Aufgabentyp 4 mit Erklärung

Bei Aufgabentyp 4 lösen wir die LGS nicht nur, sondern untersuchen sie vorher etwas genauer.

Vorwissen:

Was ist eine Dreieckstufenform?

Das:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Und wie stellen wir das her? Über den Gauß-Algorthmus.

Was ist der Rang r und wie berechnet man ihn?

Der Rang ist eine wichtige Eigenschaft des LGS und auch von Matrizen Allgemein.. Er gibt an wie viele unabhängige Gleichungen es gibt. Eine Gleichung ist unabhängig, wenn man sie durch Operationen (andere Zeilen addieren) nicht konstruieren kann.

Und wie bestimmt man den Rang jetzt? Man bringt die Matrix in die Dreieckstufenform und zählt alle Zeilen in der die Koeffizienten $\neq 0$ sind. In unserem Beispiel oben gilt also $r = 3$. Den Vektor $\vec{b}$ ignoriert man beim Zählen.

Wie berechnet man den Defekt d?

Für den Defekt schaut man sich auch wieder die Dreieckstufenform an.
Man zählt die Anzahl der Spalten der Matrix A und nennt diese n. Außerdem muss man den Rang r wissen. Der Defekt ergibt sich aus diesen beiden zu $d = n - r$. In unserem Beispiel also $d = 3 - 3 = 0$.

Wie bestimmt man die Lösbarkeit?

Wir kennen bereits unseren Rang r und die Anzahl der Variablen/Spalten n. Beides haben wir mit der Dreiecksstufenform bestimmt.

Fall 1: $r = n$

Rang und Spalten der Matrix A sind also identisch. In diesem Fall gibt es **eine eindeutige Lösung**.

$$r = n \Rightarrow \text{eine eindeutige Lösung}$$

Fall 2: $r < n$
Der Rang ist also kleiner als die Anzahl der Variablen. Zur weiteren Differenzierung dieses Falles schaut man sich den Vektor $\vec{b}$ an. Und zwar nicht den ganzen Vektor, sondern uns interessieren nur die Einträge, die zu den "Nullzeilen" gehören.

Fall 2a: $r < n$ und die Einträge sind 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} \end{array}\right)$$

In diesem Fall gibt es **unendlich viele Lösungen**. Die Freiheitsgerade dieser Lösungsmenge entspricht gerade der Anzahl der Defekte d.

Fall 2b: $r < n$ und die Einträge sind $\neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} \end{array}\right)$$

Hier steht etwas, das nicht sein kann. Aus Zeile 4 ergibt sich die Gleichung:

$$0 = 2$$

Und weil es nicht sein kann, folgt daraus, dass es **keine Lösung** gibt.

Aufgabe 1. Überführe das LGS in eine Dreiecksstufenform und bestimme den Rang r sowie den Defekt d. Gib die Anzahl der Lösungen an und berechne die Lösungsmenge.

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Lösung: (a)
Im ersten Schritt die Dreiecksstufenform herstellen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall ging das schnell.
Der Rang ist $r = 1$, weil es eine Zeile gibt, die keine Nullzeile ist. Es gibt zwei Variablen, also $n = 2$. Daraus folgt für den Defekt $d = n - r = 2 - 1 = 1$.

Hinweis: *Hier passiert laut Skript und Musterlösungen etwas "Besonderes". Weil es eine quadratische Matrix ist ($m = n$) entspricht der Defekt der Anzahl der Nullzeilen. Ja cool zu wissen, aber keine Ahnung wieso denen das so wichtig ist.*

Lösbarkeit? $r = 1 < 2 = n$. Die Lösung ist schonmal nicht eindeutig, sondern wir haben es mit Fall 2 zu tun. Wir finden in den Nullzeilen auch keine Widersprüche, hier steht überall $0 = 0$, also haben wir Fall 2a. Es gibt unendlich viele Lösungen.

Jetzt wird es kniffliger, wir sollen die Menge der Lösungen bestimmen. Über den Defekt $d = 1$ wissen wir, diese Menge hat einen Freiheitsgrad.
Der Trick ist, dass wir eine unser Variablen x_1, x_2 durch eine frei wählbare Größe ersetzen.

$$x_2 = t \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe von t berechnen wir jetzt die restlichen Variablen (in diesem Fall nur x_1).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2t &= 0 \\ x_1 &= -2t \end{aligned}$$

Und unsere Lösungsmenge:

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

Dreiecksstufenform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Zwei Variablen:

$$n = 2$$

Zwei Nicht-Null Zeilen:

$$r = 2$$

Defekt:

$$d = n - r = 2 - 2 = 0$$

Lösbarkeit:

$$n = r \Rightarrow \text{eindeutige Lösung}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} -2x_2 &= 2 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 - 2 &= 0 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$