Studiehalen.nl

Bijles om het meeste uit je studie te halen.

WB1631 STERKTELEER

Dit is een boekje met gedetailleerde en stapgewijze uitwerkingen van opgaven uit Hibbeler Mechanics of Materials 11 edition.

Wat is studiehalen.nl

Studiehalen.nl is een bijles platform voor en door studenten van de tu delft. We geven persoonlijke bijles die bij jouw leerstijl past.

Waarom studiehalen.nl

Onze student-docenten kennen de stof én de struikelpunten, omdat ze zelf recent dezelfde tentamens hebben gehaald. Ze delen handige voorbeelden en maken het makkelijker om vragen te stellen. Zo begrijp je de stof sneller en helpen ze je slim plannen, zodat je tijd overhoudt voor je vrije tijd!

Hoe werkt studiehalen.nl

Nadat je contact met ons heb opgezocht zullen wij een geschikte studentdocent aan jou koppelen. De lessen plan je wekelijks in en wij regelen de bijles ruimtes.

Werkcollege 13

Contents

Probleem 8-4 5
Probleem 8-7 7
Probleem 8-21 10
Probleem 8-30 12
Probleem 8-35 15
Probleem 8-31 en 8-32 18

Probleem 8-4

***8–4.** The thin-walled cylinder can be supported in one of two ways as shown. Determine the state of stress in the wall of the cylinder for both cases if the piston *P* causes the internal pressure to be 0.5 MPa. The wall has a thickness of 6 mm and the inner diameter of the cylinder is 200 mm.

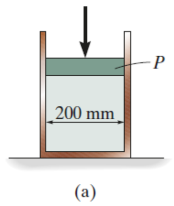


Figure 1: Het probleem gekopieerd uit het boek.

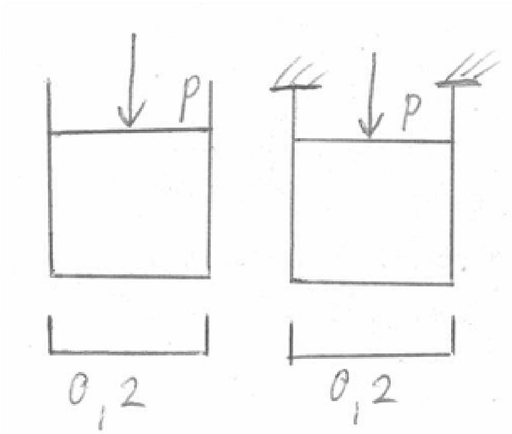


Figure 2: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave vraagt om de spanningstoestand in de wand van een dunwandige cilinder te berekenen. Er zijn twee ondersteuningsconfiguraties, zoals weergegeven in de figuren (a) en (b). De cilinder wordt intern belast door een druk $P = 0.5\,\mathrm{MPa}$. De cilinder heeft een binnendiameter $d = 200\,\mathrm{mm}$ en een wanddikte $t = 6\,\mathrm{mm}$.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- **Gegeven:**
  - Interne druk: $P = 0.5\,\mathrm{MPa}$
  - Binnendiameter: $d = 200\,\mathrm{mm} = 0.2\,\mathrm{m}$
  - Wanddikte: $t = 6\,\mathrm{mm} = 0.006\,\mathrm{m}$
- **Benodigde formules:** Voor een dunwandige cilinder gelden de volgende spanningen:

$$\sigma_1 = \frac{Pr}{t} \quad \text{(circumferentiële spanning)}$$
$$\sigma_2 = \frac{Pr}{2t} \quad \text{(axiale spanning, indien van toepassing)}$$

  Hier is $r = \frac{d}{2} = 0.1\,\mathrm{m}$ de binnenstraal.

3. Maak een Plan

We berekenen de circumferentiële spanning (σ_1) en, indien nodig, de axiale spanning (σ_2) voor beide configuraties:

- In situatie (a) is de cilinder aan de zijkanten open, waardoor $\sigma_2 = 0$ is.
- In situatie (b) is de cilinder afgesloten, waardoor zowel σ_1 als σ_2 optreedt.

4. Los Stapsgewijs op

Situatie (a):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Pr}{t} \\ &= \frac{(0.5)(0.1)}{0.006} \\ &= 8.33\,\mathrm{MPa}.\end{aligned}$$

De axiale spanning:

$$\sigma_2 = 0.$$

Situatie (b):

1. Bereken de circumferentiële spanning:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Pr}{t}\\ &= \frac{(0.5)(0.1)}{0.006}\\ &= 8.33\,\text{MPa}.\end{aligned}$$

2. Bereken de axiale spanning:

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{Pr}{2t}\\ &= \frac{(0.5)(0.1)}{2(0.006)}\\ &= 4.17\,\text{MPa}.\end{aligned}$$

5. Resultaat

- **Situatie (a):** $\sigma_1 = 8.33\,\text{MPa}$, $\sigma_2 = 0\,\text{MPa}$.
- **Situatie (b):** $\sigma_1 = 8.33\,\text{MPa}$, $\sigma_2 = 4.17\,\text{MPa}$.

6. Conclusie

- In een dunwandige cilinder veroorzaakt de interne druk circumferentiële spanning (σ_1) en, indien afgesloten, ook een axiale spanning (σ_2).
- De circumferentiële spanning is significant groter dan de axiale spanning.
- Begrip van de ondersteuningsconfiguratie is cruciaal om de juiste spanningen te berekenen.

Probleem 8-7

8–7. The gas storage tank is fabricated by bolting together two half cylindrical thin shells and two hemispherical shells as shown. If the tank is designed to withstand a pressure of 3 MPa, determine the required minimum thickness of the cylindrical and hemispherical shells and the minimum required number of bolts for each hemispherical cap. The tank and the 25-mm-diameter bolts are made from material having an allowable normal stress of 150 MPa and 250 MPa, respectively. The tank has an inner diameter of 4 m.

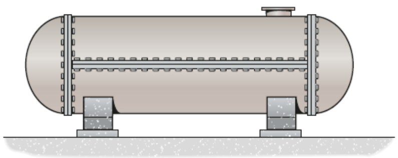


Figure 3: Het probleem gekopieerd uit het boek.

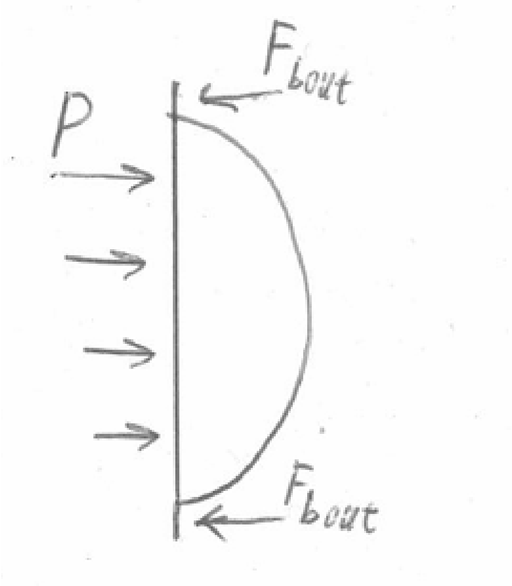


Figure 4: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

We moeten:

- De minimale wanddikte van de cilinder en de bolvormige platen bepalen.
- Het aantal bouten berekenen dat nodig is om elke halve bol stevig vast te maken.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Interne druk: $P = 3\,\text{MPa} = 3 \cdot 10^6\,\text{Pa}$.
- Maximale toelaatbare spanning:

$$\sigma_{\text{tank}} = 150\,\text{MPa} = 150 \cdot 10^6\,\text{Pa},$$
$$\sigma_{\text{bout}} = 250\,\text{MPa} = 250 \cdot 10^6\,\text{Pa}.$$

- Diameter van de tank: $d_{\text{tank}} = 4\,\text{m}$.
- Diameter van bouten: $d_{\text{bout}} = 25\,\text{mm} = 0.025\,\text{m}$.
- Formules voor een dunwandige cilinder en bolvorm:

$$\sigma_{\text{hoop}} = \frac{Pr}{t},$$
$$\sigma_{\text{bol}} = \frac{Pr}{2t}.$$

3. Maak een Plan

- Bereken de minimale dikte t voor de cilinder (σ_{hoop}).
- Bereken de minimale dikte t voor de bolvorm (σ_{bol}).
- Bereken de maximale kracht per bout (F_{bout}).
- Gebruik de som van krachten op de halve bol om het benodigde aantal bouten n_s te berekenen.

4. Los Stapsgewijs op

a) Minimale dikte van de cilinder

De hoopspanning in een cilinder is:

$$\sigma_{\text{hoop}} = \frac{Pr}{t}.$$

Los op naar t:

$$t_c = \frac{Pr}{\sigma_{\text{tank}}},$$

waarbij $r = \frac{d_{\text{tank}}}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{m}$. Substitueer de waarden:

$$t_c = \frac{(3 \cdot 10^6)(2)}{150 \cdot 10^6}$$
$$t_c = 0.04\,\text{m} = 40\,\text{mm}.$$

Minimale dikte van de bolvorm

De spanning in de bolvorm is:

$$\sigma_{\text{bol}} = \frac{Pr}{2t}.$$

Los op naar t:

$$t_b = \frac{Pr}{2\sigma_{\text{tank}}}.$$

Substitueer de waarden:

$$t_b = \frac{(3 \cdot 10^6)(2)}{2(150 \cdot 10^6)}$$
$$t_b = 0.02\,\text{m} = 20\,\text{mm}.$$

b) Aantal benodigde bouten

De toegestane kracht per bout is:

$$F_{\text{bout}} = \sigma_{\text{bout}} A_{\text{bout}},$$

waarbij $A_{\text{bout}} = \frac{\pi}{4} d_{\text{bout}}^2$. Substitueer:

$$A_{\text{bout}} = \frac{\pi}{4}(0.025)^2 = 4.91 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2,$$
$$F_{\text{bout}} = (250 \cdot 10^6)(4.91 \cdot 10^{-4}) = 122.72 \cdot 10^3\,\text{N} = 122.72\,\text{kN}.$$

De verticale kracht op een cylinder door de interne druk is:

$$F = PA = P\pi r^2.$$

Substitueer:

$$F = (3 \cdot 10^6)\pi(2)^2$$
$$F = 37.7 \cdot 10^6\,\text{N}.$$

Het aantal bouten is:

$$n_s = \frac{F}{F_{\text{bout}}}.$$

Substitueer:

$$n_s = \frac{37.7 \cdot 10^6}{122.72 \cdot 10^3}$$
$$n_s = 307.2 \approx 308\,\text{bouten}.$$

5. Resultaat

- Minimale dikte van de cilinder: $t_c = 40\,\text{mm}$.
- Minimale dikte van de bolvorm: $t_b = 20\,\text{mm}$.
- Benodigde aantal bouten: $n_s = 308$.

6. Conclusie

- De interne druk veroorzaakt significant hogere spanningen in de cilinder dan in de bolvorm, vandaar dat de cilinder dikker moet zijn.
- De berekeningen illustreren het belang van het correct dimensioneren van zowel de tank als de bevestigingen om mechanische veiligheid te garanderen.

Probleem 8-21

8–21. Determine the shortest distance d to the edge of the plate at which the force **P** can be applied so that it produces no compressive stresses in the plate at section a–a. The plate has a thickness of 10 mm and **P** acts along the centerline of this thickness.

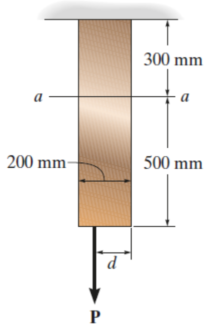


Figure 5: MHet probleem gekopieerd uit het boek.

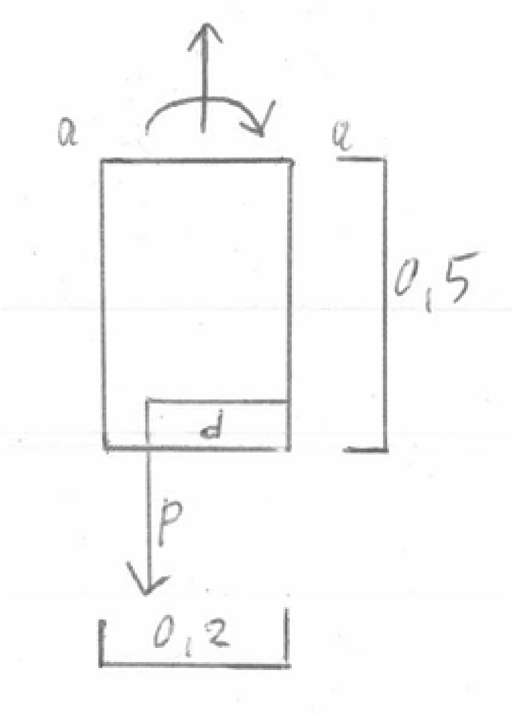


Figure 6: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave vraagt om de kleinste afstand d waarbij een kracht P kan worden toegepast zonder dat er drukspanning ($\sigma_b > 0$) optreedt in de doorsnede $a - a$. De plaat heeft een dikte $t = 10\,\text{mm}$, een breedte $2b = 200\,\text{mm}$, en de kracht wordt buiten het zwaartepunt aangebracht.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Breedte van de plaat: $2b = 200\,\text{mm} = 0.2\,\text{m}$, dus $b = 0.1\,\text{m}$.
- Dikte van de plaat: $t = 10\,\text{mm} = 0.01\,\text{m}$.
- Doorsnede-oppervlak:
$$A = 2b \cdot t = (0.2)(0.01) = 0.002\,\text{m}^2.$$
- Polar inertiemoment:
$$I = \frac{1}{12}(2b)^3 t = \frac{1}{12}(0.2)^3(0.01) = \frac{1}{12}(0.008)(0.01) = 6.67 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4.$$
- Spanning:
$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I}.$$

3. Maak een Plan

- Bereken de spanning met behulp van $\sigma_A = 0$.
- Los d op uit de vergelijking:
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{P(0.1 - d)(0.1)}{I}.$$

4. Los Stapsgewijs op

Stap 1: Invullen van de spanningsvergelijking

De totale spanning is:

$$0 = \frac{P}{(0.2)(0.01)} - \frac{P(0.1-d)(0.1)}{\frac{1}{12}(0.2)^3(0.01)}.$$

Substitueer de gegeven waarden:

$$0 = \frac{P}{0.002} - \frac{P(0.1-d)(0.1)}{6.67 \cdot 10^{-6}}.$$

Stap 2: Vereenvoudigen van de vergelijking

$$0 = 500P - \frac{P(0.1-d)(0.1)}{6.67 \cdot 10^{-6}},$$
$$0 = 5000P - P \cdot \frac{0.1-d}{6.67 \cdot 10^{-6}},$$
$$0 = P\left(5000 - \frac{0.1-d}{6.67 \cdot 10^{-6}}\right).$$

Stap 3: Los d op

Omdat $P \neq 0$, kunnen we P wegdelen:

$$5000 = \frac{0.1-d}{6.67 \cdot 10^{-6}}.$$

Vermenigvuldig beide zijden met $6.67 \cdot 10^{-6}$:

$$5000 \cdot 6.67 \cdot 10^{-6} = 0.1 - d.$$

Los d op:

$$d = 0.1 - 5000 \cdot 6.67 \cdot 10^{-6}.$$

$$d = 0.0667\,\mathrm{m} = 66.7\,\mathrm{mm}.$$

5. Resultaat

De kleinste afstand d waarbij de kracht P kan worden toegepast zonder drukspanning is:

$$\boxed{d = 66.7\,\mathrm{mm}}.$$

6. Conclusie

- De kracht P moet op een minimale afstand van 66.7 mm worden aangebracht om te voorkomen dat er drukspanning in de doorsnede $a - a$ optreedt.
- Dit resultaat volgt direct uit het spanningsprofiel en het evenwicht van normale krachten en momenten.

Probleem 8-30

8–30. The vertebra of the spinal column can support a maximum compressive stress of σ_{max}, before undergoing a compression fracture. Determine the smallest force P that can be applied to a vertebra, if we assume this load is applied at an eccentric distance e from the centerline of the bone, and the bone remains elastic. Model the vertebra as a hollow cylinder with an inner radius r_i and outer radius r_o.

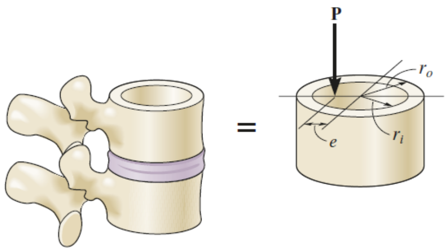


Figure 7: Het probleem gekopieerd uit het boek.

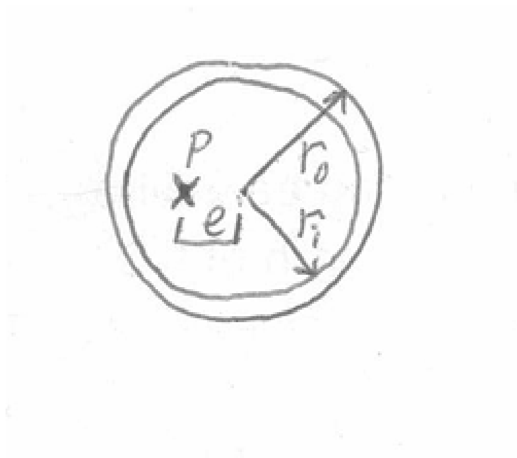


Figure 8: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

Een rugwervel kan een maximale drukspanning $\sigma_{\max}$ aan voordat er een fractuur optreedt. De wervel wordt gemodelleerd als een holle cilinder met een binnenradius r_i en een buitenradius r_o. Een kracht P grijpt aan op een afstand e van het midden van de cilinder. De taak is om P te bepalen als functie van $\sigma_{\max}$, r_i, r_o, en e.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Doorsnede-oppervlak:
$$A = \pi(r_o^2 - r_i^2).$$
- Polar inertiemoment:
$$I = \frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4).$$
- Drukspanning:
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Per_o}{I}.$$

3. Maak een Plan

- Gebruik de formule voor $\sigma_{\max}$:
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Per_o}{I}.$$
- Substitueer A en I in deze vergelijking.
- Los P op als functie van $\sigma_{\max}$, r_i, r_o, en e.

4. Los Stapsgewijs op

De maximale spanning in de cilinder is:
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Per_o}{I}.$$

Stap 1: Substitueer A en I

Vervang $A = \pi(r_o^2 - r_i^2)$ en $I = \frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4)$ in de vergelijking:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{Per_o}{\frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4)}.$$

Vereenvoudig de termen:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{4Per_o}{\pi(r_o^4 - r_i^4)}.$$

Factoriseer P uit beide termen:

$$\sigma_{\max} = P\left[\frac{1}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{4er_o}{\pi(r_o^4 - r_i^4)}\right].$$

Stap 2: Los P op

Herschrijf de vergelijking voor P:

$$P = \frac{\sigma_{\max}}{\frac{1}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{4er_o}{\pi(r_o^4 - r_i^4)}}.$$

Neem de gemeenschappelijke noemer $\pi(r_o^2 - r_i^2)(r_o^4 - r_i^4)$:

$$P = \frac{\sigma_{\max}\pi(r_o^2 - r_i^2)(r_o^4 - r_i^4)}{(r_o^4 - r_i^4) + 4er_o(r_o^2 - r_i^2)}.$$

Stap 3: Eindresultaat

De maximale kracht P is:

$$P = \frac{\sigma_{\max}\pi(r_o^4 - r_i^4)}{r_o^2 + r_i^2 + 4er_o}.$$

5. Resultaat

De maximale kracht P is:

$$\boxed{P = \frac{\sigma_{\max}\pi(r_o^4 - r_i^4)}{r_o^2 + r_i^2 + 4er_o}}.$$

6. Conclusie

- De maximale kracht P hangt af van de geometrische eigenschappen van de cilinder (r_i, r_o) en de excentriciteit (e).
- Een grotere excentriciteit e vergroot het moment, wat resulteert in een kleinere toegestane kracht P.
- Deze formule is essentieel voor het bepalen van veilige belastingen in holle cilindrische structuren zoals wervels.

Vraag een bijles aan!

Extra hulp nodig? Kijk of het bij je past.

Alle vakken van de TU Delft

- Op jouw leerstijl aangepast
- Kennen de pijnpuntjes
- Voelt als een mede-student

EFLES | GRATIS PROEFLES | GRATIS PROEFLES | GRATIS PROEFLES | GR

Neem contact met ons op

+31 6 35312865 www.studiehalen.nl info@studiehalen.nl

Probleem 8-35

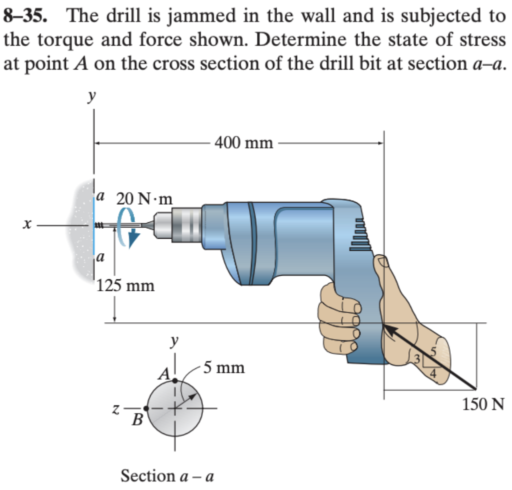

8–35. The drill is jammed in the wall and is subjected to the torque and force shown. Determine the state of stress at point *A* on the cross section of the drill bit at section *a–a*.

Figure 9: Het probleem gekopieerd uit het boek.

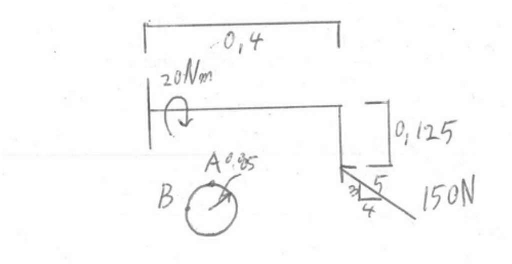


Figure 10: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave vraagt om de spanningscomponenten in punt A van de doorsnede $a-a$ te bepalen. De gegeven informatie is als volgt:

- Kracht: $F = 150\,\text{N}$,
- Moment: $M = 20\,\text{Nm}$,
- Geometrie: $b = 400\,\text{mm} = 0.4\,\text{m}$, $c = 125\,\text{mm} = 0.125\,\text{m}$, $r = 5\,\text{mm} = 0.005\,\text{m}$.

De spanningen worden bepaald door:

- Normale spanning σ_A door axiale kracht en buiging,
- Schuifspanningen τ_{xy} door transversale kracht en τ_{xz} door torsie.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

Interne krachten en momenten worden berekend uit evenwichtsvergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad N - 150 \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 120\,\text{N},\\
\Sigma F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad 150 \cdot \frac{3}{5} - V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_y = 90\,\text{N},\\
\Sigma M_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 20 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 20\,\text{Nm},\\
\Sigma M_z = 0 \quad &\Rightarrow \quad -150 \cdot \frac{3}{5} \cdot 0.4 + 150 \cdot \frac{4}{5} \cdot 0.125 + M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_z = 21\,\text{Nm}.
\end{aligned}$$

Doorsnede-eigenschappen:

$$\begin{aligned}
A &= \pi r^2 = \pi (0.005)^2 = 25\pi \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2,\\
I_z &= \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{4} (0.005)^4 = 0.15625\pi \cdot 10^{-9}\,\text{m}^4,\\
J &= \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} (0.005)^4 = 0.3125\pi \cdot 10^{-9}\,\text{m}^4.
\end{aligned}$$

3. Plan

Om de spanningscomponenten te bepalen:

1. Bereken de normale spanning σ_A door axiale kracht en buiging.
2. Bereken de transversale schuifspanning τ_{xy}.
3. Bereken de torsiespanning τ_{xz}.
4. Combineer spanningen in punt A.

4. Los Stapsgewijs op

Normale Spanning σ_A

De normale spanning wordt veroorzaakt door de axiale kracht N en buigmoment M_z:

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_z y}{I_z}.$$

Substitutie:

$$\sigma_A = \frac{-120}{25\pi \cdot 10^{-6}} - \frac{21 \cdot 0.005}{0.15625\pi \cdot 10^{-9}},$$
$$\sigma_A = -215.43\,\text{MPa}.$$

Schuifspanning τ_{xy}

De transversale schuifspanning door V_y wordt gegeven door:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_A}{I_z t}.$$

Omdat punt A zich in het midden van de doorsnede bevindt, is:

$$Q_A = 0,$$

dus:

$$\tau_{xy} = 0.$$

Torsiespanning τ_{xz}

De torsiespanning door T wordt gegeven door:

$$\tau_{xz} = \frac{Tc}{J}.$$

Substitutie:

$$\tau_{xz} = \frac{20 \cdot 0.005}{0.3125\pi \cdot 10^{-9}},$$
$$\tau_{xz} = 101.86\,\text{MPa}.$$

Totale Spanningscomponenten

De spanningscomponenten in punt A zijn:

$$\sigma_A = -215\,\text{MPa},$$
$$\tau_{xy} = 0,$$
$$\tau_{xz} = 102\,\text{MPa}.$$

5. Resultaat

De spanningen in punt A zijn:

$$\sigma_A = -215\,\text{MPa}, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 102\,\text{MPa}.$$

6. Conclusie

De normale spanning σ_A is negatief (druk), terwijl τ_{xz} positief is. Omdat punt A zich in het midden van de doorsnede bevindt, is $Q_A = 0$, wat resulteert in een schuifspanning $\tau_{xy} = 0$. Dit voorbeeld illustreert hoe gecombineerde spanningen worden berekend voor een complexe belastingstoestand en hoe geometrische symmetrie de spanningscomponenten beïnvloedt.

Probleem 8-31 en 8-32

8–31. The sign is subjected to the uniform wind loading. Determine the stress components at points A and B on the 100-mm-diameter supporting post. Show the results on a volume element located at each of these points.

***8–32.** The sign is subjected to the uniform wind loading. Determine the stress components at points C and D on the 100-mm-diameter supporting post. Show the results on a volume element located at each of these points.

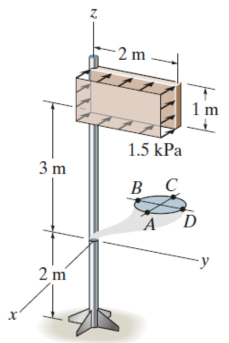


Figure 11: Het probleem gekopieerd uit het boek.

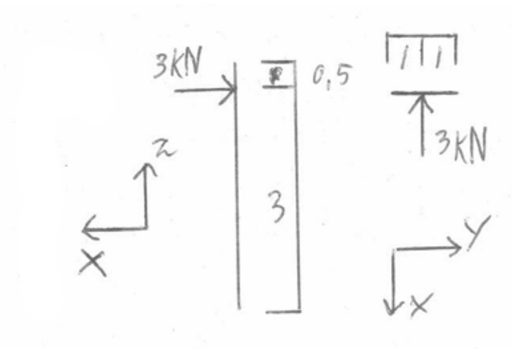


Figure 12: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Stap 1: Begrijp het Probleem

Het bord ondergaat een uniforme druk door de wind, wat resulteert in een axiale kracht F_x, een torsiemoment M_z, en een buigmoment M_y. Deze krachten en momenten veroorzaken respectievelijk normale en schuifspanningen in de paal.

Stap 2: Analyse van de Gegevens

- Gegeven:

$$p = 1.5\,\text{kPa} = 1500\,\text{Pa},$$
$$d = 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m},$$
$$L = 1\,\text{m}.$$

- Berekening van:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0.1)^2}{4} = 7.854 \times 10^{-3}\,\text{m}^2,$$
$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(0.1)^4}{64} = 4.91 \times 10^{-6}\,\text{m}^4,$$
$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0.1)^4}{32} = 9.82 \times 10^{-6}\,\text{m}^4.$$

- Krachts- en momentwaarden:

$$F_x = p \cdot A_{bord} = 1500 \cdot 2 = 3000\,\text{N} = 3\,\text{kN},$$
$$M_z = 3 \cdot 1 = 3\,\text{kNm} = 3000\,\text{Nm},$$
$$M_y = 3 \cdot 3.5 = 10.5\,\text{kNm} = 10,500\,\text{Nm}.$$

Stap 3: Plan van Aanpak

De spanningen op verschillende punten worden berekend met behulp van:

- Normale spanningen door buiging:
$$\sigma = \frac{M_y c}{I},$$
waarbij $c = \frac{d}{2}$.
- Schuifspanningen door torsie:
$$\tau = \frac{Tc}{J}.$$
- Schuifspanningen door afschuiving:
$$\tau = \frac{VQ}{It},$$
waarbij Q het statisch moment is.

Stap 4: Berekeningen

Punt A

$$\sigma_A = \frac{M_y c}{I} = \frac{10,500(0.05)}{4.91 \times 10^{-6}} = 107\,\text{MPa},$$
$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{3000(0.05)}{9.82 \times 10^{-6}} = 15.3\,\text{MPa}.$$

Herberekening van Punt B

De schuifspanning τ_B wordt berekend met:
$$\tau_B = \frac{Tc}{J} - \frac{VQ}{It}.$$

- Gegevens:
$$T = 3000\,\text{Nm}, \quad c = 0.05\,\text{m}, \quad J = 9.82 \times 10^{-6}\,\text{m}^4,$$
$$V = 3000\,\text{N}, \quad Q = \frac{4(0.05)}{3\pi}\frac{1}{2}(\pi(0.05)^2) = 8.3 \times 10^{-5}\,\text{m}^3, \quad t = 0.1\,\text{m}.$$
- Berekeningen:
$$\frac{Tc}{J} = \frac{3000 \cdot 0.05}{9.82 \times 10^{-6}} = 15.279 \times 10^6\,\text{Pa} = 15.3\,\text{MPa},$$
$$\frac{VQ}{It} = \frac{3000 \cdot 8.3 \times 10^{-5}}{4.91 \times 10^{-6} \cdot 0.1} = 0.5\,\text{MPa}.$$
- Resultaat:
$$\tau_B = 15.3 - 0.5 = 14.8\,\text{MPa}.$$

Punt C

$$\sigma_C = \frac{M_y c}{I} = 107\,\text{MPa},$$
$$\tau_C = \frac{Tc}{J} = 15.3\,\text{MPa}.$$

Herberekening van Punt D

De schuifspanning τ_D wordt berekend met:
$$\tau_D = \frac{Tc}{J} + \frac{VQ}{It}.$$

- Gegevens:
$$T = 3000\,\text{Nm}, \quad c = 0.05\,\text{m}, \quad J = 9.82 \times 10^{-6}\,\text{m}^4,$$
$$V = 3000\,\text{N}, \quad Q = \frac{4(0.05)}{3\pi}\frac{1}{2}(\pi(0.05)^2) = 8.3 \times 10^{-5}\,\text{m}^3, \quad t = 0.1\,\text{m}.$$

- Berekeningen:

$$\frac{Tc}{J} = \frac{3000 \cdot 0.05}{9.82 \times 10^{-6}} = 15.279 \times 10^6\,\text{Pa} = 15.3\,\text{MPa},$$

$$\frac{VQ}{It} = \frac{3000 \cdot 8.3 \times 10^{-5}}{4.91 \times 10^{-6} \cdot 0.1} = 0.5\,\text{MPa}.$$

- Resultaat:

$$\tau_D = 15.3 + 0.5 = 15.8\,\text{MPa}.$$

Stap 5: Resultaat

De spanningen zijn als volgt:

- $\sigma_A = 107\,\text{MPa}$, $\tau_A = 15.3\,\text{MPa}$,
- $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 14.8\,\text{MPa}$,
- $\sigma_C = 107\,\text{MPa}$, $\tau_C = 15.3\,\text{MPa}$,
- $\sigma_D = 0$, $\tau_D = 15.8\,\text{MPa}$.

Stap 6: Conclusie

- Punten A en C ondergaan maximale normale spanningen door buiging.
- De torsiespanning draagt gelijkelijk bij aan alle punten.
- Bij D versterkt de afschuivingscomponent de torsiespanning.

Key Takeaway: Combineer verschillende spanningstypes zorgvuldig voor het volledige stressbeeld.

Wat onze studenten zeggen

Ids

Erg goede 1 op 1 bijles van een betrokken studentdocent die goed begrijpt wat belangrijk is aan het vak. Zeker een aanrader om je vak te halen!

Dennis

Voor iedereen aan te raden die wat extra hulp kan gebruiken of een zetje in de goede richting. Paar lessen gedaan voor een belangrijk tentamen wat me niet lag en na fijne en duidelijke uitleg afgerond met een 8.4!

Zelfstudie opgave's

Contents

Probleem 8-3 23
Probleem 8-10 25
Probleem 8-49 27
Probleem 8-45 29
Probleem 8-63 32

Probleem 8-3

8–3. A pressurized spherical tank is to be made of 12-mm-thick steel. If it is subjected to an internal pressure of $p = 1.4$ MPa, determine its outer radius to three decimal places in m if the maximum normal stress is not to exceed 105 MPa.

Figure 13: Het probleem gekopieerd uit het boek.

Figure 14: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave betreft een drukbelaste sferische tank met een wanddikte van $t = 12\,\text{mm}$. De tank staat onder een interne druk van $p = 1.4\,\text{MPa}$ en de maximale toegestane normale spanning bedraagt $\sigma_{\text{allow}} = 105\,\text{MPa}$. Het doel is om de buitendiameter (r_o) van de tank te bepalen.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Interne druk: $p = 1.4\,\text{MPa} = 1.4 \times 10^6\,\text{Pa}$.
- Maximale toegestane spanning: $\sigma_{\text{allow}} = 105\,\text{MPa} = 105 \times 10^6\,\text{Pa}$.
- Wanddikte: $t = 12\,\text{mm} = 0.012\,\text{m}$.
- Relatie voor spanning in een dunwandige bol:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{pr_i}{2t},$$

  waarbij r_i de interne straal van de tank is.

3. Maak een Plan

1. Los de formule $\sigma_{\text{allow}} = \frac{pr_i}{2t}$ op naar de interne straal r_i.
2. Voeg de wanddikte t toe aan r_i om de buitenstraal r_o te berekenen.
3. Controleer eenheden en consistentie.

4. Los Stapsgewijs op

1. Los op voor r_i:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{pr_i}{2t},$$
$$r_i = \frac{2t\sigma_{\text{allow}}}{p}.$$

   Substitueer de gegeven waarden:

$$r_i = \frac{2(0.012)(105 \times 10^6)}{1.4 \times 10^6},$$
$$r_i = 1.80\,\text{m}.$$

2. Bereken r_o door de wanddikte t toe te voegen:

$$r_o = r_i + t = 1.80 + 0.012 = 1.812\,\text{m}.$$

5. Resultaat

De buitenstraal van de tank is:

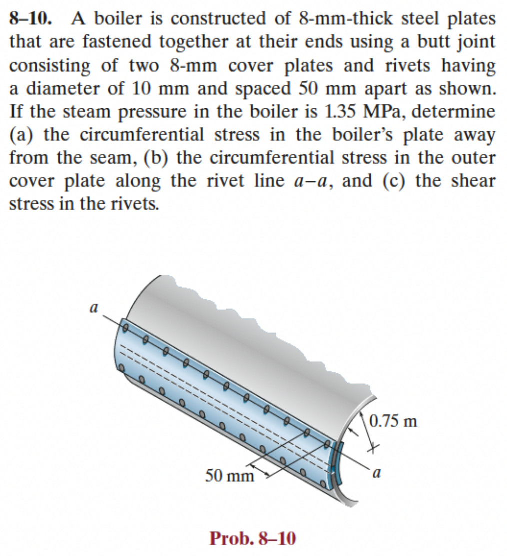
$$r_o = 1.812\,\mathrm{m}.$$

Eenheden zijn consistent, en de waarde is realistisch.

6. Conclusie

De stappen volgen logisch uit de spanningsformule voor een dunwandige bol. Een belangrijk inzicht is dat de wanddikte een kleine, maar significante bijdrage levert aan de buitenstraal. Deze aanpak kan worden hergebruikt voor vergelijkbare druktoestanden in dunwandige drukvaten.

Probleem 8-10



8–10. A boiler is constructed of 8-mm-thick steel plates that are fastened together at their ends using a butt joint consisting of two 8-mm cover plates and rivets having a diameter of 10 mm and spaced 50 mm apart as shown. If the steam pressure in the boiler is 1.35 MPa, determine (a) the circumferential stress in the boiler's plate away from the seam, (b) the circumferential stress in the outer cover plate along the rivet line a–a, and (c) the shear stress in the rivets.

Figure 15: Het probleem gekopieerd uit het boek.

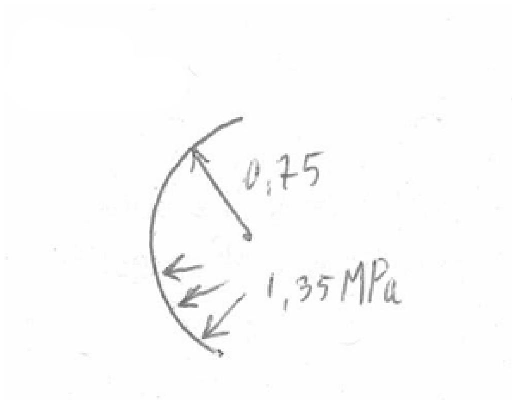


Figure 16: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave gaat over een ketel gemaakt van staalplaten van $t = 8\,\text{mm}$, verbonden met een overliggende plaat en klinknagels. De interne stoomdruk is $p = 1.35\,\text{MPa}$. We moeten bepalen:

1. De circumferentiële spanning in de ketelplaat weg van de las.
2. De circumferentiële spanning in de buitenste afdekplaat langs de klinknagellijn $a - a$.
3. De afschuifspanning in de klinknagels.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Interne druk: $p = 1.35\,\text{MPa} = 1.35 \times 10^6\,\text{Pa}$.
- Wanddikte van de ketelplaat: $t = 8\,\text{mm} = 0.008\,\text{m}$.
- Radius van de ketel: $r = 0.75\,\text{m}$.
- Diameter van de klinknagels: $d = 10\,\text{mm} = 0.01\,\text{m}$.
- Spatiëring van de klinknagels: $s = 50\,\text{mm} = 0.05\,\text{m}$.
- De relevante spanningsrelaties zijn:
  - Circumferentiële spanning in de ketelplaat:
  $$\sigma_1 = \frac{pr}{t}.$$
  - Circumferentiële spanning in de overliggende plaat:
  $$\sigma_1' = \sigma_1 \frac{st}{2A_{\text{plaat}}}, \quad A_{\text{plaat}} = 2t(s-d).$$
  - Afschuifspanning in de klinknagels:
  $$\tau_{\text{avg}} = \frac{F_b}{A_{\text{klinknagels}}}, \quad A_{\text{klinknagels}} = \frac{\pi}{4}d^2.$$

3. Maak een Plan

1. Bereken de circumferentiële spanning σ_1 weg van de las.
2. Gebruik σ_1 om σ_1' te berekenen langs de klinknagellijn $a - a$.
3. Bepaal de kracht F_b op de klinknagels en bereken vervolgens τ_{avg}.

4. Los Stapsgewijs op

1. Bereken σ_1:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{pr}{t},\\ &= \frac{1.35 \times 10^6 (0.75)}{0.008},\\ &= 126.56 \times 10^6\,\text{Pa} = 127\,\text{MPa}.\end{aligned}$$

2. Bereken σ_1':

$$\begin{aligned}A_{\text{plaat}} &= (s-d)t,\\ &= (0.05 - 0.01)(0.008),\\ &= 3.2 \times 10^{-4}\,\text{m}^2,\\ \sigma_1' &= \sigma_1 \frac{st}{2A_{\text{plaat}}},\\ &= (126.56 \times 10^6)\frac{(0.05)(0.008)}{2 \cdot 3.2 \times 10^{-4}},\\ &= 79.1 \times 10^6\,\text{Pa} = 79.1\,\text{MPa}.\end{aligned}$$

3. Bereken τ_{avg}:

$$\begin{aligned}F_b &= \sigma_1' A_{\text{plaat}},\\ &= (79.1 \times 10^6)(3.2 \times 10^{-4}),\\ &= 25.3\,\text{kN},\\ A_{\text{klinknagels}} &= \frac{\pi}{4} d^2,\\ &= \frac{\pi}{4}(0.01)^2,\\ &= 7.85 \times 10^{-5}\,\text{m}^2,\\ \tau_{\text{avg}} &= \frac{F_b}{A_{\text{klinknagels}}},\\ &= \frac{25.3 \times 10^3}{7.85 \times 10^{-5}},\\ &= 322\,\text{MPa}.\end{aligned}$$

5. Resultaat

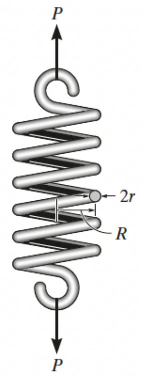
- (a) De circumferentiële spanning in de ketelplaat is $\sigma_1 = 127\,\text{MPa}$.
- (b) De circumferentiële spanning in de overliggende plaat is $\sigma_1' = 79.1\,\text{MPa}$.
- (c) De afschuifspanning in de klinknagels is $\tau_{\text{avg}} = 322\,\text{MPa}$.

6. Conclusie

Dit probleem illustreert het belang van spanningsverdeling in constructies met klinknagels. Het gebruik van basale spannings- en krachtrelaties helpt bij het dimensioneren van componenten voor veilige werking onder druk. De gevonden waarden zijn consistent met de gegeven parameters en realistisch binnen de context van een drukvat.

Probleem 8-49

8–49. The coiled spring is subjected to a force P. If we assume the shear stress caused by the shear force at any vertical section of the coil wire to be uniform, show that the maximum shear stress in the coil is $\tau_{\max} = P/A + PRr/J$, where J is the polar moment of inertia of the coil wire and A is its cross-sectional area.



Prob. 8–49

Figure 17: Het probleem gekopieerd uit het boek.

1. Begrijp het Probleem

De opgave betreft een spiraalveer die wordt belast met een kracht P. Er wordt verondersteld dat de schuifspanning veroorzaakt door de afschuifkracht over een willekeurige verticale doorsnede van de veerdraad uniform is. Het doel is om te bewijzen dat de maximale schuifspanning in de veer kan worden uitgedrukt als:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{PRr}{J},$$

waarbij:

- P: toegepaste kracht,
- A: doorsnede-oppervlakte van de veerdraad,
- J: polair traagheidsmoment van de veerdraad,
- R: gemiddelde radius van de veer,
- r: radius van de veerdraad.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- De veer is onderhevig aan zowel een afschuifkracht (V) als een torsie (T).
- De schuifspanning veroorzaakt door de afschuifkracht is uniform:

$$\tau_V = \frac{V}{A}.$$

- De schuifspanning veroorzaakt door torsie is maximaal aan de buitenrand:

$$\tau_T = \frac{Tc}{J}, \quad \text{waar } c = r.$$

- Het torsiemoment T wordt veroorzaakt door de kracht P en is gelijk aan:

$$T = PR.$$

- De totale maximale schuifspanning is de som van beide bijdragen:

$$\tau_{\max} = \tau_V + \tau_T.$$

3. Los Stapsgewijs op

1. De schuifspanning veroorzaakt door de afschuifkracht is:

$$\tau_V = \frac{V}{A} = \frac{P}{A}.$$

2. Het torsiemoment wordt gegeven door:

$$T = PR.$$

De schuifspanning veroorzaakt door torsie is:

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{PRr}{J}.$$

3. De totale maximale schuifspanning is:

$$\tau_{\max} = \tau_V + \tau_T = \frac{P}{A} + \frac{PRr}{J}.$$

4. Resultaat

De maximale schuifspanning in de spiraalveer is bewezen en wordt gegeven door:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{PRr}{J}.$$

5. Conclusie

Het probleem illustreert hoe de totale schuifspanning in een spiraalveer wordt beïnvloed door zowel de directe afschuifkracht als het torsiemoment. Het bewijs volgt logisch door de afzonderlijke bijdragen van beide spanningen te analyseren en samen te voegen. Dit concept is essentieel voor het ontwerpen van veren die bestand zijn tegen gecombineerde belastingen.

Probleem 8-45

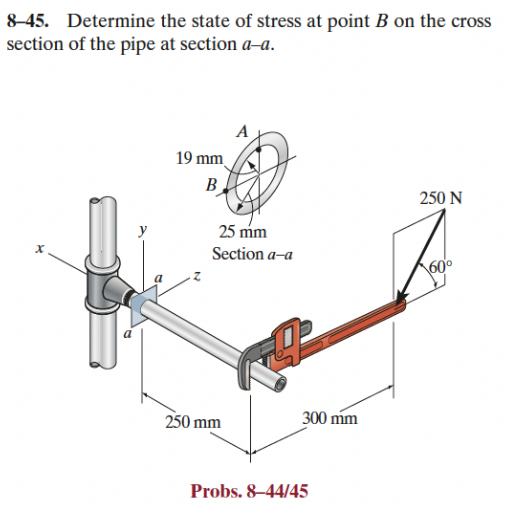


Figure 18: Het probleem gekopieerd uit het boek.

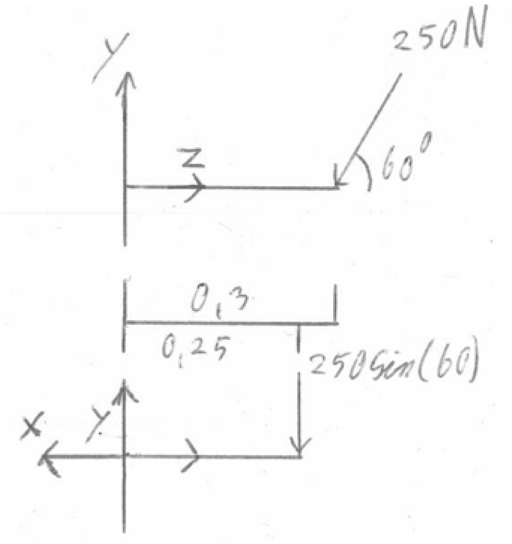


Figure 19: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave betreft een pijp onderworpen aan een kracht $P = 250\,\text{N}$ onder een hoek van $60°$. Het doel is om de spanningsstatus te bepalen op punt B van de doorsnede $a - a$, inclusief:

- De normale spanning σ_B door buiging.
- De schuifspanningen τ_{xy} en τ_{xz}, veroorzaakt door respectievelijk torsie en dwarskrachten.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Toegepaste kracht: $P = 250\,\text{N}$.
- Hoek van de kracht: $\theta = 60°$.
- Afmetingen van de pijp:
  - Buitendiameter: $D = 0.025\,\text{m}$,
  - Binnendiameter: $d = 0.019\,\text{m}$.
- Afstanden:
  - Horizontale arm: $0.3\,\text{m}$,
  - Verticale arm: $0.25\,\text{m}$.
- Sectie-eigenschappen:

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}\left(D^4 - d^4\right), \quad J = \frac{\pi}{2}\left(D^4 - d^4\right).$$

3. Maak een Plan

1. Bereken interne belastingen (V_y, V_z, T, M_y, M_z).
2. Bepaal de geometrische eigenschappen (I_y, I_z, J).
3. Bereken de normale spanning σ_B door buiging.
4. Bereken de schuifspanning door torsie τ_{xz}.
5. Combineer de schuifspanningen veroorzaakt door dwarskrachten (τ_{xy}).
6. Bereken de totale schuifspanning τ_B op punt B.

4. Los Stapsgewijs op

Interne Belastingen:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_y = 0;&\quad V_y - 250\sin 60^\circ = 0 \quad\Longrightarrow\quad V_y = 216.51\,\mathrm{N}\\
\Sigma F_z = 0;&\quad V_z - 250\cos 60^\circ = 0 \quad\Longrightarrow\quad V_z = 125\,\mathrm{N}\\
\Sigma M_x = 0;&\quad T + (250\sin 60^\circ)(0.300) = 0 \quad\Longrightarrow\quad T = -64.95\,\mathrm{N\cdot m}\\
\Sigma M_y = 0;&\quad M_y - (250\cos 60^\circ)(0.250) = 0 \quad\Longrightarrow\quad M_y = 31.25\,\mathrm{N\cdot m}\\
\Sigma M_z = 0;&\quad M_z + (250\sin 60^\circ)(0.250) = 0 \quad\Longrightarrow\quad M_z = -54.13\,\mathrm{N\cdot m}.
\end{aligned}$$

Doorsnede-eigenschappen:

Het traagheidsmoment ten opzichte van de y- en z-as, evenals het polaire traagheidsmoment van de pijp, zijn:

$$\begin{aligned}
I_y = I_z &= \frac{\pi}{4}\left(0.025^4 - 0.019^4\right) = 65.076\times 10^{-9}\,\pi\,\mathrm{m}^4\\
J &= \frac{\pi}{2}\left(0.025^4 - 0.019^4\right) = 0.130152\times 10^{-6}\,\pi\,\mathrm{m}^4.
\end{aligned}$$

Het eerste moment is dan:

$$\begin{aligned}
(Q_y)_B &= 0\\
(Q_z)_B &= \bar{y}_1 A_1 - \bar{y}_2 A_2 = \left[\frac{4(0.025)}{3\pi}\right]\left[\frac{\pi}{2}(0.025^2)\right] - \left[\frac{4(0.019)}{3\pi}\right]\left[\frac{\pi}{2}(0.019^2)\right]\\
&= 5.844\times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3.
\end{aligned}$$

Normale Spanning:

De normale spanning wordt uitsluitend veroorzaakt door buigspanning:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}.$$

Voor punt B, $y = 0\,\mathrm{m}$ en $z = -0.025$. Dan:

$$\sigma_B = 0 + \frac{31.25(-0.025)}{65.076\times 10^{-9}\,\pi} = -3.8214\times 10^6\,\mathrm{N/m^2} = -3.82\,\mathrm{MPa} \quad .$$

Schuifspanning:

De torsieschuifspanning bij punt B is:

$$[(\tau_{xz})_T]_B = \frac{T\rho_B}{J} = \frac{64.95(0.025)}{0.130152\times 10^{-6}\,\pi} = 3.9713\times 10^6\,\mathrm{N/m^2} = 3.97\,\mathrm{MPa}.$$

De dwarskracht-schuifspanning bij punt B is:

$$\begin{aligned}
[(\tau_{xz})_V]_B &= 0\\
[(\tau_{xy})_V]_B &= \frac{V_z (Q_z)_B}{I_y t} = \frac{216.51\left[5.844\times 10^{-6}\right]}{[65.076\times 10^{-9}]\,\pi\,[2(0.006)]}\\
&= 0.5157\times 10^6\,\mathrm{N/m^2} = 0.5157\,\mathrm{MPa}.
\end{aligned}$$

De totale schuifspanning is:

$$\begin{aligned}
(\tau_{xy})_B &= 0\\
(\tau_{xz})_B &= [(\tau_{xz})_T]_B - [(\tau_{xz})_V]_B\\
&= 3.9713 - 0.5157 = 3.46\,\mathrm{MPa}.
\end{aligned}$$

5. Resultaat

- De normale spanning op punt B: $\sigma_B = -3.82\,\mathrm{MPa}$.
- De totale schuifspanning op punt B: $\tau_B = 3.46\,\mathrm{MPa}$.

6. Conclusie

De spanningstoestand op punt B combineert bijdragen van buiging, torsie en dwarskrachten. De benadering gebruikt klassieke theorieën voor spanningsanalyse in buizen en kan worden uitgebreid naar meer complexe situaties.

Probleem 8-63

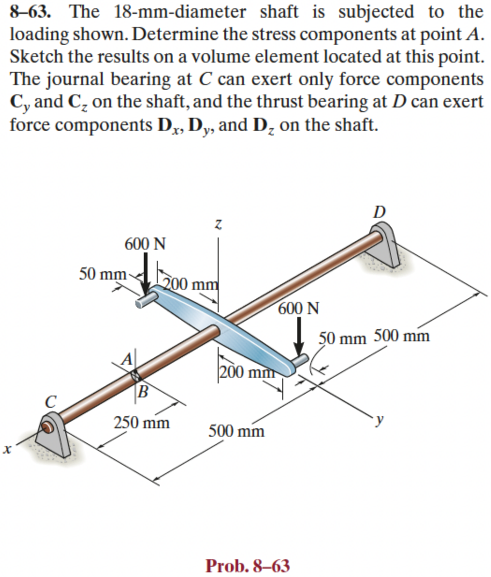


Figure 20: Het probleem gekopieerd uit het boek.

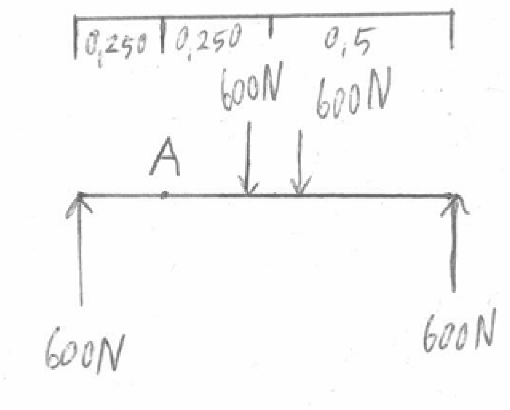


Figure 21: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De opgave betreft een as met een diameter van 18 mm, onderworpen aan de gegeven krachten. Het doel is om de spanningscomponenten te bepalen op punt A, inclusief:

- De schuifspanning τ_A.
- De normale spanning σ_A veroorzaakt door buiging.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- Diameter van de as: $d = 18\,\text{mm} = 0.018\,\text{m}$.
- Externe belasting: krachten van 600 N toegepast op de opgegeven locaties.
- Sectie-eigenschappen:

$$A = \frac{\pi}{4}d^2,$$
$$I = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{64}d^4.$$

3. Maak een Plan

1. Bereken de sectie-eigenschappen (A, I).
2. Bereken de krachten en momenten die verantwoordelijk zijn voor de spanningen op punt A.
3. Gebruik de buigspanningsformule om σ_A te berekenen.
4. Controleer of schuifspanningen (τ_A) aanwezig zijn.

4. Los Stapsgewijs op

1. Bereken de sectie-eigenschappen:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{4}(0.018)^2 = 81.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2, \\
I &= \frac{\pi}{64}(0.018)^4 = 1.64025 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^4.
\end{aligned}
$$

2. Bereken de buigspanning bij punt A:

$$
\begin{aligned}
\sigma_A &= \frac{-M_y c}{I}, \\
M_y &= 600 \cdot 0.250 = 150, \\
\sigma_A &= \frac{-150(0.009)}{1.64025 \times 10^{-9}\pi}, \\
\sigma_A &= -261.98 \times 10^6\,\mathrm{Pa} = -262.0\,\mathrm{MPa}.
\end{aligned}
$$

3. Controleer de schuifspanning:

$$
\tau_A = 0\,(\text{geen torsie of afschuiving aanwezig}).
$$

5. Resultaat

- Normale spanning op punt A: $\sigma_A = -262.0\,\mathrm{MPa}$.
- Schuifspanning op punt A: $\tau_A = 0\,\mathrm{MPa}$.

6. Conclusie

De analyse toont aan dat de spanningstoestand op punt A wordt gedomineerd door de buigspanningen veroorzaakt door het moment M_y. Er zijn geen schuifspanningen aanwezig omdat de as geen torsie of significante dwarskracht ervaart. Dit benadrukt het belang van het correct berekenen van buigspanningen in slanke assen.

Wat onze studenten zeggen

Youri

Erg goede bijlessen, hij loopt alles goed samen met je door. En heeft daarbij perfect balans tussen jezelf laten nadenken en uitvogelen, en ondersteunend de opdracht door gaan. Zeker aan te raden :)

Jetske

Via Studiehalen.nl werd ik gekoppeld aan een student die mij echt supergoed geholpen heeft waardoor ik nu veel meer vertrouwen heb dat ik mijn tentamen ga halen!

Studiehalen.nl

Werkcollege 14

Contents

Probleem 9-3 36
Probleem 9-2 38
Probleem 9-17 40
Probleem 9-24 42
Probleem 9-39 44

Probleem 9-3

9–3. The state of stress at a point in a member is shown on the element. Determine the stress components acting on the inclined plane AB. Solve the problem using the method of equilibrium described in Sec. 9.1.

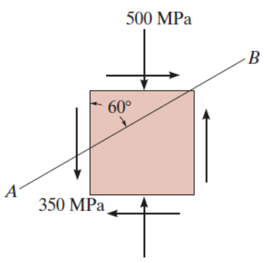


Figure 22: Het probleem gekopieerd uit het boek.

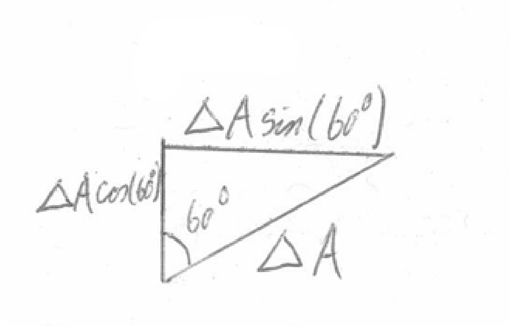


Figure 23: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Begrijp het Probleem

De vraag vraagt ons de spanningscomponenten te berekenen langs het hellend vlak AB van een volume-element. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de evenwichtsmethode.

- Gegeven:
  - Normale spanning: $\sigma_x = 500\,\text{MPa}$.
  - Normale spanning: $\sigma_y = 350\,\text{MPa}$.
  - Hoek van het vlak: $60°$.
- Gevraagd:
  - Normale spanning $\sigma_{x'}$ langs AB.
  - Schuifspanning $\tau_{x'y'}$ langs AB.

Analyseer de gegeven informatie

- Het volume-element wordt onderworpen aan evenwicht van krachten.
- De oppervlaktecomponenten van het schuine vlak zijn:

$$\Delta A_x = \Delta A \cos 60°,$$
$$\Delta A_y = \Delta A \sin 60°.$$

- Krachten worden opgesplitst in componenten parallel en loodrecht aan AB.

Maak een Plan

1. Gebruik evenwichtsvergelijkingen in de x'- en y'-richtingen.
2. Bereken $\Delta F_{x'}$ en $\Delta F_{y'}$ voor het schuine vlak AB.
3. Bepaal $\sigma_{x'}$ en $\tau_{x'y'}$ door limieten te nemen.

Los Stapsgewijs op

Stap 1: Evenwicht in de x'-richting

De som van de krachten in de x'-richting is nul:

$$\sum F_{x'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta F_{x'} + 500\Delta A \sin^2 60^\circ + 350\Delta A \sin 60^\circ \cos 60^\circ + 350\Delta A \cos 60^\circ \sin 60^\circ = 0.$$

Vereenvoudig:

$$\Delta F_{x'} = -500\Delta A \sin^2 60^\circ - 350\Delta A \sin 60^\circ \cos 60^\circ - 350\Delta A \cos 60^\circ \sin 60^\circ.$$

Reken uit:

$$\Delta F_{x'} = -678.11\Delta A.$$

Stap 2: Evenwicht in de y'-richting

De som van de krachten in de y'-richting is nul:

$$\sum F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta F_{y'} + 350\Delta A \sin^2 60^\circ - 500\Delta A \sin 60^\circ \cos 60^\circ - 350\Delta A \cos^2 60^\circ = 0.$$

Vereenvoudig:

$$\Delta F_{y'} = 500\Delta A \sin 60^\circ \cos 60^\circ - 350\Delta A \sin^2 60^\circ - 350\Delta A \cos^2 60^\circ.$$

Reken uit:

$$\Delta F_{y'} = 41.51\Delta A.$$

Stap 3: Spanningscomponenten bepalen

De spanningscomponenten worden bepaald door de limieten te nemen:

$$\sigma_{x'} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta A}, \quad \tau_{x'y'} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta A}.$$

Substitueer de resultaten:

$$\sigma_{x'} = \frac{-678.11\Delta A}{\Delta A} = -678.11\,\text{MPa},$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{41.51\Delta A}{\Delta A} = 41.51\,\text{MPa}.$$

Resultaat

- Normale spanning: $\sigma_{x'} = -678.11\,\text{MPa}$.
- Schuifspanning: $\tau_{x'y'} = 41.51\,\text{MPa}$.

Conclusie

- De negatieve normale spanning duidt op drukspanning.
- Deze methode volgt nauwkeurig de stappen uit hoofdstuk 9.1 en lost het probleem systematisch op.

Probleem 9-2

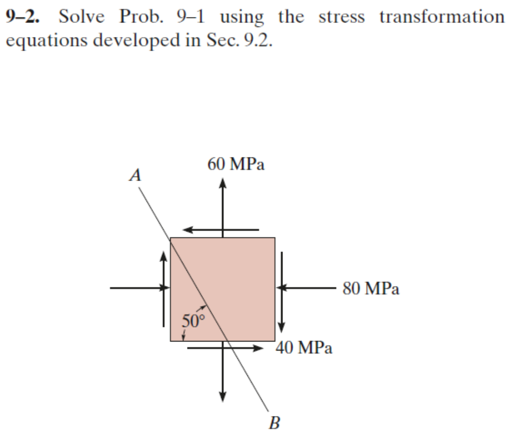


Figure 24: Het probleem gekopieerd uit het boek.

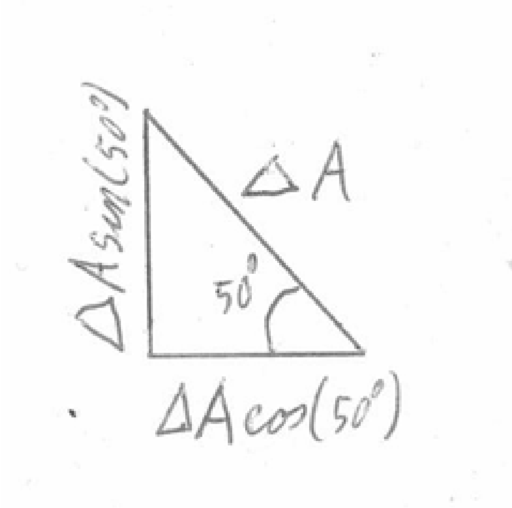


Figure 25: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Begrijp het Probleem

We berekenen de spanningscomponenten langs het hellende vlak AB van een volume-element, gebruikmakend van de krachtenevenwichtsvergelijkingen en limietdefinities.

- Gegeven:
  - Normale spanning in x-richting: $\sigma_x = 50\,\text{MPa}$.
  - Normale spanning in y-richting: $\sigma_y = 0\,\text{MPa}$.
  - Schuifspanning: $\tau_{xy} = -15\,\text{MPa}$.
  - Hoek van het vlak: $\theta = 50°$.
- Gevraagd:
  - Normale spanning $\sigma_{x'}$ langs het vlak AB.
  - Schuifspanning $\tau_{x'y'}$ langs het vlak AB.

Analyseer de gegeven informatie

- Het schuine vlak AB heeft een oppervlakte ΔA, en de krachten evenwijdig en loodrecht aan AB worden uitgedrukt in termen van componenten.
- De krachtenevenwichtsvergelijkingen worden gebruikt om $\Delta F_{x'}$ en $\Delta F_{y'}$ te bepalen.

Los Stapsgewijs op

Stap 1: Evenwicht in de y'-richting

De som van de krachten in de y'-richting is nul:

$$\sum F_{y'} = 0.$$

Schrijf de krachten uit:

$$\Delta F_{y'} + (40\,\Delta A \sin 50°)\sin 50° - (80\,\Delta A \sin 50°)\cos 50° - (40\,\Delta A \cos 50°)\cos 50° - (60\,\Delta A \cos 50°)\sin 50° = 0.$$

Combineer termen:

$$\Delta F_{y'} = 61.99\,\Delta A.$$

Stap 2: Evenwicht in de x'-richting

De som van de krachten in de x'-richting is nul:

$$\sum F_{x'} = 0.$$

Schrijf de krachten uit:

$$\Delta F_{x'} + (40\,\Delta A \sin 50^\circ)\cos 50^\circ + (80\,\Delta A \sin 50^\circ)\sin 50^\circ + (40\,\Delta A \cos 50^\circ)\sin 50^\circ - (60\,\Delta A \cos 50^\circ)\cos 50^\circ = 0.$$

Combineer termen:

$$\Delta F_{x'} = -61.54\,\Delta A.$$

Stap 3: Bepaal de spanningen

De normale spanning en schuifspanning worden bepaald door de limieten te nemen:

$$\sigma_{x'} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta A}, \quad \tau_{x'y'} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta A}.$$

Substitueer de resultaten:

$$\sigma_{x'} = \frac{-61.54\,\Delta A}{\Delta A} = -61.54\,\text{MPa},$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{61.99\,\Delta A}{\Delta A} = 61.99\,\text{MPa}.$$

Resultaat

- Normale spanning: $\sigma_{x'} = -61.5\,\text{MPa}$.
- Schuifspanning: $\tau_{x'y'} = 62.0\,\text{MPa}$.

Conclusie

- De negatieve waarde van $\sigma_{x'}$ duidt op drukspanning langs het vlak AB.
- De methodologie volgt nauwkeurig de stappen in de figuur en gebruikt de evenwichtsvergelijkingen om de krachten en spanningen correct te berekenen.

Probleem 9-17

9–17. Determine the equivalent state of stress on an element at the point which represents (a) the principal stresses and (b) the maximum in-plane shear stress and the associated average normal stress. Also, for each case, determine the corresponding orientation of the element with respect to the element shown.

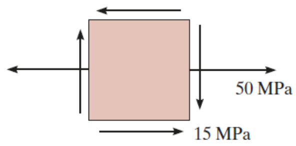


Figure 26: Het probleem gekopieerd uit het boek.

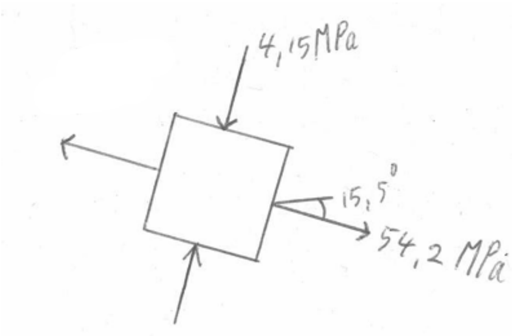


Figure 27: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Begrijp het Probleem

We berekenen de volgende parameters voor het volume-element:

[label=)]De hoofdspanningen σ_1 en σ_2. De orientaties van de hoofdspanningsvlakken $(\theta_p)_1$ en $(\theta_p)_2$. De maximale schuifspanning $\tau_{\text{max in-plane}}$ in het vlak. De bijbehorende orientatie (θ_s) en gemiddelde normale spanning σ_{avg} voor de maximale schuifspanning.

Analyseer de Gegeven Informatie

- Gegeven spanningen:
$$\sigma_x = 50\,\text{MPa}, \quad \sigma_y = 0\,\text{MPa}, \quad \tau_{xy} = -15\,\text{MPa}.$$
- De benodigde transformatieformules zijn:
$$\begin{aligned}
\sigma_1, \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\
\tan 2\theta_p &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \\
\tau_{\text{max in-plane}} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\
\sigma_{\text{avg}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.
\end{aligned}$$

Los Stapsgewijs op

Stap 1: Bereken de Hoofdspanningen σ_1 en σ_2

Substitueer de gegeven waarden:
$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{50 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - 0}{2}\right)^2 + (-15)^2}.$$

Reken de termen uit:
$$\sigma_1, \sigma_2 = 25 \pm \sqrt{25^2 + 15^2}.$$
$$\sigma_1, \sigma_2 = 25 \pm \sqrt{625 + 225}.$$
$$\sigma_1, \sigma_2 = 25 \pm \sqrt{850}.$$
$$\sigma_1 = 25 + 29.15 = 54.2\,\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 25 - 29.15 = -4.15\,\text{MPa}.$$

Stap 2: Oriëntaties van de Hoofdspanningen $(\theta_p)_1$ en $(\theta_p)_2$

Bereken de hoek θ_p met:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Substitueer de waarden:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2(-15)}{50-0} = -\frac{30}{50} = -0.6.$$

Vind θ_p:

$$2\theta_p = \tan^{-1}(-0.6) = -30.96^\circ.$$

$$\theta_p = -15.48^\circ \quad \text{en} \quad \theta_p + 90^\circ = 74.52^\circ.$$

Stap 3: Maximale Schuifspanning $\tau_{\textbf{max in-plane}}$

Gebruik de formule:

$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Substitueer de waarden:

$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{\left(\frac{50-0}{2}\right)^2 + (-15)^2}.$$

$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{25^2 + 15^2}.$$

$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{625 + 225} = \sqrt{850} = 29.2\,\text{MPa}.$$

Stap 4: Oriëntatie en Gemiddelde Normale Spanning

De hoek voor maximale schuifspanning is:

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}.$$

Substitueer de waarden:

$$\tan 2\theta_s = -\frac{50-0}{2(-15)} = \frac{-50}{30} = 1.667.$$

Vind θ_s:

$$2\theta_s = \tan^{-1}(1.667) = 59.04^\circ.$$

$$\theta_s = 29.52^\circ \quad \text{en} \quad \theta_s + 90^\circ = 120^\circ.$$

De gemiddelde normale spanning:

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50+0}{2} = 25\,\text{MPa}.$$

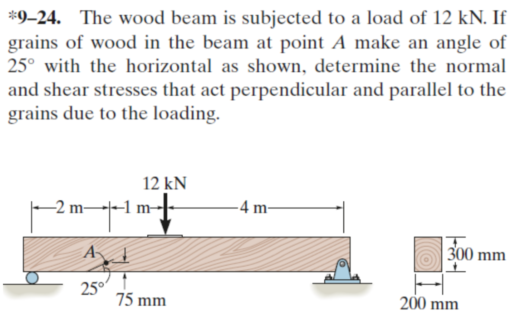
Resultaat

- Hoofdspanningen: $\sigma_1 = 54.2\,\text{MPa}, \sigma_2 = -4.15\,\text{MPa}$.
- Hoofdspanningshoeken: $(\theta_p)_1 = -15.5^\circ, (\theta_p)_2 = 74.5^\circ$.
- Maximale schuifspanning: $\tau_{\text{max in-plane}} = 29.2\,\text{MPa}$.
- Oriëntatie maximale schuifspanning: $\theta_s = 29.5^\circ$ en 120°.
- Gemiddelde normale spanning: $\sigma_{\text{avg}} = 25\,\text{MPa}$.

Conclusie

- De hoofdspanningen en hun oriëntaties zijn bepaald met behulp van de transformatieformules. De resultaten zijn consistent en logisch.
- De maximale schuifspanning in het vlak is relatief hoog (29.2 MPa) en treedt op bij specifieke hoeken $\theta_s = 29.5^\circ$ en 120°.
- Deze methode benadrukt het belang van het gebruik van transformatieformules om complexe spanningsstaten te analyseren.

Probleem 9-24



*9–24. The wood beam is subjected to a load of 12 kN. If grains of wood in the beam at point A make an angle of 25° with the horizontal as shown, determine the normal and shear stresses that act perpendicular and parallel to the grains due to the loading.

Figure 28: Het probleem gekopieerd uit het boek.

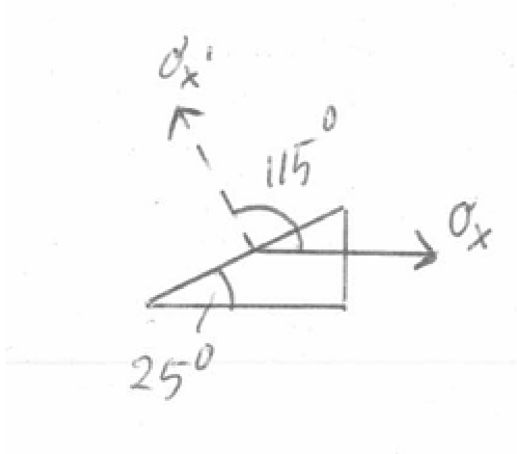


Figure 29: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Begrijp het Probleem

We moeten de normaal- en schuifspanning loodrecht op de nerf van een houten balk bepalen als gevolg van een kracht $F = 12\,\text{kN}$. De nerf maakt een hoek van 25° met de horizontale as. De transformatie wordt uitgevoerd voor een hoek $\theta' = 115°$ (loodrecht op de nerf).

- Gegeven:
  - Kracht: $F = 12\,\text{kN}$.
  - Lengtes: $L = 1\,\text{m}$, $c = 75\,\text{mm}$, $b = 200\,\text{mm}$, $h = 300\,\text{mm}$.
  - Hoek van de nerf: 25°.
- Gevraagd:
  - Normaalspanning $\sigma_{x'}$.
  - Schuifspanning $\tau_{x'y'}$.

Analyseer de Gegeven Informatie

De spanningen worden berekend in drie stappen:

1. Bereken de normaalspanning σ_x en schuifspanning τ_{xy} op het element.
2. Transformeer de spanningen naar een hoek $\theta' = 115°$.
3. Bereken $\sigma_{x'}$ en $\tau_{x'y'}$ met de transformatieformules.

Los Stapsgewijs op

Stap 1: Bereken de normaalspanning σ_x

- Buigmoment:
$$M = F_{links} \cdot 2 = 6.857\,\text{kN} \cdot 2\,\text{m} = 13.714 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{m}.$$
- Oppervlakte-moment van traagheid:
$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.2)(0.3)^3 = 4.5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^4.$$
- Normaalspanning:
$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{13.714 \cdot 10^3(0.075)}{4.5 \cdot 10^{-4}} = 2.2857\,\text{MPa}.$$

Stap 2: Bereken de schuifspanning τ_A

- Dwarskracht:

$$V = F_{links} = 6.857\,\text{kN} = 6.857 \cdot 10^3\,\text{N}.$$

- Statistisch moment:

$$Q = \bar{A} \cdot \bar{y} = (0.1125)(0.2)(0.075) = 1.6875 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3.$$

- Schuifspanning:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{6.857 \cdot 10^3(1.6875 \cdot 10^{-3})}{4.5 \cdot 10^{-4}(0.2)} = 0.1286\,\text{MPa}.$$

$$\sigma_x = 2.2857\,\text{MPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -0.1286\,\text{MPa}$$

Stap 3: Gebruik de transformatieformules

Voor $\theta' = 115°$ geldt:

$$\cos 2\theta' = -0.642, \quad \sin 2\theta' = -0.766.$$

De transformatieformules zijn:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta,$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$

Stap 4: Controleer richting van de druk

Substitueer de waarden:

$$\sigma_{x'} = \frac{2.2857 + 0}{2} + \frac{2.2857 - 0}{2} \cdot -0.642 - 0.1286 \cdot -0.766.$$

$$\sigma_{x'} = 0.508\,\text{MPa}.$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{2.2857 - 0}{2} \cdot -0.766 + 0.1286 \cdot -0.642.$$

$$\tau_{x'y'} = -1.06\text{MPa}.$$

Resultaat

- Normaalspanning: $\sigma_{x'} = 0.508\,\text{MPa}$.
- Schuifspanning: $\tau_{x'y'} = -1.06\,\text{MPa}$.

Conclusie

- De normaalspanning $\sigma_{x'}$ en schuifspanning $\tau_{x'y'}$ zijn correct berekend op basis van de transformatieformules.
- De hoek van 115° speelt een cruciale rol in het bepalen van de spanningen loodrecht op de nerf.
- Deze methode toont het belang van spanningsanalyse in complexe materiaalstructuren.

Probleem 9-39

9–39. The shaft has a diameter d and is subjected to the loadings shown. Determine the principal stresses and the maximum in-plane shear stress at point A. The bearings only support vertical reactions.

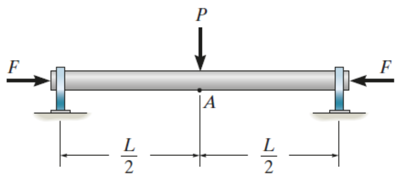


Figure 30: Het probleem gekopieerd uit het boek.

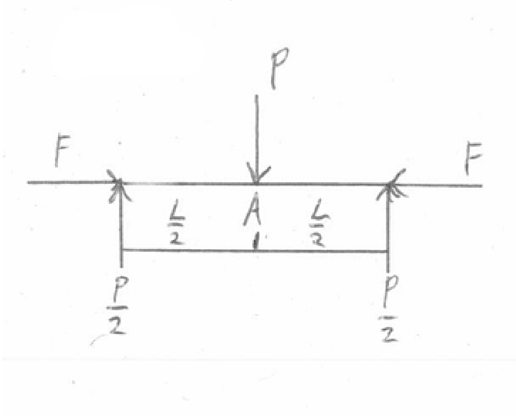


Figure 31: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Oplossing Hibbeler 9-39

Begrijp het Probleem

Een as met diameter d wordt belast door een kracht P in het midden en krachten F aan beide uiteinden. De lagers zorgen alleen voor verticale reactiekrachten.

- Gegeven:
  - Middelste kracht: P.
  - Uiterste krachten: F.
  - Lengte: L.
  - Diameter: d.
- Gevraagd:
  - Hoofdspanningen σ_1 en σ_2.
  - Maximale schuifspanning $\tau_{\text{max in-plane}}$.

Analyseer de Gegeven Informatie

De krachten en momenten worden bepaald met behulp van het vrije lichaamsdiagram (FBD). De spanning op punt A wordt berekend uit de superpositie van normale spanningen door axiale krachten en buiging.

Los Stapsgewijs op

Stap 1: Reagerende krachten in de lagers

Uit het FBD:

$$R_1 + R_2 = P, \quad R_1 = R_2 = \frac{P}{2}.$$

Stap 2: Normale spanning σ_x

- Axiale kracht:

$$N = -F.$$

- Buigmoment op A:

$$M = R_1 \cdot \frac{L}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL}{4}.$$

- Doorsnede-oppervlakte:
$$A = \frac{\pi}{4} d^2.$$
- Oppervlakte-moment van traagheid:
$$I = \frac{\pi}{64} d^4.$$
- Normale spanning door axiale kracht en buiging:
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{Mc}{I},$$
waarbij $c = \frac{d}{2}$.
- Substitueer de waarden:
$$\sigma_x = \frac{-F}{\frac{\pi}{4} d^2} + \frac{\frac{PL}{4} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi}{64} d^4}.$$
- Vereenvoudig:
$$\sigma_x = -\frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32PL}{\pi d^3}.$$
- Combineer termen:
$$\sigma_x = \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{2PL}{d} - F \right).$$

Stap 3: Schuifspanning τ_{xy}

- Omdat $Q_A = 0$, geldt:
$$\tau_{xy} = 0.$$

Stap 4: Hoofdspanningen

- Voor punt A geldt:
$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$
- Hoofdspanningen:
$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{2PL}{d} - F \right),$$
$$\sigma_2 = 0.$$

Stap 5: Maximale schuifspanning $\tau_{\textbf{max in-plane}}$

- Formule voor maximale schuifspanning:
$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$
- Substitueer de waarden:
$$\tau_{\text{max in-plane}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{2PL}{d} - F \right).$$
- Vereenvoudig:
$$\tau_{\text{max in-plane}} = \frac{2}{\pi d^2} \left(\frac{2PL}{d} - F \right).$$

Resultaat

- Hoofdspanningen:
$$\sigma_1 = \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{2PL}{d} - F \right), \quad \sigma_2 = 0.$$
- Maximale schuifspanning:
$$\tau_{\text{max in-plane}} = \frac{2}{\pi d^2} \left(\frac{2PL}{d} - F \right).$$

Conclusie

- De hoofdspanningen worden veroorzaakt door zowel axiale krachten als buigmomenten.
- De schuifspanning op punt A is nul, omdat er geen dwarskracht Q_A is.
- Dit probleem illustreert de gecombineerde werking van axiale kracht en buiging in balken en assen.

Wat onze studenten zeggen

Ids

Erg goede 1 op 1 bijles van een betrokken studentdocent die goed begrijpt wat belangrijk is aan het vak. Zeker een aanrader om je vak te halen!

Dennis

Voor iedereen aan te raden die wat extra hulp kan gebruiken of een zetje in de goede richting. Paar lessen gedaan voor een belangrijk tentamen wat me niet lag en na fijne en duidelijke uitleg afgerond met een 8.4!

Zelfstudie opgave's

Contents

Probleem 9-5 50
Probleem 9-15 52
Probleem 9-32 55
Probleem 9-33 57
Probleem 9-42 59

Probleem 9-5

9–5. Solve Prob. 9–4 using the stress transformation equations developed in Sec. 9.2.

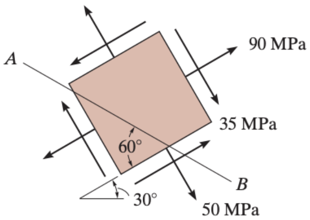


Figure 32: Het probleem gekopieerd uit het boek.

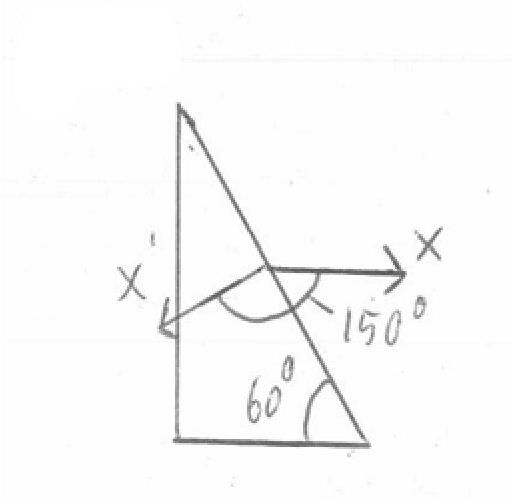


Figure 33: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

- Normale spanning in de x-richting: $\sigma_x = 90\,\text{MPa}$
- Normale spanning in de y-richting: $\sigma_y = 50\,\text{MPa}$
- Schuifspanning: $\tau_{xy} = -35\,\text{MPa}$
- Hoek: $\theta = -150°$

Gevraagd: Bereken de spanningen σ'_x en $\tau_{x'y'}$ op het hellende vlak met behulp van de transformatieformules.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

De transformatieformules voor normale en schuifspanningen zijn:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta)$$

3. Maak een Plan

1. Gebruik spannings-transformatieformules om de normaalspanning σ'_x.
2. Gebruik spannings-transformatieformules om de schuifspanning $\tau_{x'y'}$ te berekenen.

4. Los Stapsgewijs op

Berekening van σ'_x Gebruik de formule voor σ'_x:

$$\sigma'_x = \frac{90 + 50}{2} + \frac{90 - 50}{2}\cos(2 \times -150°) + (-35)\sin(2 \times -150°)$$

Bereken de tussenstappen:

$$\sigma'_x = \frac{140}{2} + \frac{40}{2}\cos(-300°) + (-35)\sin(-300°)$$

$$\sigma'_x = 70 + 20(0.5) + (-35)(-0.866)$$

$$\sigma'_x = 70 + 10 + 30.31 = 49.7\,\text{MPa}$$

Berekening van $\tau_{x'y'}$ Gebruik de formule voor $\tau_{x'y'}$:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{90-50}{2}\sin(2\times -150^\circ) + (-35)\cos(2\times -150^\circ)$$

Bereken de tussenstappen:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{40}{2}\sin(-300^\circ) + (-35)\cos(-300^\circ)$$

$$\tau_{x'y'} = -20(-0.866) + (-35)(0.5)$$

$$\tau_{x'y'} = 17.32 - 17.5 = -34.8\,\text{MPa}$$

5. Resultaat

De spanningen op het hellende vlak zijn:

- $\sigma'_x = 49.7\,\text{MPa}$
- $\tau_{x'y'} = -34.8\,\text{MPa}$

6. Conclusie

De spanningsomzetting toont aan dat de normale spanning op het hellende vlak $49.7\,\text{MPa}$ is, terwijl de schuifspanning $-34.8\,\text{MPa}$ bedraagt. Het negatieve teken van $\tau_{x'y'}$ geeft aan dat de schuifspanning in de $-y'$-richting werkt.

Probleem 9-15

9–15. The state of stress at a point is shown on the element. Determine (a) the principal stresses and (b) the maximum in-plane shear stress and average normal stress at the point. Specify the orientation of the element in each case.

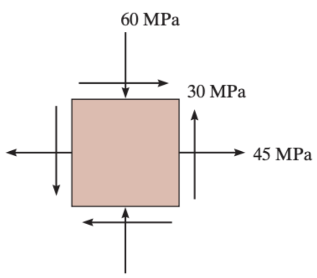


Figure 34: Het probleem gekopieerd uit het boek.

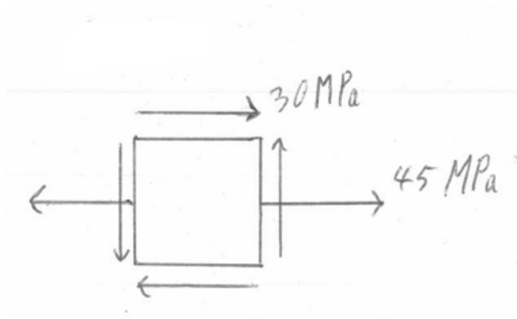


Figure 35: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

De gegeven gegevens zijn:

$$\sigma_x = 45\,\text{MPa}, \quad \sigma_y = -60\,\text{MPa}, \quad \tau_{xy} = 30\,\text{MPa}$$

De vragen zijn:

1. **Hoofdspanningen** (σ_1 en σ_2) en hun oriëntatie.
2. **Maximale schuifspanning in het vlak** ($\tau_{\max}$) en de gemiddelde normaalspanning (σ_{avg}), inclusief hun oriëntatie.

2. Analyseer de Gegeven Informatie

De formules die we zullen gebruiken zijn:

1. Hoofdspanningen:
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
2. Oriëntatie van hoofdspanningen:
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$
3. Maximale schuifspanning:
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
4. Gemiddelde normaalspanning:
$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$
5. Oriëntatie van maximale schuifspanning:
$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

3. Maak een Plan

1. Bereken de hoofdspanningen (σ_1 en σ_2).
2. Bereken de oriëntatie (θ_p) van de hoofdspanningen.
3. Bepaal de maximale schuifspanning ($\tau_{\max}$) en de gemiddelde normaalspanning (σ_{avg}).
4. Bereken de oriëntatie van de maximale schuifspanning (θ_s).

4. Los Stapsgewijs op

(a) Hoofdspanningen en Oriëntatie

1. **Berekening van $\sigma_{1,2}$:**

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Ingevuld:

$$\sigma_{1,2} = \frac{45 - 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{45 - (-60)}{2}\right)^2 + 30^2}$$

Berekening:

$$\sigma_{1,2} = -7.5 \pm \sqrt{52.5^2 + 30^2} = -7.5 \pm \sqrt{2762.25 + 900} = -7.5 \pm 60.5$$

Resultaat:

$$\sigma_1 = 53.0\,\text{MPa}, \quad \sigma_2 = -68.0\,\text{MPa}.$$

2. **Berekening van θ_p:**

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Ingevuld:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2(30)}{45 - (-60)} = \frac{60}{105} = 0.5714$$

Berekening:

$$2\theta_p = \tan^{-1}(0.5714) \approx 29.74^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_p = 14.87^\circ$$

(b) Maximale Schuifspanning en Gemiddelde Normaalspanning

1. **Maximale schuifspanning ($\tau_{\mathbf{max}}$):**

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Ingevuld:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{45 - (-60)}{2}\right)^2 + 30^2} = \sqrt{52.5^2 + 30^2}$$

Berekening:

$$\tau_{\max} = \sqrt{2762.25 + 900} = \sqrt{3662.25} = 60.5\,\text{MPa}.$$

2. **Gemiddelde normaalspanning ($\sigma_{\mathbf{avg}}$):**

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{45 - 60}{2} = -7.5\,\text{MPa}.$$

Oriëntatie van Maximale Schuifspanning

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Ingevuld:

$$\tan 2\theta_s = -\frac{45 - (-60)}{2(30)} = -\frac{105}{60} = -1.75$$

Berekening:

$$2\theta_s = \tan^{-1}(-1.75) \approx -60.2^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -30.1^\circ.$$

5. Resultaat

- Hoofdspanningen:

$$\sigma_1 = 53.0\,\text{MPa}, \quad \sigma_2 = -68.0\,\text{MPa}, \quad \theta_p = 14.9^\circ \text{ en } -75.1^\circ.$$

- Maximale schuifspanning:

$$\tau_{\max} = 60.5\,\text{MPa}, \quad \sigma_{\text{avg}} = -7.5\,\text{MPa}.$$

- Oriëntatie van maximale schuifspanning:

$$\theta_s = -30.1^\circ \text{ en } 59.9^\circ.$$

6. Conclusie

Dit probleem laat zien hoe hoofdspanningen en schuifspanningen kunnen worden bepaald uit een gegeven spanningsstaat. Belangrijk om te leren:

- Gebruik altijd de juiste formules voor hoofdspanningen en schuifspanningen.
- Controleer of de eenheden consistent zijn.
- De oriëntatie van spanningen vereist nauwkeurige berekening van trigonometrische relaties.

Probleem 9-32

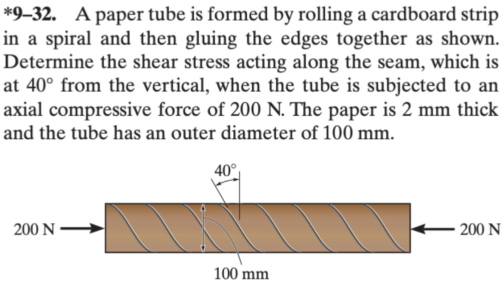

***9–32.** A paper tube is formed by rolling a cardboard strip in a spiral and then gluing the edges together as shown. Determine the shear stress acting along the seam, which is at 40° from the vertical, when the tube is subjected to an axial compressive force of 200 N. The paper is 2 mm thick and the tube has an outer diameter of 100 mm.

Figure 36: Het probleem gekopieerd uit het boek.

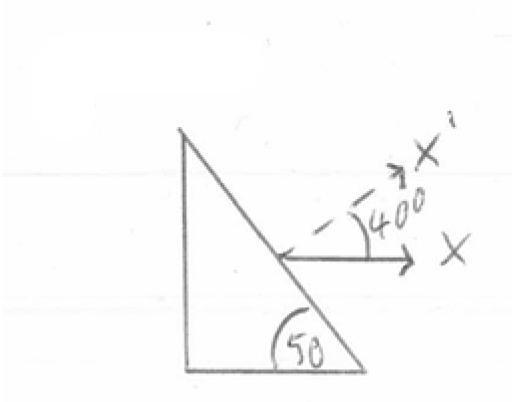


Figure 37: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het Probleem

We hebben een papieren buis die wordt belast door een axiale drukkracht van 200 N. De schuifspanning langs de naad, die een hoek van 50° maakt met de horizontaal, moet worden bepaald. Gegeven informatie:

- **Dikte van het papier:** $t = 2\,\text{mm} = 0.002\,\text{m}$,
- **Buitendiameter van de buis:** $d = 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m}$,
- **Axiale kracht:** $N = 200\,\text{N}$,
- **Hoek van de naad:** $\theta = 40^\circ$ (relevant vanwege de transformatieformules).

2. Analyseer de Gegeven Informatie

- De axiale kracht veroorzaakt een normale spanning op de dwarsdoorsnede van de buis.
- Het dwarsdoorsnede-oppervlak van de buis wordt berekend met de formule:

$$A = \pi\left(R_{\text{buiten}}^2 - R_{\text{binnen}}^2\right),$$

  waarbij $R_{\text{buiten}} = \frac{d}{2}$ en $R_{\text{binnen}} = R_{\text{buiten}} - t$.

3. Plan

1. Bepaal het dwarsdoorsnede-oppervlak A.
2. Bereken de normale spanning σ_x door de kracht te delen door het oppervlak.
3. Gebruik spannings-transformatieformules om de schuifspanning $\tau_{x'y'}$ te berekenen.

4. Uitwerking

Stap 1: Bereken het dwarsdoorsnede-oppervlak A

De binnen- en buitendiameter worden gebruikt om het oppervlak te berekenen:

$$R_{\text{buiten}} = \frac{d}{2} = 0.05\,\text{m}, \quad R_{\text{binnen}} = R_{\text{buiten}} - t = 0.048\,\text{m}.$$

Het oppervlak is:

$$A = \pi\left(R_{\text{buiten}}^2 - R_{\text{binnen}}^2\right) = \pi\left(0.05^2 - 0.048^2\right) = \pi \cdot 0.000196 = 0.000616\,\text{m}^2.$$

Stap 2: Bereken de normale spanning σ_x

De normale spanning door de axiale kracht wordt berekend als:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-200}{0.000616} = -324806\,\text{Pa} = -324.81\,\text{kPa}.$$

Stap 3: Gebruik spannings-transformatieformules

De schuifspanning langs de naad wordt bepaald met de formule:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x}{2}\sin(2\theta).$$

Invullen van de waarden:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-324.81}{2}\sin(2\cdot 40^\circ) = -162.405\cdot\sin(80^\circ).$$

Met $\sin(80^\circ) \approx 0.985$:

$$\tau_{x'y'} = 162.405 \cdot 0.985 \approx 160\,\text{kPa}.$$

5. Resultaat

De schuifspanning langs de naad is:

$$\tau_{x'y'} = 160\,\text{kPa}.$$

6. Conclusie

De schuifspanning werd berekend door gebruik te maken van de normale spanning en spannings-transformatieformules. Belangrijke punten:

- Consistente eenheden zijn essentieel om fouten te voorkomen.
- Spannings-transformatie vereist zorgvuldige toepassing van hoeken en formules.

Key Takeaway: Dit probleem benadrukt het belang van het correct berekenen van dwarsdoorsnede-oppervlakken en het gebruik van juiste transformatietechnieken voor spanningen.

Probleem 9-33

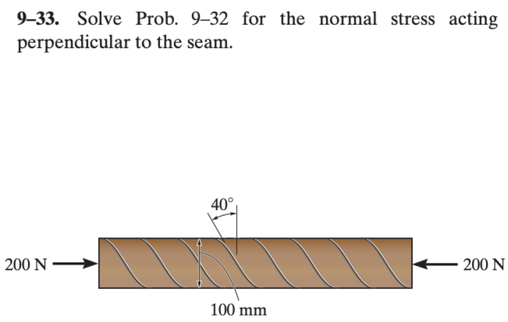


Figure 38: Het probleem gekopieerd uit het boek.

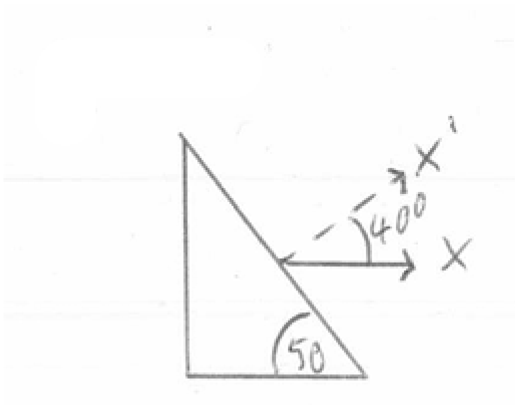


Figure 39: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Stap 1: Begrijp het Probleem

De opgave vraagt om de normale spanning $\sigma_{x'}$ te bepalen, loodrecht op de lasnaad, voor de gegeven belastingssituatie:

- Een staaf met een lasnaad onder een hoek van 40°.
- Axiale krachten $N = 200\,\text{N}$ werken langs de lengte van de staaf.

Stap 2: Analyseer de Gegeven Informatie

- Axiale kracht $N = 200\,\text{N}$.
- Diameter van de staaf: buitenste diameter $D = 100\,\text{mm}$, binnenste diameter $d = 96\,\text{mm}$.
- Hoek van de lasnaad $\theta = 40°$.

De doorsnede van de buis is een ringvormige doorsnede. De formule voor de oppervlakte A is:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

Met $D = 0.12\,\text{m}$ en $d = 0.096\,\text{m}$:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(0.1^2 - 0.096^2\right)$$

Stap 3: Plan van Aanpak

1. Bereken de normale spanning σ in de axiale richting veroorzaakt door de kracht N.
2. Gebruik spannings-transformatievergelijkingen om de spanning $\sigma_{x'}$ loodrecht op de las te vinden.

Stap 4: Stapsgewijze Oplossing

Stap 4.1: Bereken de normale spanning σ

De normale spanning in de axiale richting is:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Met substitutie:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(0.1^2 - 0.096^2\right) = \frac{\pi}{4}(0.01 - 0.009216) = \frac{\pi}{4}(0.000784) \approx 0.000616\,\text{m}^2$$

$$\sigma = \frac{-200}{0.00616} \approx -324810\,\text{Pa} = -324.81\,\text{kPa}$$

Stap 4.2: Gebruik spannings-transformatieformules

De spanning loodrecht op de lasnaad ($\sigma_{x'}$) wordt berekend met de volgende formule:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Hier is:

$$\sigma_x = -324.81\,\text{kPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \theta = 40^\circ$$

Substitutie geeft:

$$\sigma_{x'} = \frac{-324.81 + 0}{2} + \frac{-324.81 - 0}{2} \cos(2 \cdot 40^\circ) + 0 \cdot \sin(2 \cdot 40^\circ)$$

$$\sigma_{x'} = -162.405 + (-162.405) \cdot \cos 80^\circ$$

Omdat $\cos 80^\circ \approx 0.1736$:

$$\sigma_{x'} = -162.405 - (162.405 \cdot 0.1736) \approx -162.405 - 28.194 \approx -190.60\,\text{kPa}$$

Stap 5: Resultaat

De normale spanning loodrecht op de lasnaad is:

$$\boxed{\sigma_{x'} = -191\,\text{kPa}}$$

Stap 6: Conclusie

- De belangrijkste stappen waren het juist berekenen van de doorsnede en het toepassen van de spanningstransformatievergelijkingen.
- De negatieve waarde van $\sigma_{x'}$ betekent dat de spanning compressief is.
- Belangrijke leerpunten: correct omgaan met een hoek θ en spanningstransformatie begrijpen.

Probleem 9-42

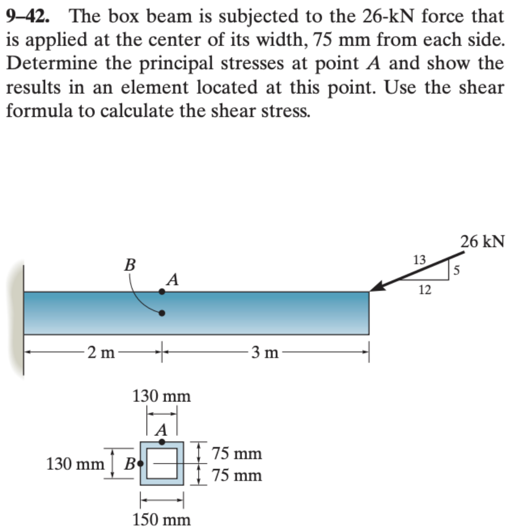


Figure 40: Het probleem gekopieerd uit het boek.

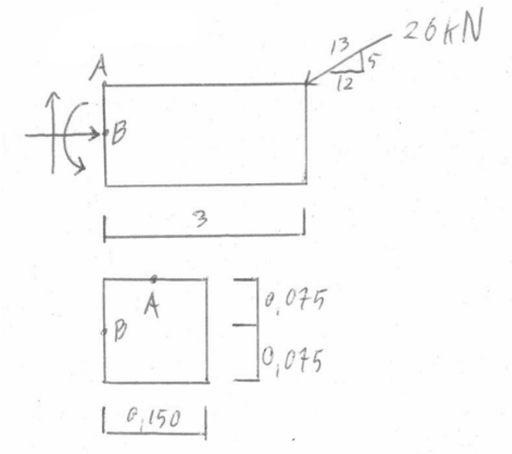


Figure 41: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

Begrijp het probleem

- **Opgave:** Een box beam wordt belast met een kracht van 26 kN in het midden van zijn breedte, 75 mm van elke zijde. Bepaal de hoofdspanningen bij punt A en visualiseer deze op een spannings-element.
- **Gegeven informatie:**
  - Kracht: $P = 26\,\text{kN}$
  - Afmetingen van de doorsnede: $150\,\text{mm} \times 130\,\text{mm}$, wanddikte $t = 75\,\text{mm}$
  - Locatie A ligt op $3\,\text{m}$ van het bevestigingspunt.
- **Gevraagd:** Hoofdspanningen σ_1, σ_2 bij punt A en een spannings-element.

Analyseer de gegeven informatie

1. **Bereken het traagheidsmoment I:**

$$I = \frac{1}{12} b_{\text{buiten}} h_{\text{buiten}}^3 - \frac{1}{12} b_{\text{binnen}} h_{\text{binnen}}^3$$

   Gegeven:

   - Buitenafmetingen: $b_{\text{buiten}} = 0.15\,\text{m}, h_{\text{buiten}} = 0.15\,\text{m}$
   - Binnenafmetingen: $b_{\text{binnen}} = 0.13\,\text{m}, h_{\text{binnen}} = 0.13\,\text{m}$

   Berekening:

$$I = \frac{1}{12}(0.15)(0.15)^3 - \frac{1}{12}(0.13)(0.13)^3 = 18.3867 \times 10^{-6}\,\text{m}^4$$

2. **Bereken het oppervlak A:** De formule is:

$$A = b_{\text{buiten}}^2 - b_{\text{binnen}}^2$$

   Berekening:

$$A = (0.15)^2 - (0.13)^2 = 5.6 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

3. **Analyseer krachten en momenten:**

   - Normale kracht: $N = -24\,\text{kN}$
   - Moment: $M = 28.2\,\text{kN} \cdot \text{m}$
   - Afstand van de neutrale as tot A: $c = 75\,\text{mm} = 0.075\,\text{m}$

Maak een plan

- Gebruik de formule voor normale spanning:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

- Controleer of de schuifspanning τ_A nul is:

$$\tau_A = \frac{VQ}{Ib}$$

  Bij punt A is Q nul, dus $\tau_A = 0$.

Los stapsgewijs op

1. **Bereken de normale spanning σ_A:** Gebruik de formule:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

   Substitueer de waarden:

$$\sigma_A = -\frac{24 \times 10^3}{5.6 \times 10^{-3}} + \frac{28.2 \times 10^3 \cdot 0.075}{18.3867 \times 10^{-6}}$$

   Bereken:

$$\sigma_A = -4.2857 \times 10^6 + 1.1514 \times 10^8 = 111\,\text{MPa}$$

2. **Controleer de schuifspanning τ_A:** Omdat $Q = 0$, geldt:

$$\tau_A = 0$$

Resultaat

De resultaten zijn:

- Hoofdspanningen:

$$\sigma_1 = 111\,\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0$$

- Maximale schuifspanning:

$$\tau_{\max} = 0$$

Het spannings-element bij punt A toont alleen een axiale trekspanning van 111 MPa.

Conclusie

- De spanning bij punt A wordt uitsluitend veroorzaakt door het buigmoment, wat resulteert in een normale spanning van 111 MPa.
- Er is geen schuifspanning aanwezig, omdat het punt A zich op de neutrale lijn bevindt.
- Deze vraag toont het belang van traagheidsmomentberekeningen en het begrijpen van hoe spanning verdeeld is in een doorsnede.