Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

1.1 Das Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

Definition 1.1.1 (Zerlegung)**.** Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j ($j = 1, \dots, k$) der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j \coloneqq x_j - x_{j-1} \eqqcolon |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung)**.** Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z:

$$\Delta(z) \coloneqq \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3 (Riemannsche Zwischensumme)**.** Wir setzen

$$B(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I. In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Für $f \in B(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) \coloneqq \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Notation 1.1.4 (Ober- und Untersumme)**.** Für $f \in B(I)$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\coloneqq \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\} \\
\overline{m}_j &\coloneqq \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\} \\
\overline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\
\underline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\
\Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f)
\end{aligned}$$

Wir wollen die Zerlegung Z systematisch verfeinern.

Definition 1.1.5 (Verfeinerung einer Zerlegung)**.** Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I, falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.

Definition 1.1.6 (Gemeinsame Verfeinerung)**.** Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I, deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in B(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z, nur mehr.
SCHRITT 1: Angenommen Z^* enthält genau einen Teilpunkt $(y_{(l+1)})$ mehr als Z. Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j \quad \forall\, 0 \leq j \leq l \\ x_l < y_{l+1} &< x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j \quad \forall\, l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* \quad \forall\, 0 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* \quad \forall\, j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* \quad \forall\, j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1}(x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z. Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s. Dann gilt nach SCHRITT 1, dass

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \cdots \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \\ \overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \cdots \geq \overline{S}_{Z^*}(f) \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^*. Dann gilt

$$S_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$ □

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I. Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \qquad \forall f \in B(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$ □

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I. Somit sind

$$\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\}$$

und

$$\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral)**.** Es sei $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$. Dann definieren wir

$$\overline{J}(f) := \inf\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\ \right\} \qquad \text{(Oberintegral)}$$
$$\underline{J}(f) := \sup\left\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\ \right\} \qquad \text{(Unterintegral)}$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup\{\underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ ist eine Zerlegung von } I\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf\left\{\overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\} \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)
\end{aligned}$$ □

Definition 1.1.12 (Integral)**.** Es sei $I = [a, b]$. $f \in B(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}x =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in B(I)$ nennen wir $R(I)$.

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion)**.** $f(x) := c$ auf $[a, b]$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b - a)$$

Beispiel 1.1.14. Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil $\overline{J}(f) = 1$ und $\underline{J}(f) = 0$.

1.2 Integrabilitätskriterien

Satz 1.2.1 (1. Kriterium)**.** Es sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} &0 \leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow\ &0 \leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ \Rightarrow\ &f \in R(I) \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$ “ Angenommen $f \in R(I)$, das heißt

$$\begin{aligned} &\overline{J}(f) = \underline{J}(f) \\ &\overline{J}(f) = \inf\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\} \\ &\underline{J}(f) = \sup\left\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\begin{aligned} &\overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{S}_{Z_1}(f) \\ &\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} < S_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da $f \in R(I)$ gilt $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \vee Z_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \overline{J}(f) - \underline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.2 (2. Kriterium)**.** Sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \text{Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta \colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$$

Beweis. „⇐“ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„⇒ “ Sei $f \in R(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$ von I mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, wobei $\delta > 0$ noch später gewählt wird. Setze $Z^* = Z' \vee Z$. Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von Z^* mit denen in Z vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Da Z^* eine Verfeinerung von Z ist, sind alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^*. Das heißt die Intervalle I_j (zu Z) unterscheiden sich von den Intervallen I_j^* (zu Z^*) sofern Punkte x'_ν (Teilpunkte von Z^*) im Inneren von I_j liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \varnothing \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle I_j existieren maximal, für die I_j eine Verfeinerung von Z oder ? hinter reellen I_j^* ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung Z' unterhalb von I_j liegen. Wir haben l Punkte in Zerlegung Z'. Das heißt die Anzahl solcher Intervalle I_j ist maximal l.

$$\begin{aligned}
\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot \left|I_j^*\right| \\
&= \sum_j \left(\overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\
&= \sum_j \sum_{t: I_t^*} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\
\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^*} \left(\underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\
&= \sum_j \sum_{t: I_t^*} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\
f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\
&\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\
f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\
&\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\
&\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s\in I_j} f(x) \leq 2\left\|f\right\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$
$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2\left\|f\right\|_\infty + \sup_{?} f = 2\left\|f\right\|_\infty + \overline{m}_z^*$$
$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2\left\|f\right\|_\infty l\cdot\delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2\left\|f\right\|_\infty l\cdot\delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2\left\|f\right\|_\infty l\cdot\delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2\left\|f\right\|_\infty l\delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2\left\|f\right\|_\infty l\cdot\delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4\left\|f\right\|_\infty l\cdot\delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty+1)\cdot l}$

$$\Rightarrow \;\leq \frac{\varepsilon}{2} + 4\left\|f\right\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta\left(\|f\|+1\right)\cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um $\Delta(z) < \delta$ ist. □

Anwendung 1.2.3. Zerlegung Z_n von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$. ξ_n Zwischenpunkt von Zerlegung Z_n. Die Riemannnsumme

$$S_{z_n}(f,\xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f\left(\xi_j^n\right)\cdot\left|I_j^n\right|$$

konvergiert gegen $J(f)$ falls $f \in R(I)$.

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4.** Sei $z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ Zerlegung von $I = [a,b]$ und $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z, sodass

$$x_{j-1} \leq \zeta_j \leq x_j \quad \forall\, j = 1,\ldots,k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = \sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\cdot|I_j|$$

linear in f.

Korollar 1.2.5. Sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen Z_n von I mit Feinheit $\Delta(z_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und jede Folge $(\xi_n)_n$ von Zwischenpunkten ξ_n zugehörig zu Z_n ein Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f,\xi_n)$ existiert.
Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z_n und der Zwischenpunkten ξ_n und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f,\xi_n)$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Sei $f \in R(I)$ zu $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon\ \forall$ Zerlegungen Z von I mit $\Delta(z) < \delta$. Da $\Delta(z_n) \to 0$ für $n \to \infty$

$$\Rightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N}_0\colon \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) = J(f) \leq \overline{S}_Z(f) \\ \underline{S}_Z(f) \leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \overline{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow\ |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

„$\Leftarrow$“ Schritt 1: Angenommen $\lim\limits_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z_n) \to 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $(\xi_n)_n$ zu Z_n.
Seien $(Z_n^1)_n$, $(Z_n^2)_n$ zwei solche Folgen von Zerlegungen mit $(\xi_n^1)_n$, $(\xi_n^2)_n$ zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei $(Z_n)_n$ eine neue Folge von Zerlegungen von I, wobei $Z_{2k} = Z_k^2$ und $Z_{2k-1} = Z_k^1$, außerdem sei $\xi_{2k} = \xi_k^2$ und $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n^2}\Big(f, \xi_n^2\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n^1}\Big(f, \xi_n^1\Big) \end{aligned}$$

Schritt 2: (Später) $\square$

Satz 1.2.6. Der Raum $R(I)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum und $J : R(I) \to \mathbb{R}\quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ ist eine lineare Abbildung.
Für $f, g \in R(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f + \beta g \in R(I)$ und $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Beweis. Schritt 1: Sei $h : I \to \mathbb{R}$ und Zerlegung Z von I mit zugehörigen Intervallen Ij. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j = \sup_{x\in I_j} h(x) \quad \underline{m}_j &= \inf_{y\in I_j} h(y) \\ \Rightarrow \overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x\in I_j} h(x) - \inf_{y\in I_j} h(y) \\ &= \sup_{x\in I_j} h(x) + \sup_{y\in I_j} (-h(y)) \\ &= \sup_{x,y\in I_j} (h(x) - h(y)) \\ &= \sup_{x,y\in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y\text{)} \\ &= \sup_{x,y\in I_j} (|h(x) - h(y)|) \end{aligned}$$

$$\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) = \sup_{x,y \in I_j} \left(|h(x) - h(y)|\right) \tag{1}$$

Nehmen $h = \alpha f + \beta g$; $f, g \in R(I)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h(x) - h(y) &= \alpha \left(f(x) - f(y)\right) + \beta \left(g(x) - g(y)\right) \\
|h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \, |f(x) - f(y)| + |\beta| \, |g(x) - g(y)| \\
\Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&\overset{(1)}{=} \sup_{x,y \in I_j} \left(|h(x) - h(y)|\right) \\
&\leq |\alpha| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_j \Big(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)]\Big) \, |I_j| \\
&\leq |\alpha| \sum_j \Big(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\Big) \, |I_j| + |\beta| \sum_j \Big(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\Big) \, |I_j| \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \Big(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\Big) + |\beta| \Big(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\Big) \\
\Rightarrow \;\; \forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_1 \colon \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2\left(1 + |\alpha| + |\beta|\right)} \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_2 \colon \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2\left(1 + |\alpha| + |\beta|\right)}
\end{aligned}$$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2\left(1 + |\alpha| + |\beta|\right)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2\left(1 + |\alpha| + |\beta|\right)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

nach Satz 1.2.1 ist $h = \alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar.
Schritt 2: Für Zwischensummen

$$\begin{aligned}
S_Z(h, \xi) &= \sum_j h(\xi_j) \, |I_j| \\
&= \alpha S_Z(f, \xi) + \beta S_Z(g, \xi)
\end{aligned}$$

haben wir Linearität!
Für $h, f, g \in R(I)$ gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned}
J(h) &= \lim_{n \to \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\alpha S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta S_{Z_n}(g, \xi_n)\right) && (\Delta(Z_n) \to 0) \\
&\overset{1.2.5}{=}] \alpha \lim S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \lim_{n \to \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\
&= \alpha J(f) + \beta J(g)
\end{aligned}$$

□

Satz 1.2.7. Seien $f, g \in R(I)$. Dann folgt $f \cdot g \in R(I)$ sowie $|f| \in R(I)$. Ist außerdem $|g| \geq c > 0$ auf I für ein konstantes $c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g} \in R(I)$.

Beweis. Es sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$. Dann gilt

$$|h(x) - h(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |g(x)\,(f(x)-f(y)) + f(y)\,(g(x)-g(y))| \\
&\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x)-f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x)-g(y)| \\
\|f\|_\infty &= \sup_{x\in I} |f(x)| < \infty
\end{aligned}
$$

Z Zerlegung von I ist I_j; Teilintervalle

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_j \left(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)\right) \cdot |I_j| \\
\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x,y\in I_j} |h(x)-h(y)| \\
&\leq \|g\|_\infty \left(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\right) + \|f\|_\infty \left(\overline{m}_j(y) - \underline{m}_j(g)\right) \\
\overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|f\|_\infty \cdot \left|\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\right| + \|g\|_\infty \left(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right)
\end{aligned}
$$

Zu $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
\exists Z_1 \colon \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2\,(1+\|f\|_\infty)} \\
\exists Z_2 \colon \overline{S}_{Z_2}(f) - \underline{S}_{Z_2}(f) &< \frac{\varepsilon}{2\,(1+\|g\|_\infty)}
\end{aligned}
$$

Es sei $Z \coloneqq Z_1 \vee Z_2$

$$
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|f\|_\infty \cdot \left(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\right) + \|g\|_\infty \cdot \left(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
$$

Das heißt $h = f \cdot g \in R(I)$ nach Satz 1.2.1.
Für $|f|$ verwende

$$
\begin{aligned}
||f(x)| - |f(y)|| &\leq |f(x) - f(y)| \\
\Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y\in I_j} \left(||f(x)| - |f(y)||\right) \\
&\leq \sup_{x,y\in I_j} \left(|f(x) - f(y)|\right) \\
&= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)
\end{aligned}
$$

wie vorher folgt also $|f| \in R(I)$.
Für $\frac{f}{g}$ muss nur $\frac{1}{g}$ betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| &= \frac{|g(x)-g(y)|}{|g(x)|\,|g(y)|} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,|g(x)-g(y)| \\
\Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{y}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{y}\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\overline{m}_j(y) - \underline{m}_j(y)\right)
\end{aligned}
$$

Dann wie vorher. □