

PIZZO – Zadanie 2

Jan Burdzicki, 339592

22.11.2024

1 Treść zadania

Dla programu X , który bierze dwie liczby naturalne, coś liczy i zwraca 0 lub 1 (nigdy się nie zapętla), przez P_X oznaczamy problem decyzyjny taki, że $P_X(n) = 1$ jeśli istnieje m takie, że $X(n, m) = 1$, oraz $P_X(n) = 0$ w przeciwnym przypadku. Czy istnieje X taki, że P_X jest nierozstrzygalny?

2 Rozwiązanie

Pokażemy przykład programu X takiego, że P_X będzie nierozstrzygalny.

Niech $X(n, m)$ będzie programem, który przyjmuje jako argumenty 2 liczby naturalne:

- n – numer programu (mamy ponumerowane programy kolejnymi liczbami naturalnymi)
- m – ograniczenie na liczbę wykonanych operacji na maszynie Turinga

Będziemy uruchamiać n -ty program, wykonując jego m kolejnych operacji.

$$X(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy program numer } n \text{ zakończy się po wykonaniu } \leq m \text{ operacji,} \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Zatem program X spełnia w oczywisty sposób założenia z zadania, czyli:

- wejście: 2 liczby naturalne
- wyjście: 0 lub 1
- nigdy się nie zapętla

$P_X(n)$ rozumiemy następująco:

$$P_X(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy istnieje } m \text{ takie, że program numer } n \text{ zatrzymuje się po } \leq m \text{ operacjach,} \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Założmy nie wprost, że $P_X(n)$ jest rozstrzygalny. Wtedy dla dowolnego n bylibyśmy w stanie sprawdzić, czy n -ty program kiedykolwiek się zatrzyma ($P_X(n) = 1$) lub czy zajdzie zdarzenie przeciwne ($P_X(n) = 0$). Zatem $P_X(n)$ rozstrzygałby problem STOPu. Sprzeczność (problem STOPu jest nierozstrzygalny).

Zatem $P_X(n)$ jest nierozstrzygalny.