Beim Aufgabentyp 7 geht es um das Berechnen von Inversen und Transponierten einer Matrix.

Aufgabe 1
Gegeben sind folgende Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Gib die Transponierte an.

(b) Gib falls möglich, die Inverse an.

Lösung

(a)

Beim Transponieren vertauscht man Zeilen und Spalten. Bildlich entspricht das einem Tausch entlang der Diagonalen. Es ergeben sich also folgende Transponierten:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Was ist überhaupt eine Inverse Matrix? Für die Matrix A muss die entsprechende inverse Matrix B folgende Bedingung erfüllen:

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}$$

Eine Multiplikation mit der inversen Matrix ergibt also die Einheitsmatrix (nur 1en auf der Diagonalen und alles andere 0).
In diem Fall schreibt man für die inverse Matrix auch A^{-1}.
Diese Gleichung bringt und jetzt aber nicht besonders viel um die Inverse zu berechnen, höchstens als Probe ist es nützlich.

Außerdem besitzt nicht jede Matrix eine inverse Matrix. Invertierbar sind nämlich nur sogenannte "reguläre Matrizen". Reguläre Matrizen sind immer quadratisch (sie haben also genau so viele Spalten wie Zeilen). Aber nicht jede quadratische Matrix ist eine reguläre

Matrix. Es gibt nämlich noch eine zweite Eigenschaft, die reguläre Matrizen brauchen. Alle Zeilenvektoren sind linear unabhängig.

Und wie berechnen wir das ganze jetzt? Mit dem schon bekannten Gauß-Jordan Algorithmus. Als Beispiel nehmen wir die Matrix A. Die Matrix A ist schon mal quadratisch, das steht der Inversen also nicht im weg. Aber hat sie auch linear unabhängige Zeilenvektoren? Das finden wir beim Rechen mit dem Gauß-Jordan Algorithmus raus. Wenn hier eine Nullzeile entsteht, gibt es keine Inverse.

Man benutzt folgendes Schema. Links schreib man die Matrix hin, die man invertieren will und rechts die Einheitsmatrix. Man formt solange um mit dem Gauß-Jordan Algorithmus bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Als Ergebnis auf der rechten Seite, steht dann die Inverse.

$$(A|\mathbb{1})$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -II \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Auf der linken Seite steht nun unsere Einheitsmatrix. Und dementsprechend auf der rechten Seite unsere Inverse. Bei der Berechnung sind auch keine Nullzeilen entstanden, die Inverse existiert also offensichtlich.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Als Probe könnte man noch $AA^{-1} = \mathbb{1}$ überprüfen.

Weiter zur Matrix B. Hier gibt es keine Inverse, da sie nicht quadratisch ist.

Und zur Matrix C. Die ist quadratisch, also fangen wir an mit dem Rechnen.

$$(C|\mathbb{1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tauschen Zeile I und II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}II \\ \\ -\frac{3}{2}II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +III \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Die Inverse ist also:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$