

Metody Numeryczne, projekt 3

Interpolacyjne metody aproksymacji

Jan Bancerewicz, 198099

4 czerwca 2025

1 Wstęp

Interpolacja, wykorzystywana w metodach numerycznych jest bardzo użytecznym narzędziem przy analizie danych. Dzięki niej możliwe jest określenie wysokości punktów pośrednich funkcji (lub w naszym przypadku trasy), bazując na znanych wysokościach wybranych punktów węzłowych.

W projekcie opisane są 2 kluczowe metody interpolacji: wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz funkcje sklejane trzeciego stopnia (splajny kubiczne). Dodatkowo, w kontekście interpolacji wielomianowej, zostanie zbadana rola węzłów Czebyszewa jako alternatywy dla węzłów równoodległych, mająca na celu poprawienie jakości wyników.

1.1 Metoda Interpolacji Wielomianowej Lagrange'a

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a służy do wyznaczania wielomianu stopnia n przechodzącego przez $n + 1$ określonych punktów (węzłów). Jest to jedna z najprostszych metod interpolacji. Jej główną zaletą jest prostota implementacji oraz stabilność numeryczna, a wynik uzyskany tą metodą jest tożsamy z rozwiązaniem uzyskanym za pomocą metody Vandermonde'a, lecz bez konieczności rozwiązywania układu równań.

Podstawą dla metody Lagrange'a jest funkcja bazowa $\phi_i(x)$, definiowana jako iloczyn:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (1)$$

Następnie, wielomian interpolacyjny Lagrange'a $F(x)$ jest konstruowany jako suma ważona wartości funkcji w węzłach y_i przemnożonych przez odpowiadające im funkcje bazowe $\phi_i(x)$:

$$(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x) \quad (2)$$

W każdym punkcie w gęstej siatce generowanej liniowo między pierwszym a ostatnim węzłem obliczana jest wartość wielomianu interpolacyjnego.

1.2 Zmodyfikowana wersja z Węzłami Czebyszewa

Pomimo swoich zalet, metoda Lagrange'a jest podatna na tzw. **efekt Rungego**, który sprawia, że wielomian interpolacyjny w okolicach krańców przedziału osiąga wielkie wartości, zupełnie niepokrywające się z aktualną wartością funkcji.

W celu zminimalizowania tego zjawiska, można zastosować interpolację w **węzłach Czebyszewa**. Te węzły są rozmiieszczone nierównomiernie, gęściej przy krańcach przedziału i rzadziej w jego środku, co prowadzi do bardziej równomiernego rozłożenia błędu interpolacji. Węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ oblicza się ze wzoru:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n \quad (3)$$

Węzły Czebyszewa dla zadanego przedziału $[a, b]$ wyznaczone są na podstawie minimalnej i maksymalnej wartości x z danych wejściowych. Następnie, wybieramy wartości dla tych węzłów poprzez interpolację liniową na oryginalnych danych, w celu znalezienia punktów najlepiej odpowiadającym obliczonym wartościom, a sama interpolacja wielomianowa Lagrange'a jest wykonywana w tych specjalnie dobranych węzłach.

1.3 Metoda Funkcji Sklejanych (Splajnów Kubicznych)

Metoda funkcji sklejanych polega na wyznaczeniu wielomianu stałego stopnia na każdym z przedziałów między węzłami. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklejanych stopnia 3. Kluczową cechą splajnów jest to, że wielomiany te są tak dobrane, aby cała funkcja była ciągła oraz miała ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu w węzłach.

Wielomiany składowe dla każdego przedziału $[x_i, x_{i+1}]$ są definiowane jako:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (4)$$

Wyznaczenie współczynników a_i, b_i, c_i, d_i dla każdego przedziału wymaga rozwiązywania układu równań. Układ ten opiera się na warunkach:

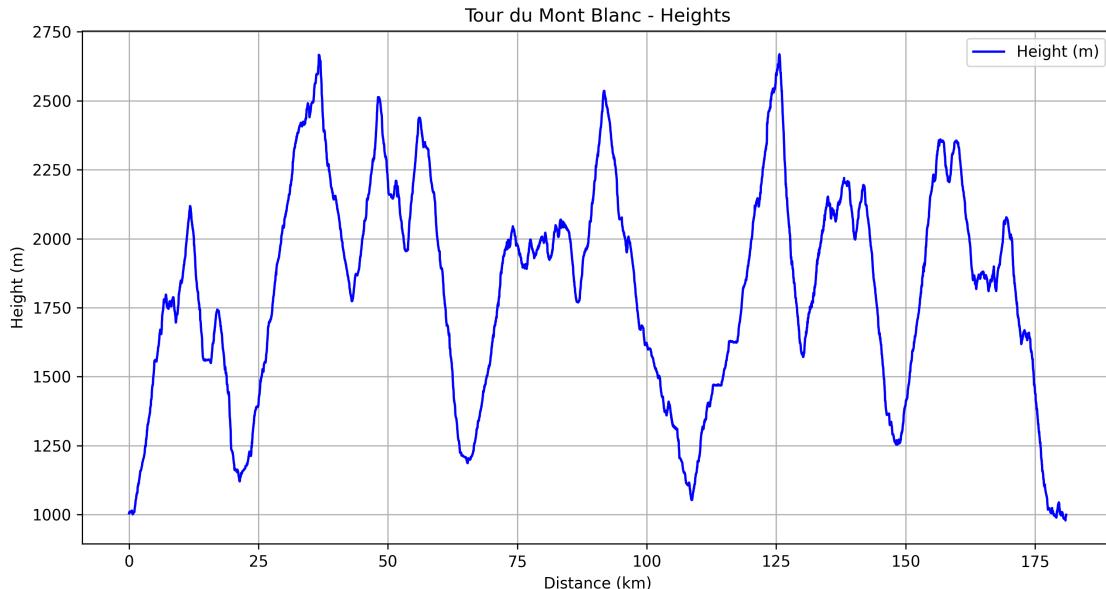
- Wartość funkcji w węzłach: $S_i(x_i) = y_i, S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$.
- Ciągłość pierwszej pochodnej w punktach wewnętrznych: $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$.
- Ciągłość drugiej pochodnej w punktach wewnętrznych: $S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i)$.
- Dodatkowo, dla naturalnych splajnów kubicznych, zeruje się drugie pochodne na krańcach przedziału: $S''_0(x_0) = 0$ oraz $S''_{n-1}(x_n) = 0$.

2 Opis danych

Do analizy interpolacji profilu wysokościowego wybrano dwie trasy o zróżnicowanym charakterze, co umożliwia weryfikację przydatności omawianych metod. Pierwsza trasa charakteryzuje się znacznymi i częstymi wahaniemami wysokości, natomiast druga cechuje się wyraźnym, pojedynczym wzniemieniem. **Wszystkie dane zostały przeskalowane do zakresu od 0 do 100% w celu ujednolicenia skali analizy numerycznej.**

2.1 Opis trasy 1 - Tour du Mont Blanc

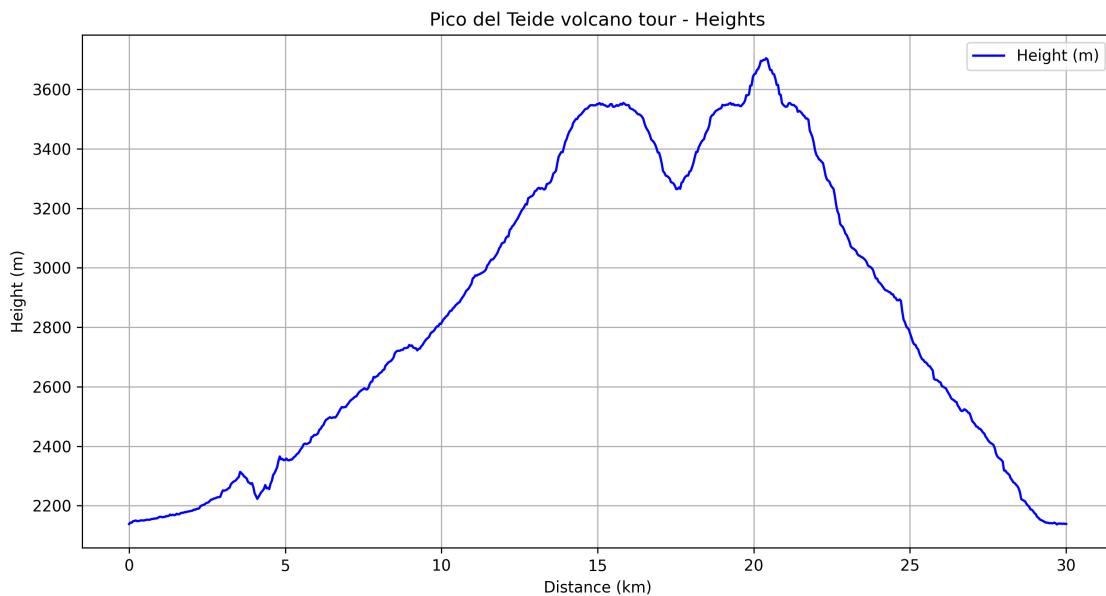
Trasa "Tour du Mont Blanc" ma około 175 km długości i składa się z około 5600 punktów pomiarowych. Jest to profil o bardzo urozmaiconym charakterze, z licznymi wzniemieniami i spadkami, symulujący podróż po pasmie górkim.



Rysunek 1: Wykres ilustrujący profil wysokościowy pierwszej trasy

2.2 Opis trasy 2 - Pico del Teide volcano tour

Trasa "Pico del Teide volcano tour" ma około 30 km długości i składa się z około 710 punktów pomiarowych. Profil ten przedstawia wyraźne, dominujące wzniesienie, z systematycznym wzrostem wysokości do punktu szczytowego i późniejszym spadkiem. Trasa ma załamanie w swojej środkowej części.

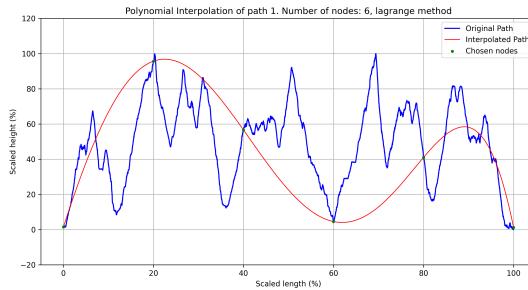


Rysunek 2: Wykres ilustrujący profil wysokościowy drugiej trasy

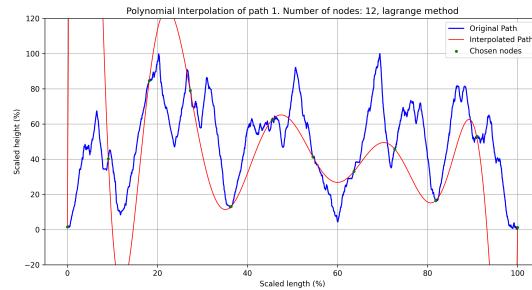
3 Interpolacja Wielomianowa Lagrange'a - Trasa 1

3.1 Informacje

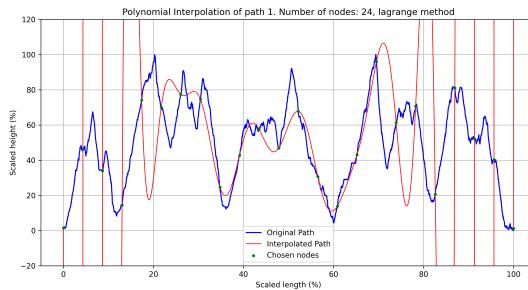
Z pomocą interpolacji Lagrange'a obliczono aproksymowaną wartość funkcji w obszarach pomiędzy węzłami. W celu przetestowania wpływu ilości węzłów na wynik interpolacji przeprowadzono ją dla 6, 12, 24 i 48 równomiernie rozłożonych węzłów. Poniżej znajdują się wykresy dla trasy "Tour du Mont Blanc":



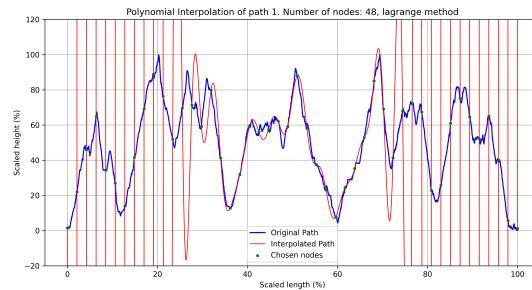
(a) Interpolacja dla 6 węzłów



(b) Interpolacja dla 12 węzłów



(c) Interpolacja dla 24 węzłów



(d) Interpolacja dla 48 węzłów

Rysunek 3: Wpływ liczby węzłów na interpolację wielomianem Lagrange'a dla trasy Tour du Mont Blanc, dla węzłów równolegle rozłożonych.

3.2 Wnioski

Na podstawie przedstawionych wykresów **można zaobserwować wyraźny wpływ liczby równoodległych węzłów na jakość interpolacji** wielomianem Lagrange'a dla trasy o złożonym profilu.

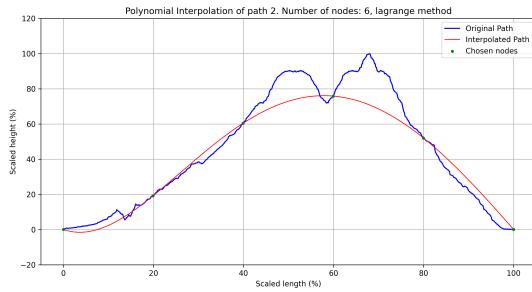
Dla małej liczby węzłów interpolacja jest bardzo ogólna i nie oddaje szczegółów oryginalnego profilu. Krzywa interpolacyjna jest zbyt gładka i pomija wiele istotnych wznieśnień i spadków, oferując jedynie przybliżony kształt trasy.

Wraz ze wzrostem liczby węzłów, interpolacja zaczyna lepiej odwzorowywać ogólny trend trasy, ale wciąż widoczne są znaczne rozbieżności, oraz zaczyna być widoczny **efekt Rungego**, który powoduje znaczne zaburzenia w poprawności danych. Widać to w postaci silnych oscylacji wielomianu na krańcach przedziału oraz w miejscach, gdzie oryginalny profil jest "ostrzejszy" lub ma gwałtowne zmiany.

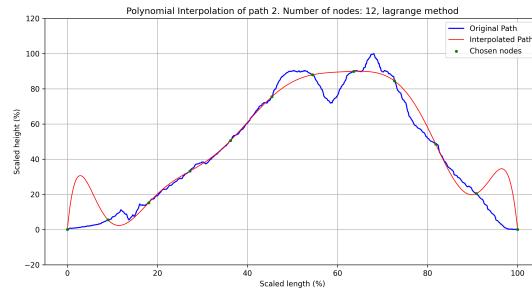
4 Interpolacja Wielomianowa Lagrange'a – Trasa 2

4.1 Informacje

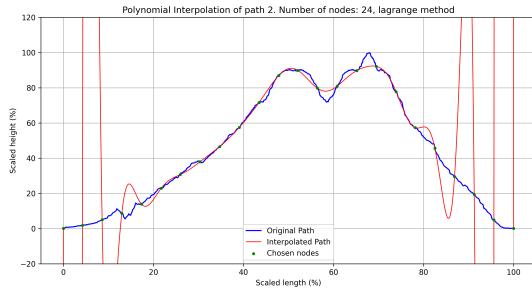
Podobnie jak dla pierwszej trasy, dla trasy "Pico del Teide volcano tour" przeprowadzono analizę wpływu liczby równomiernie rozłożonych węzłów na interpolację wielomianem Lagrange'a. Wybrano 6, 12, 24 i 48 węzłów do badania. Poniższe wykresy prezentują uzyskane rezultaty:



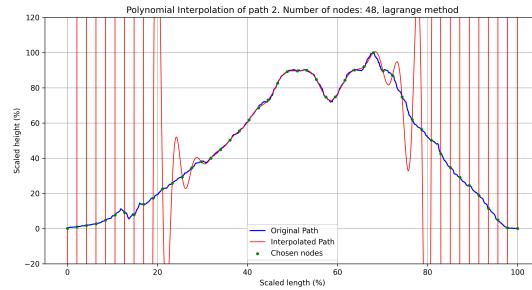
(a) Interpolacja dla 6 węzłów



(b) Interpolacja dla 12 węzłów



(c) Interpolacja dla 24 węzłów



(d) Interpolacja dla 48 węzłów

Rysunek 4: Wpływ liczby węzłów na interpolację wielomianem Lagrange'a dla trasy Pico del Teide volcano tour, dla węzłów równolegle rozłożonych.

4.2 Wnioski

Analiza interpolacji wielomianem Lagrange'a dla trasy "Pico del Teide volcano tour" z równoodległymi węzłami ukazuje charakterystyczne dla tej metody zachowania, przy profilu o dominującym wznieśieniu.

Dla małej liczby węzłów, krzywa interpolacyjna jest bardzo ogólna i stanowi jedynie przybliżenie kształtu wznieśienia. Prostota trasy jednak sprawia, że odwzorowanie jest dokładniejsze niż w trasie pierwszej.

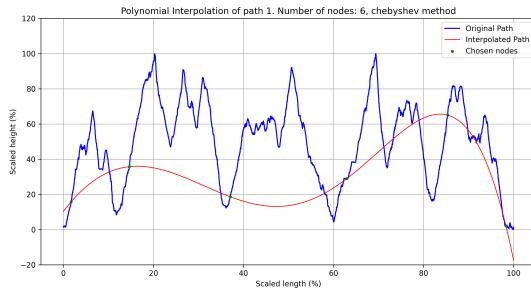
Wraz ze zwiększaniem liczby węzłów, interpolacja zaczyna lepiej odwzorowywać ogólny zarys trasy, a także pewne mniejsze detale w jego profilu. Zauważalne jest jednak, że **efekt Runego** staje się wyraźniejszy na krańcach przedziału.

Przy bardzo dużej liczbie węzłów, efekt Runego jest już bardzo silnie widoczny i rozprzestrzenia się również na obszary bliżej środka przedziału. Pomimo precyzyjnego dopasowania w punktach węzlowych, ogólna jakość interpolacji poza nimi jest słaba, co czyni metodę interpolacji wielomianem Lagrange'a nieodpowiednią dla tego typu danych przy dużej liczbie równoodległych węzłów.

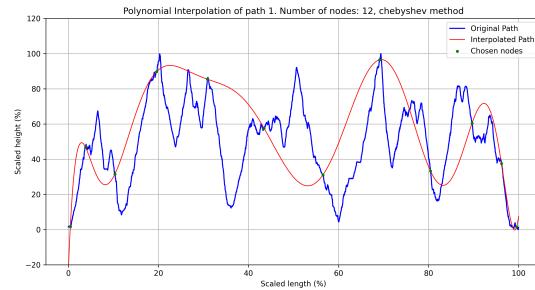
5 Interpolacja Wielomianowa Lagrange'a, węzły Czebyszewa - Trasa 1

5.1 Informacje

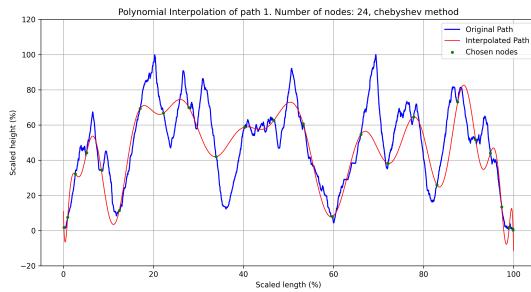
W celu zminimalizowania efektu Rungego, dla trasy "Tour du Mont Blanc" przeprowadzono interpolację wielomianem Lagrange'a z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa. Analizowano wpływ liczby węzłów na wyniki interpolacji dla 6, 12, 24 i 48 węzłów. Poniżej przedstawiono uzyskane rezultaty:



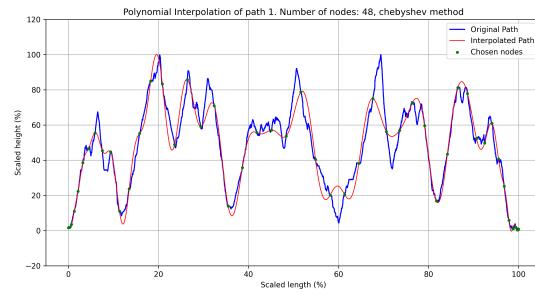
(a) Interpolacja dla 6 węzłów Czebyszewa



(b) Interpolacja dla 12 węzłów Czebyszewa



(c) Interpolacja dla 24 węzłów Czebyszewa



(d) Interpolacja dla 48 węzłów Czebyszewa

Rysunek 5: Wpływ liczby węzłów Czebyszewa na interpolację wielomianem Lagrange'a dla trasy Tour du Mont Blanc.

5.2 Wnioski

Analiza interpolacji wielomianowej z zastosowaniem węzłów Czebyszewa dla trasy "Tour du Mont Blanc" (o złożonym profilu) ujawnia istotne różnice w porównaniu do interpolacji z węzłami równoodległymi.

Dla małej liczby węzłów interpolacja, podobnie jak w przypadku węzłów równoodległych, jest bardzo ogólna i nie odwzorowuje szczegółów profilu. Węzły Czebyszewa są rozmiieszczone gęściej na krańcach, co wpływa na kształt krzywej, ale nadal nie jest wystarczające dla złożonego terenu.

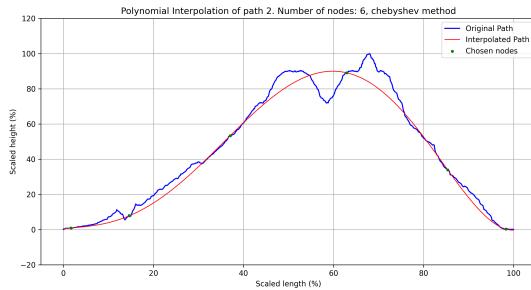
Wraz ze wzrostem liczby węzłów obserwuje się znaczną poprawę jakości dopasowania interpolacji do oryginalnego profilu w porównaniu do metody z węzłami równoodległymi. Dzięki nierównomierному rozmieszczeniu węzłów, które skupiają się bliżej krańców przedziału, **efekt Rungego jest znacznie zredukowany**, a oscylacje na brzegach są mniej widoczne. Krzywa interpolacyjna dużo lepiej oddaje kształt trasy na całej jej długości.

Mimo redukcji efektu Rungego, dla bardzo złożonych profili z wieloma gwałtownymi zmianami wysokości (jak trasa Tour du Mont Blanc), nawet węzły Czebyszewa nie są w stanie w pełni wyeliminować pewnych niedoskonałości interpolacji wielomianowej.

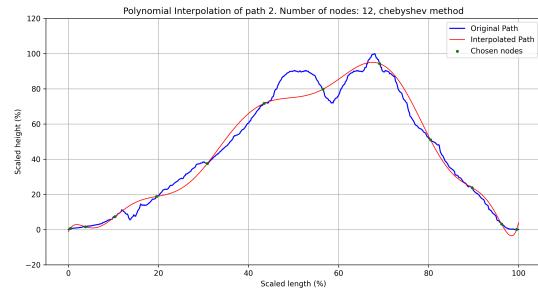
6 Interpolacja Wielomianowa Lagrange'a, węzły Czebyszewa – Trasa 2

6.1 Informacje

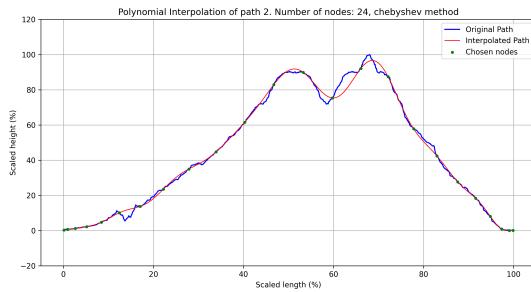
Dla trasy "Pico del Teide volcano tour" również zastosowano interpolację wielomianem Lagrange'a z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa, w celu zminimalizowania efektu Rungego. Przeanalizowano wpływ liczby węzłów dla 6, 12, 24 i 48 węzłów na jakość interpolacji. Poniższe wykresy prezentują uzyskane rezultaty:



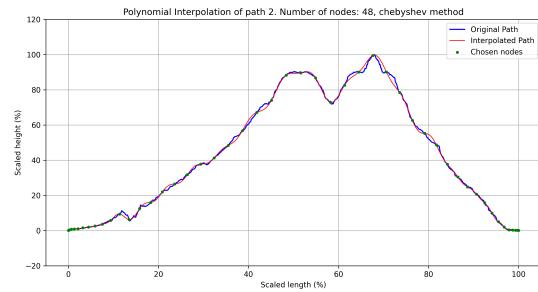
(a) Interpolacja dla 6 węzłów Czebyszewa



(b) Interpolacja dla 12 węzłów Czebyszewa



(c) Interpolacja dla 24 węzłów Czebyszewa



(d) Interpolacja dla 48 węzłów Czebyszewa

Rysunek 6: Wpływ liczby węzłów Czebyszewa na interpolację wielomianem Lagrange'a dla trasy Pico del Teide volcano tour.

6.2 Wnioski

Analiza interpolacji wielomianowej z zastosowaniem węzłów Czebyszewa dla trasy "Pico del Teide volcano tour" (o dominującym wznieśieniu) znacznie różni się od wersji z równoodległymi węzłami.

Dla małej liczby węzłów interpolacja jest ogólna i nie oddaje w pełni szczegółów profilu, jednak dzięki koncentracji węzłów na krańcach przedziału, zjawisko oscylacji jest mniej widoczne niż w przypadku węzłów równoodległych. Krzywa interpolacyjna wygładza profil, ale zachowuje jego główny kształt.

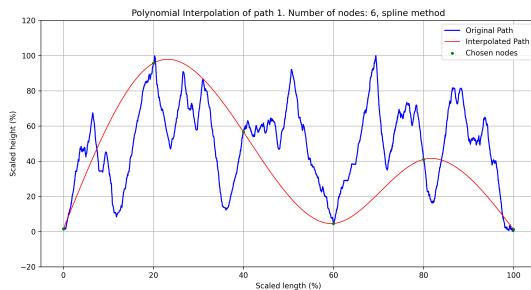
Wraz ze wzrostem liczby węzłów, jakość dopasowania do oryginalnego profilu znacznie się poprawia. Węzły Czebyszewa efektywnie redukują efekt Rungego, sprawiając, że interpolacja jest znacznie bardziej stabilna na krańcach przedziału.

W porównaniu do interpolacji z węzłami równoodległymi, metoda z węzłami Czebyszewa znacznie lepiej radzi sobie z profilem o mniejszej zmienności, takim jak trasa o jednym, dużym wznieśieniu. Umożliwia ona uzyskanie dokładniejszej i stabilniejszej aproksymacji nawet przy większej liczbie węzłów, minimalizując niepożądane oscylacje, które były wyraźnie widoczne przy węzłach równoodległych.

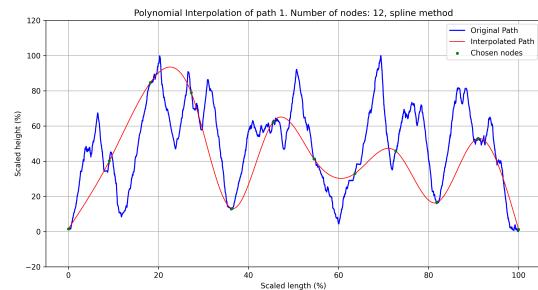
7 Interpolacja funkcjami sklejonymi – Trasa 1

7.1 Informacje

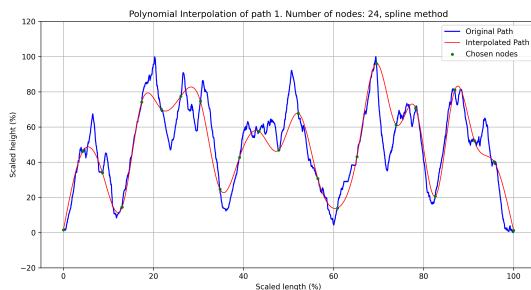
W celu zbadania alternatywnej metody interpolacji, przeprowadzono analizę wpływu liczby węzłów na interpolację funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia dla trasy "Tour du Mont Blanc". Wybrano 6, 12, 24 i 48 równomiernie rozłożonych węzłów do badania. Poniżej przedstawiono uzyskane rezultaty:



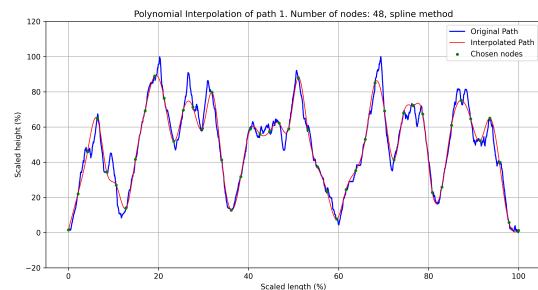
(a) Interpolacja dla 6 węzłów



(b) Interpolacja dla 12 węzłów



(c) Interpolacja dla 24 węzłów



(d) Interpolacja dla 48 węzłów

Rysunek 7: Wpływ liczby węzłów na interpolację funkcjami sklejonymi dla trasy Tour du Mont Blanc.

7.2 Wnioski

Dla małej liczby węzłów, interpolacja funkcjami sklejonymi, podobnie jak inne metody, jest ogólna i wygładza profil.

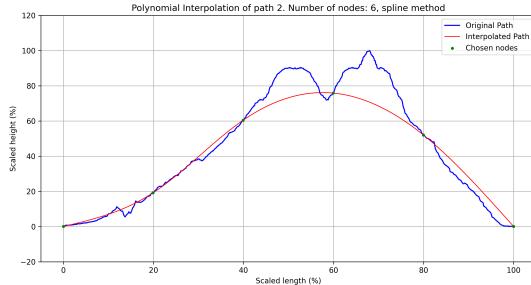
Wraz ze wzrostem liczby węzłów, jakość dopasowania splajnów do oryginalnego profilu znacząco się poprawia. Funkcje sklejane bardzo precyzyjnie odwzorowują zmienne kształty profilu, zachowując płynność krzywej. Co najważniejsze, **efekt Rungego nie występuje** dla tej metody, co czyni ją stabilną nawet przy dużej liczbie węzłów.

Funkcje sklejane kubiczne okazują się znacznie lepszą metodą dla interpolacji danych o zmiennym i złożonym charakterze, takich jak profil wysokościowy. Dzięki swojej konstrukcji, która polega na interpolacji lokalnej z zachowaniem ciągłości pochodnych, splajny oferują wysoką wierność odwzorowania profilu bez wprowadzania niepożądanych oscylacji, co jest kluczowe dla uzyskania realistycznej i użytecznej aproksymacji.

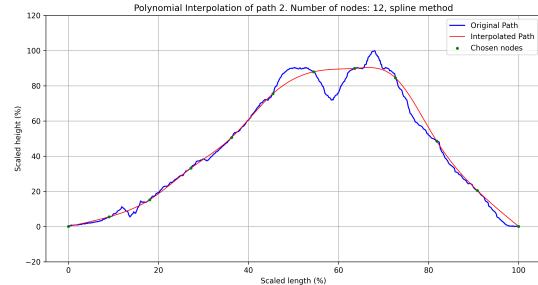
8 Interpolacja funkcjami sklejonymi – Trasa 2

8.1 Informacje

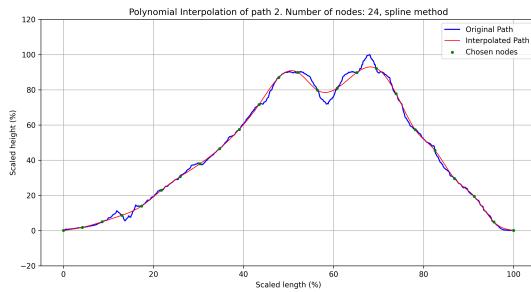
Dla trasy "Pico del Teide volcano tour" również przeprowadzono analizę wpływu liczby węzłów na interpolację funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia. Wybrano 6, 12, 24 i 48 równomiernie rozłożonych węzłów do badania. Poniższe wykresy prezentują uzyskane rezultaty:



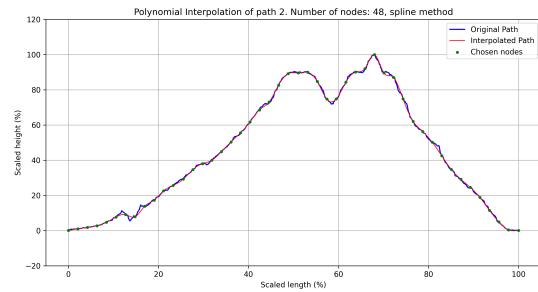
(a) Interpolacja dla 6 węzłów



(b) Interpolacja dla 12 węzłów



(c) Interpolacja dla 24 węzłów



(d) Interpolacja dla 48 węzłów

Rysunek 8: Wpływ liczby węzłów na interpolację funkcjami sklejonymi dla trasy Pico del Teide volcano tour.

8.2 Wnioski

Dla małej liczby węzłów, interpolacja funkcjami sklejonymi bardzo dobrze odwzorowuje ogólny kształt wzniesienia, zachowując przy tym gładkość krzywej. W przeciwieństwie do interpolacji wielomianowej Lagrange'a z równomiernie rozłożonymi węzłami, nie obserwuje się tu znaczących oscylacji na krańcach, nawet przy niewielkiej liczbie punktów.

Wraz ze wzrostem liczby węzłów, jakość dopasowania splajnów do oryginalnego profilu osiąga bardzo wysoki poziom. Krzywa interpolacyjna niemal idealnie pokrywa się z danymi oryginalnymi, precyjnie odwzorowując zarówno główne wzniesienie, jak i wszelkie drobniejsze nieregularności profilu. **Brak efektu Rungego** jest tu szczególnie widoczny i potwierdza stabilność metody splajnów nawet przy dużej gęstości węzłów.

Funkcje sklejane kubiczne wykazują się wyjątkową skutecznością w interpolacji profilu wysokościowego, zarówno dla tras o prostym profilu, jak i tych złożonych.

9 Podsumowanie i wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonej analizy interpolacji profilu wysokościowego tras górskich za pomocą wielomianów Lagrange'a (z węzłami równoodległymi i Czebyszewa) oraz funkcji sklejanych, można wysunąć wiele wniosków.

- **Interpolacja Wielomianowa Lagrange'a z węzłami równoodległymi:** Metoda ta, choć prosta w implementacji, wykazuje poważne ograniczenia, szczególnie dla złożonych profili i dużej liczby węzłów. Widoczny i nasiąkający się efekt Rungego na krańcach przedziału i w miejscach o gwałtownych zmianach wysokości sprawia, że jest ona mało użyteczna w praktycznym zastosowaniu dla tego typu danych. Im więcej węzłów, tym większe oscylacje, co prowadzi do błędного odwzorowania rzeczywistego profilu.
- **Interpolacja Wielomianowa Lagrange'a z węzłami Czebyszewa:** Zastosowanie węzłów Czebyszewa znacząco poprawia stabilność interpolacji, skutecznie redukując efekt Rungego, zwłaszcza na krańcach przedziału. Dla obu tras uzyskano znacznie lepsze dopasowanie do oryginalnego profilu w porównaniu do węzłów równoodległych. Mimo to, w przypadku bardzo skomplikowanych i bardzo zmiennych profili (jak Trasa 1), pewne niedoskonałości i wygładzenia mogą być nadal widoczne. Jest to jednak wyraźny krok naprzód w porównaniu do równoodległych węzłów.
- **Interpolacja funkcjami sklejonymi (splajnami kubicznymi):** Metoda ta okazała się najbardziej efektywna i stabilna dla obu analizowanych profili wysokościowych. Brak efektu Rungego oraz zdolność do precyzyjnego odwzorowywania lokalnych zmian kształtu funkcji, przy jednoczesnym zachowaniu globalnej płynności, czynią ją idealnym narzędziem do interpolacji danych o takim charakterze. Splajny zapewniają wysoką wierność odwzorowania zarówno dla prostszych, jak i bardziej złożonych tras, niezależnie od liczby węzłów.

9.1 Porównanie metod interpolacji

Poniższa tabela przedstawia porównanie analizowanych metod interpolacji pod kątem ich użyteczności dla aproksymacji profilu wysokościowego.

Cecha / Metoda	Lagrange (równoodległe)	Lagrange (Czebyszew)	Funkcje Sklejane
Złożoność implementacji	Niska	Niska	Średnia
Odporność na efekt Rungego	Bardzo niska	Wysoka	Bardzo wysoka
Dokładność dla małej liczby węzłów	Niska	Niska	Średnia
Dokładność dla dużej liczby węzłów	Bardzo niska (oscylacje)	Wysoka	Bardzo wysoka
Płynność interpolacji	Niska (oscylacje)	Średnia	Bardzo dobra
Ogólna użyteczność dla profili wys.	Niska	Średnia / Wysoka	Bardzo dobra

9.2 Podsumowanie

Podsumowując, wybór metody interpolacji ma kluczowe znaczenie dla jakości uzyskanego profilu. Chociaż interpolacja wielomianowa Lagrange'a jest prostą koncepcyjnie metodą, jej podatność na efekt Rungego przy równoodległych węzłach czyni ją niepraktyczną dla większości zastosowań. Zastosowanie węzłów Czebyszewa znacząco poprawia sytuację, ale to interpolacja funkcjami sklejonymi (splajnami kubicznymi) oferuje najlepsze rezultaty, zapewniając zarówno dokładność, jak i płynność interpolacji, niezależnie od złożoności profilu czy liczby użytych węzłów.