Skript Analysis 1 Vorlesung 3

Alle Angaben ohne Gewähr

1. November 2023

Fortsetzung

Behauptung 0.1.1 $\cap$ ist kommutativ
$A \cap B \iff B \cap A$

Beweis:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \land x \in B\} \\ &= \{x | x \in B \land c \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

■

Behauptung 0.1.2 Distributivität von $\cap$ und $\cup$
$A \cup (B \cap C) \iff (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \land x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \lor (x \in B \land x \in C) \\ &\iff (x \in A \lor x \in B) \land (c \in A \lor x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \land x \in A \cup B \\ &\iff (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

■

Die restlichen Beweise sind ähnlich

Definition 0.1.1: Mengenfamilien

Sei J beliebige Menge $J \neq \emptyset$
Eine Familie von Mengen (Mengenfamilie) ist gegeben durch A_j fpr jeden $j \in J$
Schreibe:

$$\{A_j\}_{j \in J}$$

Definition 0.1.2: Schnitt und Vereinigungsmengen

Es kommt öfters vor, dass man eine Menge I gegeben hat (Indexmenge genannt) und jedem Element $i \in I$ der Indexmenge wird eine Menge A_i zugeordnet. So eine Zuordnung nennt man dann auch Mengenfamilie indiziert über I. In so einem Fall schreibt man dann auch:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

Definition 0.1.3: Kartesisches Produkt

Sind M und N Mengen, und ist $m \in M$ und $n \in N$, so bezeichnet (m, n) das geordnete Paar bestehend aus $m \in M$ und $n \in N$. Zwei solche Paare (m_1, n_1) und (m_2, n_2) sind nach Definition genau dann gleich, wenn $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$. Man schreibt

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$$

und nennt $M \times N$ das kartesische Produkt von M und N.

0.2 Relationen und Äquivalenzrelationen

Definition 0.2.1: Relation

Relation $R = (A, B, G)$
$G \subset A \times B$ (G ist der Graph von $R = G_R$)
$(a, b) \in G \quad a$ ist R-verwandt zu aRb

$$R_1 = (A_1, B_1, G_1)$$
$$R_2 = (A_2, B_2, G_2)$$
$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2 \wedge G_1 = G_2$$

Definition 0.2.2: Inverse Relation

Inverse Relation R^{-1} :

$$R^{-1} = (B, A, G_{R^{-1}})$$
$$G_{R^{-1}} = \{(b, a) \mid (a, b) \in G_R\}$$

Beispiel 0.2.1

A={1,2,3,4}
kleiner Relation $='<':= (A, A, G_C)$

$$\text{mit } G_L := \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$
$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in G_L$$

Definition 0.2.3: Äquivalenzrelation

Sei $R = (A, A, G)$ eine Relation, diese Relation heißt Äquivalenzrelation wenn gilt:

$$R \text{ ist reflexiv: } \forall a \in A : aRa \quad (\forall a \in A : (a, a) \in G)$$

$$R \text{ ist symetrisch: } \forall a_1, a_2 \in A : a_1 R a_2 \Leftrightarrow a_2 R a_1$$

$$R \text{ ist transitiv: } \forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \Rightarrow a_1 R a_3$$

Ist $a_1 R a_2$ $((a_1, a_2) \in G)$ so nennt man a_1 äquivalent zu a_2 bezüglich R

Definition 0.2.4: R Äquivalenzrelation auf A

$$[a]_R := \{b \in A \mid aRb\}$$

Für Äquivalenzklassen schreiben wir auch $a \sim_R b$ für aRb oder $a = b$ modulo R

Note:-

Beobachtung: $\forall a \in A$ ist $[a]_R \neq \emptyset$
Reflexivität: $aR_a \implies a \in [a]_R$

$$\begin{aligned} a_1, a_2 \in [a]_R &\implies a_1 v_R a, a_2 \sim_R a \\ &\implies a_1 v_R a, a \sim_R a_2 \implies a_1 \sim_R a_2 \text{ also } a_1 \in [a_2]_R \end{aligned}$$

Behauptung 0.2.1 R Äquivalenzrelation auf A

Für $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ ist entweder $[a_1]_R = [a_2]_R$ oder $[a]_R \cap [a_2]_R = \emptyset$

Beweis: Da $[a_1]_R, [a_2]_k \neq \emptyset$ reicht zu zeigen ist $[a_1]_R \cap [a_2]_R \neq \emptyset \implies [a_1]_R = [a_2]_R$
Sei $b \in [a_1]_R \cap [a_2]_R$
Sei $c \in [a_1]_R, c \sim_R a_1$
und $b \sim_R a_1 \implies a_1 \sim_R b \implies c \sim_R b$
Auch $b \in [a_2]_R : b \sim_R a_2 \implies c \sim_R a_2$ dh. $c \in [a_2]_R$
Also ist $[a_1]_R \subset [a_2]_R$
Genauso (Symetrie) $[a_2]_R \subset [a_1]_R$ ∎

Korellation 0.2.1

Ist R Aquivalenzrelation auf $A \neq \emptyset$. Dann sind $a_1, a_2 \in A$ entweder äquivalent oder sie gehören zu disjunkten Äquivalenzrelation.

Note:-

Sei $A \neq \emptyset$.
Zerlegung: $F = \left\{A_j\right\}_{j \in J} \quad A_j \subset A$ mit:
1)

$$\forall j \in J : A_j \neq \emptyset$$

2)

$$j_1, j_2 \in], j_1 \neq j_2 : A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$$

3)

$$\bigcup_{j \in J} A_j = A$$