Der Aufgabentyp 7 ist ausgerichtet auf das Rechnen mit Matrizen. In der Klausur wird dies vermutlich nicht direkt abgefragt, sondern implizit versteckt in Aufgaben. Daher ist es trotzdem nützlich dies zu wissen.

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gib die Formate der Matrizen an und berechne folgendes, falls es möglich ist:
(a) $B + C$ (b) $C + B$ (c) $B - C$ (d) $C - B$ (e) $A + B$ (f) $D + E$

(g) $A \cdot B$ (h) $B \cdot A$ (i) A^2 (j) $C \cdot D$ (k) $C \cdot E$ (l) $D \cdot E$

(m) $E \cdot D$ (n) $A \cdot F$

Lösung

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{R}^{3,3} &\quad ,\text{also} \quad m = 3(Zeilen), n = 3(Spalten) \\
B \in \mathbb{R}^{3,2} &\quad ,\text{also} \quad m = 3(Zeilen), n = 2(Spalten) \\
C \in \mathbb{R}^{3,2} &\quad ,\text{also} \quad m = 3(Zeilen), n = 2(Spalten) \\
D \in \mathbb{R}^{1,2} &\quad ,\text{also} \quad m = 1(Zeilen), n = 2(Spalten) \\
E \in \mathbb{R}^{2,1} &\quad ,\text{also} \quad m = 2(Zeilen), n = 1(Spalten) \\
F \in \mathbb{R}^{3,3} &\quad ,\text{also} \quad m = 3(Zeilen), n = 3(Spalten)
\end{aligned}$$

Als erstes die Addition von Matrizen. Wichtig hierbei ist, dass die Matrizen genau die gleiche Dimension haben müssen, sonst funktioniert das ganze nicht. Die Addition findet elementweise statt. Also der Eintrag $b_{2,1}$ wird mit dem Element/Eitnrag $c_{2,1}$ addiert.
(a)

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 1+1 & 1+1 \\ 1+2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$C + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 1+1 & 1+1 \\ 2+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Und schon können wir sehen: $A + B = B + A$. Das gilt also auch für Matrizen.

(c)
Die Subtraktion funktioniert auch elementweise.

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 \\ 1-1 & 1-1 \\ 1-2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-2 \\ 1-1 & 1-1 \\ 2-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Und auch hier sieht man beim Vergleich:

$$B - C = -(C - B)$$

(e)

Wir wollen zwei Matrizen Addieren mit der folgenden Dimensionen:
(3,3) + (3,2)
Da die Dimensionen unterschiedlich sind, ist die Addition nicht möglich. Einfach aus dem Grund, weil man nicht weiß welches Element mit welchem addiert werden muss. Es geht einfach nicht auf.

(f)

Wir wollen zwei Matrizen Addieren mit der folgenden Dimensionen:
(1,2) + (2,1)
Das geht auch wieder nicht.
Das Interessante ist, auch Vektoren sind Matrizen mit der Eigenschaft, dass eine der Dimensionen 1 ist. Was müsste man machen, wenn man diese beiden Vektoren trotzdem Addieren möchte? Dann muss eine der beiden transponiert werden. Transponieren ist einfach nur ein fancy Wort für die Dimensionen vertauschen.

(g)

Jetzt wird es spannend, wir kommen zur Matrizenmultiplikation. Als erstes muss gecheckt werden, ob die Dimensionen passen. Ist eine Matrizenmultiplikation erlaubt?
Wir wollen folgende Dimensionen multiplizieren:
$(3, 3) \cdot (3, 2)$
Meine Merkregel ist, dass die beiden "inneren" Zahlen identisch sein müssen für eine Matrizenmultiplikation. In diesem Fall ist es eine 3 und eine 3. Die Matrizenmultiplikation ist also erlaubt. Außerdem kann man direkt ablesen, welche Dimension das Ergebnis haben wird, dazu verwendet man die "äußeren" Zahlen/Dimensionen. Das Ergebnis wird die Dimension (3,2) haben.

Jetzt aber zur Multiplikation selber:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls du verwirrt bist, empfehle ich das Video hier: https://studyflix.de/mathematik/matrizen-multiplizieren-1521

(h)

Wir versuchen folgende Dimensionen zu Multiplizieren: $(3, 2) \cdot (3, 2)$
Da die "inneren" Dimensionen nicht übereinstimmen, ist eine Matrizenmultiplikation nicht möglich.

(i)
Wir versuchen folgende Dimensionen zu Multiplizieren: $(3, 3) \cdot (3, 2)$
Das funktioniert.

$$\begin{aligned} A \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(j)

Dimension:
$(3, 2) \cdot (1, 2)$
nicht möglich

(k)

Dimension:
$(3, 2) \cdot (2, 1)$
Rechnung möglich
Ergebnis hat die Dimension $(3, 1)$

$$C \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(l)

Dimension:
$(1, 2) \cdot (2, 1)$
Rechnung möglich

$$D \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

Das coole ist es entsteht eine Matrix mit der Dimension (1,1). Oder anders ausgesprochen, es ist einfach ein Skalar. Mit der Rechnung haben wir also aus zwei Matrizen einen Skalar gemacht.

(m)

Dimension:
$(2, 1) \cdot (1, 2)$
Rechnung möglich

$$E \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(n)

Dimension:
$(3, 3) \cdot (3, 3)$
Rechnung möglich

$$A \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man A und das Ergebnis vergleicht, stellt man fest, dass es identisch ist. Nämlich F ist eine sehr spezielle Matrix, die sogenannte Einheitsmatrix. Multipliziert man die Einheitsmatrix an eine andere Matrix verändert sich diese nicht. Das ist quasi das äquivalent zu der 1 beim "normalen" Rechnen. $5 \cdot 1 = 5$.