Aufgabentyp 5 erweitert die LGS um einen neuen Blickwinkel. Die Lösungen des LGS kann man sich nächmich auch geometrisch vorstellen.

Vorwissen Teil 1:

Die Gleichungen des LGS können auch als Geraden interpretiert werden.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Umgeformt lässt sich dieses LGS nämlich auch schreiben als:

$$-x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = x_1 + 3$$
$$2x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -x_1 + 1$$

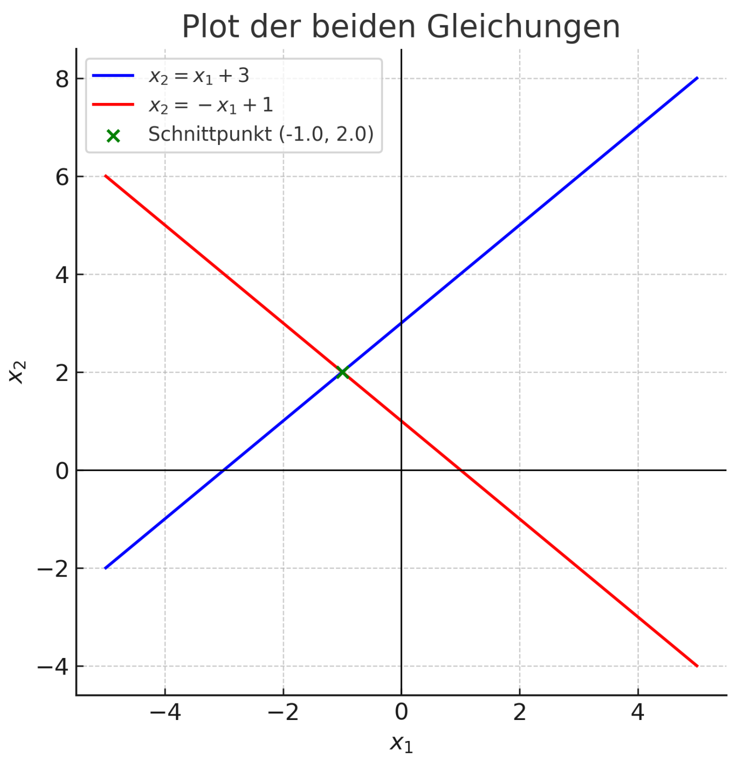

Figure 1: Plot der beiden Gleichungen $x_2 = x_1 + 3$ und $x_2 = -x_1 + 1$.

In der Grafik kann man schön sehen, den Schnittpunkt mit der x_2 Achse bei 1 und 3, der auch direkt aus der Gleichung ablesbar ist.

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt die Lösung des LGS. Wen du das LGS z.B. mit dem Gaußverfahren löst, wirst du genau diesen Wert rausbekommen (-1, 2).

In unserem Beispiel gibt es eine eindeutige Lösung für das LGS, das ist immer der Fall, wenn ein Schnittpunkt zwischen allen Geraden existiert. Wie sehen aber die anderen beiden Fälle (keine Lösung und unendlich viele Lösungen) aus?
Bei keiner Lösung, gibt es auch keinen Schnittpunkt, die Geraden treffen sich also nie.
Bei unendlich vielen Lösungen sind zwei Geradengleichungen identisch, es gibt also unendlich viele Schnittpunkte zwischen diesen.

Hinweis: $x_1 = 5$ ist eine vertikale Gerade bei 5 und $x_2 = 2$ eine horizontale Gerade mit der Höhe 2.

Für Geraden gibt es auch noch eine zweite Schreibweise, die in den nächsten Kapiteln häufiger verwendet wird. Die folgende Menge beschreibt alle Punkte, die auf der blauen Gerade sind.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Es kann viele unterschiedliche Mengendefinitionen geben für die gleiche Gerade, die hier funktioniert z.B. auch für die blaue Gerade:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Punkt (5,8) ist auch auf der Geraden und, der Vektor (2,2) zeigt in die gleiche Richtung, wie (1,1). Es beschreibt also die selbe Gerade.

Bis jetzt haben wir nur zwei Dimensionen betrachtet, das ganze kann man aber z.B. auch in drei Dimensionen machen, hier ist jedoch die Gleichung keine Gerade mehr, sondern eine Ebene. Bei 3 Gleichungen mit 3 Variablen sucht man den Schnittpunkt zwischen drei Ebenen (der bei einer eindeutigen Lösung, auch nur wieder ein Punkt ist).
Vorwissen Teil 2:

Für imhomogene LGS ($\vec{b} \neq \vec{0}$) gilt, dass ihre Lösungsmenge sich wie folgt zusammensetzt:

$$\mathbb{L} = \{\vec{x_s}\} + \mathbb{L}_h$$

$\mathbb{L}_h$ ist die homogene Lösung, die Lösung für den Fall $\vec{b} = \vec{0}$. Und $\vec{x_s}$ ist eine spezielle Lösung, eine der Lösungen für den Fall $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Interessant wird das ganze, wenn man sich den Fall für unendlich viele Lösungen anschaut. Wir haben diese LGS gegeben:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Die Lösungen würden wir normalerweise so berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = t \text{ mit } t \in \mathbb{R}, x_1 = 1 - x_2 = 1 - t$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schauen wir mal nach ob unsere Gleichung mit der homogenen Lösung oben stimmt?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = t \text{ mit } t \in \mathbb{R}, x_1 = -x_2 = -t$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Wenn man jetzt vergleicht, kommt die homogene Lösung bekannt vor.
Jetzt brauchen wir nur och eine spezielle Lösung. Dafür raten wir einfach und probieren (0,1) einfach aus:

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow 0 + 2 = 2$$

(0,1) ist also eine spezielle Lösung. Die Formel stimmt oben.

Man kann sich jetzt fragen, was der ganze Aufwand soll, weil gewonnen haben wir dadurch nicht wirklich etwas. Und das stimmt auch, zum Lösen ist es nicht wirklich nützlich. Aber es ist gut zu wissen, wie so eine Lösung aufgebaut ist. Hilfreich wird dies später bei DGL Systemen.

Aufgabe 1. Bestimme die Lösungsmenge des LGS

$$\begin{aligned} -p_1 2x_1 + x_2 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= -1 - p_2 \end{aligned}$$

für die Parameter

(a) $p_1 = 1, p_2 = 1,$ **(b)** $p_1 = 0, p_2 = 1,$ **(c)** $p_1 = 1, p_2 = 0,$

und veranschauliche den Sachverhalt im $x_1 - x_2$ Koordinatensystem.

Löse im Fall von identischen Geraden das zugehörige homogene System und verifiziere hierfür anschaulich das Linearitätsprinzip. Wie lautet die Lösungsstruktur für das inhomogene System ?

Lösung: (a)
Für $P_1 = 1$ und $p_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \; -I \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; \Rightarrow \mathbb{L} = \varnothing$$

Keine Lösung, da Widerspruch. Veranschaulichung im $x_1 - x_2$ Koordinatensystem:
1. Gleichung:

$$x_2 = 2x_1 - 1$$

2. Gleichung:

$$x_2 = 2x_1 - 2$$

Das sind zwei parallele Geraden mit der Steigung 2. Da sie parallel sind, treffen sie sich nicht. Parallele Geraden haben immer die gleiche Steigung.

(b)

Für $p_1 = 0$ und $p_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \; -I \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \; \Rightarrow \mathbb{L} = \{(\frac{1}{2}, -1)^T\}$$

Eindeutige Lösung.
Veranschaulichung:
1. Gleichung:

$$x_2 = -1$$

2. Gleichung:

$$x_2 = 2x_1 - 2$$

Einmal haben wir eine horizontale Gerade bei -1 und eine mit Steigung 2 und x_2-Achsenabschnitt bei -2. Beide schneiden sich bei $(\frac{1}{2}, -1)^T$.

(c)

Für $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \; -I \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; \Rightarrow x_2 = t \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

$$-2x_1 + x_2 = -1$$

$$-2x_1 + t = -1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen.
Veranschaulichung:
1. Gleichung:

$$x_2 = 2x_1 - 2$$

2. Gleichung:

$$x_2 = 2x_1 - 2$$

Beide Gleichungen sind identisch.

Als nächstes sollen wir das homogene System lösen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -I \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = t \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

$$-2x_1 + x_2 = -2x_1 + t = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \{t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Die Lösungen von homogenen LGS erfüllen das Linearitätsprinzip/Superpositionsprinzip. Das bedeutet, wenn wir zwei Punkte auf der Lösungsgeraden auswählen, und diese addieren, ist das Ergebnis wieder auf der Geraden. Das gleiche gilt, wenn wir ein Punkt der Geraden stauchen oder Strecken (Multiplizieren mit einer Konstanten).

Beispiel:
Der Punkt $(\frac{1}{2}, 1)^T$ ist auf der Geraden und auch der Punkt $(2,4)^T$. Jetzt strecken und addieren wir diese Punkte:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Und man erkennt mit $t = 10$, dass das Ergebnis auch Teil der Lösungsmenge ist. Lösungen homogener LGS haben diese Eigenschaft.

Wir wollen aber auch noch die Lösungsstruktur der inhomogenen Lösung zeigen. Dafür brauchen wir noch eine spezielle Lösung, die wir raten/ausprobieren oder berechnen. Wir probieren folgenden Punkt aus $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, ob er das inhomogene LGS löst.

$$-2x_1 + x_2 = -1$$

$$-2\frac{1}{2}+0=-1+0=-1$$

Passt also, der Punkt ist eine spezielle Lösung.
Und unsere Lösungsstruktur:

$$\mathbb{L}=\vec{x}_s+\mathbb{L}_h=\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\}$$

passt auch, wenn man es mit der berechneten Lösung vergleicht.

Hinweis:*Man hätte auch einen anderen Punkt raten können, der auf der Gerade liegt. Es ist trotzdem die gleiche Lösungsmenge. Das liegt daran, dass man das t frei wählen kann. (Geanuer erklärt in der Lösung von Ü6)*