Aufgabe 1 (8 Punkte):
Gegeben sei für $t \in \mathbb{R}$ das parametrische LGS $A\vec{x} = b$, definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ t & 1 & 1 \\ t & -t & t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie abhängig von $t \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Lösungen und die Lösungsmenge.

Figure 1: Klausuraufgabe 1 von der Klausur 12.07.2014

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ t & 1 & 1 & 0 \\ t & -t & t^2 & t+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -t \cdot I \\ -t \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1+2t & 0 \\ 0 & -t & t^2+2t & t+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +t \cdot II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1+2t & 0 \\ 0 & 0 & t^2+2t+t+2t^2 & t+1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1+2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t^2+3t & t+1 \end{array}\right)$$

Fälle suchen:

Wir wollen wissen, wann die letzte Zeile zur Nullzeile wird:

$$3t^2 + 3t = 3t(t+1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$t_1 = 0 \text{ oder } t_2 = -1$$

Fall $t = 0$:
Rang $r = 2$ und Defekt $d = n - r = 3 - 2 = 1$. Es ist also keine eindeutige Lösung.
In der letzten Zeile steht $0 = 1$, also ein Widerspruch $\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

Fall $t = -1$:
Rang $r = 2$ und Defekt $d = n - r = 3 - 2 = 1$. Es ist also keine eindeutige Lösung.

In der letzten Zeile steht $0 = 0$, also kein Widerspruch. Es gibt unendlich viele Lösungen.

$$
\begin{gathered}
x_3 = s, \quad s \in \mathbb{R} \\
x_2 + (1-2)x_3 = x_2 - x_3 = 0 \\
\Rightarrow x_2 = x_3 = s \\
x_1 - 2x_3 = 0 \\
\Rightarrow x_1 = 2x_3 = 2s
\end{gathered}
$$

$$
\mathbb{L} = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\}
$$

Fall $t \neq -1$ und $t \neq 0$:

$$
\begin{gathered}
3t(t+1)x_3 = t + 1 \\
3tx_3 = 1 \\
x_3 = \frac{1}{3t}
\end{gathered}
$$

Wir dürfen $t + 1$ kürzen, da wir den Fall $t = -1$ ausschließen und auch durch t teilen, weil wir $t = 0$ ausschließen.

$$
\begin{gathered}
x_2 + (1+2t)x_3 = 0 \\
x_2 + \frac{(1+2t)}{3t} = 0 \\
x_2 = -\frac{(1+2t)}{3t}
\end{gathered}
$$

Und letzte Variable:

$$
\begin{gathered}
x_1 - 2x_3 = 0 \\
x_1 = 2x_3 \\
x_1 = \frac{2}{3t}
\end{gathered}
$$

$$
\mathbb{L} = \{\frac{1}{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -(1+2t) \\ 1 \end{pmatrix}\}
$$

Und Glückwunsch du hast 1/6 der Klausurpunkte erfolgreich gemeistert.