Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

Definition 1.1.1 (Zerlegung)**.** Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j ($j = 1, \dots, k$) der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j \coloneqq x_j - x_{j-1} \eqqcolon |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung)**.** Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z:

$$\Delta(Z) \coloneqq \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3. Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I.

Definition 1.1.4 (Riemannsche Zwischensumme)**.** In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ als Stützstelle und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) \coloneqq \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Definition 1.1.5 (Ober- und Untersumme)**.** Für $f \in \mathcal{B}(I)$ setzen wir außerdem

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\coloneqq \inf_{I_j} f = \inf\{f(x) : x \in I_j\} \\
\overline{m}_j &\coloneqq \sup_{I_j} f = \sup\{f(x) : x \in I_j\} \\
\overline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\
\underline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\le f(x) \le \overline{m}_j \\
\Rightarrow \underline{m}_j &\le f(\xi_j) \le \overline{m}_j \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\le S_Z(f, \xi) \le \overline{S}_Z(f) \qquad (1.1.1)
\end{aligned}$$

Wir wollen die Zerlegung Z nun systematisch verfeinern.

Definition 1.1.6 (Verfeinerung einer Zerlegung)**.**

(a) Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I, falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.

(b) Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I, deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z, nur mehr.

Schritt 1: Wir nehmen an Z^* enthielte genau einen Teilpunkt (y_{l+1}) mehr als Z. Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j \qquad \forall\, 0 \leq j \leq l \\ x_l < y_{l+1} &< x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j \qquad \forall\, l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* \qquad \forall\, 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* \qquad \forall\, j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* \qquad \forall\, j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1}(x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

Schritt 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z. Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s. Dann gilt nach Schritt 1, dass $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \cdots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \cdots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

Schritt 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^*. Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I. Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \qquad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$ □

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I. Somit sind

$$\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\}$$

und

$$\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral)**.** Es sei $I = [a, b]$ und $f \in \mathcal{B}(I)$. Wir definieren

$$\overline{J}(f) := \inf\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\right\} \qquad \text{(Oberintegral)}$$
$$\underline{J}(f) := \sup\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\} \qquad \text{(Unterintegral)}$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup\{\underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf\left\{\overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I\right\} \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)
\end{aligned}$$ □

Definition 1.1.12 (Integral)**.** Es sei $I = [a, b]$. $f \in \mathcal{B}(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das (bestimmte) Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}x =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in \mathcal{B}(I)$ nennen wir $\mathcal{R}(I)$.

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion)**.** $f(x) \coloneqq c$ auf $[a,b]$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

Beispiel 1.1.14 (Dirichlet-Funktion)**.** Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil $\overline{J}(f) = 1$ und $\underline{J}(f) = 0$.

Übung 1.1.15. Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von $\underline{J}(f)$ und $\overline{J}(f)$.

1.2 [*] Integrabilitätskriterien

Satz 1.2.1 (1. Kriterium)**.** Es sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le \overline{S}_Z(f)$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \le 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$ “ Angenommen $f \in \mathcal{R}(I)$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $Z \coloneqq Z_1 \vee Z_2$. Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.2 (2. Kriterium)**.** Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, \text{Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta \colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „$\Leftarrow$" wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„$\Rightarrow$ " Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung $Z' = (x_0', x_1', \ldots, x_l' = b)$ von I mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, wobei $\delta > 0$ noch später gewählt wird. Setze $Z^* = Z' \vee Z$. Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von Z^* mit denen in Z vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Da Z^* eine Verfeinerung von Z ist, sind alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^*. Das heißt die Intervalle I_j (zu Z) unterscheiden sich von den Intervallen I_j^* (zu Z^*) sofern Punkte x_ν' (Teilpunkte von Z^*) im Inneren von I_j liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \varnothing \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle I_j existieren maximal, für die I_j eine Verfeinerung von Z oder ? hinter reellen I_j^* ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung Z' unterhalb von I_j liegen. Wir haben l Punkte in Zerlegung Z'. Das heißt die Anzahl solcher Intervalle I_j ist maximal l.

$$\begin{aligned}
\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot \left|I_j^*\right| \\
&= \sum_j \left(\overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\
&= \sum_j \sum_{t: I_t^*} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\
\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^*} \left(\underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\
&= \sum_j \sum_{t: I_t^*} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\
f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\
&\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\
f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\
&\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\
&\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$
$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$
$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l\delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty+1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \ \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\| + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um $\Delta(z) < \delta$ ist. □

Anwendung 1.2.3. Es sei $(Z_n)_n$ eine Folge von Zerlegungen von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$. ξ_n seien die Zwischenpunkt von Zerlegung $Z_n = \left(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\right)$. Die Riemannnsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f\left(\xi_j^n\right) \cdot \left|I_j^n\right|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen $J(f)$ falls $f \in \mathcal{R}(I)$.

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme)**.** Seien $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ Zerlegung von $I = [a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z, sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot |I_j| \qquad (I_j = [x_j - 1, x_j])$$

linear in Bezug zu f. Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des $\mathcal{R}(I)$ später in Satz 1.2.6 noch beweisen.

Korollar 1.2.5. Sei $f \in \mathcal{B}(I)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen Z_n von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und jede Folge $(\xi_n)_n$ von Zwischenpunkten ξ_n zugehörig zu Z_n der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z_n und der Zwischenpunkten ξ_n und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \qquad (I = [a,b])$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Sei $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \colon \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall\, \text{Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt außerdem

$$\Rightarrow\; \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_n}(f) \leq \underline{J}(f) = \overline{J}(f) \leq \overline{S}_{Z_n}(f) \\ \underline{S}_{Z_n}(f) \leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \overline{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow\; |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

„$\Leftarrow$“ Schritt 1: Angenommen $\lim\limits_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z_n) \to 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $(\xi_n)_n$ zu Z_n.
Seien $(Z_n^1)_n$, $(Z_n^2)_n$ zwei solche Folgen von Zerlegungen mit $(\xi_n^1)_n$, $(\xi_n^2)_n$ zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei $(Z_n)_n$ eine neue Folge von Zerlegungen von I, wobei $Z_{2k} = Z_k^2$ und $Z_{2k-1} = Z_k^1$, außerdem sei $\xi_{2k} = \xi_k^2$ und $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n^2}\Big(f, \xi_n^2\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n^1}\Big(f, \xi_n^1\Big) \end{aligned}$$

Schritt 2: (Später) □

Satz 1.2.6 ($\mathcal{R}(I)$ als Vektorraum)**.** Der Raum $\mathcal{R}(I)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a,b]$ ist ein Vektorraum und $J : \mathcal{R}(I) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ ist eine lineare Abbildung. Für $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt also $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ und $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Beweis. Teil 1: Sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und Z eine Zerlegung von I mit zugehörigen Intervallen Ij. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j = \sup_{x \in I_j} h(x) \quad \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
\Rightarrow \overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
&= \sup_{x,y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
&= \sup_{x,y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
&= \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
\Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) && (1)
\end{aligned}$$

Wir wählen $h = \alpha f + \beta g$, wobei $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
\Rightarrow \ |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| && (2) \\
\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
&\overset{(1)}{=} \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
&\overset{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
&= |\alpha| \cdot \Big(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\Big) + |\beta| \cdot \Big(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\Big) \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)]\Big) \cdot |I_j| \\
&\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\Big) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^{k} \Big(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\Big) \cdot |I_j| \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot \Big(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\Big) + |\beta| \cdot \Big(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\Big) && (3)
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von f und g gilt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_1 \colon \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
\forall \varepsilon > 0 \, \exists Z_2 \colon \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
\end{aligned}$$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2$ und verwende (3)

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist $h = \alpha f + \beta g$ damit Riemann-integrierbar.

Teil 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h,\xi) = \sum_{j=1}^{k} h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f,\xi) + \beta \cdot S_Z(g,\xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$ gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(h,\xi_n) && (\Delta(Z_n) \to 0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot S_{Z_n}(f,\xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g,\xi_n)\right) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f,\xi_n) + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(g,\xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.7 (Kompositionen von integrierbaren Funktionen)**.** Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt

(i) $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$

(ii) $|f| \in \mathcal{R}(I)$

(iii) Ist außerdem $|g| \geq c > 0$ auf I für ein konstantes $c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$.

Beweis.

(i) Es sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \end{aligned} \tag{1}$$

Sei Z Zerlegung von I und I_j die entsprechenden Teilintervalle. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)\right) \cdot |I_j| \\ \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x,y\in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\overset{(1)}{\leq} \|g\|_\infty \cdot \left(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\right) + \|f\|_\infty \cdot \left(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)\right) \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|g\|_\infty \cdot \left(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right) + \|f\|_\infty \cdot \left(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)\right) \end{aligned}$$

Für ein $\varepsilon > 0$ gilt nach Satz 1.2.1

$$\begin{aligned} \exists Z_1 \colon \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} \\ \exists Z_2 \colon \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei $Z \coloneqq Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit gilt $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$ nach Satz 1.2.1.

(ii) Für $|f|$ verwenden wir $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y\in I_j} (||f(x)| - |f(y)||)\\ &\leq \sup_{x,y\in I_j} (|f(x) - f(y)|)\\ &= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)\end{aligned}$$

wie vorher folgt also $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

(iii) Für $\frac{f}{g}$ muss nur $\frac{1}{g}$ betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)|$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{y}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{c^2} \cdot \left(\overline{m}_j(y) - \underline{m}_j(y)\right)$$

Damit gilt analog zu (ii) die Behauptung. □

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto e^{\alpha x}$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_k^n)$ mit $x_j^n = a + j \cdot h_n$, wobei $h_n = \frac{b-a}{n} = h = |I_j|$. Da f streng monoton wachsend ist gilt

$$\overline{m}_j = \sup_{I_j} f = f(x_j) = f\left(x_j^n\right) = e^{\alpha x_j}$$

$$\underline{m}_j = \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f\left(x_{j-1}^n\right) = e^{\alpha x_{j-1}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{S}_Z(f) = \overline{S}_{Z_n}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha x_j} \cdot h\\ &= h \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh}\\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\alpha h}\right)^{j-1}\\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \frac{\left(e^{\alpha h}\right)^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \qquad \text{(Geometr. Summe)}\\ &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot \left(e^{\alpha h\cdot n} - 1\right)\\ &= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} \cdot e^{\alpha h_n} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)\end{aligned}$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha h_n}-1}{h_n} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{\alpha h}-1}{h} = \alpha$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\alpha h_n} = 1$. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)$$

Wir betrachten die Untersumme

$$\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^{n} (e^{\alpha x_{j-1}})$$

$$
\begin{aligned}
&= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\alpha h}\right)^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\alpha h}\right)^{j} \\
&= h \cdot e^{\alpha a} \frac{\left(e^{\alpha h}\right)^{n} - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
&= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot \left(e^{\alpha(b-a)} - 1\right) \to \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)
\end{aligned}
$$

Also gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ sowie

$$\int_a^b e^{\alpha x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)$$

Beispiel 1.2.9 (Polynome)**.** Es sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \neq -1)$. Dann $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b x^{\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right)$$

Beweisansatz. Wir wählen eine geometrische Zerlegung. Sei $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $Z = Z_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n)$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_j = x_j^n = a \cdot q^j$

$$
\begin{aligned}
|I_j| &= \Delta x_j = x_j - x_{j-1} = a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
&= a \cdot q^{j-1} \cdot (q-1) \leq b \cdot (q_n - 1) \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$\overline{m}_j = \sup_{I_j} f = (x_j)^{\alpha} = \left(a \cdot q^j\right)^{\alpha} \qquad \text{(Nach Monotonie)}$$

$$
\begin{aligned}
\underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = (x_{j-1})^{\alpha} = \left(a \cdot q^{j-1}\right)^{\alpha} \\
\underline{S}_Z(f) = \underline{S}_{Z_n}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(a \cdot q^{j-1}\right)^{\alpha} \cdot a \cdot q^{j-1} \cdot (q-1) \\
&= (q-1) \cdot a^{\alpha+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} q^{(\alpha+1)\cdot(j-1)}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir eine geometrische Summe, dessen Grenzwert sich gut ermitteln lässt. □

Übung 1.2.10. Bestimmen Sie den Grenzwert der Ober- und Untersummen aus Beispiel 1.2.9, um die Riemann-Integrierbarkeit der Polynome nachzuweisen.

Satz 1.2.11 (Monotonie des Integrals)**.** Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a,b]$. Dann erfüllt das Integral Monotonieeigenschaften. Das heißt konkret

(i) Wenn $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq g(x)$, dann folgt

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

(ii) Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{R}(I)$ beliebig

$$\left|\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x \tag{1.2.2}$$

(iii) Sowie

$$\left| \int_a^b f \cdot g \,\mathrm{d}x \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \,\mathrm{d}x$$

Beweis.

(i) Sei $h = g - f \geq 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.6 $h \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_a^b h \,\mathrm{d}x \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \leq \int_a^b h \,\mathrm{d}x &= \int_a^b g \,\mathrm{d}x + \int_a^b (-f) \,\mathrm{d}x = \int_a^b g \,\mathrm{d}x - \int_a^b f \,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int_a^b f \,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b g \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\pm f \leq |f|$. Damit folgt aus (1.2.1)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\pm f) \,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| &= \max\left(\int_a^b f \,\mathrm{d}x, - \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right) \leq \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(iii) Nach (1.2.2) gilt

$$\left| \int_a^b fg \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |fg| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\sup_I |f| \right) |g| \,\mathrm{d}x = \sup_I(|f|) \cdot \int_a^b |g| \,\mathrm{d}x$$

□

Satz 1.2.12 (Cauchy-Schwarz)**.** Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $I = [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b fg\,\mathrm{d}x\right|^2 &\leq \left(\int_a^b |fg|\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b |g|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2\,\mathrm{d}x} \\ \Rightarrow \left|\int fg\,\mathrm{d}x\right| &\leq \|f\| \cdot g\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow\ \mp ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} & \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)\end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned}|\alpha\beta| &= \left|t\alpha - \frac{\beta}{t}\right| \leq \frac{1}{2}\left(t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2\right) \\ \left|\int_a^b fg\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\left(t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}_{A} + \frac{1}{t}\underbrace{\int_a^b |g|^2\,\mathrm{d}x}_{B}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t}|g(x)|^2\right) = \frac{1}{2}\left(tA + \frac{1}{t}B\right)\end{aligned}$$

Frage: Welches $t > 0$ maximiert h?

$$\begin{aligned}A = 0 \Rightarrow h(t) &= \frac{1}{2t}B \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ B = 0 \Rightarrow h(t) &= \frac{1}{2}A \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ \Rightarrow \lim_{t\to} h(t) &= \infty, \lim_{t\searrow 0} h(t) = \infty\end{aligned}$$

Minimum existiert für ein $t_0 > 0$ und es gilt $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= \frac{1}{2}\left(A - \frac{1}{t_0}B\right) \\ \Rightarrow (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{b}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0,\infty)} h(t) &= \frac{1}{2}t_0\left(A + \frac{1}{t_0^2}B\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{A}}\left(A + \frac{A}{B}B\right) = \sqrt{AB}\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.13.

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2\,\mathrm{d}x} \text{ ist eine Norm}\\ \Rightarrow\ |\langle f,g\rangle| &\le \|f\|\,\|g\|\end{aligned}$$

Satz 1.2.14. Sei $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a,b])$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem $I = [a,b]$. Es gilt $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Beweis. $I = [a,b]$ ist kompakt und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x,y \in I \text{ mit } |x-y| < \delta$$

Sei Z eine Zerlegung von I mit $\Delta(Z) < \delta$. $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{y\in I_j} f(y)\\ &= \sup_{x,y\in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y\in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da $|x-y| \le |I_j| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\le \varepsilon\\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{m}_j - \underline{m}_j\right)\cdot |I_j|\\ &\le \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \varepsilon\cdot|I| = \varepsilon\cdot(b-a)\\ \Rightarrow 0 &\le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\\ &\le \varepsilon\,(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0\\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.15. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I = [a,b]$ heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ von I gibt so, dass f auf jedem der offenen Intervalle (x_{j-1}, x_j) stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x\to a+} f(x), f(b-) = \lim_{x\to b-} f(x)\\ f(x_j-) &= \lim_{x\to x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x\to x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, k-1$ existieren.
$f((x_{j-1}, x_j))$ können zu stetigen Funktionen auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen $\mathcal{PC}(I)$[1].

[1] Piecewise continuos function in I

Satz 1.2.16. Es gilt $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. $I = [a,b]$. Ist $Z = (x_0, \ldots, x_k)$ eine Zerlegung von $f \in \mathcal{PC}(I)$ und f stetig auf $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall\, j$ und f_j eine stetige Fortsetzung von $f|_{(x_{j-1},x_j)}$ auf $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. So gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{k} \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Arbeite auf $I_l = [x_{l-1}, x_l]$ dann ist f_l stetig nach Satz 1.2.14 und summiere zusammen. (Details selber machen). □

Bemerkung 1.2.17 (Treppenfunktion)**.** Ist f stückweise konstant auf I. Das heißt es existiert eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_\nu)$ von I mit f ist konstant auf $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall\, k = 1, \ldots, \nu$. So heißt f Treppenfunktion. Schreiben $\mathcal{J}(I)$ für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.18.** Sei $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) In jedem Punkt $x \in (a,b)$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.

(b) In a existiert der rechtsseitige und in b der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$.
Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.20.

Bemerkung 1.2.19. Insbesondere erfüllt $PC(I)$ die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.18.

Lemma 1.2.20. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.18 erfüllt. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n)_n$ von Treppenfunktionen $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists \text{ Treppenfunktion } \varphi : I \to \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Beweis. (Später) □

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.18 beweisen.

Beweis. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18 verlangt und $\varepsilon > 0$, sowie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir definieren $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$, $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$ auch als Treppenfunktionen. Dann gilt $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \le f$ und $\Psi_2 \ge f$. Für alle Zerlegungen Z von I mit

$$\begin{aligned} &\underline{S}_Z(\Psi_1) \le \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow\; &\underline{S}_Z(f) \ge \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \ge \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \le \underline{S}_Z(f) \le \underline{J}(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}\,(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da φ eine Treppenfunktion ist, ist $\varphi \in \mathcal{PC}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$. Also existiert eine Folge $(z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

(sofern $\Delta(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}\,(b-a) - \left(\underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\,(b-a)\right) \\
&= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon\,(b-a) \\
&\to_{\,n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon\,(b-a) \\
&= \varepsilon\,(b-a) \\
\Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon\,(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\
\Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\
\Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.21. Welche $f \in \mathcal{B}(I)$ sind genau Riemann-integrierbar?

Definition 1.2.22 (Nullmenge)**.** Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \qquad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

Beispiel 1.2.23. $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$$

Nehme $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu q_j nehme $I_J = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$q_j \in I_j \quad |I_j| = \varepsilon 2^{-j}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\
&= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Definition 1.2.24. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt fast überall stetig auf I, falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist.

1.2.25 (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium)**.** $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f$ ist fast überall stetig auf $I\}$

Bemerkung 1.2.26. Sei f wie in Satz 1.2.18. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von f höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.
Ist $f \in \mathcal{PC}(I)$ so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

Beweis von Lemma 1.2.20. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ sowie ein $f : I \to \mathbb{R}$ wie in Satz 1.2.18, sodass

$$\forall \text{ Treppenfunktionen } \varphi : I \to \mathbb{R}\colon \; \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

Schritt 1: $I_1 = [a, b]$, $a_1 = a$, $b_1 = b$. Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge $(I_n)_n$ von Intervallschachtelungen $I_{n+1} \subseteq I_n$ mit $|I_n| = b - a \to 0$ für $n \to \infty$ mit

$$\sup_{x\in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \tag{*}$$

Beweis: Angenommen $I_n = [a_n, b_n]$ ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$M_N = \frac{b_n + a_n}{2}$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in[a_n,M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x\in[M_n,b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$$
$$\text{(Für alle Treppenfunktionen } \varphi)$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = M_n$. Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also $a_{n+1} = M_n$, $b_{n+1} = b_n$. Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) \leq \frac{1}{2^n}\left(b - a\right) \to 0$$

Nehme $c_n \subseteq I_n$

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 = b$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} b_n \text{ texistiert aufgrund der monotonen Konvergenz}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \xi \qquad \text{(da } b_n - a_n \to 0)$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq \xi \leq b_n$$
$$\Rightarrow a_n \leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Analog ergibt sich

$$b_n \geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \xi \in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

Schritt 2: Angenommen $a < \xi < b$. Dann ist

$$c_l = f(\xi-) = \lim_{x\to\xi-} f(x)$$
$$c_r = f(\xi+) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$$

Nehmen $\delta > 0$

$$|f(x) - c_l| < \varepsilon_0 \quad \xi - \delta \le x \le \xi$$
$$|f(x) - c_r| < \varepsilon_0 \quad \xi < x \le \xi + \delta$$

Wir definieren $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$ durch

$$\varphi(x) \coloneqq \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi + \delta \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi-\delta<x\le\xi+\delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \tag{**}$$

Aber $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für n groß genug ist (**) im Widerspruch zu (*). Damit folgt die Aussage des Lemmas. □

Satz 1.2.27. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$???.

Lemma 1.2.28. Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und gebe es eine Menge $G \subseteq I$ welche in I dicht liegt und für die $f(x) = g(x) \ \ \forall x \in G$ gilt. Dann folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

1.3 [*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

Definition 1.3.1. Sei $f \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$. Dann ist

$$⨍_I f(x)\,\mathrm{d}x = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert als der Mittelwert von f über I. Wir schreiben auch

$$\overline{f}_I = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 1.3.2. Es sei $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Dann gilt

$$\exists\,\xi\colon a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis.

$$\overline{m} = \sup_I f = \max_I f$$
$$\underline{m} = \inf_I f = \min_I f$$

Nach Satz 1.2.11 gilt

$$
\begin{aligned}
\underline{m} \leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\
\Rightarrow \underline{m}\,(b-a) = \int_a^b \underline{m}\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \overline{m}\,\mathrm{d}x = \overline{m}\,(b-a) \\
\Rightarrow \underline{m} \leq ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{m}
\end{aligned}
$$

Ist $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$ ist konstant auf $[a, b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

und $\forall a < \xi < b$ ist $f(x) = \underline{m}$. Damit gilt die Behauptung. Sei also $\underline{m} < \overline{m}$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass x_1 und x_2 in I existieren, sodass $f(x_1) = \underline{m}$ und $f(x_2) = \overline{m}$ mit $x_1 \neq x_2$. Außerdem folgt aus $\underline{m} < \overline{m}$, $f \in \mathcal{C}(I)$ auch

$$\underline{m} \leq ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \ \exists\,\xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(x) = ⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$