

Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Das eindimensionale Riemann-Integral	3
----------	---	----------

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

Definition 1.1.1 (Zerlegung eines Intervalls).

- (a) Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j der Längen $|I_j|$ ($j = 1, \dots, k$) ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$.
- (b) Wir setzen $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$
- (c) Die Feinheit der Zerlegung Z ist $\Delta(z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$ (Länge des längsten Teilintervalls von Z).

An jedem I_j wählen wir $\xi_j \in I_j$, setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$, setzen $B(I) =$ Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf $I = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty\}$.

Für $f \in B(I)$ setzen

$$S_z(f) = S_z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) |I_j| \quad (\text{Riemannsche Zwischensumme})$$

Für $f \in B(I)$ setzen

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &:= \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{m}_j &:= \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{S}_z(f) &:= \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \Delta x_j \quad (\text{Obersumme}) \\ \underline{S}_z(f) &:= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j \quad (\text{Untersumme}) \end{aligned}$$

Haben

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \text{ für } x \in I_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_z(f) &\leq S_z(f, \xi) \leq \overline{S}_z(f) \end{aligned}$$

Wir wollen Zerlegung Z systematisch verfeinern.

Definition 1.1.2 (Verfeinerung einer Zerlegung). Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I , falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.

Definition 1.1.3 (Gemeinsame Verfeinerung). Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.4. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in B(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z , nur mehr.

SCHRITT 1: Angenommen Z^* enthält genau einen Teilpunkt mehr als Z .

$$\begin{aligned}
 y_j &= x_j \quad 0 \leq j \leq l \\
 x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\
 y_{l+1} &= x_j \quad l+1 \leq j \leq k \\
 \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\
 &= \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\
 \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* \quad \text{für } 1 \leq j \leq l
 \end{aligned}$$

$$j \geq l+2$$

$$\begin{aligned}
 \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* \\
 I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* \quad \text{für } j \geq l+2 \\
 \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\
 \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\
 &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\
 &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \leq \underline{m}_{l+2} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\
 \underline{m}_{l+1} \inf_{I_{l+1}} f &\leq \inf_{I_{l+1}} f = \underline{m}_{l+1}^* \quad \text{und } \underline{m}_{l+1} \leq \inf_{I_{l+2}} f = \underline{m}_{l+2}^*
 \end{aligned}$$

zusammen

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z . Nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$ und Z_{s+1} hat genau einen Punkt mehr als Z_s . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \\
 \overline{S}_Z(f) &\geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \overline{S}_{Z_2}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)
 \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^* . Dann gilt

$$S_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

Lemma 1.1.5. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I . Dann gilt $\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \forall f \in B(I)$.

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.4, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2} \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2} \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

□

Bemerkung 1.1.6. Für $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$ gilt immer $\underbrace{|I|}_{=b-a} \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq$

$|I| \sup_I f$ für alle Zerlegungen Z von I .

$\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$ und $\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$ sind bereits beschränkte, nicht-leere Teilmengen von \mathbb{R} .

Definition 1.1.7. Für $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$ definieren wir

$$\underline{J}(f) := \sup \{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \} \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\overline{J}(f) := \sup \{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \} \quad (\text{Oberintegral})$$

Lemma 1.1.8. Es sei Z eine Zerlegung von I . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.5 gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_1}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \sup \{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ ist eine Zerlegung von } I \} &\leq \overline{S}_{Z_1}(f) \\ &\Rightarrow \underline{J}(f) \leq \overline{S}_{Z_1}(f) \\ &\Rightarrow \underline{J}(f) \leq \inf \{ \overline{S}_{Z_2}(f) : \dots \} = \overline{J}(f) \\ \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned}$$

□

Definition 1.1.9. $I = [a, b]$, $f \in B(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das bestimmte Integral über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f dx = \int_I f(x)dx = \int_I f dx = J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen nennen wir $R(I)$.