Aufgabentyp 2 mit Erklärung

Beim zweiten Aufgabentyp geht es darum, das Gleichungssystem in die Form einer Koeffizientenmatrix zu bringen. Wir schreiben das ganze System also in einer Matrixgleichung statt vieler Einzelgleichung.
Und wieso machen wir das? Weil es eine Form ist mit der man viel leichter Aussagen über das LGS treffen kann. Ist das LGS eindeutig lösbar? Gibt es unendlich viele Lösungen? Oder gibt es überhaupt eine Lösung?

Vorwissen 1

Wir wollen das LGS in folgender Form schreiben:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit unserer Koeffizientenmatrix A, dem Vektor der Unbekannten $\vec{x}$ und der Inhomogenität $\vec{b}$.

Man kann das ganze auch ausführlicher schreiben:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Wie würden die Gleichungen aussehen, wenn man die Matrix ausmultipliziert? So:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \text{II:} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \text{III:} \quad & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}$$

Und jetzt sieht man auch schon wie ein Lineares Gleichungssystem (LGS) mit der Koeffizientenmatrix zusammenhängt.

Hinweis: Die Koeffizienten dürfen auch 0 sein.

Vorwissen 2

Lineare Gleichungssysteme können homogen und inhomogen sein. Und der Unterschied ist ganz einfach:

$$\vec{b} = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$\vec{b} \neq 0 \Rightarrow \text{inhomogen}$$

Umgangssprachlich ausgedrückt, gibt es irgendwelche Konstanten in der Gleichung? Ja oder Nein?

Was bringt mir das ganze Wissen jetzt? Homogene lineare Gleichungssysteme haben eine coole Eigenschaft. Es gibt immer eine sogenannte triviale Lösung. Setz für x_1, x_2, x_3 einfach mal 0 ein und rechne die linke Seite der Gleichung aus.

$$\begin{aligned}
\text{I:} \quad & a_{11}0 + a_{12}0 + a_{13}0 = 0 = b_1 \\
\text{II:} \quad & a_{21}0 + a_{22}0 + a_{23}0 = 0 = b_2 \\
\text{III:} \quad & a_{31}0 + a_{32}0 + a_{33}0 = 0 = b_3
\end{aligned}$$

Bei homogenen LGS stimmt diese Gleichung, weil b ja auch 0 ist. (Bei inhomogenen nicht). Das bedeutet also eine Lösung für das homogene Gleichungssystem ist:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Es heißt triviale Lösung, weil es so trivial/"einfach" ist.

Aufgabe 1. Schreibe die folgenden LGS mit Hilfe der Koeffizientenmatrix A und der Inhomogenität $\vec{b}$ auf. Welche Dimension haben die beiden (nutze hier die mathematische Schreibweise). Ist das LGS homogen oder inhomogen?

(a)

$$\begin{aligned}
\text{I:} \quad & 2x_1 - 3x_2 - 2 = 0 \\
\text{II:} \quad & 3x_2 + 4x_1 + 5 = 0
\end{aligned}$$

Lösung: (a)

Wir erinnern uns, die ausmultiplizierte Form der Koeffizientenmatrix sieht so aus:

$$\begin{aligned}
\text{I:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
\text{II:} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{aligned}$$

Unsere Gleichung wollen wir nun die genau die gleiche Form bringen (ist nicht notwendig, aber macht uns das Leben leichter).

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 2x_1 - 3x_2 = +2 \\ \text{II:} \quad & 4x_1 + 3x_2 + = -5 \end{aligned}$$

Und schon können wir einfach ablesen wie A und b aussehen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Nächste Frage ist, welche Dimensionen haben die beiden? $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Hinweis: *In dem Fall haben wir bei der Matrix Glück, weil Zeilen und Spalten die gleiche Länge haben. Per Konvention is es aber so, bei der Angabe der Dimension steht die erste Zahl für die Zeile und die zweite für die Spalte. Sollte man sich unbedingt merken!*

Und ist es homogen?
Ne. Leider nicht, da $\vec{b} \neq \vec{0}$