Aufgabentyp 9: Determinanten berechnen

**Vorwissen**:

Wofür brauchen wir eigentlich Determinanten?
Und schon sind wir wieder bei der Lösbarkeit von Gleichungssystemen. Nämlich gilt für die Matrix, die das LGS beschreibt ($A$), dass die Determinante nicht 0 ist ($detA \neq 0$), so ist das LGS eindeutig lösbar. Bisher mussten wir immmer den Rang zählen. Aber wir können auch einfach die Determinante ausrechnen. Allerdings kann man Determinanten nur für quadratische Matrizen ausrechnen.

Hinweis: *Wenn eine quadratrische Matrix eindeutig lösbar ist, dann ist sie auch regulär, und somit haben wir eine neue Bedingung um die Invertierbarkeit von Matrizen zu überprüfen.*

Um Determinanten zu berechnen gibt es unterschiedliche Möglichkeiten:

- für 2x2 Matrizen gibt eine einfache Formel
- für 3x3 Matrizen gibt es die Regel von Sarrus
- für alle anderen funktioniert der Laplacescher Entwicklungssatz

**Aufgabe 1**
Berechne die folgenden Determinanten:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Lösung**
A)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

Das zugehörige LGS ist also eindeutig lösbar.
Der vertikale Strich an den Seiten der Matrix bedeutet, hier wird eine Determinante berechnet. Aber was ist hier passiert? Etwas Allgemeiner steht hier die Formel für 2x2 Determinanten:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

B)

Trickfrage, da die Matrix nicht quadratisch ist (gleich viele Zeilen wie Spalten), existiert auch keine Determinante.

C)

Bei der 3x3 bietet sich die Regel von Sarrus an oder alternativ kann man auch den Entwicklungssatz verwenden. Für die Regel von Sarrus schaut man sich am Besten die Grafik auf Wikipedia an (Regel von Sarrus). Der Laplacescher Entwicklungssatz wird hier sehr gut erklärt: Entwicklungssatz . Was man sich nur noch merken muss, oben links im "Schachbrettmuster" steht ein "+"

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2$$
$$= 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$$

Um sich das Leben in der Klausur etwas leichter zu machen, braucht man die Terme gar nicht aufschreiben, wenn man sieht, dass eine 0 vorkommt. Es hilft außerdem sich ein Muster anzugewöhnen mit dem man die Matrix abgeht. Die Gewohnheit hilft, keine Flüchtigkeitsfehler zu machen. Mein Muster siehst du in der Reihenfolge, in der ich die Zahlen oben aufgeschrieben habe.

Für Übungszwecke wiederholen wir die Rechnung mit dem Entwicklungssatz von Laplace. Zum Entwickeln sucht man sich eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen. Jede Null bedeutet für das Rechnen ein Term weniger. Zusätzlich muss man sich das Schachbrettmuster mit -1 und +1 noch visualisieren. Welcher Term in meiner ausgesuchten Zeile bekommt ein +1 und welcher ein -1 als Faktor?

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Wir suchen uns die erste Spalte aus, weil hier zwei Nullen vorkommen. Die erste 0 bekommt den Faktor +1, die 2 den Faktor -1 und die letzte 0 wieder +1-

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 2(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 0 = 2$$

Um die Unterdeterminante zu bestimmen, stelle ich mir immer ein Kreuz vor, dass von dem Faktor ausgeht nach dem ich entwickle (z.B. die 2). Das Kreuz streicht die Spalte und Zeile aus. Die danach noch vorhandenen Spalten und Zeilen verwende ich dann für die Unterdeterminante.

Auch bei dieser Rechnung gilt in der Klausur, man kann die Null-Terme weglassen, da es Zeit kostet. Für die Verständlichkeit sind sie hier mit aufgeführt.
D)

Bei der 4x4 Matrix bietet sich der Entwicklungssatz an, da Regel von Sarrus bei der Größe nicht funktioniert. Die zweite Spalte hat die meisten Nullen, daher wird diese zum Entwickeln genutzt. Das Vorzeichen nach dem Schachbrettmuster entspricht:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ 1 & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \cdot 0 \cdot det(D_1) + (+1) \cdot 0 \cdot det(D_2) + (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} (+1) \cdot 0 \cdot det(D_4)$$

$$= -1[0 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 2]$$

$$= -1[0 + 2 + 0 - 2 - 0 + 2] = -1[2] = -2$$