

Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Das eindimensionale Riemann-Integral	3
1.1	Der Integralbegriff nach Riemann	3
1.2	[*] Integrabilitätskriterien	6
1.3	[*] Mittelwertsätze der Integralrechnung	20
2	[*] Das orientierte Riemann-Integral	22
2.2	Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen	24
3	[*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung	25
3.1	Hauptsatz der Integralrechnung	25
3.2	Integrationstechniken	27

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

Definition 1.1.1 (Zerlegung). Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j ($j = 1, \dots, k$) der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung). Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z :

$$\Delta(Z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3. Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I .

Definition 1.1.4 (Riemannsche Zwischensumme). In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ als Stützstelle und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Definition 1.1.5 (Ober- und Untersumme). Für $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir außerdem

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &:= \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{m}_j &:= \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\ \underline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)} \end{aligned}$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Wir wollen die Zerlegung Z nun systematisch verfeinern.

Definition 1.1.6 (Verfeinerung einer Zerlegung).

- (a) Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I , falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.
- (b) Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z , nur mehr.

SCHRITT 1: Wir nehmen an Z^* enthielte genau einen Teilpunkt (y_{l+1}) mehr als Z . Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & \forall 0 \leq j \leq l \\ x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j & \forall l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* & \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z . Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^* . Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I . Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \square$$

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I . Somit sind

$$\left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

und

$$\left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von \mathbb{R} . Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral). Es sei $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$. Wir definieren

$$\overline{J}(f) := \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Oberintegral})$$

$$\underline{J}(f) := \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup \left\{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I \right\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf \left\{ \overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \quad \square \end{aligned}$$

Definition 1.1.12 (Integral). Es sei $I = [a, b]$. $f \in \mathcal{B}(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das (bestimmte) Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dx = \int_I f(x) \, dx = \int_I f \, dx =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{B}(I)$ nennen wir $\mathcal{R}(I)$.

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion). $f(x) := c$ auf $[a, b]$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = c \cdot (b - a)$$

Beispiel 1.1.14 (Dirichlet-Funktion). Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil $\overline{J}(f) = 1$ und $\underline{J}(f) = 0$.

Übung 1.1.15. Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von $\underline{J}(f)$ und $\overline{J}(f)$.

1.2 [*] Integrabilitätskriterien

Satz 1.2.1 (1. Kriterium). Es sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „ \Leftarrow “ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “ Angenommen $f \in \mathcal{R}(I)$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \vee Z_2$. Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

Satz 1.2.2 (2. Kriterium). Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

Beweis. „ \Leftarrow “ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„ \Rightarrow “ Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$ von I mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, wobei $\delta > 0$ noch später gewählt wird. Setze $Z^* = Z' \vee Z$. Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von Z^* mit denen in Z vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Da Z^* eine Verfeinerung von Z ist, sind alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* . Das heißt die Intervalle I_j (zu Z) unterscheiden sich von den Intervallen I_j^* (zu Z^*) sofern Punkte x'_ν (Teilpunkte von Z^*) im Inneren von I_j liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle I_j existieren maximal, für die I_j eine Verfeinerung von Z oder ? hinter reellen I_j^* ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung Z' unterhalb von I_j liegen. Wir haben l Punkte in Zerlegung Z' . Das heißt die Anzahl solcher Intervalle I_j ist maximal l .

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot |I_j^*| \\ &= \sum_j \left(\overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} \left(\underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\ f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ &\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$

$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l \delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um $\Delta(z) < \delta$ ist. □

Anwendung 1.2.3. Es sei $(Z_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. ξ_n seien die Zwischenpunkt von Zerlegung $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$. Die Riemannsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^n) \cdot |I_j^n|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen $J(f)$ falls $f \in \mathcal{R}(I)$.

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme). Seien $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ Zerlegung von $I = [a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z , sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j| \quad (I_j = [x_{j-1}, x_j])$$

linear in Bezug zu f . Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des $\mathcal{R}(I)$ später in Satz 1.2.6 noch beweisen.

Korollar 1.2.5. Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen Z_n von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und jede Folge $(\xi_n)_n$ von Zwischenpunkten ξ_n zugehörig zu Z_n der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z_n und der Zwischenpunkten ξ_n und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \quad (I = [a, b])$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt außerdem

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq \underline{J}(f) = \bar{J}(f) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| &< \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f dx$$

„ \Leftarrow “ SCHRITT 1: Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $(\xi_n)_n$ zu Z_n .

Seien $(Z_n^1)_n, (Z_n^2)_n$ zwei solche Folgen von Zerlegungen mit $(\xi_n^1)_n, (\xi_n^2)_n$ zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei $(Z_n)_n$ eine neue Folge von Zerlegungen von I , wobei $Z_{2k} = Z_k^2$ und $Z_{2k-1} = Z_k^1$, außerdem sei $\xi_{2k} = \xi_k^2$ und $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^2}(f, \xi_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^1}(f, \xi_n^1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: (Später)

□

Satz 1.2.6 ($\mathcal{R}(I)$ als Vektorraum). Der Raum $\mathcal{R}(I)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum und $J : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, dx$ ist eine lineare Abbildung. Für $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt also $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ und $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Beweis. TEIL 1: Sei $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und Z eine Zerlegung von I mit zugehörigen Intervallen I_j . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \overline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) & \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 \Rightarrow \overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 \Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \tag{1}
 \end{aligned}$$

Wir wählen $h = \alpha f + \beta g$, wobei $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
 \Rightarrow |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| \tag{2} \\
 \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
 &= |\alpha| \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + |\beta| \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\
 \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\
 &\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \cdot |I_j| \\
 \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + |\beta| \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \tag{3}
 \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von f und g gilt

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1 : \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
 \forall \varepsilon > 0 \exists Z_2 : \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
 \end{aligned}$$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2$ und verwende (3)

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist $h = \alpha f + \beta g$ damit Riemann-integrierbar.

TEIL 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h, \xi) = \sum_{j=1}^k h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f, \xi) + \beta \cdot S_Z(g, \xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$ gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) & (\Delta(Z_n) \rightarrow 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g, \xi_n)) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned} \quad \square$$

Satz 1.2.7 (Kompositionen von integrierbaren Funktionen). Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt

- (i) $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$
- (ii) $|f| \in \mathcal{R}(I)$
- (iii) Ist außerdem $|g| \geq c > 0$ auf I für ein konstantes $c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$.

Beweis.

- (i) Es sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \end{aligned} \quad (1)$$

Sei Z Zerlegung von I und I_j die entsprechenden Teilintervalle. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\ \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x, y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \|g\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|g\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \end{aligned}$$

Für ein $\varepsilon > 0$ gilt nach Satz 1.2.1

$$\begin{aligned} \exists Z_1: \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} \\ \exists Z_2: \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei $Z := Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit gilt $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$ nach Satz 1.2.1.

(ii) Für $|f|$ verwenden wir $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\ &\leq \sup_{x,y \in I_j} (|f(x) - f(y)|) \\ &= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \end{aligned}$$

wie vorher folgt also $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

(iii) Für $\frac{f}{g}$ muss nur $\frac{1}{g}$ betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{1}{c^2} \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \end{aligned}$$

Damit gilt analog zu (ii) die Behauptung. \square

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto e^{\alpha x}$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_k^n)$ mit $x_j^n = a + j \cdot h_n$, wobei $h_n = \frac{b-a}{n} = h = |I_j|$. Da f streng monoton wachsend ist gilt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = f(x_j) = f(x_j^n) = e^{\alpha x_j} \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f(x_{j-1}^n) = e^{\alpha x_{j-1}} \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &= \overline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n e^{\alpha x_j} \cdot h \\ &= h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \quad (\text{Geometr. Summe}) \\ &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha h \cdot n} - 1) \\ &= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} \cdot e^{\alpha h_n} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha h_n} - 1}{h_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha h_n} = 1$. Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

Wir betrachten die Untersumme

$$\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha x_{j-1}})$$

$$\begin{aligned}
 &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^j \\
 &= h \cdot e^{\alpha a} \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
 &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha(b-a)} - 1) \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})
 \end{aligned}$$

Also gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ sowie

$$\int_a^b e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

Beispiel 1.2.9 (Polynome). Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \neq -1$). Dann $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

Beweisansatz. Wir wählen eine geometrische Zerlegung. Sei $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $Z = Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n)$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_j = x_j^n = a \cdot q^j$

$$\begin{aligned}
 |I_j| &= \Delta x_j = x_j - x_{j-1} = a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
 &= a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \leq b \cdot (q_n - 1) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$\begin{aligned}
 \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = (x_j)^\alpha = (a \cdot q^j)^\alpha && \text{(Nach Monotonie)} \\
 \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = (x_{j-1})^\alpha = (a \cdot q^{j-1})^\alpha \\
 \underline{S}_Z(f) &= \underline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n (a \cdot q^{j-1})^\alpha \cdot a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \\
 &= (q - 1) \cdot a^{\alpha+1} \cdot \sum_{j=1}^n q^{(\alpha+1) \cdot (j-1)}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine geometrische Summe, dessen Grenzwert sich gut ermitteln lässt. □

Übung 1.2.10. Bestimmen Sie den Grenzwert der Ober- und Untersummen aus Beispiel 1.2.9, um die Riemann-Integrierbarkeit der Polynome nachzuweisen.

Satz 1.2.11 (Monotonie des Integrals). Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann erfüllt das Integral Monotonieeigenschaften. Das heißt konkret

(i) Wenn $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq g(x)$, dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \tag{1.2.1}$$

(ii) Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{R}(I)$ beliebig

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \tag{1.2.2}$$

(iii) Sowie

$$\left| \int_a^b f \cdot g \, dx \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \, dx$$

Beweis.

(i) Sei $h = g - f \geq 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.6 $h \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_a^b h \, dx \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \int_a^b h \, dx = \int_a^b g \, dx + \int_a^b (-f) \, dx = \int_a^b g \, dx - \int_a^b f \, dx \\ &\Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\pm f \leq |f|$. Damit folgt aus (1.2.1)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\pm f) \, dx &\leq \int_a^b |f| \, dx \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \max \left(\int_a^b f \, dx, -\int_a^b f \, dx \right) \leq \int_a^b |f| \, dx \end{aligned}$$

(iii) Nach (1.2.2) gilt

$$\left| \int_a^b fg \, dx \right| \leq \int_a^b |fg| \, dx \leq \int_a^b \left(\sup_I |f| \right) |g| \, dx = \sup_I (|f|) \cdot \int_a^b |g| \, dx \quad \square$$

Satz 1.2.12 (Cauchy-Schwarz). Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $I = [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b fg \, dx \right|^2 &\leq \left(\int_a^b |fg| \, dx \right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2 \, dx \cdot \int_a^b |g|^2 \, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \\ \Rightarrow \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \|f\| \cdot \|g\| \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \mp ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= \left| t\alpha - \frac{\beta}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2 \right) \\ \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left(t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}_A + \frac{1}{t} \underbrace{\int_a^b |g|^2 \, dx}_B \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t} |g(x)|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(tA + \frac{1}{t}B \right) \end{aligned}$$

Frage: Welches $t > 0$ maximiert h ?

$$\begin{aligned} A = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2t}B \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \\ B = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}A \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0, \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \end{aligned}$$

Minimum existiert für ein $t_0 > 0$ und es gilt $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ \Rightarrow (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0, \infty)} h(t) &= \frac{1}{2} t_0 \left(A + \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}} \left(A + \frac{A}{B}B \right) = \sqrt{AB} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.13.

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) \, dx \\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \text{ ist eine Norm} \\ \Rightarrow |\langle f, g \rangle| &\leq \|f\| \|g\|\end{aligned}$$

Satz 1.2.14. Sei $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a, b])$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem $I = [a, b]$. Es gilt $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Beweis. $I = [a, b]$ ist kompakt und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta$$

Sei Z eine Zerlegung von I mit $\Delta(Z) < \delta$. $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ und $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{y \in I_j} f(y) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da $|x - y| \leq |I_j| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^n (\overline{m}_j - \underline{m}_j) \cdot |I_j| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \cdot |I| = \varepsilon \cdot (b - a) \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\ &\leq \varepsilon (b - a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.15. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf $I = [a, b]$ heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ von I gibt so, dass f auf jedem der offenen Intervalle (x_{j-1}, x_j) stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x), f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \\ f(x_j-) &= \lim_{x \rightarrow x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, k - 1$ existieren.

$f((x_{j-1}, x_j))$ können zu stetigen Funktionen auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen $\mathcal{PC}(I)$ ¹.

¹Piecewise continuous function in I

Satz 1.2.16. Es gilt $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. $I = [a, b]$. Ist $Z = (x_0, \dots, x_k)$ eine Zerlegung von $f \in \mathcal{PC}(I)$ und f stetig auf $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall j$ und f_j eine stetige Fortsetzung von $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. So gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x) dx$$

Beweis. Arbeite auf $I_l = [x_{l-1}, x_l]$ dann ist f_l stetig nach Satz 1.2.14 und summiere zusammen. (Details selber machen). \square

Bemerkung 1.2.17 (Treppenfunktion). Ist f stückweise konstant auf I . Das heißt es existiert eine Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_\nu)$ von I mit f ist konstant auf $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall k = 1, \dots, \nu$. So heißt f Treppenfunktion. Schreiben $\mathcal{J}(I)$ für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.18.** Sei $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

- (a) In jedem Punkt $x \in (a, b)$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.
- (b) In a existiert der rechtsseitige und in b der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.20.

Bemerkung 1.2.19. Insbesondere erfüllt $PC(I)$ die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.18.

Lemma 1.2.20. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.18 erfüllt. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n)_n$ von Treppenfunktionen $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Treppenfunktion } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Beweis. (Später) \square

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.18 beweisen.

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18 verlangt und $\varepsilon > 0$, sowie $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir definieren $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$, $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$ auch als Treppenfunktionen. Dann gilt $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \leq f$ und $\Psi_2 \geq f$. Für alle Zerlegungen Z von I mit

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(\Psi_1) &\leq \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \geq \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da φ eine Treppenfunktion ist, ist $\varphi \in PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. Also existiert eine Folge $(z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

(sofern $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) - \left(\underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \right) \\ &= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon(b-a) \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx + \varepsilon(b-a) \\ &= \varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.21. Welche $f \in \mathcal{B}(I)$ sind genau Riemann-integrierbar?

Definition 1.2.22 (Nullmenge). Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle I_1, I_2, \dots existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \quad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

Beispiel 1.2.23. \mathbb{Q} ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

Nehme $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu q_j nehme $I_j = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$\begin{aligned} q_j \in I_j \quad |I_j| &= \varepsilon 2^{-j} \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Definition 1.2.24. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt fast überall stetig auf I , falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist.

1.2.25 (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium). $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f \text{ ist fast überall stetig auf } I\}$

Bemerkung 1.2.26. Sei f wie in Satz 1.2.18. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von f höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.

Ist $f \in PC(I)$ so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

Beweis von Lemma 1.2.20. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ sowie ein $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18, sodass

$$\forall \text{Treppenfunktionen } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} : \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

SCHRITT 1: $I_1 = [a, b]$, $a_1 = a$, $b_1 = b$. Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge $(I_n)_n$ von Intervallschachtelungen $I_{n+1} \subseteq I_n$ mit $|I_n| = b - a \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ mit

$$\sup_{x \in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \quad (*)$$

Beweis: Angenommen $I_n = [a_n, b_n]$ ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$\begin{aligned} M_N &= \frac{b_n + a_n}{2} \\ \Rightarrow \sup_{x \in [a_n, M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x \in [M_n, b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \\ &\quad \text{(Für alle Treppenfunktionen } \varphi) \end{aligned}$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = M_n$. Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also $a_{n+1} = M_n$, $b_{n+1} = b_n$. Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} (b - a) \rightarrow 0$$

Nehme $c_n \subseteq I_n$

$$\begin{aligned} a &= a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\text{ existiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert aufgrund der monotonen Konvergenz} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \xi && \text{(da } b_n - a_n \rightarrow 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n &\leq \xi \leq b_n \\ \Rightarrow a_n &\leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} b_n &\geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \xi &\in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

SCHRITT 2: Angenommen $a < \xi < b$. Dann ist

$$\begin{aligned} c_l &= f(\xi-) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \\ c_r &= f(\xi+) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \end{aligned}$$

Nehmen $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - c_l| &< \varepsilon_0 & \xi - \delta \leq x \leq \xi \\ |f(x) - c_r| &< \varepsilon_0 & \xi < x \leq \xi + \delta \end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi - \delta < x \leq \xi + \delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \quad (**)$$

Aber $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für n groß genug ist (**) im Widerspruch zu (*). Damit folgt die Aussage des Lemmas. \square

Satz 1.2.27. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$???.

Lemma 1.2.28. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und gebe es eine Menge $G \subseteq I$ welche in I dicht liegt und für die $f(x) = g(x) \quad \forall x \in G$ gilt. Dann folgt $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

1.3 [*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

Definition 1.3.1. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

definiert als der Mittelwert von f über I . Wir schreiben auch

$$\bar{f}_I = \int_a^b f(x) dx$$

Satz 1.3.2. Es sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\exists \xi : a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \sup_I f = \max_I f \\ \underline{m} &= \inf_I f = \min_I f \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.11 gilt

$$\begin{aligned}\underline{m} &\leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow \underline{m}(b-a) &= \int_a^b \underline{m} \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \overline{m} \, dx = \overline{m}(b-a) \\ \Rightarrow \underline{m} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{m}\end{aligned}$$

Ist $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$ ist konstant auf $[a, b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = \int_a^b f(x) \, dx$$

und $\forall a < \xi < b$ ist $f(x) = \underline{m}$. Damit gilt die Behauptung. Sei also $\underline{m} < \overline{m}$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f , dass x_1 und x_2 in I existieren, sodass $f(x_1) = \underline{m}$ und $f(x_2) = \overline{m}$ mit $x_1 \neq x_2$. Außerdem folgt aus $\underline{m} < \overline{m}$, $f \in \mathcal{C}(I)$ auch

$$\underline{m} < \int_a^b f(x) \, dx < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \exists \xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \square$$

[30. Apr] **Satz 1.3.3** (Verallgemeinerung des vorherigen Satzes). Es sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$, $p \in \mathcal{R}(I)$. Falls $p \geq 0$ folgt $\exists \xi$ mit $a < \xi < b$ und

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x) \, dx \quad (1.3.1)$$

Beweis. Angenommen $\int_a^b p(x) \, dx = 0$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)p(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in I} \int_a^b |p(x)| \, dx = 0$$

Damit gilt (1.3.1) für alle $a < \xi < b$.

Ist $\int_a^b p(x) \, dx > 0$, dann definieren wir ein neues Mittel:

$$\text{Mittel}(f) := \frac{1}{\int_a^b p(x) \, dx} \cdot \int_a^b f(x)p(x) \, dx$$

Durch scharfes Hinschauen folgt dann die Aussage aus dem Beweis des vorherigen Satzes. \square

2 [*] Das orientierte Riemann-Integral

Sei $I = [a, b]$ und $a', b' \in I$ mit $a' < b'$ und $I' = [a', b']$. Wenn $f \in \mathcal{R}(I)$, ist dann auch $f \in \mathcal{R}(I')$? Ist also die Einschränkung $\varphi := f|_{I'} : I' \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto f(x)$ Riemann-integrierbar?

Satz 2.1.1. Ist $f \in \mathcal{R}(I)$ und $I' = [a', b'] \subseteq I = [a, b]$, so ist $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$:

Beweis. SCHRITT 1: Angenommen $I' = [a, b']$ (also $a' = a$). Dann folgt aus der Riemann-Integrierbarkeit von f und Satz 1.2.18, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad (1)$$

Sei $Z_0 := (a, b', b')$ eine Zerlegung und $Z_1 = Z_0 \vee Z$ die gemeinsame Verfeinerung mit $Z_1 = (x_0, x_1, \dots, x_k)$. Dann gilt $x_0 = a$, $x_k = b$ und $\exists l \in \{1, \dots, k-1\} : x_l = b'$. Dann ist $Z' = (x_0, x_1, \dots, x_l)$ eine Zerlegung von I' mit zugehörigen Intervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ für $(j = 1, \dots, l)$. Wir definieren $\varphi = f|_{I'}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j(f) &= \sup_I f = \sup_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j(f) &= \inf_I f = \inf_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \overline{S}_Z(\varphi) &= \underline{S}_Z(\varphi) = \sum_{j=1}^l (\overline{m}_j(\varphi) - \underline{m}_j(\varphi)) \cdot |I_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| = \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für $I' = [a, b']$.

SCHRITT 2: Sei $b' = b$, $a < a' < b$. Dann kopiere den Beweis von SCHRITT 1.

SCHRITT 3: Sei $a < a' < b' < b : f \in \mathcal{R}([a, b])$. Dann folgt aus SCHRITT 1, dass $\varphi_1 := f|_{[a, b']} \in \mathcal{R}([a, b'])$. Außerdem gilt nach SCHRITT 2, dass $\varphi_2 := \varphi_1|_{[a', b']} \in \mathcal{R}([a', b'])$. Damit gilt $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$. \square

Bemerkung 2.1.2. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ mit $I = [a, b]$ und $I' = [a', b'] \subseteq I$. Dann folgt $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$. Und wir definieren

$$\int_a^{b'} f(x) \, dx := \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \, dx$$

mit $\varphi := f|_{[a', b']}$.

Satz 2.1.3. Sei $I = [a, b]$ zerlegt in endlich viele Intervalle I_j $j = 1, \dots, m$, die höchstens die Randpunkt gemeinsam haben. Also

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad I_j = [a_j, b_j]$$

also $\text{Int}(I_j) \cap \text{Int}(I_k) = (a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) = \emptyset$ für $j \neq k$. Dann gilt

$$\int_I f(x) \, dx = \sum_{j=1}^m \int_{I_j} f(x) \, dx$$

Beweis. Sei $(Z'_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z'_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $Z_0 = \bigcup_j [a_j, b_j]$. Wir betrachten die Verfeinerung $Z_n := Z'_n \vee Z_n$ mit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$. Wir haben Zwischenpunkte ξ_n zu Z_n .

Z_n lässt sich in Zerlegung Z_n^j von I_j aufteilen. Dann gilt auch, dass $\Delta(Z_n^j) \rightarrow 0 \forall j = 1, \dots, m$. Die Zwischenpunkte ξ_n lassen sich aufteilen in ξ_n von Z_n^j .

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \sum_{j=1}^k f(\xi_n^j) \cdot |I_j^n| \\ &= \sum_{j=1}^m S_{Z_n}(f, \xi_j) \end{aligned} \quad \square$$

Definition 2.1.4 (Orientiertes Riemann-Integral). Sei $\alpha, \beta \in I = [a, b]$, $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx &:= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \, dx & \varphi &:= f|_{[\alpha, \beta]} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx &:= - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx & \text{falls } \alpha &\neq \beta \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx &:= 0 & \text{falls } \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Satz 2.1.5. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta, \gamma \in I = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx \quad (2.1.1)$$

Beweis. Sind mindestens 2 Punkte α, β, γ gleich, so stimmt die Aussage. Also seien o.B.d.A. α, β, γ paarweise verschieden. Dann ist (2.1.1) äquivalent zu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) \, dx = 0$$

Diese Gleichung ist invariant unter zyklischem Vertauschen von α, β, γ . (Also zum Beispiel γ, α, β oder β, γ, α).

FALL 1: Sei $\alpha < \beta < \gamma$. Dann folgt die Aussage aus Satz 2.1.3.

FALL 2: Sei $\beta < \alpha < \gamma$. Dann folgt aus Fall 1, dass

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx &= \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx \\ &= - \int_{\gamma}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx \end{aligned}$$

Die restlichen Fälle ergeben sich durch zyklisches Vertauschen von FALL 1 oder zyklischem Vertauschen von FALL 2. Damit gilt die Gleichung für alle Fälle. \square

2.2 Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen

Sei $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)) \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Komponentenfunktionen})$$

Definition 2.2.1.

(a) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ $x \mapsto f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x))$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{B}(I)\} \\ \mathcal{R}(I, \mathbb{C}) &:= \{f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) : \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{R}(I)\} \\ \int_a^b f(x) \, dx &:= \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) \, dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) \, dx \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $\mathbb{K}^d = \mathbb{R}^d$ oder \mathbb{C}^d . Dann ist eine Funktion $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}^d)$ Riemann-integrierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_1, f_2, \dots, f_d R-integrierbar auf I sind.

$$\int_a^b f(x) \, dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) \, dx \\ \int_a^b f_2(x) \, dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(x) \, dx \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.2.2. Das Konzept lässt sich auch auf Matrizen übertragen. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}$ ist R-integrierbar, falls jede Komponentenfunktion R-integrierbar ist. Das Integral wird analog zu Vektoren definiert.

Bemerkung 2.2.3. Außerdem ist auch $\mathcal{R}(I, \mathbb{R}^d)$ ein reeller Vektorraum und $\mathcal{R}(I, \mathbb{C}^d)$ ein komplexer Vektorraum und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

alle Rechenregeln und Sätze gelten entsprechend!

3 [*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

3.1 Hauptsatz der Integralrechnung

Sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Wie rechnet man das Integral dann praktisch aus?

Erinnerung: F ist eine Stammfunktion von f , falls F differenzierbar ist und $F' = f$.

Satz 3.1.1 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). Sei $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann ist für jedes $c \in [a, b]$ die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t) \, dt \quad (x \in I)$$

stetig differenzierbar und $F' = f$. Das heißt $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Beweis. (Später) □

Korollar 3.1.2. Sei $G \in \mathcal{C}^1(I)$ (stetig differenzierbaren Funktionen auf I) eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a) =: G|_a^b := [G]_a^b = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Beweis. Wir nehmen $c = a$ aus Satz 3.1.1 und $F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ erfüllt $F' = f$ auf I nach Satz 3.1.1.

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t) \, dt \\ h(t) &:= F(t) - G(t) \\ h' &= F' - G' = f - f = 0 \text{ auf } I \end{aligned}$$

Damit ist h konstant, d.h. $h(x) = k$ für alle $x \in I$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) - G(x) &= k \\ k &= F(a) - G(a) = -G(a) \\ F(x) - G(x) &= -G(a) \\ F(x) &= G(x) - G(a) \\ \Rightarrow F(b) &= G(b) - G(a) \end{aligned} \quad \square$$

[3. Mai] *Beweis von Satz 3.1.1.* Sei $F(x) = \int_c^x f(t) \, dt$ und $h \neq 0$. Wir wollen über den Differenzenquotient zeigen, dass $F' = f$. Wir berechnen zuerst den Zähler

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(t) \, dt - \int_c^x f(t) \, dt = \int_x^{x+h} f(t) \, dt$$

Das können wir in den Differenzenquotienten einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) \, dt \\ \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) \, dt - f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, dt \\
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt \\
 \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &\leq \begin{cases} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt & h > 0 \\ \frac{1}{-h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt & h < 0 \end{cases} \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| \cdot |h|
 \end{aligned}$$

Wir definieren $I_h(x) = [x, x+h]$, falls $h > 0$ und ansonsten $I_h(x) = [x+h, x]$

$$\leq \sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)|$$

Da f stetig in x ist, folgt

$$\begin{aligned}
 &\sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= 0 \\
 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= f(x) \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.3. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}$. Dann hat f die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1}$. Damit folgt

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{1}{p+1} \cdot [b^{p+1} - a^{p+1}] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.1.4. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $f(x) = x^{-p}$, $x \neq 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p}$. Damit folgt

$$\int_a^b x^{-p} \, dx = \frac{1}{1-p} \cdot [b^{1-p} - a^{1-p}] \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

Beispiel 3.1.5. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$, $x > 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$. Damit gilt

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}] \quad \forall a, b > 0$$

Beispiel 3.1.6. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \ln|x|$.

Beweis. Falls $x > 0$. Dann ist $F(x) = \ln x$ und $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Falls $x < 0$. Dann ist $F(x) = \ln -x$ und $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. □

Damit gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln \left| \frac{b}{a} \right| \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

Beispiel 3.1.7. Es gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x \, dx &= \sin b - \sin a \\ \int_a^b \sin x \, dx &= [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a\end{aligned}$$

Beispiel 3.1.8. Es gilt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. ($|x| < \frac{\pi}{2}$). Damit folgt $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Das heißt

$$\int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_0^\varphi = \tan(\varphi) \quad \forall |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 3.1.9. Wir wollen das Integral $\int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx$ berechnen. $\sqrt{1-x^2}$ hat die Stammfunktion $\phi(x) = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2})$, weil

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) \right) \quad ((\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[\frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) \right]_a^b \quad -1 \leq a, b \leq 1\end{aligned}$$

Geometrisch gesehen können wir damit auch die Fläche der oberen Hälfte des Einheitskreises berechnen

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\arcsin 1 + 0 - \arcsin -1 - 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung 3.1.10. Satz 3.1.1 gilt auch für Funktionen in \mathbb{C} oder \mathbb{R}^d bzw. \mathbb{C}^d . Wir nennen

$$\int f(x) \, dx$$

die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu f oder das unbestimmte Integral. Genauer gilt, wenn Φ eine Stammfunktion von f ist

$$\int f(x) \, dx = \{\Phi + k : k \text{ Konstante}\}$$

3.2 Integrationstechniken

Satz 3.2.1 (Partielle Integration). Seien $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$ (oder $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$). Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx\end{aligned}$$

Beweis. Wir wenden die Produktregel der Ableitung an. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$.

$$\int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b (fg)' dx = [fg]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (2)$$

Wir setzen (1) und (2) gleich

$$\int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \square$$

Beispiel 3.2.2 (Anwendung von partieller Integration).

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - x \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \Rightarrow 2 \int \sqrt{1-x^2} dx &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \\ \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \end{aligned}$$

Übung 3.2.3. Beweisen Sie analog zum vorherigen Beispiel mittels partieller Integration, dass $\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x)$ und $\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arccosh} x)$

Beispiel 3.2.4.

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cos(bx)\right) - \int \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx) dx$$

Wir wenden nochmal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \int e^{ax} \cos(bx) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx \right\} \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin(bx) dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} e^{ax} \sin(bx) \\ \Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx))) + \text{const.} \end{aligned}$$

[07. Mai] **Beispiel 3.2.5.**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{4} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(x) \, dx \\
&= [-\cos(x) \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x) \, dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras wissen wir außerdem, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int \cos^n(x) \, dx &= \int \cos(x) \cos^{n-1}(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \int \sin(x) (n-1) \cos^{n-2}(x) \sin(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \sin^2(x) \cos^{n-2}(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \cos^{n-2}(x) \, dx - (n-1) \int \cos^n(x) \, dx \\
\int \cos^n(x) \, dx &= \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) \, dx \quad (\text{Rekursionsformel})
\end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass $\int \sin^n(x) \, dx = \frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \, dx$. Wir nutzen nun die Rekursionsformel, um einen Wert für alle n zu ermitteln

$$\begin{aligned}
c_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx \\
&= \left[\frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
&= \frac{n-1}{n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx}_{=c_{n-2}} \\
\Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} c_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
c_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \\
c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot c_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-j-1}{n-j} \cdot c_{n-2j-2} \quad \forall j : n-2j-2 \geq 1
\end{aligned}$$

Damit folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
&= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
c_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \, dx \\
&= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Satz 3.2.7 (Walli'sche Produkt). Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$W_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{\pi}{2}$$

Beweis. Aus der Definition von c_n aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich

$$W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$$

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $0 \leq \cos(x) \leq 1$. Damit folgt $\cos^{2n}(x) \leq \cos^{2n-1}(x) \leq \cos^{2n-2}(x)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x) \, dx \\
\Rightarrow c_{2n} &\leq c_{2n-1} \leq c_{2n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Nach Def. gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j} \\
\Rightarrow \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} &= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j}}{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Auch

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{c_{2n}}{c_{2n}} \geq \left| \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \right| \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1
\end{aligned}$$

□

Außerdem

$$\begin{aligned}
 W_n &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{2n+1} \\
 \Rightarrow \sqrt{W_n} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot \sqrt{2n}} \\
 &= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Satz 3.2.8 (Substitutionsregel). Seien $I = [a, b]$ und I^* kompakte Intervalle und $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{R})$ sowie $\varphi(I^*) \subseteq I$. Dann gilt für $\alpha, \beta \in I^*$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

Beweis. Sei F die Stammfunktion von f ($F'(x) = f(x) \, \forall x \in I$). Wir definieren $h(t) := F(\varphi(t)) \Rightarrow h \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{C})$ (Kettenregel).

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{d}{dt} h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
 \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) \, dt &= [h(t)]_{\alpha}^{\beta} = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x) \, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx \quad \square
 \end{aligned}$$

ERSTE LESART: $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt$ ausrechnen. Annahme: Es existiert eine Substitution $x = \varphi(t)$ und $f(x)$, sodass $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ist.

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx \quad (b = \varphi(\beta), a = \varphi(\alpha))$$

Beispiel 3.2.9. Wir betrachten des Integral $\int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt$. Wir definieren $\varphi(t) = t+c$ und $f(x) = g(x)$. Dann gilt $\varphi'(t) = 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt &= \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x) \, dx \\
 &= \int_{a+c}^{b+c} g(x) \, dx \quad (\text{Translation})
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.10. Wir betrachten $\int_a^b g(t) \frac{dt}{t}$ mit $a, b > 0$ und definieren $\varphi(t) = \ln(t)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned}
 g(t) \cdot \frac{1}{t} &= g(t) \cdot \varphi'(t) \\
 &= g(e^{\varphi(t)}) \cdot \varphi'(t) \\
 f'(x) &= g(e^x) \\
 \Rightarrow \int_a^b g(t) \frac{dt}{t} &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \\
 &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x) \, dx \\
 &= \int_{\ln a}^{\ln b} g(e^x) \, dx
 \end{aligned}$$