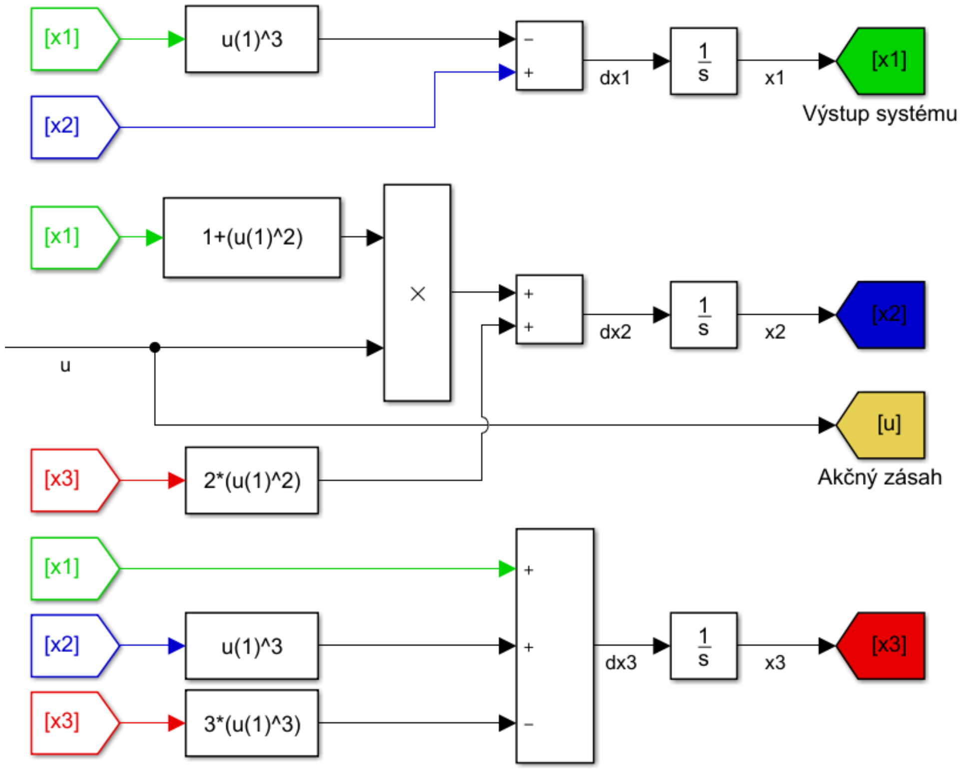
Príklad 2

Majme systém, ktorý je určený stavovým opisom rovn. (1). Bloková schéma systému je na obr. 1.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x_2} &= 2x_3^2 + (x_1^2 + 1)u \\ \dot{x_3} &= x_1 + x_2^3 - 3x_3^3 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1: *Bloková schéma systému z rovn.* (1)

Návrh riadenia - príklad 2

Teraz overíme, že bod $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, je rovnovažný bodom systému. Systém sa nachádza v rovnováhe, keď časové derivácie všetkých stavových premenných sú nulové.

$$\begin{aligned} \dot{x_1}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 - 0 = 0 \\ \dot{x_2}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 = 0 \\ \dot{x_3}|_{x_1=x_2=x_3=0} &= 0 + 0 - 0 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Ako vidíme v bode $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ sú derivácie stavových premenných v čase nulové, teda bod $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ je rovnovážny bod systému.

Našim cieľom je riadiť tento systém tak, aby výstup dosiahol žiadanú hodnotu r.

Aplikujeme nelineárne riadenie, opäť metódu vstupno výstupnej spätnoväzobnej linearizácie použitú aj v predchádzajúcom príklade.

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade je prvým krokom derivovanie vzťahu pre výstup systému y. Tento vzťah je potrebné derivovať pokiaľ sa v ňom neobjaví vstupný signál u.

$$\begin{aligned} & y = x_1 \\ \implies & \dot{y} = \dot{x_1} = x_2 - x_1^3 \\ \implies & \ddot{y} = \dot{x_2} - 3x_1^2\dot{x_1} \\ \implies & \ddot{y} = 2x_3^2 + (x_1^2+1)u - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 \\ & \quad = 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2+1)u \end{aligned} \tag{3}$$

Pre zjednodušenie do budúcna upravme výslednú rovn. (3) nasledovne:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2+1)u \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 \end{aligned} \tag{4}$$

Ak zvolíme vstup do systému, tak ako je v rovn. (5), po dosadení dostaneme rovn. (6). Voľba takéhoto zákona je nazývaná zákonom linearizácie, pre vstup u do systému.

$$u = \frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2+1} \tag{5}$$

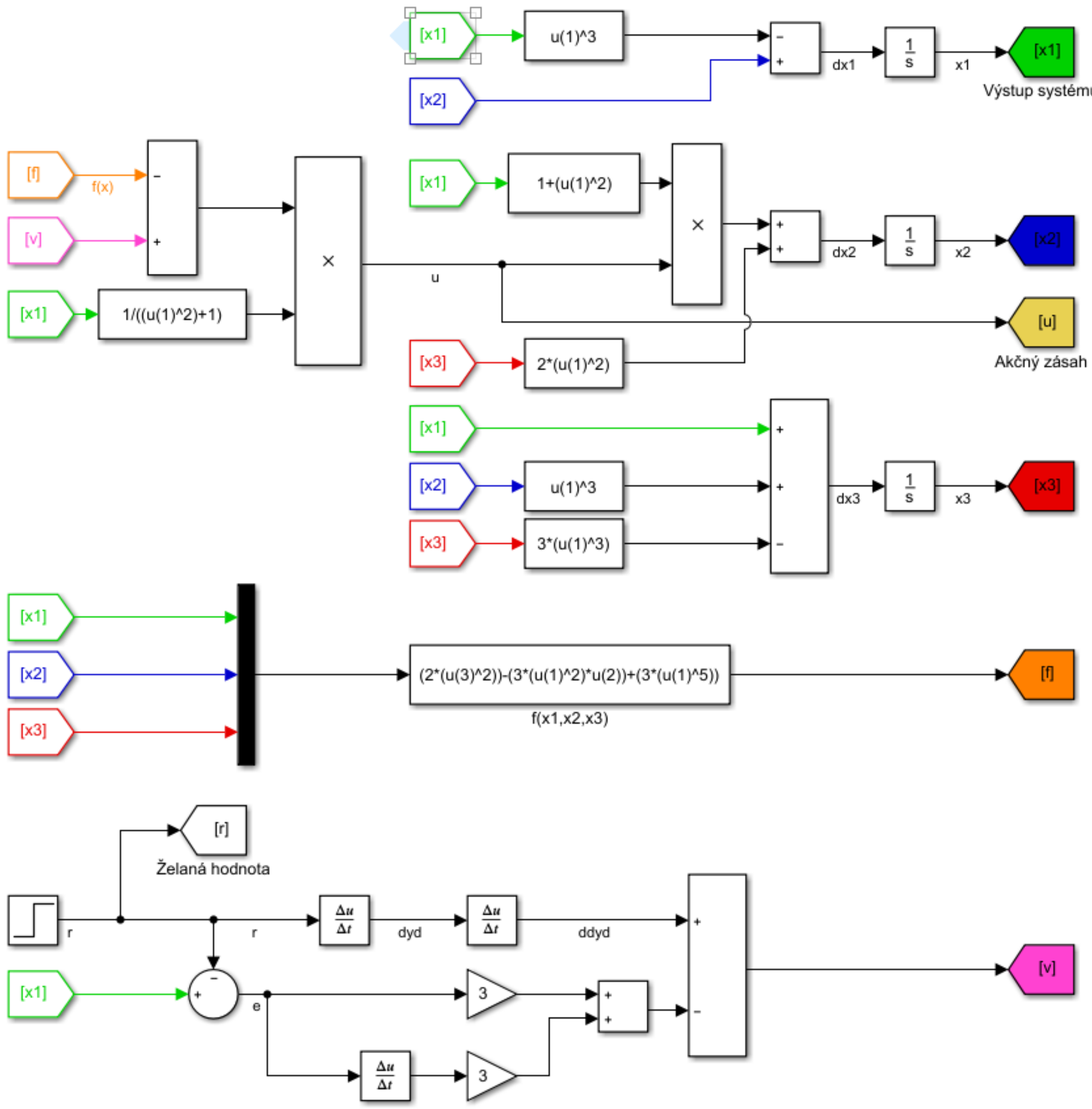
$$\begin{aligned} & \ddot{y} = 2x_3^2 - 3x_1^2x_2 + 3x_1^5 + (x_1^2+1)\frac{v - f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2+1} \\ & \ddot{y} = v \end{aligned} \tag{6}$$

Posledný krok. Ak si zvolíme v podľa rovn. (7), tak dostávame rovnicu pre dynamiku odchýlky rovn. (8). Ak zvolíme koeficienty k všetky kladné, dynamika odchýlky bude vždy stabilná a bude konvergovať k 0. Voľba tohto zákona, pre v, povedzme zákona riadenia linearizovaného systému. Pozn. $e = (r - y)$

$$v = \ddot{r} - k_1(\dot{y} - \dot{r}) - k_2(y - r) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & v = \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ \implies & \ddot{y} = \ddot{r} + k_1\dot{e} + k_2 e \\ \implies & 0 = \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e \end{aligned} \tag{8}$$

Máme navrhnutý lineárny regulátor. Kompletný systém vidíme na obr. 2. Výsledky zo simulácie, pre niekoľko žiadaných úrovní výstupu je na obr. 4.



Obr. 2: *Kompletná schéma riadného systému pomocou nelineárneho riadenia.*

Návrh PID - príklad 2

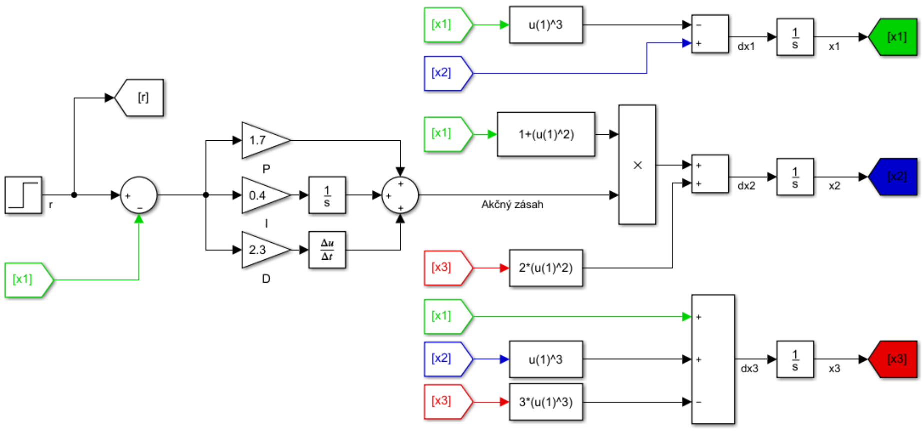
Pre porovnanie skúsme navrhnúť ešte PID regulátor pre systém linearizovaný v rovnovážnom bode $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Po linearizovaní bude mať systém tvar rovn. (9).

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x_1} &= \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x_2} &= \Delta u \\ \Delta\dot{x_3} &= \Delta x_1 \\ \Delta y &= \Delta x_1 \end{aligned} \tag{9}$$

Pre jednoduchší návrh parametrov regulátora si vyjadríme prenosovú funkciu systému. Vyjadrenie je ukázané v rovn. (10). V tomto momente ešte potrebujeme zapojiť pred systém regulátor a vyjadriť prenos uzavretého regulačného obvodu.

$$\begin{aligned} \Delta y = \Delta x_1 = \frac{1}{s}\Delta x_2 = \frac{1}{s^2}\Delta u \\ \implies \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Zapojíme na vstup systému PID regulátor, ako je na obr. 3. Ktorý má prenos rovn. (11), kde P, D, I sú parametre regulátora. Pre zjednodušenie, prenosy systému a regulátora roznásobíme a dostaneme tak prenos otvoreného obvodu G_{ORO} daný rovn. (12).



Obr. 3: *Zapojenie PID regulátora*

$$\frac{U(s)}{E(s)} = P + Ds + \frac{I}{s} \tag{11}$$

$$G_{ORO} = \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3} \tag{12}$$

Vyjadríme prenos uzavretého regulačného obvodu G_{URO} podľa pravidla zápornej spätnej väzby rovn. (13). Dostaneme tak prenos rovn. (14).

$$G_{URO} = \frac{G_{ORO}}{1 + G_{ORO}} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{\frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}}{1 + \frac{Ps+Ds^2+I}{s^3}} \\ &= \frac{Ps + Ds^2 + I}{s^3 + Ps + Ds^2 + I} \end{aligned} \tag{14}$$

Využijeme metódu Pole-Placement na návrh parametrov regulátora, umiestnime póly na nasledovných pozíciách komplexnej roviny $p_1 = -1, p_2 = -0.8, p_3 = -0.5$. Teda nech sú póly reálne a záporné, čo zabezpečí stabilitu lineárneho systému, keďže na kvalitu riadenia zatiaľ nekladieme dôraz.

Polynóm, ktorý bude mať zvolené korene, získame roznásobením polynómov prvého stupňa, ktorých korene sú zvolené póly (rovn. (15)).

$$\begin{aligned} P(s) &= (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) \\ &= (s+1)(s+0.8)(s+0.5) \\ &= s^3+2.3s^2+1.7s+0.4 \end{aligned} \tag{15}$$

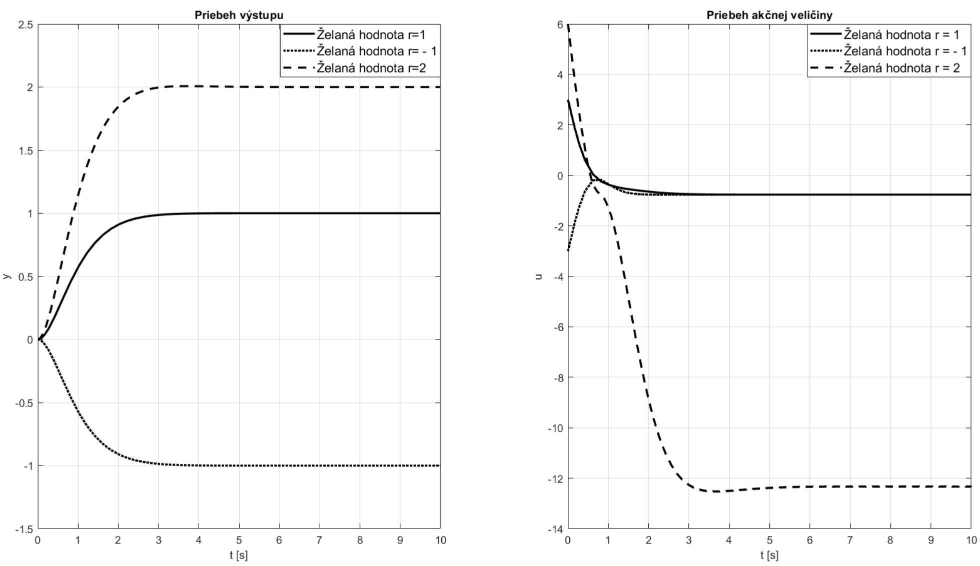
Tento želaný polynóm porovnáme s charakteristickým polynómom URO, teda rovn. (16), dostaneme tak rovnice rovn. (17) z ktorých vypočítame parametre regulátora.

$$s^3+2.3s^2+1.7s+0.4 = s^3+Ps+Ds^2+I \tag{16}$$

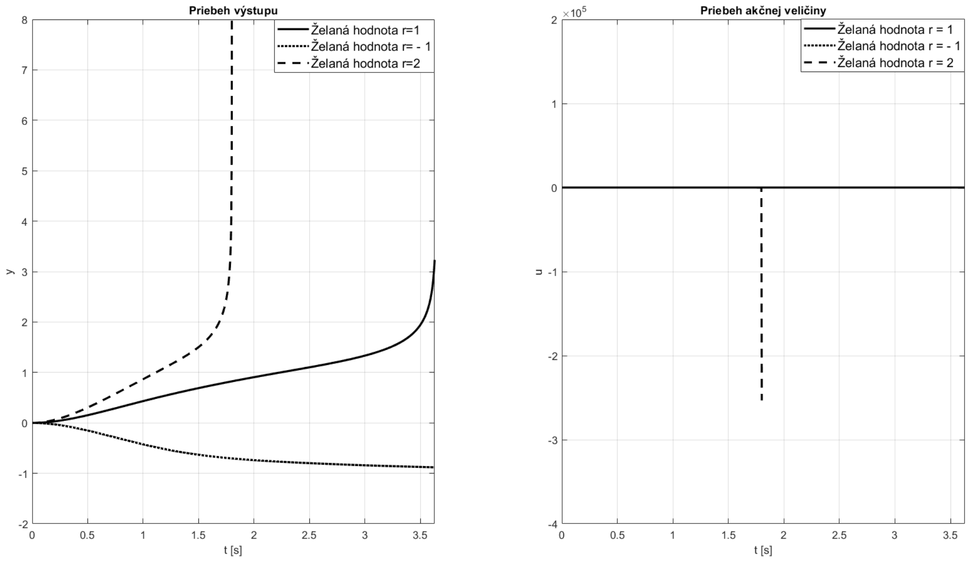
$$\begin{aligned} P &= 1.7 \\ D &= 2.3 \\ I &= 0.4 \end{aligned} \tag{17}$$

Aplikujme PID regulátor na nelineárny systém (obr. 3), ktorý chceme riadiť . Výsledok zo simulácie je na obr. 5.

Porovnanie riadenia - príklad 2



Obr. 4: *Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu nelin. regulátorom navrhnutým pomocou metódy spätnoväzbovej linearizácie vstupno-výstupnej.*



Obr. 5: *Regulácia výstupu na konštantnú hodnotu PID regulátorom navrhnutým pomocou metódy pole-placement*

Záver - príklad 2

Z výsledku môžeme usúdiť, že nelineárne riadenie je v tomto prípade, nevyhnutné. Systém regulovaný PID regulátorom nebol schopný sa stabilizovať v takom okolí pracovného bodu ako to dokázal systém s regulátorom navrhnutým pomocou metódy vstupno-výstupnej spätnoväzbovej linearizácie.