

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

RIADENIE NELINEÁRNYCH SPOJITÝCH SYSTÉMOV
TÍMOVÝ PROJEKT

Študijný program:	Robotika a kybernetika
Študijný odbor:	Kybernetika
Školiace pracovisko:	Ústav robotiky a kybernetiky
Vedúci projektu:	Prof. Ing. Ján Murgaš, PhD.

Bratislava 2020

Bc. Eva Štalmachová
Bc. Marek Trebul'a
Bc. Denis Vasko
Bc. Ján Urdianyk

TÍMOVÝ PROJEKT ZADANIE

Študijný program:	Robotika a kybernetika
Študijný odbor:	Kybernetika
Vedúci projektu:	Prof. Ing. Ján Murgaš, PhD.
Miesto vypracovania projektu:	Ústav robotiky a kybernetiky
Riešitelia:	

Názov projektu: *Riadenie nelineárnych spojitých systémov*

Špecifikácia zadania:

Cieľom projektu je navrhnúť a overiť metódy nelineárneho riadenia vybraných nelineárnych systémov za účelom pedagogického využitia.

Úlohy:

1. Pre zadané metódy nelineárneho riadenia spojitých systémov vypracujte príklady využitia v rozsahu:

- Návrh riadenia
- Simulačné overenie
- Pedagogické spracovanie

2. Vypracujte a predneste prezentáciu.

3. Vypracujte posudok na projekt druhého tímu

4. Pri riešení postupujte podľa zásad tímového projektu.

Termín odovzdania projektu: 15.5.2020

Obsah

Zoznam použitých skratiek	4
1 Úvod	5
2 Matematické základy	6
Stavový opis	6
Rovnvoážné stavy	7
Linearizácia	7
Riešenie preurčenej sústavy rovníc	9
3 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-výstupná	11
Príklad prvý	11
4 Záver	17
Literatúra	18

Zoznam použitých skratiek

1 Úvod

V tímovom projekte sa venujeme definovaniu niekoľkých modelov systémov v stavovom opise, vhodných na demonštráciu návrhu nelineárneho riadenia pomocou metód vstupno-stavovej a vstupno-výstupnej linearizácie. Navrhnuté nelineárne riadenie porovnávame s lineárnym PID regulátorom a uvádzame aj základné matematické princípy, využívané pri návrhu pomocou uvedených metód.

V časti ?? sa venujeme niektorým matematickým princípom, ktorých znalosť je nevyhnutná pre pochopenie metód, ale aj ďalšieho textu, v celom rozsahu. Konkrétne táto časť zahŕňa opakovanie k nasledujúcim témam: stavový opis systému, rovnovážné stavy a linearizácia.

Časť ?? sa zaoberá návrhom nelineárneho riadenia pomocou metódy vstupno-stavovej linearizácie. Sú tu prezentované dva príklady, ku každému je vypracovaný návrh riadenia danou metódou a riadenie systému PID navrhnuté pre linearizáciu v rovnovážnom stave.

Návrhu pomocou metódy vstupno-výstupnej linearizácie sa venujeme v časti ?. Podobne ako v predchádzajúcej časti, aj tu sa venujeme okrem návrhu pomocou hlavnej metódy aj návrhu PID regulátora pre linearizovaný systém.

V časti ?? opisujeme program, písaný v matlabe, vhodný na kvalitatívne porovnanie navrhnutých riadení na jednoduchom prípade riadenia polohy matematického kyvadla. V programe sú implementované nelineárne formy riadenia a aj PID navrhnuté pre linearizáciu kyvadla v stabilnom aj nestabilnom rovnovážnom stave.

Opisu spôsobu, akým by sa mohol, v tomto dokumente, prezentovaný materiál integrovať do predmetu Riadenie Nelineárnych Systémov, sa venujeme v časti ??.

2 Matematické základy

Stavový opis

Stavový opis je jedna z foriem opisu dynamického lineárneho systému. Základom je definovanie vnútorných stavov systému, ako sa tieto stavy menia v čase a ako vyzerá výstup zo systému.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{1}$$

Pre SISO systémy je C vektor (riadkový) a D skalár. Pre MIMO systémy je C matica a D je vektor (stĺpcový). Majme systém opísaný rovnicami 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 6u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{2}$$

Tento systém môžeme napísať aj v maticovom tvare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Laplaceovu transformáciu získame rovnice 3.

$$Ys^3 = -Y + 8Ys + 3Ys^2 - 6U\tag{3}$$

$$Y(s^3 - 3s^2 - 8s + 1) = -6U \quad (4)$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-6}{s^3 - 3s^2 - 8s + 1} = G(s) \quad (5)$$

Rovnica 5 predstavuje prenosovú funkciu nášho systému.

Simulačná schéma je na obr. 1. V bloku integrátor je možné nastaviť počiatočne hodnoty stavov (počiatočné podmienky). Pri tejto schéme je dôležité uvedomiť si dimenzie jednotlivých signálov.

Obr. 1: Simulačná schéma systému definovaná pomocou stavového opisu

Rovnovážné stavy

Linearizácia

Linearizácia je proces, pri ktorom z nelineárneho systému spravíme lineárny. Tento lineárny systém opisuje pôvodný systém "presne" len v okolí pracovného bodu. Veľkosť tohto okolia závisí od priebehu funkcií. Používa sa pri tom rozvoj do Taylorovho radu (rovnica 1), kedy použijeme len prvý člen.

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{inf} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (6)$$

Kde $f^{(n)}$ je n -tá derivácia funkcie f v bode a , v prípade funkcie viacerých premenných je to gradient. Funkcia f musí byť diferencovateľná.

$$f(x) \approx \frac{f^{(1)}(x)}{1!} (x - x_0)^1 = \frac{\partial f}{\partial x}|_a (x - x_0) = \nabla f|_a \Delta x \quad (7)$$

Majme systém opísaný rovnicami 8. Keďže sa tam vyskytujú aj nelineárne

členy (sínus, kosínus a ich súčin), tento systém je nelineárny. Pri linearizácii tohto systému musíme počítať gradient každej rovnice podľa stavového vektora a vstupov, ďalej len vektora parametrov funkcií x . Nech bod P $[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ je pracovným bodom, v ktorom budeme systém linearizovať.

$$x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta u \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) - u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \nabla \dot{x}_1 &= \left[\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \right] = [1, 1 + \cos(x_2), -1, 0] \\ \nabla \dot{x}_2 &= \left[\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \right] = [-1, -1, 0, 0] \\ \nabla \dot{x}_3 &= \left[\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2}, \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3}, \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial u} \right] = [0, -\sin^2(x_2) + \cos^2(x_2), -\cos(x_2), -1] \\ \nabla y &= \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \frac{\partial y}{\partial u} \right] = [1, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{9}$$

Gradient v pracovnom bode dostaneme dosadením hodnôt pracovného bodu.

$$\begin{aligned} \nabla \dot{x}_1|_P &= [1, 1 + \cos(0), -1, 0] = [1, 2, -1, 0] \\ \nabla \dot{x}_2|_P &= [-1, -1, 0, 0] \\ \nabla \dot{x}_3|_P &= [0, -\sin^2(0) + \cos^2(0), -\cos(0), -1] = [0, 1, -1, -1] \\ \nabla y|_P &= [1, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{10}$$

Ak vynásobíme gradienty v pracovnom bode vektorom x , dostaneme linearizovanú sústavu diferenciálnych rovníc, ktoré opisujú správanie sa systému v okolí pracovného bodu P , rovnice 11.

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\
\Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\
\Delta \dot{x}_3 &= \Delta x_2 - \Delta x_3 - \Delta u \\
\Delta y &= \Delta x_1
\end{aligned}
\tag{11}$$

Riešenie preurčenej sústavy rovníc

Preurčená sústava rovníc, obsahuje viac rovníc ako neznámych premenných. Pri riešení preurčene sústavy rovníc použijeme metódu najmenších štvorcov. Pomocou metódy najmenších štvorcov sa budeme snažiť aproximovať riešenie x preurčenej sústavy rovníc 12.

$$Ax \approx b \tag{12}$$

Uvažujeme nasledovnú preurčenú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}
x + y &= 5 \\
2x + 4y + 10 &= 8 \\
x + 5y &= 15 \\
-2x + 4y + 10 &= 8
\end{aligned}
\tag{13}$$

Preurčenú sústavu rovníc 13 môžeme maticovo zapísať v tvare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 15 \\ -2 \end{bmatrix}
\tag{14}$$

Na výpočet neznámych premenných x, y použijeme metódu najmenších

štvorcov :

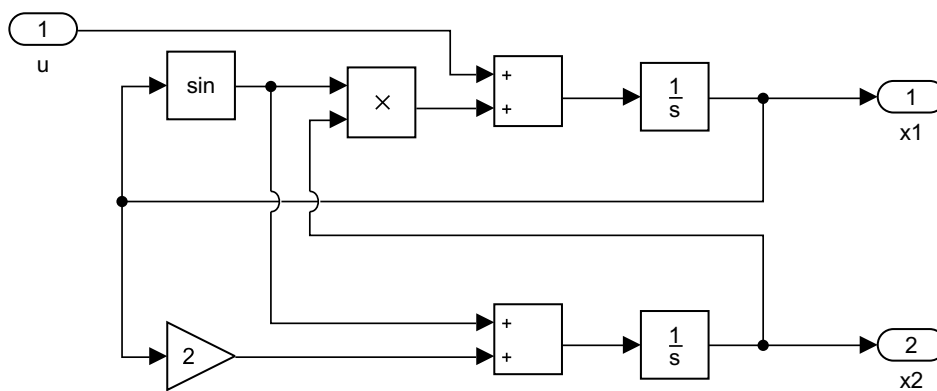
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= (A^T A)^{-1} A^T b \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.4265 \\ 0.9559 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{15}$$

3 Spätnoväzbová linearizácia - vstupno-výstupná

Príklad prvý

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (16). Bloková schéma systému je na obr. 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u + \sin(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + \sin(x_1) \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{16}$$



Obr. 2: Bloková schéma systému z rovn. (16)

Rovноваžný stav systému

Bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovažným bodom tohto systému, čo si môžeme overiť dosadením:

$$\dot{x}_1|_{(x_1=x_2=0)} = \sin(0)0 = 0$$

$$\dot{x}_2|_{(x_1=x_2=0)} = 0 + \sin(0) = 0$$

všimnime si, že v tomto bode sú derivácie stavových premenných v čase nulové, čo je charakteristické pre rovnovažné body.

Predpokladajme, že chceme tento systém riadiť tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu r a aplikujme nelineárne riadenie navrhnuté metódou vstupno-výstupnej spätnoväzobnej linearizácie. Metódu vysvetlíme rovno počas návrhu.

Prvý krok metódy - derivácia rovnice výstupu

Prvým krokom metódy je derivácia vzťahu pre výstup systému y . Derivujeme toľkokrát koľkokrát je potrebné, nato aby sa vstup systému u objavil v rovnici.

$$\begin{aligned}y &= x_2 \\ \implies \dot{y} &= \dot{x}_2 = 2x_1 + \sin(x_1) \\ \implies \ddot{y} &= \ddot{x}_2 \\ &= 2 + \cos(x_1)\dot{x}_1 \\ &= 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2)\end{aligned}$$

vo výsledku dostaneme vzťah rovn. (17).

$$\ddot{y} = 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \quad (17)$$

Druhý krok - voľba zákona linearizácie

Teraz si všimnime, že ak zvolíme vstup u do systému, tak ako je rovn. (18)

$$u = -\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} \quad (18)$$

po dosadení do rovn. (17) dostaneme section 3.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 2 + \cos(x_1)(u + \sin(x_1)x_2) \\ &= 2 + \cos(x_1)\left(-\sin(x_1)x_2 + \frac{v}{2 + \cos x_1} + \sin(x_1)x_2\right) \\ &= 2 + \cos(x_1)\left(\frac{v}{2 + \cos x_1}\right) \\ &= v\end{aligned}$$

Dostáme tak vzťah medzi výstupom systému y a vstupom do zákona linearizácie v v rovn. (19).

$$\ddot{y} = v \quad (19)$$

Voľba takéhoto zákona, nazveme ho zákonom linearizácie, pre vstup u do systému, je druhým krokom metódy.

Tretí krok - návrh zákona riadenia linearizovaného systému

Ako posledný krok, musíme zvoliť tvar v , tak aby sme dosiahli požadovanú dynamiku systému.

Zvolme si v podľa rovn. (20).

$$\begin{aligned} v &= \ddot{r} + k_1 \dot{e} + k_0 e \\ &= -k_1 \dot{y} + k_0 e \text{ keďže } r \text{ je konšt., tak jeho derivácie sú } 0 \end{aligned} \quad (20)$$

potom dosadením rovn. (20) do rovn. (19) dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{r} + k_1 \dot{e} + k_0 e \\ 0 &= \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \end{aligned}$$

pre takúto voľbu v bude teda pre systém platiť rovnica rovn. (21).

$$0 = \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \quad (21)$$

kde k_1 a k_0 sú voliteľné parametre.

Parametre k_1 a k_0 vieme tiež navrhnuť podľa potreby. Ak si prepíšeme rovnicu rovn. (21) na rovn. (22).

$$r_e = \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \quad (22)$$

kde r_e bude žiadaná hodnota odchýlky (ktorá je 0), tak vieme vyjadriť prenos $\frac{e}{r_e}$:

$$\begin{aligned} r_e &= \ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e \\ R_e &= Es^2 + k_1 Es + k_0 E \\ R_e &= E(s^2 + k_1 s + k_0) \\ \frac{E}{R_e} &= \frac{1}{s^2 + k_1 s + k_0} \end{aligned}$$

charakteristický polýnóm teda bude rovn. (23).

$$s^2 + k_1 s + k_0 = 0 \quad (23)$$

zvolíme žiadanú polohu pólov p_1, p_2 potom žadaný charakteristický polýnóm

bude rovn. (24).

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2 \quad (24)$$

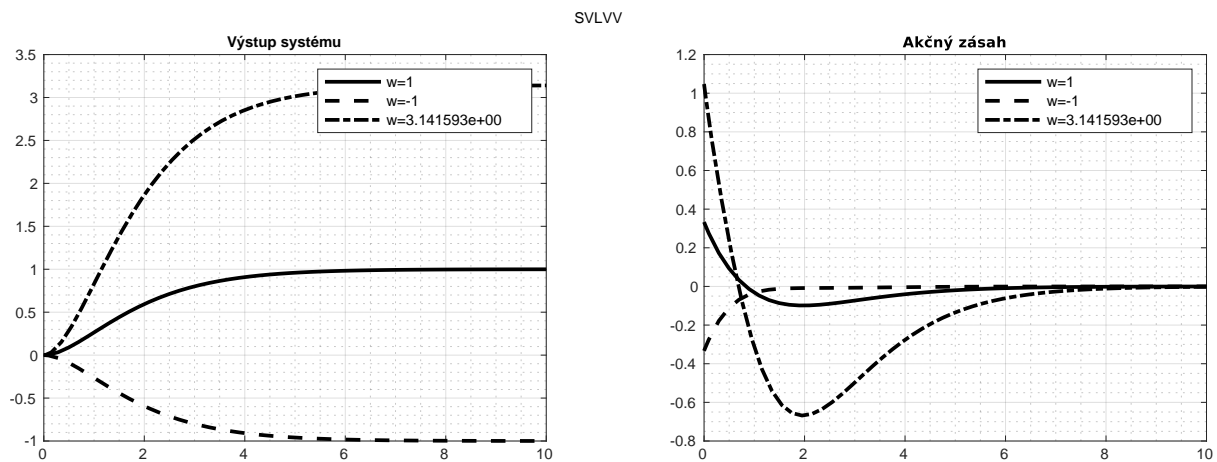
porovnaním rovn. (23) a rovn. (24) dostaneme sústavu rovníc rovn. (25).

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= k_0 \\ -(p_1 + p_2) &= k_1 \end{aligned} \quad (25)$$

cez ktoré vieme vypočítať k_1 a k_0 pre ľubovoľné žiadané póly.

Zvolme si $p_1 = -1$ a $p_2 = -1$ potom z rovn. (25) dostaneme $k_1 = 2$ a $k_2 = 1$

Máme tak navrhnutý regulátor a výsledok zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 3.



Obr. 3: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej rovn. (16)

Zhrnutie krokov metódy

Kroky návrhu sumarizujeme v 3 bodoch:

1. Derivácia rovnice výstupu, až kým sa v rovnici neobjaví vstupná premenná
2. Voľba zákona linearizácie (napríklad odčítanie nelineárnych zložiek)
3. Návrh zákona riadenia (regulátora) pre linearizovaný systém

Porovnanie s PID

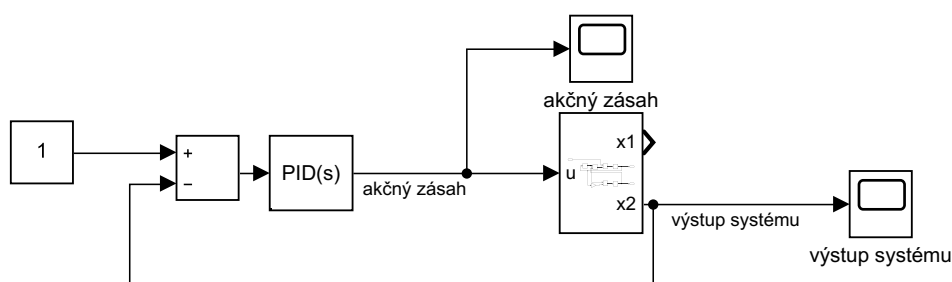
Pre porovnanie skúsme navrhnuť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovážnom bode $x_1 = x_2 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (26).

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta u \\ \Delta \dot{x}_2 &= 3\Delta x_1 \\ \Delta y &= \Delta x_2\end{aligned}\tag{26}$$

Vyjadriť si prenosovú funkciu systému, pre jednoduchší návrh parametrov regulátora. Vyjadrenie prebieha v rovn. (27). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Delta x_2 = \frac{1}{s}3\Delta x_1 = \frac{1}{s^2}3\Delta u \\ \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{3}{s^2}\end{aligned}\tag{27}$$

Zapojme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 4. Ktorý má prenos rovn. (28), kde P , D , I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie ešte prenosy systému a regulátora roznásobíme, dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (29).



Obr. 4: Zapojenie PID regulátora

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s}\tag{28}$$

$$G_{ORO} = 3 \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}\tag{29}$$

Následne vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa známeho

pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (30). Dostaneme tak prenos rovn. (31).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{3 \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}}{1 + 3 \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3}} \\ &= \frac{3(Ps + Ds^2 + I)}{s^3 + 3Ps + 3Ds^2 + 3I} \end{aligned} \quad (31)$$

Využime teraz metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -1, p_2 = -0.5, p_3 = -0.5$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladíme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly, teda roznásobením rovn. (32).

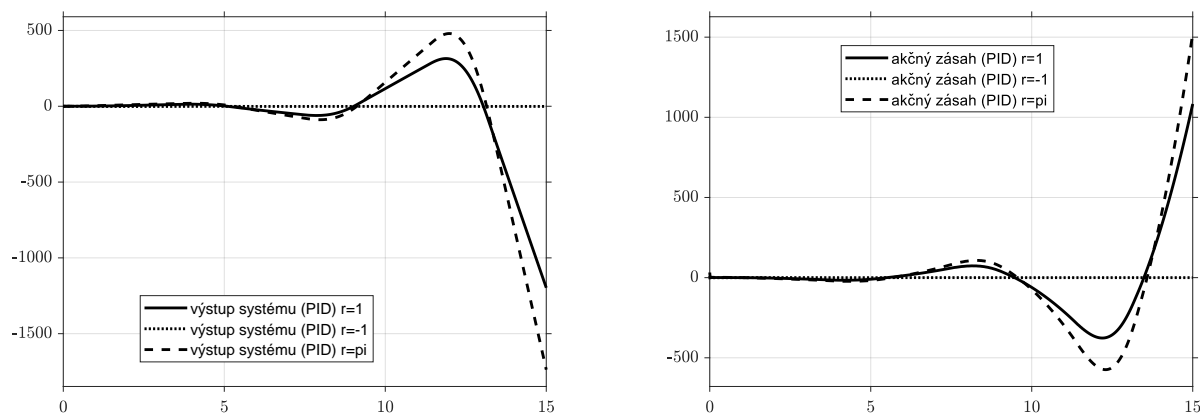
$$\begin{aligned} P(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \\ &= (s + 1)(s + 0.5)(s + 0.5) \\ &= s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 \end{aligned} \quad (32)$$

Tento želaný polynóm porovnáme s CHPOLY URO, teda rovn. (33), dostaneme tak rovnice rovn. (34) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

$$s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 = s^3 + 3Ps + 3Ds^2 + 3I \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 3P &= 2.00 & P &= \frac{2.00}{3} \\ 3D &= 1.25 & \implies D &= \frac{1.25}{3} \\ 3I &= 0.25 & I &= \frac{0.25}{3} \end{aligned} \quad (34)$$

Aplikujme tento regulátor aplikovať na nelineárny systém, ktorý chceme riadiť. Výsledok zo simulácie je na obr. 5. Z výsledku môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné.



Obr. 5: Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement

4 Záver

Tak ako sme vyššie demonštrovali, pre riadenie niektorých systémov je využitie nelineárneho riadenia nevyhnutné, v takýchto prípadoch nám metóda vstupno-stavovej linearizácie a metóda vstupno-výstupnej linearizácie poskytujú spôsob ako riadenie syntetizovať, v iných prípadoch však riadenie pomocou lineárneho PID regulátora, ktorý má parametre navrhnuté pre systém linearizovaný v rovnovážnom stave, postačuje a je jednoduchší z hľadiska návrhu. Preto je nutné pre každý systém určiť, či je riadenie pomocou PID regulátora postačujúce a ak nie, využiť napríklad jednu z vyššie uvedených metód.

V prípade použitia uvedených metód návrhu nelineárneho riadenia, je potrebné analyzovať aj výsledný tvar nelineárneho zákona riadenia, pretože tento nemusí byť definovaný, pre všetky hodnoty stavových premenných.

Literatúra

- [1] SLOTINE, Jean-Jacques E., et al. Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.