Analysis 1 Hundertmark WS 2023/2024

Alle Angaben ohne Gewähr

5. November 2023

Kapitel 0

Beispiele

Die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind alle Zählzahlen $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$$n \in \mathbb{N} \text{ ist gerade mit } n = 2k$$
$$n \in \mathbb{N} \text{ ist ungerade mit } n = 2k - 1$$

Behauptung 0.0.1
Für $n \in \mathbb{N}$ ist n gerade, folgt aus n^2 gerade

Beweis: Direkt:

$$\begin{aligned} & n = 2k \\ \implies & n^2 = 4k^2 \\ & \quad = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{\in\mathbb{N}} \\ & \quad \implies n^2 \text{ ist gerade} \end{aligned}$$

■

Behauptung 0.0.2
aus n^2 gerade folgt n gerade. Diese Aussage zu treffen ist schwierig, da man mit Wurzeln hantieren muss. Was allerdings einfach zu beweisen ist, ist Behauptung 3

Behauptung 0.0.3
Aus n ungerade folgt n^2 ungerade

Beweis: durch Kontraposition
Annahme: $n = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k-1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &= 2(2k(k-1) + 1 \\ &= 2\underbrace{(2k(k-1)+1)}_{\in\mathbb{N}} - 1 \\ &\implies n^2 \text{ ist ungerade} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Frage 1: Was hat Beh. 2 mit Beh. 3 zu tun?

p="n ist gerade", q="n^2 ist gerade"
Beh. 2: Aus q folgt p
Beh. 3 Aus nicht p folgt nicht q **(Kontraposition)**

$$A \implies B \Leftrightarrow \neg B \implies \neg A$$

Behauptung 0.0.4
$\sqrt{2}$ ist irrational

Beweis: Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$\text{D.h.} \sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{mit } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D.h. } A := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit } \sqrt{2} = \frac{m}{n}\}$$

$\sqrt{2}$ ist rational genau dann, wenn A nicht leer ist.
A ist Teilmenge $\mathbb{N}$
ist A nicht leer, so hat A ein kleinstes Element (**Prinzip des kleinsten Diebes**)
D.h. es existiert $n_* \in A$ mit $n \geq n_*$ deshalb in A $\sqrt{2} = \frac{m}{n_*}$

$$m - n_* = \sqrt{2}n_* - n_* = (\sqrt{2} - 1)n_*$$

Es gilt: $1 < \sqrt{2} < 2 \rightarrow 0 < \sqrt{2} - 1 < 1$
Also folgt $m - n_*$ ist eine ganze Zahl
und $m - n_* = (\sqrt{2} - 1)n_* > 0$ also ist $m - n_* \in \mathbb{N} \geq 1$
und $m - n_* = (\sqrt{2} - 1)n_* < n_*$
Also ist

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{m}{n_*} &= \frac{m(m - n_*)}{n_*(m - n_*)} = \frac{m^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} \\ &= \frac{2n^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} \\ = \frac{n_*(2n_* - m)}{n_*(m - n_*)} &= \frac{2n_* - m}{m - n_*} = \frac{\tilde{m}}{m - n_*} \end{aligned}$$

wobei $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$
D.h. $m - n_* \in A$
Widerspruch zu n_* ist kleinstes Element von A, da $m - n_* < n_*$ $\blacksquare$

Behauptung 0.0.5
Seien $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{k} \in \mathbb{I}$.

Beweis: durch Widerspruch

$$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n} \text{ für } \sqrt{k} \notin \mathbb{N}\}$$

1. $\sqrt{k} > 1$, d.h. es gibt ein $\in \mathbb{N}$ mit $l < \sqrt{k} < l + 1$
2. A hat ein kleinstes Element n_*

Man müsste eigentlich beweisen, dass für $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ *ein kleinstes Element existiert*

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_*}$$

$$\underbrace{m - ln_*}_{\in\mathbb{Z}} = \sqrt{k}n_* - ln_* = \underbrace{(\sqrt{k} - l)}_{>0} n_* > 0$$

$$\implies (m - ln_*) \in \mathbb{N}$$

$$m - ln_* = \underbrace{(\sqrt{k} - l)}_{<1} n_* < 1n_* = n_*$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k} = \frac{m}{n_*} &= \frac{m(m - ln_*)}{n_*(m - ln_*)} \\
&= \frac{m^2 - lmn_*}{n_*(m - ln_*)} \\
&= \frac{kn_*^2 - lmn_*}{n_*(m - ln_*)} \\
&= \frac{\overbrace{kn_* - lm}^{\in\mathbb{Z}}}{\underbrace{m - ln_*}_{\in\mathbb{N}}}
\end{aligned}$$

$$\implies m - ln_* \in A \text{ Widerspruch, da } m - ln_* < n_*.$$

$\blacksquare$

Kapitel 1

Aussagenlogik

Definition 1.0.1: Aussage

Eine Aussage ist eine Behauptung, welche sprachlich, oder durch eine Formel formuliert ist. Diese kann entweder wahr (w), oder falsch sein. (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)

Hinweis: Ein Beispiel beweist niemals etwas. Ein Gegenbeispiel hingegen, beweist, dass die Aussage falsch ist!

Example 1.0.1

- Bielefeld existiert (w)
- 2+2=5 (f)
- es gibt unendlich viele Primzahlen (w)

Definition 1.0.2: Konjunktion, Disjunktion, Implikation

Seien p,q Aussagen:

- Konjunktion: $p \wedge q$ (p und q) „und“
- Disjunktion: $p \vee q$ (p oder q) „oder“
- Implikation: $p \implies q$ (p impliziert q) „wenn...dann“
- Äquivalenz: $p \iff q$ (p und q sind äquivalent) „genau dann, wenn...“
- $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ „entweder..., oder...“

1.0.1 Aussagenform $H(.)$

Wenn wir eine Aussage H(x) für die Variable x haben:
Bspw.:
$H_1(x) := (x^2 - 3x + 2 = 0)$
$H_2(x) := (x = 1 \vee x = 2)$
$H_1(x) \iff H_2(x)$

1.0.2 Beweisstruktur

$$\underbrace{p}_{\text{Voraussetzung:hinreichende Bedingung für q}} \implies \underbrace{q}_{\text{Behauptung:notwendige Bedingung für p}}$$

Beweis: $p \implies r_1 \implies r_2 \implies r_3 \implies r_4 \implies ... \implies r_n \implies q$
$r_1, ...r_n$ sind bereits bekannte wahre Aussagen oder Axiome.

1.0.3 Regeln der Aussagenlogik

Seien A, B und C Aussagen, so sind folgende Aussagen wahr:

1. $A \implies A$
2. $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C)$ (Transitivität)
3. $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge B \wedge C$ und $(A \vee B) \vee C \iff A \vee B \vee C$ (Assoziativität)
4. $A \wedge B \iff B \wedge A$ und $A \vee B \iff B \vee Aund(A \iff B) \iff (B \iff A)$ (Kommutativität)
5. $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)undA \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivität)
6. $(B \implies C) \implies ((A \wedge B) \implies (A \wedge C))$ (Monotonie)
7. $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg Bund\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$ (Morgansche Regeln)
8. $\neg(\neg A) \iff A$ (Doppelte Negation)
9. $A \implies B \iff \neg B \implies \neg A$ (Kontraposition)
10. $A \implies B \iff \neg A \vee B$ (Implikation)
11. $(A \iff B) \wedge (B \iff C) \iff (A \iff C)$
12. $(A \iff B) \iff (A \implies B) \wedge (B \implies A)$ (Äquivalenz)
13. $(A \iff B) \iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Kapitel 2

Mengen

Definition 2.0.1: Mengen

Nach Cantor ist eine Menge M eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.
Diese Objekte heißen Elemente:

$$\begin{aligned} Bsp.: \quad A &:= \{M, A, T, H, E, M, A, T, I, K\} \\ &= \{M, A, H, T, E, A, I, K\} \\ &= \{T, H, E, M, T, A, I, K\} \end{aligned}$$

Man schreibt $x \in A$, wenn A eine Menge ist und x ein Element von A ist.
Ist x kein Element von A, so schriebt man $x \notin A$

Ist $H(.)$ eine Aussagem die von einer Variable x abhängt, dann gibt es eine Menge

$$A := \{x | H(x)\}$$

D.h. $x \in A \iff H(x)$ ist wahr

$H(x) := \{x^2 - 3x + 2 = 0\}$
$B := \{x | H(x)\} = \{1, 2\}$

Definition 2.0.2: Gleichheit, leere Menge, Teilmenge

1. 2 Mengen A und B sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.
2. Die leere Menge ($\emptyset$) ist die eindeutige Menge, welche kein Elemnt enthält
3. Teilmengen: Wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind, dann ist A Teilmenge von B.
   $A \subseteq B$ bzw. $A \supseteq B$ für alle $x \in A$ folgt $x \in B$
   Bemerkung: $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
4. Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, dann nennt man A echte Teilmenge von B
   $$A \subsetneq B$$
5. Zwei Mengen sind disjunkt, falls $x \in A \wedge x \notin B$ oder $A \cap B = \emptyset$

2.0.1 Operationen mit Mengen

Seien A, B Mengen

- Durchschnitt: $A \cap B := \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Vereinigung: $A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Differenz/Komplement: $A \setminus B := \{(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
  Ist $A \subseteq M : A^C = A^C_M = M \setminus A$

2.0.2 Regeln für Mengen

Seien A, B, C, M Mengen und $A, B \subseteq M$. Dann gilt:

1. $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ und $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. $(A \cap B)^C = (A \cap B)^C_M = A^C \cup B^C = A^C_M \cup B^C_M$
   $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
   $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$
   $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

Behauptung 2.0.1 $\cap$ ist kommutativ
$A \cap B \iff B \cap A$

Beweis:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x | x \in B \wedge c \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

■

Behauptung 2.0.2 Distributivität von $\cap$ und $\cup$
$A \cup (B \cap C) \iff (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (c \in A \vee x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \wedge x \in A \cup B \\ &\iff (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

■

Die restlichen Beweise sind ähnlich

Definition 2.0.3: Mengenfamilien

Sei J beliebige Menge $J \neq \emptyset$
Eine Familie von Mengen (Mengenfamilie) ist gegeben durch A_j fpr jeden $j \in J$
Schreibe:

$$\{A_j\}_{j \in J}$$

Definition 2.0.4: Schnitt und Vereinigungsmengen

Es kommt öfters vor, dass man eine Menge I gegeben hat (Indexmenge genannt) und jedem Element $i \in I$ der Indexmenge wird eine Menge A_i zugeordnet. So eine Zuordnung nennt man dann auch Mengenfamilie indiziert über I. In so einem Fall schreibt man dann auch:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

Definition 2.0.5: Kartesisches Produkt

Sind M und N Mengen, und ist $m \in M$ und $n \in N$, so bezeichnet (m, n) das geordnete Paar bestehend aus $m \in M$ und $n \in N$. Zwei solche Paare (m_1, n_1) und (m_2, n_2) sind nach Definition genau dann gleich, wenn $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$. Man schreibt

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$$

und nennt $M \times N$ das kartesische Produkt von M und N.

Kapitel 3

Relationen und Äquivalenzrelationen

Definition 3.0.1: Relation

Relation $R = (A, B, G)$
$G \subset A \times B$ (G ist der Graph von $R = G_R$)
$(a, b) \in G \quad a$ ist R-verwandt zu aRb

$$R_1 = (A_1, B_1, G_1)$$
$$R_2 = (A_2, B_2, G_2)$$
$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2 \wedge G_1 = G_2$$

Definition 3.0.2: Inverse Relation

Inverse Relation R^{-1} :

$$R^{-1} = (B, A, G_{R^{-1}})$$
$$G_{R^{-1}} = \{(b, a) \mid (a, b) \in G_R\}$$

Example 3.0.1

A={1,2,3,4}
kleiner Relation $=' <' := (A, A, G_C)$

$$\text{mit } G_L := \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$
$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in G_L$$

Definition 3.0.3: Äquivalenzrelation

Sei $R = (A, A, G)$ eine Relation, diese Relation heißt Äquivalenzrelation wenn gilt:

$$R \text{ ist reflexiv: } \forall a \in A : aRa \quad (\forall a \in A : (a, a) \in G)$$

$$R \text{ ist symetrisch: } \forall a_1, a_2 \in A : a_1 R a_2 \Leftrightarrow a_2 R a_1$$

$$R \text{ ist transitiv: } \forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \Rightarrow a_1 R a_3$$

Ist $a_1 R a_2$ $((a_1, a_2) \in G)$ so nennt man a_1 äquivalent zu a_2 bezüglich R

Definition 3.0.4: R Äquivalenzrelation auf A

$$[a]_R := \{b \in A \mid aRb\}$$

Für Äquivalenzklassen schreiben wir auch $a \sim_R b$ für aRb oder $a = b$ modulo R

Note:-

Beobachtung: $\forall a \in A$ ist $[a]_R \neq \emptyset$
Reflexivität: $aR_a \Rightarrow a \in [a]_R$

$$a_1, a_2 \in [a]_R \Rightarrow a_1 v_R a, a_2 \sim_R a$$
$$\Rightarrow a_1 v_R a, a \sim_R a_2 \Rightarrow a_1 \sim_R a_2 \text{ also } a_1 \in [a_2]_R$$

Behauptung 3.0.1 R Äquivalenzrelation auf A
Für $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ ist entweder $[a_1]_R = [a_2]_R$ oder $[a]_R \cap [a_2]_R = \emptyset$

Beweis: Da $[a_1]_R, [a_2]_k \neq \emptyset$ reicht zu zeigen ist $[a_1]_R \cap [a_2]_R \neq \emptyset \Rightarrow [a_1]_R = [a_2]_R$
Sei $b \in [a_1]_R \cap [a_2]_R$
Sei $c \in [a_1]_R, c \sim_R a_1$
und $b \sim_R a_1 \Rightarrow a_1 \sim_R b \Rightarrow c \sim_R b$
Auch $b \in [a_2]_R : b \sim_R a_2 \Rightarrow c \sim_R a_2$ dh. $c \in [a_2]_R$
Also ist $[a_1]_R \subset [a_2]_R$
Genauso (Symmetrie) $[a_2]_R \subset [a_1]_R$ ∎

Corollary 3.0.1
Ist R Äquivalenzrelation auf $A \neq \emptyset$. Dann sind $a_1, a_2 \in A$ entweder äquivalent oder sie gehören zu disjunkten Äquivalenzrelation.

Note:-

Sei $A \neq \emptyset$.
Zerlegung: $F = \{A_j\}_{j \in J} \quad A_j \subset A$ mit:
1)
$$\forall j \in J : A_j \neq \emptyset$$

2)
$$j_1, j_2 \in], j_1 \neq j_2 : A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$$

3)
$$\bigcup_{j \in J} A_j = A$$