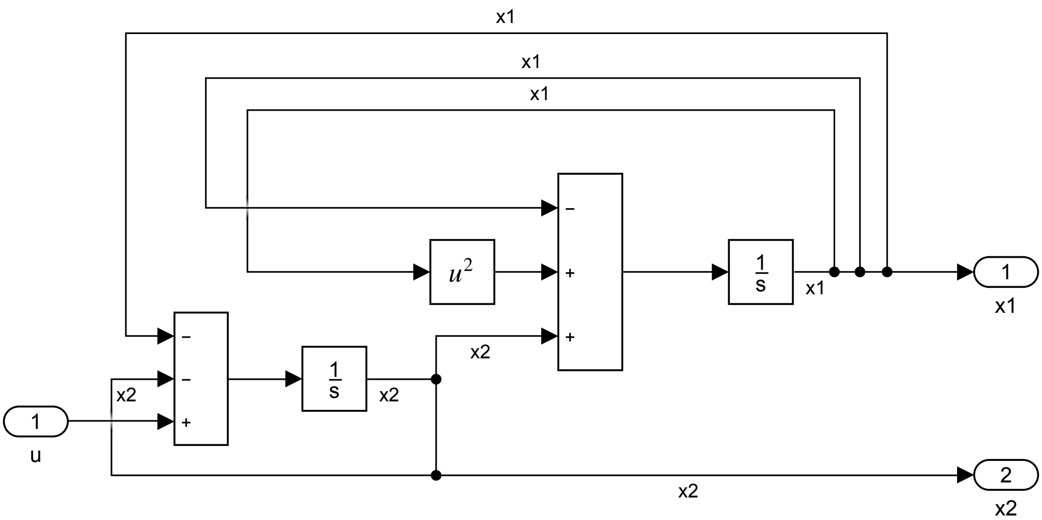
## 0.1 Úvodný príklad

Uvažujme nelineárny systém, opísaný stavovými rovnicami 1, ktorého bloková schéma je zobrazená na obrázku 1.

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1^2 + x_2 - x_1 \\ \dot{x_2} &= u - x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

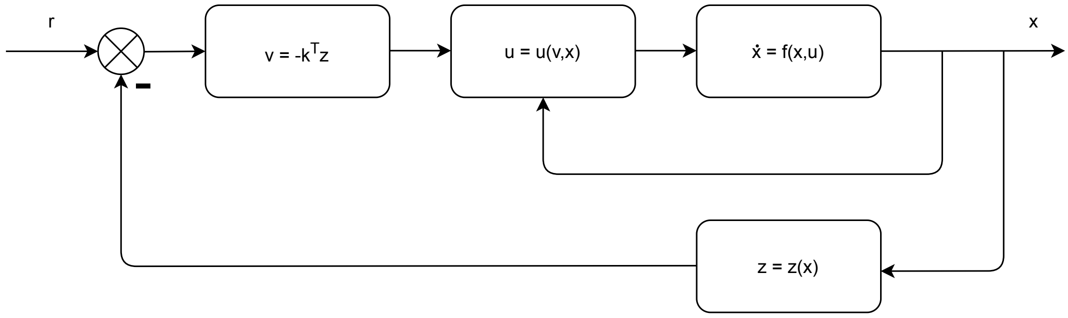
Aby sme mohli navrhnúť nelineárne riadenie najskôr overíme že je bod $x_1 = x_2 = 0$ rovnovážnym bodom. V rovnovážnom stave sú derivácie rovné nule. Z rovníc 2 vyplýva, že bod $x_1 = x_2 = 0$ je rovnovážnym bodom.

$$\begin{aligned} \dot{x_1}|_{x1=x2=u=0} &= 0 \\ \dot{x_2}|_{x1=x2=u=0} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$




Obr. 1: *Bloková schéma systému 1*

Na riadenie nelineárneho systému (rovnica 1), použijeme metódu vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie (obrázok 2), tak aby sme dosiahli požadovanú hodnotu $r$.




Obr. 2: *Metóda vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie*

Postup pri metóde vstupno-stavovej spätnoväzobnej linearizácie je nasledovný.

Najskôr si určíme transformačné vzťahy, tzn. určíme vektor $r$.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_1^2 + x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Následne transformujeme zadaný nelineárny systém (rovnica 1), pomocou nájdených transformačných vzťahov (rovnica 3).

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= \dot{x_1} = z_2 - z_1 \\ \dot{z_2} &= 2x_1\dot{x_1} + \dot{x_2} \\ &= 2x_1(x_1^2 + x_2 - x_1) + u - x_1 - x_2 \\ &= 2z_1(z_2 - z_1) + u - z_1 - z_2 + z_1^2 \\ &= u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Aby sme dosiali lineárny transformovaný systéme zavedieme novú premennú $v$.

$$v = u - z_1^2 + 2z_1z_2 - z_1 - z_2 \tag{5}$$

Z trasformovanej sústavy získame vzťah pre nelineárne riadenie, akčný zásah $u$.

$$u = v + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_1 + z_2 \tag{6}$$

Zavedením novej premennej sme získali nový transformovaný lineárny systém.

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 - z_1 \\ \dot{z_2} &= v \end{aligned} \tag{7}$$

Po získaní lineárneho systému môžeme zaviesť lineárny stavový regulátor (rovnica 8).

$$v = k_1z_1 + k_2z_2 \tag{8}$$

Lineárny systém s regulátorom bude vyzerať nasledovne: rovnica 9.

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 - z_1 \\ \dot{z_2} &= k_1z_1 + k_2z_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Na vypočítanie parametrov regulátora a nastavenie dynamiky systému potrebujeme odvodiť charakteristickú rovnicu systému. Na získanie charakteristickej rovnice potrebujeme získať maticu $A$.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}_{|z_1=z_2=0} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{10}
$$

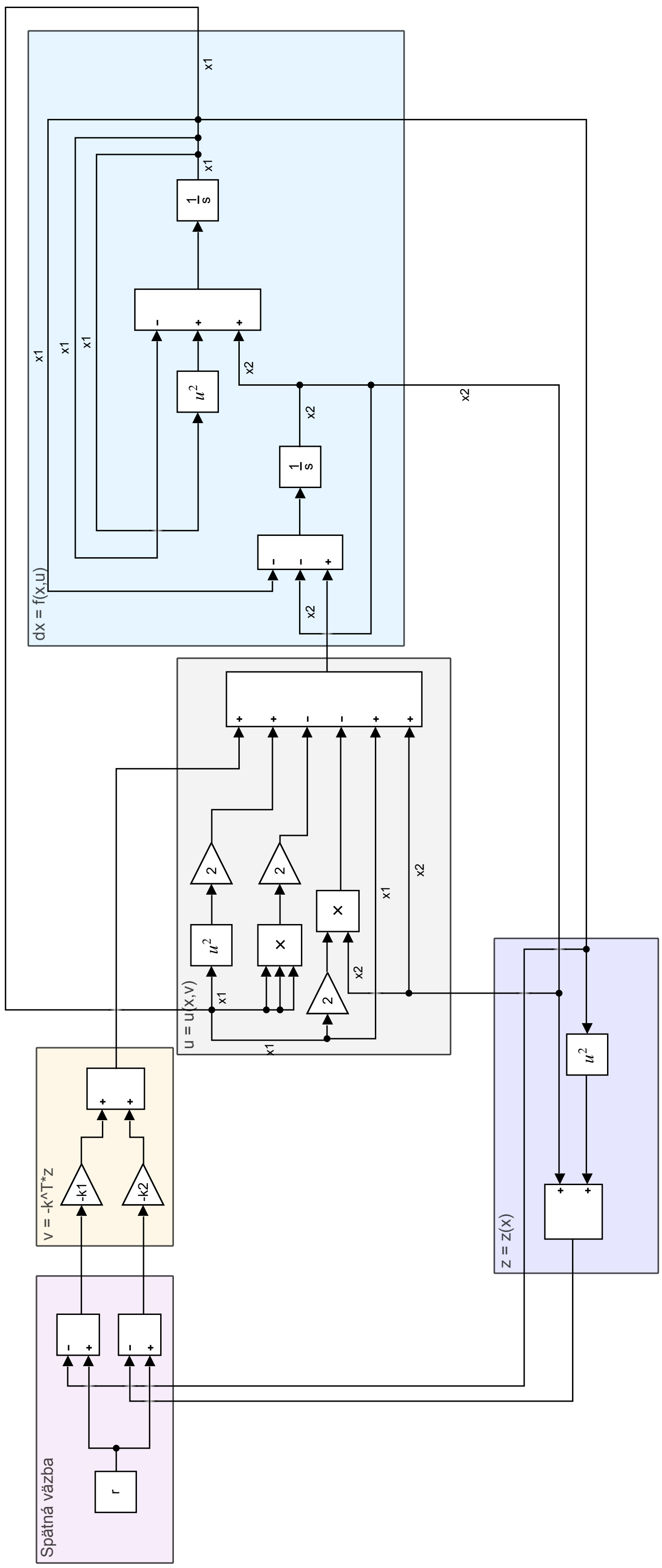
Charakteristickú rovnicu získame z rovnice 11.

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= 0 \\
|\lambda I - A| &= \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -k_1 & \lambda - k_2 \end{bmatrix} \\
|\lambda I - A| &= (\lambda + 1)(\lambda - k_2) - k_1 \\
\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

Vieme, že korene charakteristickej rovnice musia ležať v zápornej polrovine. Preto si zvolíme korene $\lambda_1 = -1$,$\lambda_2 = -2$, pomocou ktorých získame parametre $k_1, k_2$ (rovnica 12).

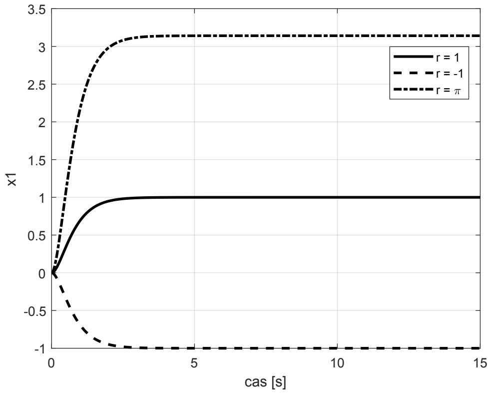
$$
\begin{aligned}
\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \\
\lambda^2 - \lambda(k_2 + 1) - k_1 &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\
k_1 &= -2 \\
k_2 &= -4
\end{aligned} \tag{12}
$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 3.

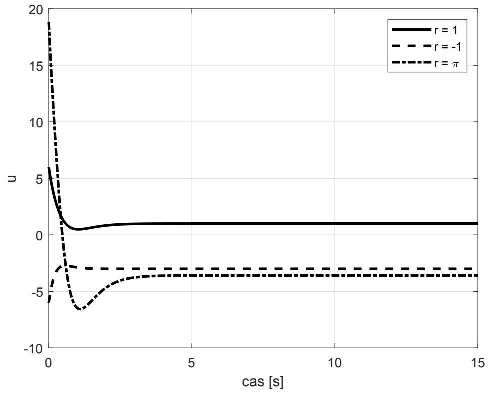



Obr. 3: *Bloková schéma systému s nelineárnym riadením*

Z výsledkov simulácie, ktoré su zobrazené na obrázkoch 7, 8, môžeme vidieť, že s pomocou navrhnutého riadenia pre nelinárny systém sme dokázali dosiahnuť požadovanú hodnotu $r$.




Obr. 4: *Priebeh stavovej premennej $x_1$ s nelineárnym riadením*




Obr. 5: *Priebeh akčného zásahu $u$ s nelineárnym riadením*

Teraz môžeme pre porovnanie navrhnúť PID regulátor. Aby sme mohli navrhnúť PID regulátor potrebujeme získať prenosovú funkciu systému, preto náš systém linearzijeme v pracovnom bode $x_1 = x_2 = 0$ (rovnica 13).

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x_1} \\ \Delta\dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta u \end{bmatrix} \tag{13}$$

Pričom matica $A$ má tvar:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial\dot{x_1}}{\partial u} \\ \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial\dot{x_2}}{\partial u} \end{bmatrix}_{|x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{|x_1=x_2=u=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{|x_1=x_2=u=0} \end{aligned} \tag{14}$$

Hľadané linearizované rovnice:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x_1} &= -\Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x_2} &= -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u \end{aligned} \tag{15}$$

Keď sme získali linearizované rovnice nelineárneho systému, z ktorých vyjadríme prenosovú funkciu $\frac{\Delta x_1}{\Delta u}$.Použijeme Laplaceovú transformáciu, aby sme sa získali prenosovú funkciu (rovnica 16).

$$s\Delta\dot{x_1} = -\Delta x_1 + \Delta x_2 => \Delta x_2 = \Delta x_1(s+1)$$
$$s\Delta\dot{x_2} = -\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta u$$

$$\begin{aligned} s\Delta x_1(s+1) &= -\Delta x_1 - \Delta x_1(s+1) + \Delta u \\ s\Delta x_1(s+1) + \Delta x_1 + \Delta x_1(s+1) &= \Delta u \end{aligned} \tag{16}$$

$$\Delta u = \Delta x_1(s^2+2s+2)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_1} = \frac{1}{(s^2+2s+2)}$$

Na výpočet parametrov PID regulátora použijeme metódu Pole-Placement. Aby sme ju mohli použiť vyjadríme si charakteristický polynóm (N(s)) z prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu $G_{URO}$ (rovnica 17)

$$\begin{aligned} G_{URO} &= \frac{(P+Ds+\frac{I}{s})(s^2+2s+2)}{1+(P+Ds+\frac{I}{s})(s^2+2s+2)} \\ N(s) &= s^4D + s^3(2D+P) + s^2(2P+2D+I) + s(1+2P+2I) + 2I \end{aligned} \tag{17}$$

Keď sme získali charakteristický polynóm N(s), využijeme metódu Pole-Placement, ktorá spočíva v porovnaní charakteristického polynómu so žalaným polynómom P(s). Umiestníme póly žalaného polynómu P(s) do zápornej reálnej polroviny. My si zvolíme štvornásobný koreň $p = -1$, čím sme zabezpečíme stabilitu lineárneho systému. Polynóm P(s) potom bude mať nasledujúci tvar (rovnica 18).

$$\begin{aligned} P(s) &= (s+1)^4 \\ &= s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \end{aligned} \tag{18}$$

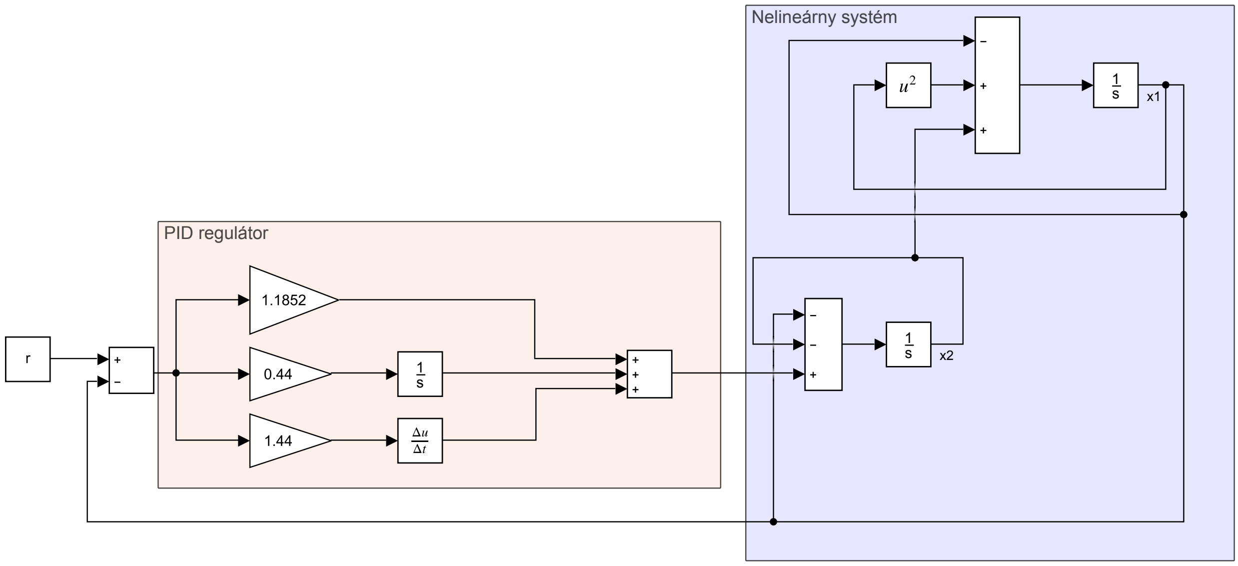
Porovnaním želaného polynómu P(s) s charakteristickým polynómom N(s), dostaneme preučeným systém rovníc:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ I \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Pomocou metódy najmenších štvorcov vyjadríme parametre regulátora (20).

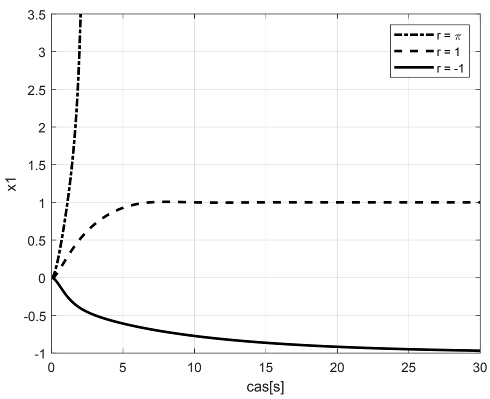
$$\begin{bmatrix} P \\ I \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1852 \\ 0.4444 \\ 1.4444 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Výsledky overíme simulačne pomocou schémy na obrázku 6.

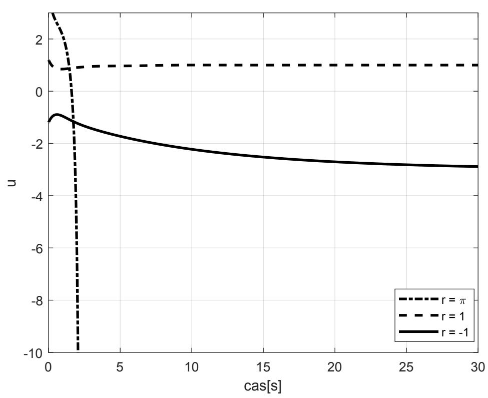



Obr. 6: *Bloková schéma systému s PID regulátorom*

Z výsledkov simulácie, ktoré su zobrazené na obrázkoch 7, 8, môžeme vidieť, že s pomocou PID regulátora sme dokázali dosiahnúť niektoré požadované hodnoty $r$, avšak pri vyšších požadovaných hodnotách bol už systém nestabilný.




Obr. 7: *Priebeh stavovej premennej $x_1$ s PID regulátorom*




Obr. 8: *Priebeh akčného zásahu $u$ s PID regulátorom*