Aufgabentyp 10 mit Erklärung

Aufgabentyp 10 geht schnell, hier schauen wir uns ein paar Eigenschaften von Matrizen an.
Vorwissen

Symmetrische Matrix: $A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In Worten ausgedrückt, eine Spiegelung an der Diagonalen ergibt die gleiche Matrix. Das ganze funktioniert logischerweise nur mit quadratischen Matrizen.

Schiefsymmetrisiche Matrix: $-A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

In Worten ausgedrückt, eine Matrix ist schiefsymmetrisch, wenn ihre Transponierte gleich dem Negativen der Matrix selber ist.

invertierbare Matrix: A^{-1} existiert (prüfbar durch $\det A \neq 0$)

orthogonale Matrix: $A^T \cdot A = \mathbb{1}$

Die Transponierte mit der Matrix multipliziert ergibt die Einheitsmatrix. Man kann es auch anders schreiben, da man auch die Formel kennt:

$$A^{-1}A = \mathbb{1}$$

Daraus folgt, dass $A^{-1} = A^T$.
Zum Überprüfen bietet sich, aber eher die Formel mit der Transponierten an, da diese leichter zu berechnen ist als die Inverse.

Man kann jetzt auch noch überlegen, was dieses orthogonal eigentlich bedeutet. Dazu greifen wir etwas vor. Orthogonal bzw. orthonormal sind Begriffe aus dem Bereich Vektoren.
Orthonormal bedeutet nämlich nichts anderes, als dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben. Man überprüft dies mit dem Skalarprodukt. Ist das Skalarprodukt aus zwei Vektoren 0, so stehen beide senkrecht aufeinander. Zeigen beide in die gleiche Richtung und haben jeweils die Länge 1, so ist das Skalarprodukt 1.
Die Gleichung $A^T \cdot A$ ist eine Zusammenfassung verschiedener Skalarprodukte zwischen den Zeilen- und Spaltenvektoren. Und wenn die Einheitsmatrix rauskommt, so stehen die Zeilen- und Spaltenvektoren senkrecht aufeinander und haben jeweils die Länge 1.

Aufgabe 1:

Sind die folgenden Matrizen symmetrisch, schiefsymmetrisch, invertierbar und orthogonal? Gib jeweils auch die Determinante an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 42 \\ 42 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = 42, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Matrix A

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 42 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} = A \rightarrow \text{A ist symmetrisch}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -42 \\ -42 & -1 \end{pmatrix} \neq A^T \rightarrow \text{A ist NICHT schiefsymmetrisch}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 42 \cdot 42 = -1762 \neq 0 \rightarrow \text{A ist invertierbar}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 42 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 42 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1764 & 84 + 42 \\ 84 + 42 & 1764 + 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1768 & 126 \\ 126 & 1765 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1} \rightarrow \text{A ist NICHT orthogonal}$$

Matrix B

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq B \rightarrow \text{B ist NICHT symmetrisch}$$

$$-B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B^T \rightarrow \text{B ist schiefsymmetrisch}$$

$$\det(B) = 0 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 = 4 \neq 0 \rightarrow \text{B ist invertierbar}$$

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1} \rightarrow \text{B ist NICHT orthogonal}$$

Matrix C

$$C^T = 42 = C \rightarrow \text{C ist symmetrisch}$$

$$-C = -42 \neq C^T \rightarrow \text{C ist NICHT schiefsymmetrisch}$$

$$\det(C) = 42 \neq 0 \rightarrow \text{C ist invertierbar}$$

$$C \cdot C^T = 42 \cdot 42 \neq \mathbb{1} \rightarrow \text{C ist NICHT orthogonal}$$

Matrix D

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq D \rightarrow \text{D ist NICHT symmetrisch}$$

$$-D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D^T \rightarrow \text{D ist schiefsymmetrisch}$$

$$\det(D) = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{D ist invertierbar}$$

$$D \cdot D^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \rightarrow \text{D ist orthogonal}$$