

Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Das eindimensionale Riemann-Integral	3
1.1	Das Riemann-Integral	3
1.2	Integrabilitätskriterien	6

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

1.1 Das Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

Definition 1.1.1 (Zerlegung). Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j ($j = 1, \dots, k$) der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung). Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z :

$$\Delta(z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3 (Riemannsche Zwischensumme). Wir setzen

$$B(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I . In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Für $f \in B(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Notation 1.1.4 (Ober- und Untersumme). Für $f \in B(I)$ setzen wir

$$\underline{m}_j := \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\}$$

$$\overline{m}_j := \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\}$$

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \cdot \Delta x_j \quad (\text{Obersumme})$$

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \cdot \Delta x_j \quad (\text{Untersumme})$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned}$$

Wir wollen die Zerlegung Z systematisch verfeinern.

Definition 1.1.5 (Verfeinerung einer Zerlegung). Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I , falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.

Definition 1.1.6 (Gemeinsame Verfeinerung). Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in B(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z , nur mehr.

SCHRITT 1: Angenommen Z^* enthält genau einen Teilpunkt $(y_{(l+1)})$ mehr als Z . Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j \quad \forall 0 \leq j \leq l \\ x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j \quad \forall l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* \quad \forall 0 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* \quad \forall j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* \quad \forall j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

SCHRITT 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z . Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \\ \overline{S}_Z(f) &\geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f) \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^* . Dann gilt

$$S_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I . Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \forall f \in B(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \square$$

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I . Somit sind

$$\left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

und

$$\left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von \mathbb{R} .

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral). Es sei $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$. Dann definieren wir

$$\overline{J}(f) := \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Oberintegral})$$

$$\underline{J}(f) := \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup \left\{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ &\Rightarrow \underline{J}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ &\Rightarrow \underline{J}(f) \leq \inf \left\{ \overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\} \\ &\Rightarrow \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \\ &\Rightarrow \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \quad \square \end{aligned}$$

Definition 1.1.12 (Integral). Es sei $I = [a, b]$. $f \in B(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f dx = \int_I f(x) dx = \int_I f dx =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in B(I)$ nennen wir $R(I)$.

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion). $f(x) := c$ auf $[a, b]$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b - a)$$

Beispiel 1.1.14. Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil $\overline{J}(f) = 1$ und $\underline{J}(f) = 0$.

1.2 Integrabilitätskriterien

Satz 1.2.1 (1. Kriterium). Es sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Beweis. „ \Leftarrow “ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ \Rightarrow f &\in R(I) \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “ Angenommen $f \in R(I)$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da $f \in R(I)$ gilt $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \vee Z_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \overline{J}(f) - \underline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.2 (2. Kriterium). Sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

Beweis. „ \Leftarrow “ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„ \Rightarrow “ Sei $f \in R(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$ von I mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, wobei $\delta > 0$ noch später gewählt wird. Setze $Z^* = Z' \vee Z$. Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von Z^* mit denen in Z vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Da Z^* eine Verfeinerung von Z ist, sind alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* . Das heißt die Intervalle I_j (zu Z) unterscheiden sich von den Intervallen I_j^* (zu Z^*) sofern Punkte x'_ν (Teilpunkte von Z^*) im Inneren von I_j liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle I_j existieren maximal, für die I_j eine Verfeinerung von Z oder ? hinter reellen I_j^* ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung Z' unterhalb von I_j liegen. Wir haben l Punkte in Zerlegung Z' . Das heißt die Anzahl solcher Intervalle I_j ist maximal l .

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot |I_j^*| \\ &= \sum_j \left(\overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} \left(\underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\ f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ &\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^* \\
&\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^* \\
&\vdots \quad ???
\end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned}
\underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\
\underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\
\Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l \delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\
&=? \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta
\end{aligned}$$

Jetzt wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um $\Delta(z) < \delta$ ist. □

Anwendung 1.2.3. Zerlegung Z_n von I mit Feinheit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. ξ_n Zwischenpunkt von Zerlegung Z_n . Die Riemannsumme

$$S_{z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^n) \cdot |I_j^n|$$

konvergiert gegen $J(f)$ falls $f \in R(I)$.

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4.** Sei $z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ Zerlegung von $I = [a, b]$ und $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ Zwischenpunkt zur Zerlegung Z , sodass

$$x_{j-1} \leq \zeta_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = \sum_{j=1}^k f(\zeta_j) \cdot |I_j|$$

linear in f .

Korollar 1.2.5. Sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen Z_n von I mit Feinheit $\Delta(z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und jede Folge $(\xi_n)_n$ von Zwischenpunkten ξ_n zugehörig zu Z_n ein Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z_n und der Zwischenpunkten ξ_n und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei $f \in R(I)$ zu $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \forall$ Zerlegungen Z von I mit $\Delta(z) < \delta$. Da $\Delta(z_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_0: \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) = J(f) \leq \bar{S}_Z(f) \\ \underline{S}_Z(f) &\leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| &< \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f \, dx$$

„ \Leftarrow “ SCHRITT 1: Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$ existiert für jede Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen von I mit $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $(\xi_n)_n$ zu Z_n .

Seien $(Z_n^1)_n, (Z_n^2)_n$ zwei solche Folgen von Zerlegungen mit $(\xi_n^1)_n, (\xi_n^2)_n$ zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei $(Z_n)_n$ eine neue Folge von Zerlegungen von I , wobei $Z_{2k} = Z_k^2$ und $Z_{2k-1} = Z_k^1$, außerdem sei $\xi_{2k} = \xi_k^2$ und $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^2}(f, \xi_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^1}(f, \xi_n^1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: (Später)

□

Satz 1.2.6. Der Raum $R(I)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum und $J: R(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, dx$ ist eine lineare Abbildung.

Für $f, g \in R(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f + \beta g \in R(I)$ und $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Beweis. SCHRITT 1: Sei $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ und Zerlegung Z von I mit zugehörigen Intervallen I_j . Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) \quad \underline{m}_j = \inf_{y \in I_j} h(y) \\ \Rightarrow \bar{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\ &= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \end{aligned}$$

$$\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) = \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \quad (1)$$

Nehmen $h = \alpha f + \beta g$; $f, g \in R(I)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= \alpha (f(x) - f(y)) + \beta (g(x) - g(y)) \\ |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sup_{x,y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\ &\leq |\alpha| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x,y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_j \left(\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) \right) |I_j| \\ &\leq |\alpha| \sum_j \left(\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \right) |I_j| + |\beta| \sum_j \left(\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g) \right) |I_j| \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \left(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \right) + |\beta| \left(\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g) \right) \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1: \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists Z_2: \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} \end{aligned}$$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

nach Satz 1.2.1 ist $h = \alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar.

SCHRITT 2: Für Zwischensummen

$$\begin{aligned} S_Z(h, \xi) &= \sum_j h(\xi_j) |I_j| \\ &= \alpha S_Z(f, \xi) + \beta S_Z(g, \xi) \end{aligned}$$

haben wir Linearität!

Für $h, f, g \in R(I)$ gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta S_{Z_n}(g, \xi_n)) \quad (\Delta(Z_n) \rightarrow 0) \\ &\stackrel{1.2.5}{=} \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\ &= \alpha J(f) + \beta J(g) \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.2.7. Seien $f, g \in R(I)$. Dann folgt $f \cdot g \in R(I)$ sowie $|f| \in R(I)$. Ist außerdem $|g| \geq c > 0$ auf I für ein konstantes $c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g} \in R(I)$.

Beweis. Es sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$. Dann gilt

$$|h(x) - h(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)|$$

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

$$\begin{aligned}
 &= |g(x)(f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))| \\
 &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \\
 \|f\|_\infty &= \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty
 \end{aligned}$$

Z Zerlegung von I ist I_j ; Teilintervalle

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_j \left(\bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) \right) \cdot |I_j| \\
 \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x, y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\
 &\leq \|g\|_\infty \left(\bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \right) + \|f\|_\infty \left(\bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g) \right) \\
 \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|f\|_\infty \cdot \left| \bar{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g) \right| + \|g\|_\infty \left(\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \right)
 \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 \exists Z_1: \bar{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_\infty)} \\
 \exists Z_2: \bar{S}_{Z_2}(f) - \underline{S}_{Z_2}(f) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + \|g\|_\infty)}
 \end{aligned}$$

Es sei $Z := Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|f\|_\infty \cdot \left(\bar{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g) \right) + \|g\|_\infty \cdot \left(\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Das heißt $h = f \cdot g \in R(I)$ nach Satz 1.2.1.

Für $|f|$ verwende

$$\begin{aligned}
 ||f(x)| - |f(y)|| &\leq |f(x) - f(y)| \\
 \Rightarrow \bar{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x, y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\
 &\leq \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| \\
 &= \bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)
 \end{aligned}$$

wie vorher folgt also $|f| \in R(I)$.

Für $\frac{f}{g}$ muss nur $\frac{1}{g}$ betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| |g(y)|} \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} |g(x) - g(y)| \\
 \Rightarrow \bar{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g) \right)
 \end{aligned}$$

Dann wie vorher. □