Skript zur Vorlesung
Analysis II
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

Definition 1.1.1 (Zerlegung)**.** Eine Zerlegung Z eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ in Teilintervalle I_j ($j = 1, \dots, k$) der Längen $|I_j|$ ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$ (Teilpunkte von Z) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j \coloneqq x_j - x_{j-1} =: |I_j|$.

Definition 1.1.2 (Feinheit einer Zerlegung)**.** Die Feinheit der Zerlegung Z ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von Z:

$$\Delta(z) \coloneqq \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

Notation 1.1.3 (Riemannsche Zwischensumme)**.** Wir setzen

$$B(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf I. In jedem I_j wählen wir ein $\xi_j \in I_j$ und setzen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Für $f \in B(I)$ setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) \coloneqq \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

Notation 1.1.4 (Ober- und Untersumme)**.** Für $f \in B(I)$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\coloneqq \inf_{I_j} f = \inf \{ f(x) : x \in I_j \} \\
\overline{m}_j &\coloneqq \sup_{I_j} f = \sup \{ f(x) : x \in I_j \} \\
\overline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\
\underline{S}_Z(f) &\coloneqq \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $x \in I_j$

$$\begin{aligned}
\underline{m}_j &\le f(x) \le \overline{m}_j \\
\Rightarrow \underline{m}_j &\le f(\xi_j) \le \overline{m}_j \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\le S_Z(f, \xi) \le \overline{S}_Z(f)
\end{aligned}$$

Wir wollen die Zerlegung Z systematisch verfeinern.

Definition 1.1.5 (Verfeinerung einer Zerlegung)**.** Eine Zerlegung Z^* von I ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I, falls alle Teilpunkte von Z auch Teilpunkte von Z^* sind.

Definition 1.1.6 (Gemeinsame Verfeinerung)**.** Die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ zweier Zerlegungen Z_1, Z_2 von I ist die Zerlegung von I, deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von Z_1 und Z_2 sind.

Lemma 1.1.7. Ist Z^* eine Verfeinerung der Zerlegung Z von I und $f \in B(I)$. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Z^* enthält alle Teilpunkte von Z, nur mehr.
Schritt 1: Angenommen Z^* enthält genau einen Teilpunkt $(y_{(l+1)})$ mehr als Z. Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j \quad \forall\, 0 \leq j \leq l \\ x_l < y_{l+1} &< x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j \quad \forall\, l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* \quad \forall\, 0 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* \quad \forall\, j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* \quad \forall\, j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^{k} \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1}(x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1}(y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^{l} \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$.

Schritt 2: Sei Z^* eine beliebige Verfeinerung von Z. Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_r = Z^*$. Dabei hat Z_{s+1} genau einen Punkt mehr als Z_s. Dann gilt nach Schritt 1, dass

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \cdots \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \\ \overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \cdots \geq \overline{S}_{Z^*}(f) \end{aligned}$$

Schritt 3: Sei $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_l^*)$ der Zwischenpunkt zur Zerlegung Z^*. Dann gilt

$$S_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \qquad \square$$

Lemma 1.1.8. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I. Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \qquad \forall f \in B(I)$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$ □

Bemerkung 1.1.9. Für $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$ gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen Z von I. Somit sind

$$\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\}$$

und

$$\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition 1.1.10 (Ober- und Unterintegral)**.** Es sei $I = [a, b]$ und $f \in B(I)$. Dann definieren wir

$$\overline{J}(f) \coloneqq \inf\left\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\ \right\} \qquad \text{(Oberintegral)}$$
$$\underline{J}(f) \coloneqq \sup\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I\ \} \qquad \text{(Unterintegral)}$$

Lemma 1.1.11. Es sei Z eine Zerlegung von I. Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Beweis. Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren Z_2 und erhalten

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup\{\underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ ist eine Zerlegung von } I\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf\left\{\overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ ist eine Zerlegung von } I\right\} \\
\Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\
\Rightarrow \underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)
\end{aligned}$$ □

Definition 1.1.12 (Integral)**.** Es sei $I = [a, b]$. $f \in B(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir $J(f) \coloneqq \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}x \eqqcolon J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \in B(I)$ nennen wir $R(I)$.