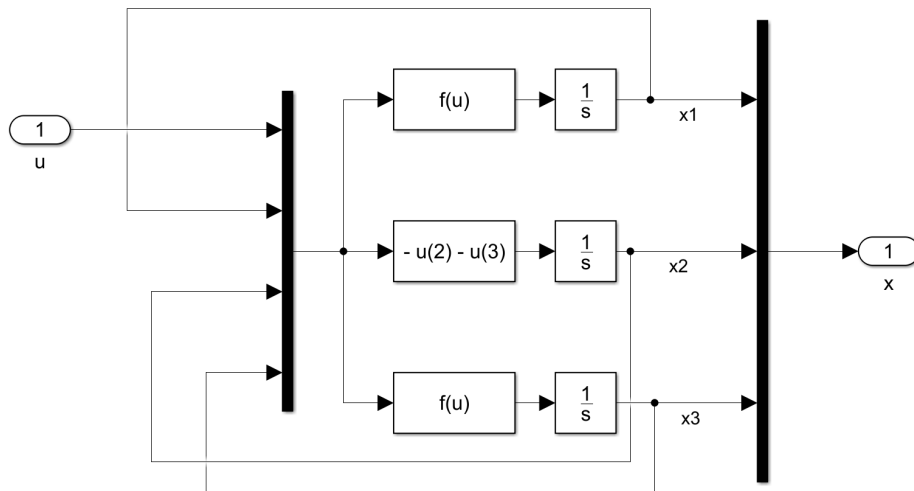


Príklad 2

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (1). Bloková schéma systému je na obr. 1.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) - u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1}$$



Obr. 1: Bloková schéma systému z rovn. (1)

Tento systém má stavy x_1 , x_2 a x_3 . Stav x_1 je zároveň výstupom systému. Bod $[0 \ 0 \ 0]$ je rovnovážny stav systému. V tomto bode sú časové derivácie všetkých stavových premenných rovné nule.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 1 + \sin(0) = 0 \\ \dot{x}_2|_{x_1=x_2=x_3=0} &= -0 - 0 = 0 \\ \dot{x}_3|_{x_1=x_2=x_3=0} &= \cos(0)\sin(0) - 0\cos(0) - 0 = 0\end{aligned}\tag{2}$$

Návrh riadenia pomocou Vstupno-stavovej linearizácie - príklad 2

Naším cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup y dosiahol žiadajú hodnotu r . Systém obsahuje nelinearity v dvoch rovniciach, preto je ťažké určiť zákon riadenia len pohľadom na tieto rovnice. Použijeme metódu Vstupno-stavovej linearizácie, pri ktorej navrhujeme linearizačnú slučku, s ktorou sa náš systém bude správať ako lineárny. Pre tento lineárny systém potom navrhujeme regulátor, ktorý zabezpečí že sa výstup systému ustálí na žiadanej hodnote.

Prvým krokom metódy je určenie transformačných vzťahov rovn. (3).

$$\begin{aligned}z_1 &= -x_2 \\z_2 &= x_1 + x_2 \\z_3 &= \sin(x_2) - x_3\end{aligned}\tag{3}$$

Druhým krokom je transformácia nášho systému zo stavov x_1, x_2 a x_3 na stavy z_1, z_2 a z_3 . To dosiahneme derivovaním transformačných vzťahov (v čase) a dosadením vzťahov z pôvodných rovníc.

$$\dot{z}_1 = -\dot{x}_2 = x_1 + x_2 = z_2\tag{4}$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3 + \sin(x_2) - x_1 - x_2 = z_3\tag{5}$$

$$\dot{z}_3 = \cos(x_2)\dot{x}_2 - \dot{x}_3 = \cos(x_2)(-x_1 - x_2) - \cos(x_2)(\sin(x_2) - x_3) + u = u - \cos(z_1)(z_2 + z_3)\tag{6}$$

Transformovaný systém potom opisujú rovn. (7).

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= u - \cos(z_1)(z_2 + z_3)\end{aligned}\tag{7}$$

Na základe rovn. (7) dokážeme zvoliť taký zákon riadenia, ktorý vykompenzuje nelinearity pôvodného systému, rovn. (8). Prvý člen tejto rovnice zabezpečí linearizáciu systému, tvorí linearizačnú slučku. Druhý člen v zabezpečí stabilitu dynamiky systému, rovn. (10). Posledný člen r predstavuje našu žiadajú hodnotu. Keďže náš linearizovaný systém nemusí mať jednotkové zosilnenie, musíme túto hodnotu predeliť statickým zosilnením linearizovaného systému K . Druhou možnosťou je zvoliť také konštanty k_1, k_2 a k_3 aby zosilnenie bolo rovné jednej.

$$u(z, v, r) = \cos(z_1)(z_2 + z_3) + v + r/K\tag{8}$$

$$u(x, v, r) = \cos(x_2)(x_1 + x_2 + \sin(x_2) - x_3) + v + r/K \quad (9)$$

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 \quad (10)$$

Dosadením zákona riadenia do nášho transformovaného systému dosiahneme lineárny systém, rovn. (11).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 + \frac{r}{K} \end{aligned} \quad (11)$$

Tento systém môžeme zapísať v kanonickej forme riaditeľnosti pomocou matice A a vektorov b , c a d .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prenosová funkcia systému $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1}{K} \frac{1}{s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1} \quad (12)$$

Zosilnenie systému získame ak limitujeme s k nule. Potom dostaneme rovn. (13), z ktorého si vyjadríme konštantu K , rovn. (14).

$$\frac{1}{K} \frac{1}{k_1} = 1 \quad (13)$$

$$K = \frac{1}{k_1} \quad (14)$$

Konštanty k_1 , k_2 a k_3 majú zabezpečiť stabilitu dynamiky systému. Môže ich určiť na základe vlastných čísel matice A . Aby bol systém stabilný, musí mať matica A záporne definitné vlastné čísla.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_1 & k_2 & \lambda + k_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + k_3 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0 \quad (15)$$

Nech všetky tri λ majú hodnotu -1, dostaneme tak žiadaný polynóm pre vlastné čísla, rovn. (16).

$$(\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \quad (16)$$

Porovnaním rovn. (15) a rovn. (16) získame vzťahy, z ktorých určíme koeficienty, rovn. (17).

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 3 \\ k_3 &= 3 \end{aligned} \quad (17)$$

Z toho určíme zosilnenie K , rovn. (18).

$$K = 1 \quad (18)$$

Návrh riadenia pomocou obyčajnej linearizácie s PID regulátorom - príklad 2

Rozvojom do taylorovho radu dostaneme z povodnych rovn. (1) nové rovn. (19). Pracovný bod nech je $[0 \ 0 \ 0]$. Po linearizácii dokážeme odvodiť prenosovú funkciu rovn. (20) a navrhnuť PID regulátor pomocou PPM.

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}_1 &= \Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x_3 \\ \dot{\Delta x}_2 &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ \dot{\Delta x}_3 &= \Delta x_1 + \Delta x_3 - \Delta u\end{aligned}\tag{19}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{s+1}{s^2+s+1}\tag{20}$$

Nech požadované korene uzavretého regulačného obvodu sú -1, -0.5 a -0.5. Porovnaním žiadaného polynómu (rovn. (21)) a polynómu uzavretého regulačného obvodu (rovn. (22)) dostaneme vzťahy na výpočet parametrov PID regulátora rovn. (23).

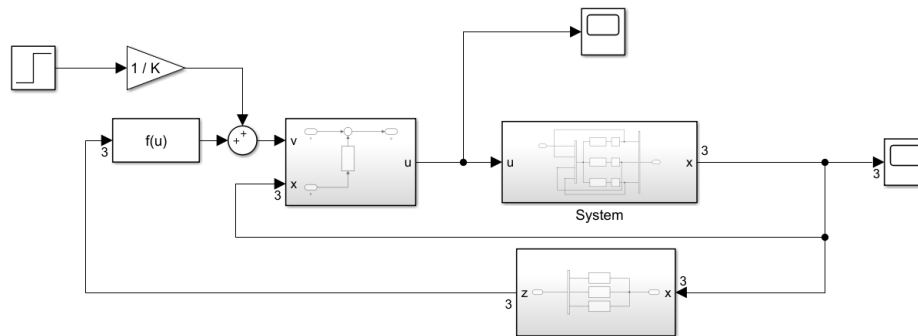
$$s^3 + 2s^2 + 1.25s + 0.25 = 0\tag{21}$$

$$(D+1)s^3 + (1+D+P)s^2 + (I+P)s + I = 0\tag{22}$$

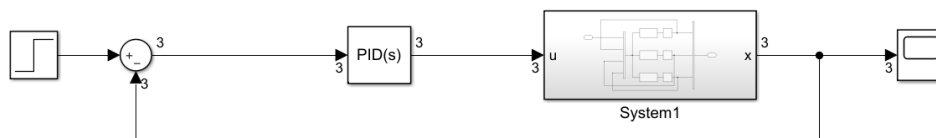
$$\begin{aligned}P &= 1 \\ I &= 0.25 \\ D &= 0\end{aligned}\tag{23}$$

Simulácie - príklad 2

Navrhnuté riadenia môžeme porovnať pomocou Matlab-simulink. Simulačná schéma s nelineárnym riadením je na obr. 2 a s PID regulátorom je na obr. 3. Pri nelineárnom riadení urobíme skok žiadanej hodnoty na 10, zatiaľ čo pri PID regulátore len na 0,01, aby sme zostali čo najbližšie pri pracovnom bode.

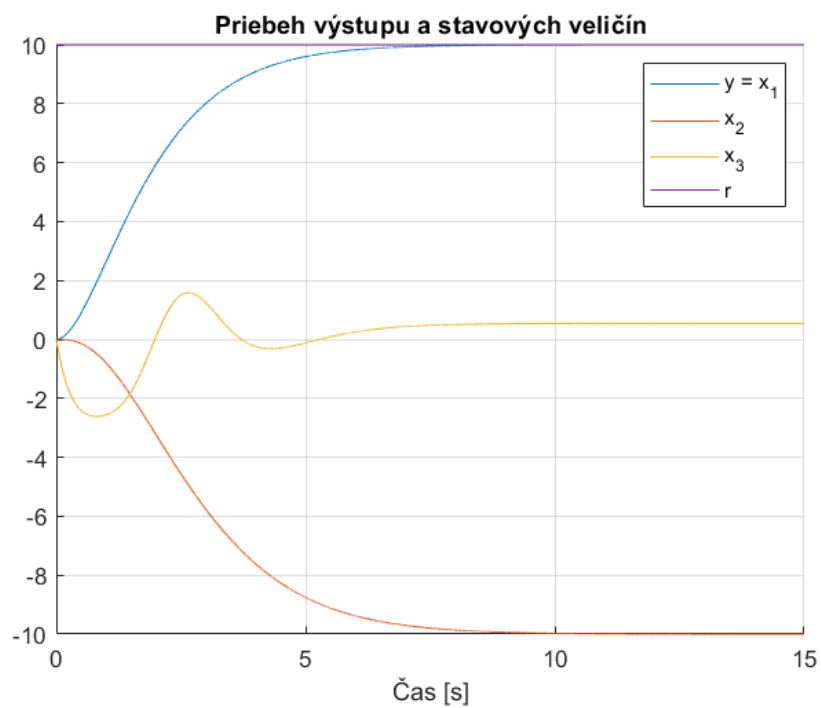


Obr. 2: Bloková schéma systému s nelineárnym riadením

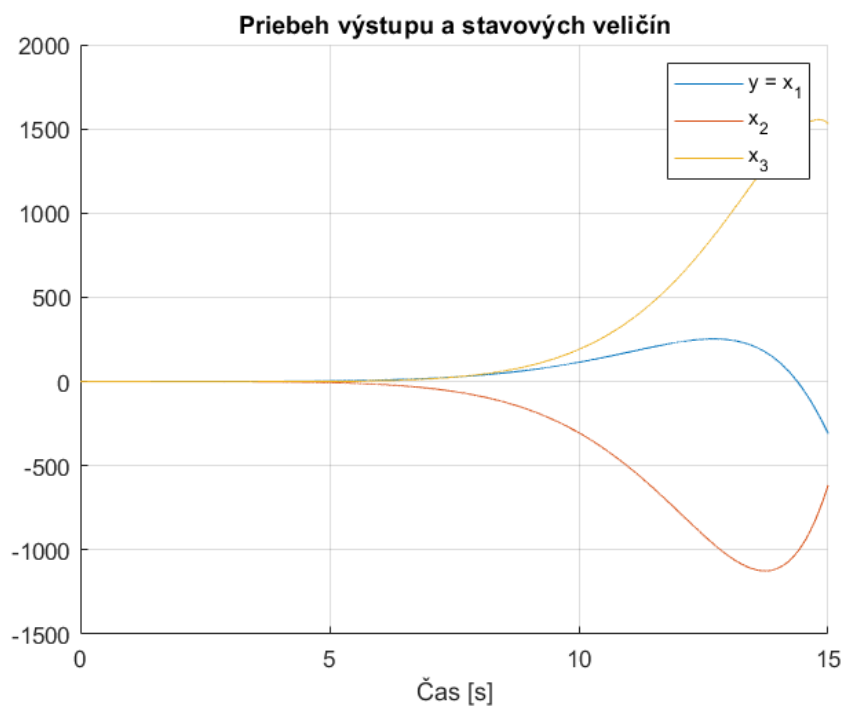


Obr. 3: Bloková schéma systému s PID regulátorom

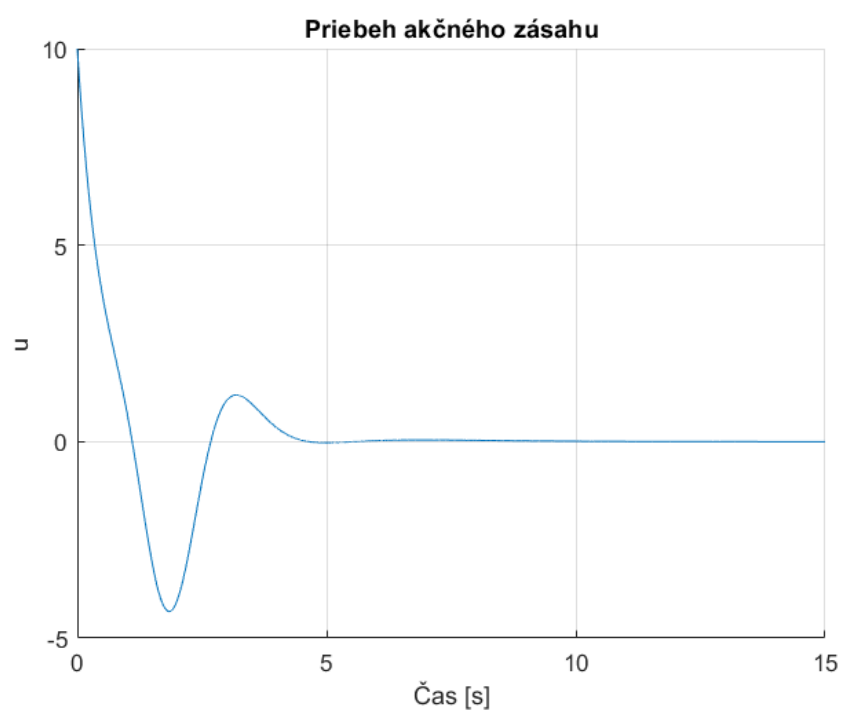
Na obr. 4 a obr. 5 môžeme vidieť, že takto navrhnutý PID regulátor nedokáže uradiť náš systém ani v blízkom okolí pracovného bodu. Je to spôsobené tým, že sa jednotlivé stavové veličiny dostanu ďaleko od pracovného bodu už pri malej zmene akčného zásahu. Na obr. 6 môžete vidieť priebeh akčného zásahu s nelineárnym riadením.



Obr. 4: Priebeh výstupu a stavových veličín s nelineárním riadením



Obr. 5: Priebeh výstupu a stavových veličín s PID



Obr. 6: *Priebeh akčného zásahu s nelineárním riadením*