Aufgabentyp 3 mit Erklärung

Beim Aufgabentyp 3 geht es darum, das LGS zu lösen. Dafür gibt es drei Möglichkeiten Gauß-Algorithmus, Gauß-Jordan-Algorithmus und das ganze noch etwas weiter getrieben, die Einheitsform.

Aufgabe 1. Gegeben sei das LGS

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3 &= 0 \\
3x_1 + 6x_3 &= 6 + x_2 \\
5x_1 - x_2 + 9x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

(a) Gib die Koeffizientenmatrix und den Vektor der rechten Seite an.
(b) Berechne die Lösung des LGS mit dem Gauß-Algorithmus.
(c) Berechne die Lösung des LGS mit dem Gauß-Jordan-Algorthmus.
(d) Berechne die Lösung des LGS über die Einheitsform.

Lösung: (a)

Das kennen wir schon, das ist Aufgabentyp 2. (Juhu. Sachen wiederholen sich)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Der Trick hier war, alle Variablen auf die linke Seite der Gleichung zu ziehen und die konstanten auf die rechte Seite, sodass man die Koeeffizienten direkt ablesen kann. Das ganze kann man natürlich bei einfachen Gleichungen auch im Kopf machen. Hier ist die Abwägung Zeit vs. zusätzliche Fehlerquelle.

(b)

Und jetzt der Gauß-Algorithmus. Um das Leben etwas einfacher zu machen nutzen wir ab jetzt eine neue Schreibweise für A und $\vec{b}$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 9 & 10 \end{array}\right]$$

Was ist das Ziel des Gauß-Algorithmus?
Wir möchten unterhalb der Hauptdiagonalen (bei uns 1,-1 und 9) nur Nullen stehen haben. Das Ziel ist also unten links ein Dreieck aus 0en.
Aber wie erreichen wir das? Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Wir dürfen andere Zeilen Addieren und Subtrahieren.

2. Wir dürfen ganze Zeilen mit einem Faktor multiplizieren

3. Wir dürfen Zeilen vertauschen. Wenn es uns Zeile 1 in Zeile 3 besser passt, tauschen wir diese einfach.

4. Wir dürfen sogar Spalten tauschen. Aber hier Achtung! Wenn wir Spalten tauschen, tauschen wir auch die Variablen. Normalerweise ist Spalte 1 der Variable x_1 zugeordnet, Spalte 2 zu x_2 und Spalte 3 zu x_3. Sollten wir die Spalten tauschen, tauschen wir die Variablen Zuordnung natürlich auch mit.

Und wieso funktioniert das alles? Weil wir mit all den Operationen oben, das LGS nicht ändern, sondern nur in eine andere, aber äquivalente, Form bringen.

Am besten wollen, wir erstmal unsere erste Spalte mit 0en füllen.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 9 & 10 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ -3 \cdot I \\ -5 \cdot I \end{array}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit -3 bzw. -5 und addieren das Ergebnis schließlich jeweils auf die anderen Zeilen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -3 \\ 0 & -11 & 9 & -5 \end{array}\right]$$

Jetzt fehlt uns nur noch eine 0. Aber welche Zeile nehmen wir am besten zum Addieren? Mit Zeile 1 können wir nicht arbeiten, weil wir beim Addieren unsere linke 0 in Zeile 3 kaputtmachen würden. Es bleibt also Zeile 2. Wir müssen die -7 nur zu eienr +11 machen, damit sie die -11 aus Zeile 3 auslöschen kann.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -3 \\ 0 & -11 & 9 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{11}{7} \cdot II \end{array}$$

Und weil ich das nicht im Kopf kann:

$$9 - \frac{11}{7} \cdot 6 = \frac{63}{7} - \frac{66}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$-5 - \frac{11}{7} \cdot (-3) = -\frac{35}{7} + \frac{33}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Phase 1 vom Gauß-Algorithmus ist geschafft. In der zweiten Phase wird das Ergebnis Schritt für Schritt von x_3 über x_2 bis x_1 "einfach" berechnet.

In Zeile 3 steht die Gleichung:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{7}x_3 &= -\frac{2}{7} \quad | \cdot 7 \\ -3x_3 &= -2 \quad | \cdot -\frac{1}{3} \\ x_3 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

In Zeile 2 steht die Gleichung:

$$\begin{aligned} -7x_2 + 6x_3 &= -3 \quad |x_3 \text{ einsetzen} \\ -7x_2 + \frac{12}{3} &= -3 \quad | - \frac{12}{3} \\ -7x_2 &= -\frac{21}{3} \quad | \cdot (-\frac{1}{7}) \\ x_2 &= \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

Und in Zeile 3 steht die Gleichung :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \quad |x_2 \text{ einsetzen} \\ x_1 + 2 &= 3 \quad | - 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:
Phase 1: 0er Dreieck erzeugen
Phase 2: von unten nach oben, Zeilenweise Variablen einsetzen und berechnen.

(c)
Beim Gauß-Jordan-Algorithmus geht man noch einen Schritt weiter. Hier möchte man nicht nur 0en unter der Diagonalen haben, sondern die 0en sollen auch über der Diagonalen sein. Dies nennt man auch Diagnonalform.
Der Algorithmus ist zu Beginn identisch mit dem Gauß-Algorithmus, die zweite Phase ist jedoch unterschiedlich. Man berechnet die Variablen nicht durch einsetzen, sondern man erzeugt weiter 0en.

Wir haben den Anfang gleich durchgeführt und sind hier stehen geblieben:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Wie bekommt man jetzt die 6 weg? Oder anders gefragt, wie mache ich aus $-\frac{3}{7}$ eine -6?

$$-6 = -\frac{3}{7} \cdot 7 \cdot 2 = -\frac{3}{7} \cdot 14$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right] \quad +14 \cdot III$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Jetzt muss nur noch die 2 aus Zeile 1 weg. Hier bietet sich die zweite Zeile an, da diese die andere 0 nicht kaputt macht. Wie mache ich also aus der -7 eine -2?

$$-2 = -7 \cdot \frac{2}{7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right] \quad +\tfrac{2}{7} \cdot II$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Und was ist jetzt der Vorteil? man kann die Lösungen "fast" direkt ablesen.

$$x_1 = 1$$

$$\begin{aligned} -7x_2 &= -7 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{7}x_3 &= -\frac{2}{7} \\ -3x_3 &= -2 \\ x_3 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(d)

Was ist die Einheitsform? Dabei stehen auf der Diagonalen nur eine 1 und der Rest sind 0en. Wieso macht man das? Weil es noch einfacher ist zum Ablesen. Man startet am Ende vom Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{7}) \\ \cdot(-\frac{7}{3}) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Und man sieht direkt:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{2}{3}$$

Hinweis: *Wenn es nicht vorgegeben ist, würde ich das Verfahren nehmen, das am Schnellsten und am wenigsten Fehler produziert. Bei mir ist es glaube ich das Gauß-Verfahren. Das ist aber persönliche Präferenz.*