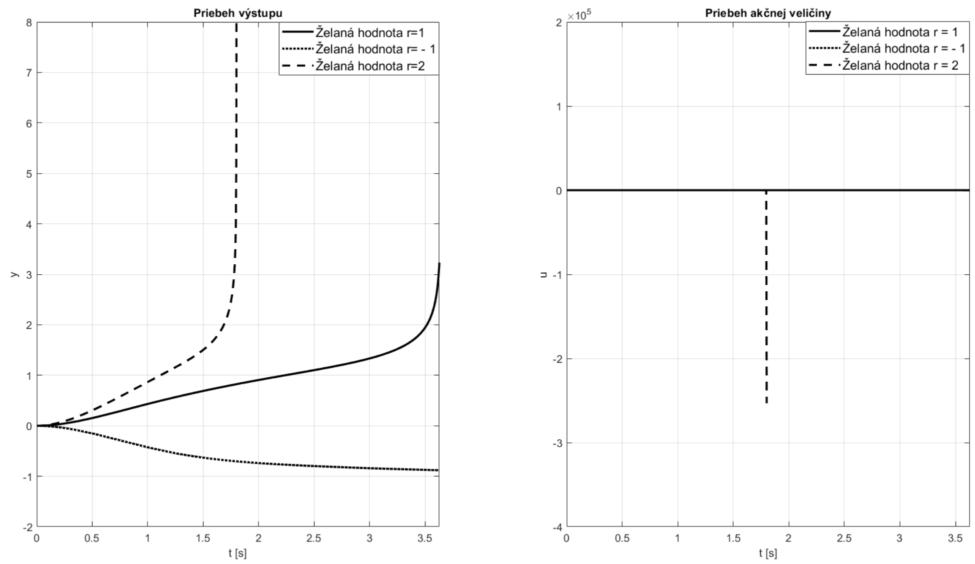
$$\begin{aligned} P &= 1.7 \\ D &= 2.3 \\ I &= 0.4 \end{aligned} \tag{105}$$

Aplikujme PID regulátor na nelineárny systém (obr. 23), ktorý chceme riadiť . Výsledok zo simulácie je na obr. 25.

Porovnanie riadenia - príklad 2



Obr. 24: *Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätnoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej.*



Obr. 25: *Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement*

Záver - príklad 2

Z výsledku môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné. Systém regulovaný PID regulátorom nebol schopný sa stabilizovať v takom okolí pracovného bodu ako to dokázal systém s regulátorom navrhnutým pomocou metódy vstupno-výstupnej spätnoväzbovej linearizácie.

5 Integrácia do predmetu RNS

Vyššie uvedené príklady, môžu byť integrované do predmetu Riadenie Nelineárnych systémov napríklad priamo prezentovaním na prednáške.

Alebo môžu byť poskytnuté ako dodatočný materiál s vypracovanými príkladmi k prednáškam, na precvičenie metód návrhu.

Keďže obsahujú aj porovnanie s PID, čo zahŕňa návrh lin. regulátora v rovnovažnom stave linearizáciou, môžu byť využité na porovnanie lin. riadenia s nelineárnym, ale aj ako príklady na precvičenie linearizácie.

Je možné výsledok návrhu pomocou jednotlivých metód demonštrovať pomocou priloženej animácie riadenia polohy kyvadla v programe Matlab.

6 Záver

Tak ako sme vyššie demonštrovali, pre riadenie niektorých systémov je využitie nelineárneho riadenia nevyhnutné, v takýchto prípadoch nám metóda vstupno-stavovej linearizácie a metóda vstupno-výstupnej linearizácie poskytujú spôsob ako riadenie syntetizovať, v iných prípadoch však riadenie pomocou lineárneho PID regulátora, ktorý má parametre navrhnuté pre systém linearizovaný v rovnovažnom stave, postačuje a je jednoduchší z hľadiska návrhu. Preto je nutné pre každý systém určiť, či je riadenie pomocou PID regulátora postačujúce a ak nie, využiť napríklad jednu z vyššie uvedených metód.

V prípade použitia uvedených metód návrhu nelineárneho riadenia, je potrebné analyzovať aj výsledný tvar nelineárneho zákona riadenia, pretože tento nemusí byť definovaný, pre všetky hodnoty stavových premenných.

Literatúra

[1] SLOTINE, Jean-Jacques E., et al. Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.