

Skript zur Vorlesung  
Analysis II  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>[*] Das eindimensionale Riemann-Integral</b>	<b>3</b>
1.1	Der Integralbegriff nach Riemann . . . . .	3
1.2	[*] Integrabilitätskriterien . . . . .	6
1.3	[*] Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	20

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

## 1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

**Definition 1.1.1** (Zerlegung). Eine Zerlegung  $Z$  eines kompakten Intervalls  $I = [a, b]$  in Teilintervalle  $I_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) der Längen  $|I_j|$  ist eine Menge von Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$  (Teilpunkte von  $Z$ ) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . Wir setzen  $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$ .

**Definition 1.1.2** (Feinheit einer Zerlegung). Die Feinheit der Zerlegung  $Z$  ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von  $Z$ :

$$\Delta(Z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

**Notation 1.1.3.** Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf  $I$ .

**Definition 1.1.4** (Riemannsche Zwischensumme). In jedem  $I_j$  wählen wir ein  $\xi_j \in I_j$  als Stützstelle und setzen  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ . Für eine Funktion  $f \in \mathcal{B}(I)$  setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

**Definition 1.1.5** (Ober- und Untersumme). Für  $f \in \mathcal{B}(I)$  setzen wir außerdem

$$\underline{m}_j := \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\}$$

$$\overline{m}_j := \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\}$$

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \cdot \Delta x_j \quad (\text{Obersumme})$$

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \cdot \Delta x_j \quad (\text{Untersumme})$$

Damit gilt für  $x \in I_j$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Wir wollen die Zerlegung  $Z$  nun systematisch verfeinern.

**Definition 1.1.6** (Verfeinerung einer Zerlegung).

- (a) Eine Zerlegung  $Z^*$  von  $I$  ist eine Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  von  $I$ , falls alle Teilpunkte von  $Z$  auch Teilpunkte von  $Z^*$  sind.
- (b) Die gemeinsame Verfeinerung  $Z_1 \vee Z_2$  zweier Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $I$  ist die Zerlegung von  $I$ , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von  $Z_1$  und  $Z_2$  sind.

**Lemma 1.1.7.** Ist  $Z^*$  eine Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  von  $I$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

*Beweis.*  $Z^*$  enthält alle Teilpunkte von  $Z$ , nur mehr.

SCHRITT 1: Wir nehmen an  $Z^*$  enthielte genau einen Teilpunkt ( $y_{l+1}$ ) mehr als  $Z$ . Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & \forall 0 \leq j \leq l \\ x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j & \forall l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* & \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man  $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$ .

SCHRITT 2: Sei  $Z^*$  eine beliebige Verfeinerung von  $Z$ . Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen  $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$ . Dabei hat  $Z_{s+1}$  genau einen Punkt mehr als  $Z_s$ . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass  $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$  und  $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$ .

SCHRITT 3: Sei  $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$  der Zwischenpunkt zur Zerlegung  $Z^*$ . Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

**Lemma 1.1.8.** Seien  $Z_1, Z_2$  Zerlegungen von  $I$ . Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

*Beweis.* Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \square$$

**Bemerkung 1.1.9.** Für  $I = [a, b]$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$  gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen  $Z$  von  $I$ . Somit sind

$$\left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

und

$$\left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

**Definition 1.1.10** (Ober- und Unterintegral). Es sei  $I = [a, b]$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Wir definieren

$$\overline{J}(f) := \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Oberintegral})$$

$$\underline{J}(f) := \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

**Lemma 1.1.11.** Es sei  $Z$  eine Zerlegung von  $I$ . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

*Beweis.* Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren  $Z_2$  und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup \left\{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I \right\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf \left\{ \overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 1.1.12** (Integral). Es sei  $I = [a, b]$ .  $f \in \mathcal{B}(I)$  heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir  $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$  das (bestimmte) Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und schreiben

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dx = \int_I f(x) \, dx = \int_I f \, dx =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen  $f \in \mathcal{B}(I)$  nennen wir  $\mathcal{R}(I)$ .

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion).  $f(x) := c$  auf  $[a, b]$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = c \cdot (b - a)$$

**Beispiel 1.1.14** (Dirichlet-Funktion). Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil  $\overline{J}(f) = 1$  und  $\underline{J}(f) = 0$ .

**Übung 1.1.15.** Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von  $\underline{J}(f)$  und  $\overline{J}(f)$ .

## 1.2 [\*] Integrabilitätskriterien

**Satz 1.2.1** (1. Kriterium). Es sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen  $f \in \mathcal{R}(I)$ , das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu  $\varepsilon > 0$  existieren Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $I$  mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da  $f \in \mathcal{R}(I)$  gilt  $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ . Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung  $Z := Z_1 \vee Z_2$ . Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 1.2.2** (2. Kriterium). Sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung  $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$  von  $I$  mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung  $Z$  von  $I$  mit  $\Delta(Z) < \delta$ , wobei  $\delta > 0$  noch später gewählt wird. Setze  $Z^* = Z' \vee Z$ . Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von  $Z^*$  mit denen in  $Z$  vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . Da  $Z^*$  eine Verfeinerung von  $Z$  ist, sind alle Teilpunkte von  $Z$  auch Teilpunkte von  $Z^*$ . Das heißt die Intervalle  $I_j$  (zu  $Z$ ) unterscheiden sich von den Intervallen  $I_j^*$  (zu  $Z^*$ ) sofern Punkte  $x'_\nu$  (Teilpunkte von  $Z^*$ ) im Inneren von  $I_j$  liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle  $I_j$  existieren maximal, für die  $I_j$  eine Verfeinerung von  $Z$  oder ? hinter reellen  $I_j^*$  ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung  $Z'$  unterhalb von  $I_j$  liegen. Wir haben  $l$  Punkte in Zerlegung  $Z'$ . Das heißt die Anzahl solcher Intervalle  $I_j$  ist maximal  $l$ .

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot |I_j^*| \\ &= \sum_j \left( \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} \left( \underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ &\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$

$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l \delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle  $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um  $\Delta(z) < \delta$  ist. □

**Anwendung 1.2.3.** Es sei  $(Z_n)_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $I$  mit Feinheit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\xi_n$  seien die Zwischenpunkt von Zerlegung  $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ . Die Riemannsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^n) \cdot |I_j^n|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen  $J(f)$  falls  $f \in \mathcal{R}(I)$ .

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme). Seien  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  Zerlegung von  $I = [a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  Zwischenpunkt zur Zerlegung  $Z$ , sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j| \quad (I_j = [x_{j-1}, x_j])$$

linear in Bezug zu  $f$ . Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des  $\mathcal{R}(I)$  später in Satz 1.2.6 noch beweisen.



**Korollar 1.2.5.** Sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn für jede Folge  $(Z_n)_n$  von Zerlegungen  $Z_n$  von  $I$  mit Feinheit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und jede Folge  $(\xi_n)_n$  von Zwischenpunkten  $\xi_n$  zugehörig zu  $Z_n$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$  existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung  $Z_n$  und der Zwischenpunkten  $\xi_n$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \quad (I = [a, b])$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt außerdem

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq \underline{J}(f) = \bar{J}(f) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| &< \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f dx$$

„ $\Leftarrow$ “ SCHRITT 1: Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$  existiert für jede Folge  $(Z_n)_n$  von Zerlegungen von  $I$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  und jede Wahl von Zwischenpunkten  $(\xi_n)_n$  zu  $Z_n$ .

Seien  $(Z_n^1)_n, (Z_n^2)_n$  zwei solche Folgen von Zerlegungen mit  $(\xi_n^1)_n, (\xi_n^2)_n$  zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei  $(Z_n)_n$  eine neue Folge von Zerlegungen von  $I$ , wobei  $Z_{2k} = Z_k^2$  und  $Z_{2k-1} = Z_k^1$ , außerdem sei  $\xi_{2k} = \xi_k^2$  und  $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$ . Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^2}(f, \xi_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^1}(f, \xi_n^1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: (Später)

□

**Satz 1.2.6** ( $\mathcal{R}(I)$  als Vektorraum). Der Raum  $\mathcal{R}(I)$  auf einem kompakten Intervall  $I = [a, b]$  ist ein Vektorraum und  $J : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, dx$  ist eine lineare Abbildung. Für  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  folgt also  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$  und  $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$ .

*Beweis.* TEIL 1: Sei  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und  $Z$  eine Zerlegung von  $I$  mit zugehörigen Intervallen  $I_j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \overline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) & \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 \Rightarrow \overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 \Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \tag{1}
 \end{aligned}$$

Wir wählen  $h = \alpha f + \beta g$ , wobei  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
 \Rightarrow |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| \tag{2} \\
 \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
 &= |\alpha| \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + |\beta| \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\
 \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\
 &\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \cdot |I_j| \\
 \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + |\beta| \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \tag{3}
 \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  und  $g$  gilt

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1 : \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
 \forall \varepsilon > 0 \exists Z_2 : \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
 \end{aligned}$$

Wähle  $Z = Z_1 \vee Z_2$  und verwende (3)

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

1 [\*] *Das eindimensionale Riemann-Integral*

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist  $h = \alpha f + \beta g$  damit Riemann-integrierbar.

TEIL 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h, \xi) = \sum_{j=1}^k h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f, \xi) + \beta \cdot S_Z(g, \xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für  $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$  gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) & (\Delta(Z_n) \rightarrow 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g, \xi_n)) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned}$$

□

**Satz 1.2.7.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ . Dann folgt  $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$  sowie  $|f| \in \mathcal{R}(I)$ . Ist außerdem  $|g| \geq c > 0$  auf  $I$  für ein konstantes  $c > 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.* Es sei  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  für  $x \in I$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= |g(x)(f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \\ \|f\|_\infty &= \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \end{aligned}$$

$Z$  Zerlegung von  $I$  ist  $I_j$ ; Teilintervalle

$$\begin{aligned} \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_j \left( \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) \right) \cdot |I_j| \\ \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x, y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\leq \|g\|_\infty \left( \bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \right) + \|f\|_\infty \left( \bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g) \right) \\ \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|f\|_\infty \cdot \left| \bar{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g) \right| + \|g\|_\infty \left( \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \right) \end{aligned}$$

Zu  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \exists Z_1: \bar{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_\infty)} \\ \exists Z_2: \bar{S}_{Z_2}(f) - \underline{S}_{Z_2}(f) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + \|g\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei  $Z := Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|f\|_\infty \cdot \left( \bar{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g) \right) + \|g\|_\infty \cdot \left( \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Das heißt  $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$  nach Satz 1.2.1.

Für  $|f|$  verwende

$$\begin{aligned} ||f(x)| - |f(y)|| &\leq |f(x) - f(y)| \\ \Rightarrow \bar{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x, y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\ &\leq \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| \\ &= \bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \end{aligned}$$

wie vorher folgt also  $|f| \in \mathcal{R}(I)$ .

Für  $\frac{f}{g}$  muss nur  $\frac{1}{g}$  betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| |g(y)|} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \bar{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g) \right) \end{aligned}$$

Dann wie vorher. □

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^{\alpha x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $I = [a, b]$ . Wir betrachte eine äquidistante Zerlegung  $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n)$  und  $h_n = \frac{b-a}{n}$ . sowie  $x_j = x_j^n = a + jh_n$ . Wenn  $\alpha > 0$  gilt

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = f(x_j) = f(x_j^n) = e^{\alpha x_j} = e^{\alpha a + \alpha h_j} \\
\underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f(x_{j-1}^n) = e^{\alpha x_{j-1}} \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(f) &= \overline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n e^{\alpha x_j} \cdot h \\
&= h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh} \\
&= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^j \\
&= \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \quad (\text{Geometrische Summe}) \\
\overline{S}_Z(f) &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha h \cdot n} - 1) \\
&= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} e^{\alpha h_n} (e^{\alpha b - e^{\alpha a}}) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha h_n} - 1}{h_n} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(f) &= \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \\
\underline{S}_Z &= \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha x_{j-1}}) \\
&= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^j \\
&= h \cdot e^{\alpha a} \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
&= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha(b-a)} - 1) \rightarrow \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \\
\Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \\
\int_a^b e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})
\end{aligned}$$

**Beispiel 1.2.9.** Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha \neq 1$ ). Dann ist  $f \in \mathcal{R}(I)$  und es gilt

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

Wir wählen eine geometrische Zerlegung

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

$$\begin{aligned}
z = z_n &= (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n) \\
I_j &= [x_{j-1}, x_j] \\
|I_j| &= \Delta x_j = x_j - x_{j-1} = a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
&= a \cdot q^{j-1} (q - 1) \leq b \cdot (q_n - 1) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j &= \sup_{i_j} = x_j^\alpha = (q \cdot q^{j-1})^\alpha \\
\underline{m}_j &= \inf_{I_j} = x_{j-1}^\alpha = (a \cdot q^{j-1})^\alpha \\
&\vdots
\end{aligned}$$

**Satz 1.2.10** (Monotonie des Integrals). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ ,  $I = [a, b]$ . Aus  $f \leq g$  folgt  $J(f) \leq J(g)$ , das heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx \quad (1)$$

insbesondere

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b (|f|)(x) \, dx \quad (2)$$

$$\left| \int_a^b fg \, dx \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \, dx \quad (3)$$

*Beweis.* Sei  $h = g - f \geq 0$ . Dann gilt nach Satz 1.2.6  $h \in \mathcal{R}(I)$  und damit

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h \, dx \geq 0 \\
\Rightarrow 0 &\leq \int_a^b h \, dx = \int_a^b g \, dx + \int_a^b (-f) \, dx = \int_a^b g \, dx - \int_a^b f \, dx
\end{aligned}$$

Damit folgt (1).

$$\begin{aligned}
&\pm f \leq |f| \\
\Rightarrow \int_a^b (\pm f) \, dx &\leq \int_a^b |f| \, dx = \pm \int_a^b f \, dx \\
\Rightarrow \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \max \left( \int_a^b f \, dx, - \int_a^b f \, dx \right) \\
&\leq \int_a^b |f| \, dx \Rightarrow (2) \\
\left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \int_a^b |fg| \, dx \\
&= |f| \cdot |g| \leq \left( \sup_I |f| \right) \cdot |g| \\
&\leq \int_a^b \left( \sup_I |f| \right) |g| \, dx = \sup_I (|f|) \cdot \int_a^b |g| \, dx
\end{aligned}$$

□

**Satz 1.2.11** (Cauchy-Schwarz). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b fg \, dx \right|^2 &\leq \left( \int_a^b |fg| \, dx \right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2 \, dx \cdot \int_a^b |g|^2 \, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \\ \Rightarrow \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \|f\| \cdot \|g\| \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \mp ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= \left| t\alpha - \frac{\beta}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left( t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2 \right) \\ \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}_A + \frac{1}{t} \underbrace{\int_a^b |g|^2 \, dx}_B \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t} |g(x)|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( tA + \frac{1}{t}B \right) \end{aligned}$$

Frage: Welches  $t > 0$  maximiert  $h$ ?

$$\begin{aligned} A = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2t}B \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \\ B = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}A \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0, \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \end{aligned}$$

Minimum existiert für ein  $t_0 > 0$  und es gilt  $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} \left( A - \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ \Rightarrow (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0, \infty)} h(t) &= \frac{1}{2} t_0 \left( A + \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}} \left( A + \frac{A}{B}B \right) = \sqrt{AB} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.12.**

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) \, dx \\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \text{ ist eine Norm} \\ \Rightarrow |\langle f, g \rangle| &\leq \|f\| \|g\|\end{aligned}$$

**Satz 1.2.13.** Sei  $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a, b])$  der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem  $I = [a, b]$ . Es gilt  $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.*  $I = [a, b]$  ist kompakt und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta$$

Sei  $Z$  eine Zerlegung von  $I$  mit  $\Delta(Z) < \delta$ .  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  und  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{y \in I_j} f(y) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da  $|x - y| \leq |I_j| < \delta$  gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^n (\overline{m}_j - \underline{m}_j) \cdot |I_j| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \cdot |I| = \varepsilon \cdot (b - a) \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\ &\leq \varepsilon (b - a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

**Definition 1.2.14.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I = [a, b]$  heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  von  $I$  gibt so, dass  $f$  auf jedem der offenen Intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$  stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x), f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \\ f(x_j-) &= \lim_{x \rightarrow x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für  $j = 1, \dots, k - 1$  existieren.

$f((x_{j-1}, x_j))$  können zu stetigen Funktionen auf  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen  $\mathcal{PC}(I)$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Piecewise continuous function in  $I$



**Satz 1.2.15.** Es gilt  $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ .  $I = [a, b]$ . Ist  $Z = (x_0, \dots, x_k)$  eine Zerlegung von  $f \in \mathcal{PC}(I)$  und  $f$  stetig auf  $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall j$  und  $f_j$  eine stetige Fortsetzung von  $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$  auf  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . So gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x) dx$$

*Beweis.* Arbeite auf  $I_l = [x_{l-1}, x_l]$  dann ist  $f_l$  stetig nach Satz 1.2.13 und summiere zusammen. (Details selber machen).  $\square$

**Bemerkung 1.2.16** (Treppenfunktion). Ist  $f$  stückweise konstant auf  $I$ . Das heißt es existiert eine Zerlegung  $Z = (x_0, \dots, x_\nu)$  von  $I$  mit  $f$  ist konstant auf  $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall k = 1, \dots, \nu$ . So heißt  $f$  Treppenfunktion. Schreiben  $\mathcal{J}(I)$  für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.17.** Sei  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften

- (a) In jedem Punkt  $x \in (a, b)$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.
- (b) In  $a$  existiert der rechtsseitige und in  $b$  der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$ .

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.19.

**Bemerkung 1.2.18.** Insbesondere erfüllt  $PC(I)$  die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.17.

**Lemma 1.2.19.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.17 erfüllt. Dann gibt es eine Folge  $(\varphi_n)_n$  von Treppenfunktionen  $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Treppenfunktion } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

*Beweis.* (Später)  $\square$

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.17 beweisen.

*Beweis.* Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 1.2.17 verlangt und  $\varepsilon > 0$ , sowie  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktion mit  $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wir definieren  $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$  auch als Treppenfunktionen. Dann gilt  $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \leq f$  und  $\Psi_2 \geq f$ . Für alle Zerlegungen  $Z$  von  $I$  mit

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(\Psi_1) &\leq \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \geq \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da  $\varphi$  eine Treppenfunktion ist, ist  $\varphi \in PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ . Also existiert eine Folge  $(z_n)_n$  von Zerlegungen von  $I$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

(sofern  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) - \left( \underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \right) \\ &= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon(b-a) \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx + \varepsilon(b-a) \\ &= \varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.20.** Welche  $f \in \mathcal{B}(I)$  sind genau Riemann-integrierbar?

**Definition 1.2.21** (Nullmenge). Eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}$  heißt Nullmenge, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  höchstens abzählbar viele Intervalle  $I_1, I_2, \dots$  existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \quad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

**Beispiel 1.2.22.**  $\mathbb{Q}$  ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

Nehme  $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu  $q_j$  nehme  $I_j = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$\begin{aligned} q_j \in I_j \quad |I_j| &= \varepsilon 2^{-j} \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon \end{aligned}$$

**Definition 1.2.23.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt fast überall stetig auf  $I$ , falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  eine Nullmenge ist.

**1.2.24** (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium).  $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f \text{ ist fast überall stetig auf } I\}$

**Bemerkung 1.2.25.** Sei  $f$  wie in Satz 1.2.17. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von  $f$  höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.

Ist  $f \in PC(I)$  so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

*Beweis von Lemma 1.2.19.* Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  sowie ein  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 1.2.17, sodass

$$\forall \text{Treppenfunktionen } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} : \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

SCHRITT 1:  $I_1 = [a, b]$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ . Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge  $(I_n)_n$  von Intervallschachtelungen  $I_{n+1} \subseteq I_n$  mit  $|I_n| = b - a \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  mit

$$\sup_{x \in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \quad (*)$$

Beweis: Angenommen  $I_n = [a_n, b_n]$  ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$\begin{aligned} M_N &= \frac{b_n + a_n}{2} \\ \Rightarrow \sup_{x \in [a_n, M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x \in [M_n, b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{Für alle Treppenfunktionen } \varphi)$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = M_n$ . Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also  $a_{n+1} = M_n$ ,  $b_{n+1} = b_n$ . Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} (b - a) \rightarrow 0$$

Nehme  $c_n \subseteq I_n$

$$\begin{aligned} a &= a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert aufgrund der monotonen Konvergenz} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \xi && (\text{da } b_n - a_n \rightarrow 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n &\leq \xi \leq b_n \\ \Rightarrow a_n &\leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} b_n &\geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \xi &\in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

SCHRITT 2: Angenommen  $a < \xi < b$ . Dann ist

$$\begin{aligned} c_l &= f(\xi-) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \\ c_r &= f(\xi+) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \end{aligned}$$

Nehmen  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - c_l| &< \varepsilon_0 & \xi - \delta \leq x \leq \xi \\ |f(x) - c_r| &< \varepsilon_0 & \xi < x \leq \xi + \delta \end{aligned}$$

Wir definieren  $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$  durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi - \delta < x \leq \xi + \delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \quad (**)$$

Aber  $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n$  groß genug ist (\*\*) im Widerspruch zu (\*).  
Damit folgt die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Satz 1.2.26.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  ???.

**Lemma 1.2.27.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und gebe es eine Menge  $G \subseteq I$  welche in  $I$  dicht liegt und für die  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in G$  gilt. Dann folgt  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

### 1.3 [\*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Definition 1.3.1.** Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$ ,  $I = [a, b]$ . Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

definiert als der Mittelwert von  $f$  über  $I$ . Wir schreiben auch

$$\bar{f}_I = \int_a^b f(x) dx$$

**Satz 1.3.2.** Es sei  $I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann gilt

$$\exists \xi : a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \sup_I f = \max_I f \\ \underline{m} &= \inf_I f = \min_I f \end{aligned}$$

Nach Satz ?? gilt

$$\begin{aligned}\underline{m} &\leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow \underline{m}(b-a) &= \int_a^b \underline{m} \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \overline{m} \, dx = \overline{m}(b-a) \\ \Rightarrow \underline{m} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{m}\end{aligned}$$

Ist  $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$  ist konstant auf  $[a, b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = \int_a^b f(x) \, dx$$

und  $\forall a < \xi < b$  ist  $f(x) = \underline{m}$ . Damit gilt die Behauptung. Sei also  $\underline{m} < \overline{m}$ . Dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass  $x_1$  und  $x_2$  in  $I$  existieren, sodass  $f(x_1) = \underline{m}$  und  $f(x_2) = \overline{m}$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Außerdem folgt aus  $\underline{m} < \overline{m}$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$  auch

$$\underline{m} \leq \int_a^b f(x) \, dx < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \exists \xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \square$$