Studiehalen.nl

Bijles om het meeste uit je studie te halen.

WB1631 STERKTELEER

Dit is een boekje met gedetailleerde en stapgewijze uitwerkingen van opgaven uit Hibbeler Mechanics of Materials 11 edition.

Wat is studiehalen.nl

Studiehalen.nl is een bijles platform voor en door studenten van de tu delft. We geven persoonlijke bijles die bij jouw leerstijl past.

Waarom studiehalen.nl

Onze student-docenten kennen de stof én de struikelpunten, omdat ze zelf recent dezelfde tentamens hebben gehaald. Ze delen handige voorbeelden en maken het makkelijker om vragen te stellen. Zo begrijp je de stof sneller en helpen ze je slim plannen, zodat je tijd overhoudt voor je vrije tijd!

Hoe werkt studiehalen.nl

Nadat je contact met ons heb opgezocht zullen wij een geschikte studentdocent aan jou koppelen. De lessen plan je wekelijks in en wij regelen de bijles ruimtes.

Werkcollege 7

Contents

Probleem 12-118

12–118. Determine the vertical reactions at the journal bearing supports *A*, *B*, and *C* of the shaft, then draw the shear and moment diagrams. *EI* is constant.

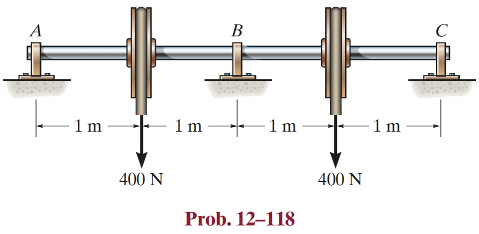


Figure 1: Het probleem gekopieerd uit het boek.

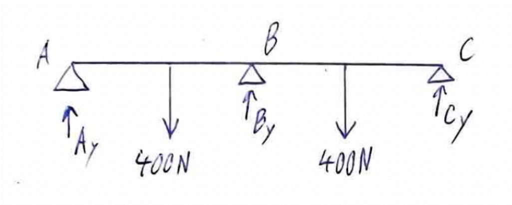


Figure 2: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

Gegeven is een statisch indetermineerbare balk ondersteund door drie opleggingen, namelijk bij A, B, en C. De balk wordt belast door twee puntlasten van 400 N op specifieke locaties. Bepaal de steunreacties A_y, B_y, en C_y.

2. Analyseer de gegeven informatie

- Twee puntlasten: $P_1 = 400\,\text{N}$ en $P_2 = 400\,\text{N}$.
- Lengte van de balk: $L = 4\,\text{m}$, verdeeld in gelijke segmenten van $1\,\text{m}$.
- De elasticiteitsmodulus E en het traagheidsmoment I zijn constant.

3. Maak een plan

1. **Evenwichtsvergelijkingen**: Gebruik de vergelijkingen voor verticale krachten en momenten om de basisrelaties tussen de reacties te vinden.
2. **Compatibiliteitsvoorwaarde**: Door de indetermineerbaarheid wordt een extra vergelijking gebruikt op basis van verplaatsingen.
3. **Berekening van doorbuiging**: Bepaal de doorbuiging door de externe lasten en de redundante reactie.
4. **Los de vergelijkingen op**: Combineer de resultaten om de steunreacties te vinden.

4. Los stapsgewijs op

1. **Evenwichtsvergelijkingen**:

$$\begin{aligned} &\text{Verticaal krachtevenwicht:} \quad A_y + B_y + C_y = 800. \\ &\text{Momenten evenwicht rond } A: \quad 0 = 400 \cdot 1 - 2B_y + 400 \cdot 3 - 4C_y. \end{aligned}$$

2. **Compatibiliteitsvoorwaarde**:
   - Door de statische onbepaaldheid wordt B_y gekozen als redundante kracht.
   - Verplaatsing bij B (Δ_B) wordt bepaald door externe lasten en B_y.

3. **Oplossen van compatibiliteitsvergelijking**:

$$\Delta_B = 0 = \Delta_{B1} + \Delta_{B2}, \tag{1}$$

waar Δ_{B1} de doorbuiging is bij B veroorzaakt door de externe lasten en Δ_{B2} de doorbuiging is bij B veroorzaakt door de redundante reactie B_y.

De doorbuiging Δ_{B1} door externe krachten (twee puntlasten van 400 N op afstanden 1 m en 3 m) kan worden bepaald met bekende formules voor doorbuiging. Uit de gegeven berekeningen volgt:

$$\Delta_{B1} = \frac{-2200}{3EI}. \tag{2}$$

De doorbuiging bij B veroorzaakt door B_y (aangrijpend in het midden) is:

$$\Delta_{B2} = \frac{B_y L^3}{48EI}. \tag{3}$$

Voor $L = 4\,\mathrm{m}$:

$$\Delta_{B2} = \frac{B_y \cdot 4^3}{48EI} = \frac{64}{48EI} B_y = \frac{4}{3EI} B_y. \tag{4}$$

Invullen in formule (1)

$$0 = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} = \frac{-2200}{3EI} + \frac{4}{3EI} B_y. \tag{5}$$

Vermenigvuldig met $3EI$:

$$0 = -2200 + 4B_y \implies 4B_y = 2200 \implies B_y = 550\,\mathrm{N}. \tag{6}$$

Uit de momentvergelijking (met substitutie $B_y = 550\,\mathrm{N}$):

$$0 = 1600 - 2(550) - 4C_y. \tag{7}$$

$$0 = 1600 - 1100 - 4C_y \implies 500 = 4C_y \implies C_y = 125\,\mathrm{N}. \tag{8}$$

Gebruik de verticale krachtvergelijking om A_y te vinden:

$$0 = A_y + B_y + C_y - 800 \implies A_y + 550 + 125 = 800. \tag{9}$$

$$A_y = 800 - 675 = 125\,\mathrm{N}. \tag{10}$$

5. Resultaten

$$A_y = 125\,\mathrm{N},$$
$$B_y = 550\,\mathrm{N},$$
$$C_y = 125\,\mathrm{N}.$$

Documentatie en Conclusie

De reacties zijn berekend met behulp van evenwichts- en compatibiliteitsvoorwaarden. Deze methodiek benadrukt het belang van verplaatsingscompatibiliteit bij statisch indetermineerbare balken.

Probleem 12-105

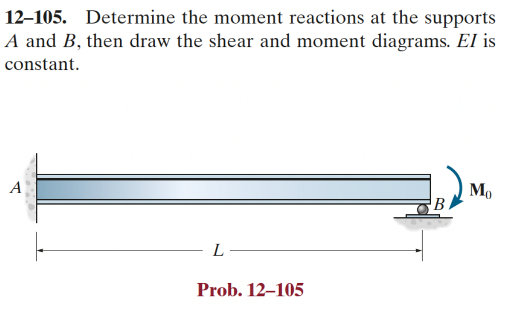


Figure 3: Het probleem gekopieerd uit het boek.

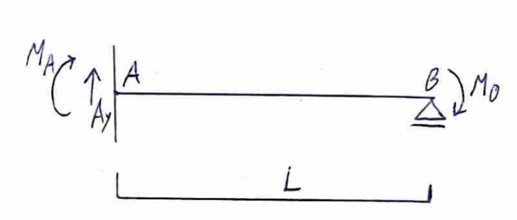


Figure 4: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

Gegeven is een balk met lengte L, ondersteund door een inklemming bij A en een roloplegging bij B. Bij B werkt een moment M_0. Bepaal de steunreacties bij A en B, namelijk A_y, B_y en M_A. Verder wordt aangenomen dat EI constant is.

2. Analyseer de gegeven informatie

- Een balk van lengte L.
- Een inklemming bij A en een roloplegging bij B.
- Een extern moment M_0 bij B.
- Stijfheidsparameter: EI is constant.

3. Maak een plan

1. Schrijf de evenwichtsvergelijkingen voor horizontale en verticale krachten en momenten op.
2. Stel de differentiaalvergelijking van de doorbuigingslijn op.
3. Integreer de differentiaalvergelijking en pas de randvoorwaarden toe om de onbekende reacties te vinden.

4. Los stapsgewijs op

Evenwichtsvergelijkingen

Geen horizontale krachten:

$$A_x = 0. \tag{11}$$

Verticaal evenwicht:

$$\sum F_y = 0 \implies -A_y + B_y = 0 \implies A_y = B_y. \tag{12}$$

Momenten evenwicht rond A:

$$\sum M_A = 0 \implies -M_A + B_y L - M_0 = 0. \tag{13}$$

Hieruit volgt:

$$M_A = B_y L - M_0. \tag{14}$$

Buigmoment in de balk

Het buigmoment ter plaatse x (met $x = 0$ bij A) is:

$$M(x) = M_A - A_y x. \tag{15}$$

Substitueer $A_y = B_y$ en $M_A = B_y L - M_0$:

$$M(x) = (B_y L - M_0) - B_y x. \tag{16}$$

Differentiaalvergelijking elasticiteitslijn

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x). \tag{17}$$

Integreren:

$$EI \frac{dv}{dx} = \int M(x)\, dx = \int [(B_y L - M_0) - B_y x]\, dx. \tag{18}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = (B_y L - M_0)x - \frac{B_y x^2}{2} + C_1. \tag{19}$$

Nogmaals integreren:

$$EIv = \frac{(B_y L - M_0)x^2}{2} - \frac{B_y x^3}{6} + C_1 x + C_2. \tag{20}$$

Randvoorwaarden

Bij $x = 0$:

$$v(0) = 0 \implies C_2 = 0. \tag{21}$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0 \implies EI \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = C_1 = 0. \tag{22}$$

Bij $x = L$ (roloplegging):

$$\begin{aligned} v(L) = 0 \implies \frac{(B_y L - M_0)L^2}{2} - \frac{B_y L^3}{6} &= 0 \\ \frac{B_y L - M_0}{2} - \frac{B_y L}{6} &= 0 \\ 3(B_y L - M_0) - B_y L &= 0 \\ 2B_y L &= 3M_0 \\ B_y &= \frac{3M_0}{2L}. \end{aligned} \tag{23}$$

Aangezien $A_y = B_y$:

$$A_y = B_y = \frac{3M_0}{2L}. \tag{24}$$

Het moment bij A:

$$\begin{aligned} M_A &= B_y L - M_0 \\ &= \frac{3M_0}{2L} L - M_0 \\ &= \frac{3M_0}{2} - M_0 \\ &= \frac{1}{2} M_0 \end{aligned} \tag{25}$$

5. Resultaten

$$A_y = \frac{3M_0}{2L}, \quad B_y = \frac{3M_0}{2L}, \quad M_A = \frac{1}{2}M_0. \tag{26}$$

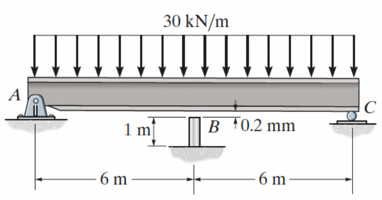
Documentatie en Conclusie

De reacties worden bepaald door evenwichtsvergelijkingen en randvoorwaarden uit de elasticiteitstheorie. De verticale steunreacties zijn gelijk en lineair afhankelijk van $\frac{M_0}{L}$. Het oplegmoment bij A is de helft van het toegepaste moment bij B.

- Evenwichtsvergelijkingen geven de basisrelaties tussen onbekende reacties.
- De elasticiteitsvergelijking en randvoorwaarden bieden de extra vergelijking om alle onbekenden te bepalen.

Probleem 12-123

12–123. Before the uniform distributed load is applied to the beam, there is a small gap of 0.2 mm between the beam and the post at B. Determine the support reactions at A, B, and C. The post at B has a diameter of 40 mm, and the moment of inertia of the beam is $I = 875(10^6)\ \text{mm}^4$. The post and the beam are made of material having a modulus of elasticity of $E = 200$ GPa.



Prob. 12–123

Figure 5: Het probleem gekopieerd uit het boek.

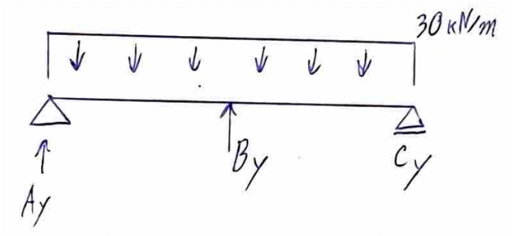


Figure 6: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

Gegeven is een balk met lengte 12L waarover een verdeelde belasting w werkt. De balk is opgelegd in A en C. Op lengte a onder de balk bevind in steunpunt met diameter d en lengte L. Bepaal de steunreacties bij A, B en C.

2. Analyseer de gegeven informatie

- Verdeelde belasting: $w = 30\,\text{kN/m}$
- Lengte per segment: $L = 1\,\text{m}$
- Elasticiteitsmodulus: $E = 200\,\text{GPa}$
- Traagheidsmoment: $I = 875 \times 10^6\,\text{mm}^4$
- Openingsruimte: $a = 0.2\,\text{mm}$
- Diameter steun bij B: $d = 40\,\text{mm}$
- Oppervlakte: $A = \frac{\pi d^2}{4} = 1256.64\,\text{mm}^2$
- Axiale vervorming: $\delta_B = \frac{R_B L}{EA}$
- De balk is statisch onbepaald van de eerste graad: We hebben een compatibiliteitsvergelijking nodig naast de evenwichtsvergelijkingen.

3. Maak een plan

1. Schrijf de evenwichtsvergelijkingen op voor verticale krachten en momenten.
2. Bepaal de doorbuiging v_B bij punt B als gevolg van de verdeelde belasting w.
3. Bepaal de doorbuiging v_B bij punt B als gevolg van de redundante reactie B_y.
4. Bepaal de axiale vervorming δ_B van de steun bij B als gevolg van B_y.
5. Gebruik de compatibiliteitsvoorwaarde $a + \delta_B = v_{B,w} + v_{B,B_y}$ om B_y te vinden.
6. Los vervolgens voor A_y en C_y op.

4. Los stapsgewijs op

Evenwichtsvergelijkingen:

Som van de verticale krachten:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \implies A_y + B_y + C_y - w \cdot 12L = 0, \\ A_y + B_y + C_y = 360\,\text{kN}. \quad (1) \end{aligned} \tag{27}$$

Momenten om punt A:

$$\sum M_A = 0 \implies w \cdot 12L \cdot 6L - B_y \cdot 6L - C_y \cdot 12L = 0. \tag{28}$$

Met $w \cdot 12L = 360\,\text{kN}$ en lengte-eenheden in meters wordt dit:

$$\begin{aligned} 360 \cdot 6 - 6B_y - 12C_y = 0, \\ 2160 - 6B_y - 12C_y = 0. \quad (2) \end{aligned} \tag{29}$$

Doorbuiging door w:

De doorbuiging bij B als gevolg van w (op basis van standaardformules):

$$v_{B,w} = \frac{5wL^4}{384EI}. \tag{30}$$

Vul in $w = 30\,\text{kN/m}$, $L = 1\,\text{m}$, $E = 200 \times 10^3\,\text{N/mm}^2$, $I = 875 \times 10^6\,\text{mm}^4$:

$$\begin{aligned} v_{B,w} &= \frac{-5 \cdot 30 \cdot 12^4}{384 \cdot 200 \times 10^9 \cdot 875 \times 10^-6} \cdot \text{m}, \\ v_{B,w} &= -4.629 \times 10^-5\,\text{m}. \end{aligned} \tag{31}$$

Doorbuiging door B_y:

$$v_{B,B_y} = \frac{-B_y L^3}{48EI}. \tag{32}$$

$$\begin{aligned} v_{B,B_y} &= \frac{B_y \cdot 12^3}{48 \cdot 200 \times 10^9 \cdot 875 \times 10^-6}\,\text{m}, \\ v_{B,B_y} &= 2.06 \times 10^-7 B_y\,\text{m}. \end{aligned} \tag{33}$$

Axiale vervorming δ_B:

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{B_y L}{EA} = \frac{B_y \cdot 1\,\text{m}}{200 \times 10^9 \cdot 1256.64 \times 10^-6\,\text{m}^2}, \\ \delta_B &= 3.98 \times 10^-9 B_y\,\text{m}. \end{aligned} \tag{34}$$

Compatibiliteitsvergelijking:

De totale opening a plus de axiale vervorming δ_B moet gelijk zijn aan de som van de doorbuigingen:

$$\begin{aligned} a + \delta_B = v_{B,w} + v_{B,B_y}, \\ 0.2 \times 10^-3 + 3.98 \times 10^-9 B_y = -4.629 \times 10^-5 + 2.06 \times 10^-7 B_y. \end{aligned} \tag{35}$$

Oplossen voor B_y:

$$B_y = 219.797\,\text{kN}. \tag{36}$$

Bepaal C_y uit vergelijking (2):

$$\begin{aligned} 2160 - 6(219.797) - 12C_y &= 0, \\ 2160 - 1318.782 - 12C_y &= 0, \\ 841.218 &= 12C_y, \\ C_y &= 70.10\,\text{kN}. \end{aligned} \tag{37}$$

Bepaal A_y uit vergelijking (1):

$$\begin{aligned} A_y + 219.797 + 70.10 &= 360, \\ A_y &= 360 - 289.897, \\ A_y &= 70.10\,\mathrm{kN}. \end{aligned} \tag{38}$$

5. Resultaten

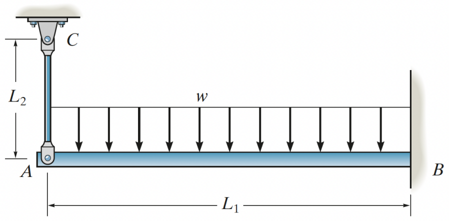
$$\begin{aligned} A_y &= 70.10\,\mathrm{kN}, \\ B_y &= 219.797\,\mathrm{kN}, \\ C_y &= 70.10\,\mathrm{kN}. \end{aligned} \tag{39}$$

Documentatie en Conclusie

Deze waarden zijn gevonden door de evenwichtsvergelijkingen te combineren met een compatibiliteitsvergelijking gebaseerd op vervormingen. Hierdoor is de statisch onbepaalde balk volledig opgelost. Zie Hibbeler Sectie 12.4 voor verdere toelichting op deze methoden.

Probleem 12-129

12–129. The beam has a constant $E_1 I_1$ and is supported by the fixed wall at B and the rod AC. If the rod has a cross-sectional area A_2 and the material has a modulus of elasticity E_2, determine the force in the rod.



Prob. 12–129

Figure 7: Het probleem gekopieerd uit het boek.

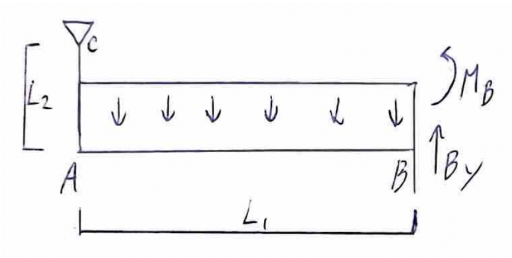


Figure 8: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

- **Gevraagd:** Bepaal de kracht in de staaf AC.
- **Gegevens:**
  - Lengte van de balk: L_1
  - Elasticiteitsmodulus van de balk: E_1
  - Traagheidsmoment van de balk: I_1
  - Elasticiteitsmodulus van de staaf: E_2
  - Doorsnede van de staaf: A_2
  - Lengte van de staaf: L_2
  - Verdeelde belasting op de balk: w

2. Analyseer de gegeven informatie

- De doorbuiging van punt A (genoteerd als v_A) wordt beïnvloed door zowel de balk als de staaf.
- Compatibiliteitsvoorwaarde:

$$v_A = \delta_{AC} \tag{40}$$

3. Maak een Plan

1. Schrijf de doorbuiging van punt A als gevolg van de verdeelde belasting en de kracht in de staaf AC.
2. Schrijf de axiale vervorming van de staaf AC uit.
3. Formuleer de compatibiliteitsvergelijking.
4. Los op voor T_{AC}, de kracht in de staaf.

4. Los stapsgewijs op

Doorbuiging door de balk:

$$v_A = \frac{-wL_1^4}{8E_1I_1} + \frac{T_{AC}L_1^3}{3E_1I_1} \tag{41}$$

Axiale vervorming van de staaf:

$$\delta_{AC} = \frac{T_{AC} L_2}{E_2 A_2} \tag{42}$$

Compatibiliteitsvergelijking:

$$\begin{gathered} v_A = \delta_{AC}, \\ \frac{-wL_1^4}{8E_1 I_1} + \frac{T_{AC} L_1^3}{3E_1 I_1} = -\frac{T_{AC} L_2}{E_2 A_2}. \end{gathered} \tag{43}$$

Herschrijf om T_{AC} te isoleren:

$$\begin{aligned} \frac{-wL_1^4}{8E_1 I_1} &= \frac{-T_{AC} L_2}{E_2 A_2} - \frac{T_{AC} L_1^3}{3E_1 I_1}, \\ \frac{-wL_1^4}{8E_1 I_1} &= -T_{AC} \left(\frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_1^3}{3E_1 I_1} \right). \end{aligned} \tag{44}$$

Omzetten van negatieve waarden (door beide kanten te vermenigvuldigen met -1):

$$\frac{wL_1^4}{8E_1 I_1} = T_{AC} \left(\frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_1^3}{3E_1 I_1} \right). \tag{45}$$

Oplossen voor T_{AC}:

$$T_{AC} = \frac{\frac{wL_1^4}{8E_1 I_1}}{\frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_1^3}{3E_1 I_1}}. \tag{46}$$

Door noemer en teller te combineren:

$$T_{AC} = \frac{3wA_2 E_2 L_1^4}{8\left(3E_1 I_1 L_2 + A_2 E_2 L_1^3\right)}. \tag{47}$$

5. Resultaten

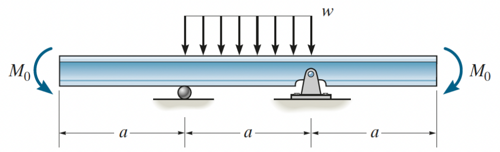
$$T_{AC} = \frac{3wA_2 E_2 L_1^4}{8\left(3E_1 I_1 L_2 + A_2 E_2 L_1^3\right)}. \tag{48}$$

Documentatie en Conclusie

De kracht in staaf AC is bepaald door gebruik te maken van evenwichtsvergelijkingen en een compatibiliteitsvoorwaarde. De vervormingen van zowel de balk als de staaf spelen hierbij een cruciale rol. Verwijs naar Hibbeler Sectie 12.6 voor verdere toelichting op dergelijke statisch onbepaalde systemen.

Probleem R12-9

R12–9. Using the method of superposition, determine the magnitude of $\mathbf{M}_0$ in terms of the distributed load w and dimension a so that the deflection at the center of the beam is zero. EI is constant.



Prob. R12–9

Figure 9: Het probleem gekopieerd uit het boek.

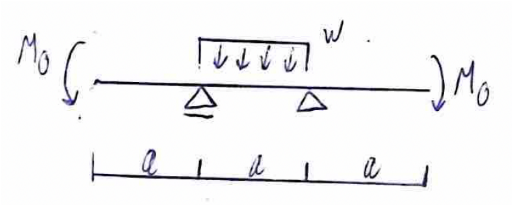


Figure 10: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

- **Gevraagd:** Bepaal de grootte van M_0 zodat de doorbuiging in het midden van de balk nul is.
- **Gegevens:**
  - Verdeelde belasting: w
  - Afstand: a
  - EI is constant over de gehele balk.

2. Analyseer de gegeven informatie

- De balk is onderworpen aan een verdeelde belasting w en aan momenten M_0 aan beide uiteinden.
- We passen superpositie toe: we bepalen de doorbuiging door w en door de afzonderlijke momenten, en sommeren deze.

3. Maak een plan

1. Bepaal de doorbuiging in het midden van de balk veroorzaakt door de verdeelde belasting ($\delta_C^{(1)}$).
2. Bepaal de doorbuiging in het midden veroorzaakt door het moment M_0 aan de linkerzijde ($\delta_C^{(2)}$).
3. Bepaal de doorbuiging in het midden veroorzaakt door M_0 aan de rechterzijde ($\delta_C^{(3)}$).
4. Stel de som van deze doorbuigingen gelijk aan nul en los op voor M_0.

4. Los stapsgewijs op

Doorbuiging door de verdeelde belasting:

$$\delta_C^{(1)} = \frac{-5wa^4}{384EI}. \tag{49}$$

Doorbuiging door M_0 aan de linkerzijde:

$$\delta_C^{(2)} = \frac{M_0 a^2}{16EI}. \tag{50}$$

Doorbuiging door M_0 aan de rechterzijde:

Door symmetrie:

$$\delta_C^{(3)} = \frac{M_0 a^2}{16EI}. \tag{51}$$

Totale doorbuiging in het midden:

$$\delta_C = \delta_C^{(1)} + \delta_C^{(2)} + \delta_C^{(3)}. \tag{52}$$

Invullen:

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{-5wa^4}{384EI} + \frac{M_0 a^2}{16EI} + \frac{M_0 a^2}{16EI} \\ &= \frac{-5wa^4}{384EI} + \frac{2M_0 a^2}{16EI} \\ &= \frac{-5wa^4}{384EI} + \frac{M_0 a^2}{8EI}. \end{aligned} \tag{53}$$

Voor $\delta_C = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-5wa^4}{384EI} + \frac{M_0 a^2}{8EI} \\ 0 &= \frac{-5wa^4}{48} + M_0 a^2 \\ M_0 a^2 &= \frac{5wa^4}{48}, \\ M_0 &= \frac{5wa^2}{48} \end{aligned} \tag{54}$$

5. Resultaten

$$M_0 = \frac{5wa^2}{48}. \tag{55}$$

Documentatie en Conclusie

Met superpositie hebben we M_0 bepaald zodat de doorbuiging in het midden van de balk nul is. Voor meer informatie over deze aanpak, zie Hibbeler Sectie 12.5.

Studiehalen.nl

Vraag een bijles aan!

Extra hulp nodig? Kijk of het bij je past.

Alle vakken van de TU Delft

- Op jouw leerstijl aangepast
- Kennen de pijnpuntjes
- Voelt als een mede-student

EFLES | GRATIS PROEFLES | GRATIS PROEFLES | GRATIS PROEFLES | GR

Neem contact met ons op

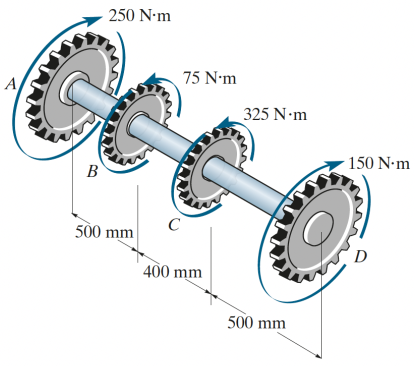
+31 6 35312865 www.studiehalen.nl info@studiehalen.nl

Werkcollege 8

Contents

Probleem 5-7

F5–7. The solid 50-mm-diameter shaft is subjected to the torques applied to the gears. Determine the absolute maximum shear stress in the shaft.



Prob. F5–7

Figure 11: Het probleem gekopieerd uit het boek.

1. Begrijp het probleem

- **Gevraagd:** Bepaal de absolute maximale schuifspanning in de as en schets de verdeling van de schuifspanning langs de radiale lijn van de schacht waar deze maximaal is.
- **Gegeven:**
  - Diameter van de as: $d = 50\,\text{mm}$
  - Toegepaste torsiekracht: $T_1 = 2000\,\text{Nm}$
  - Andere torsiekrachten: $300\,\text{Nm}, 600\,\text{Nm}, 900\,\text{Nm}$

2. Analyseer de gegeven informatie

- De torsiespanning wordt bepaald met de formule:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}, \tag{56}$$

  waarbij:
  - T: intern torsiemoment,
  - $r = \frac{d}{2}$: straal van de as,
  - $J = \frac{\pi d^4}{32}$: polair traagheidsmoment van de as.
- Het kritieke segment bevindt zich waar het interne torsiemoment T maximaal is.

3. Maak een Plan

1. Bepaal het interne torsiemoment in elk segment van de as.
2. Vind het segment waar het torsiemoment maximaal is.
3. Bereken de maximale schuifspanning ($\tau_{\max}$) in dat segment.
4. Schets de verdeling van de schuifspanning over de straal van de as (lineair oplopend van nul in de kern tot maximaal aan de buitenzijde).

4. Los stapsgewijs op

Interne torsiemomenten:

Beschouw de as met aangehechte torsiekrachten. Stel dat $T_1 = 2000\,\text{Nm}$ de grootste torsielast is en de andere torsies $300\,\text{Nm}, 600\,\text{Nm}$, en $900\,\text{Nm}$ op verschillende segmenten werken. Het maximale interne moment zal optreden waar de cumulatieve torsie maximaal is.

Neem bijvoorbeeld segment BC als het kritieke segment, en veronderstel dat net vóór segment BC een totale torsie van $T_1 = 2000\,\text{Nm}$ aanwezig is en dat op segment BC een torsie van $900\,\text{Nm}$ in tegengestelde richting werkt. Dan:

$$T_{BC} = T_1 - 900 = 2000 - 900 = 1100\,\text{Nm}. \tag{57}$$

Maximale schuifspanning in segment BC:

Straal r:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{50\,\text{mm}}{2} = 25\,\text{mm} = 0.025\,\text{m}. \tag{58}$$

Polair traagheidsmoment J:

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0.05)^4}{32} = 3.067 \times 10^{-7}\,\text{m}^4. \tag{59}$$

Schuifspanning:

$$\tau_{\text{max,BC}} = \frac{T_{BC} r}{J} = \frac{1100 \cdot 0.025}{3.067 \times 10^{-7}} = 44.8\,\text{MPa}. \tag{60}$$

5. Resultaten

$$\tau_{\text{max}} = 44.8\,\text{MPa}. \tag{61}$$

De spanning is nul bij de as en neemt lineair toe naar buiten toe, met een maximale waarde aan de buitenrand $r = 0.025\,\text{m}$.

Documentatie en Conclusie

De absolute maximale schuifspanning treedt op in segment BC en bedraagt ongeveer $44.8\,\text{MPa}$. De spanning verdeelt zich lineair over de straal, van nul in de kern tot maximaal aan de buitenoppervlakte. Zie Hibbeler Sectie 5.3 voor meer informatie.

Probleem 5-48

***5–48.** The propeller of a ship is connected to an A-36 steel shaft that is 60 m long and has an outer diameter of 340 mm and inner diameter of 260 mm. If the power output is 4.5 MW when the shaft rotates at 20 rad/s, determine the maximum torsional stress in the shaft and its angle of twist.

Figure 12: Het probleem gekopieerd uit het boek.

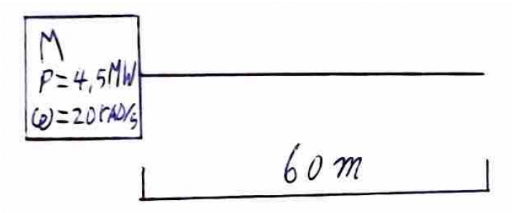


Figure 13: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

- **Gevraagd:** Bereken de maximale schuifspanning (τ_{max}) en de verdraaiingshoek (ϕ) van een holle as.
- **Gegeven:**
  - $d_{\text{buiten}} = 340\,\text{mm} = 0,34\,\text{m}$
  - $d_{\text{binnen}} = 260\,\text{mm} = 0,26\,\text{m}$
  - $L = 60\,\text{m}$
  - $P = 4,5\,\text{MW} = 4,5 \times 10^6\,\text{W}$
  - $\omega = 20\,\text{rad/s}$
  - $G = 75\,\text{GPa} = 75 \times 10^9\,\text{Pa}$

2. Analyseer de gegeven informatie

- Het torsiemoment T wordt berekend met:
$$T = \frac{P}{\omega}. \tag{62}$$
- De maximale schuifspanning in een holle as wordt gegeven door:
$$\tau_{\text{max}} = \frac{T r_{\text{buiten}}}{J}, \tag{63}$$
waarbij het polaire traagheidsmoment J is:
$$J = \frac{\pi}{2}\left(r_{\text{buiten}}^4 - r_{\text{binnen}}^4\right). \tag{64}$$
- De verdraaiingshoek ϕ wordt berekend met:
$$\phi = \frac{TL}{JG}. \tag{65}$$

3. Maak een plan

1. Bereken het torsiemoment T uit het vermogen P en de hoeksnelheid ω.
2. Bereken het polaire traagheidsmoment J van de holle as.
3. Bereken de maximale schuifspanning τ_{max}.
4. Bereken de verdraaiingshoek ϕ.

4. Los stapsgewijs op

Stap 1: Bereken het torsiemoment T.

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{4,5 \times 10^6}{20} = 225 \times 10^3\,\text{Nm}. \tag{66}$$

Stap 2: Bereken het polaire traagheidsmoment J.

De stralen zijn:

$$\begin{aligned} r_{\text{buiten}} &= \frac{d_{\text{buiten}}}{2} = \frac{0,34}{2} = 0,17\,\text{m} \\ r_{\text{binnen}} &= \frac{d_{\text{binnen}}}{2} = \frac{0,26}{2} = 0,13\,\text{m}. \end{aligned} \tag{67}$$

$$J = \frac{\pi}{2}\left(r_{\text{buiten}}^4 - r_{\text{binnen}}^4\right). \tag{68}$$

Eindelijk:

$$\begin{aligned} r_{\text{buiten}}^4 &= (0,17)^4 = 8,3521 \times 10^{-4} \\ r_{\text{binnen}}^4 &= (0,13)^4 = 2,8561 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2}\left(8,3521 \times 10^{-4} - 2,8561 \times 10^{-4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times 5,496 \times 10^{-4} \\ &= 8,64 \times 10^{-4}\,\text{m}^4 \end{aligned} \tag{70}$$

Stap 3: Bereken de maximale schuifspanning τ_{max}.

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max}} &= \frac{T r_{\text{buiten}}}{J} \\ &= \frac{225 \times 10^3 \times 0,17}{8,64 \times 10^{-4}} \\ &= 44,3\,\text{MPa}. \end{aligned} \tag{71}$$

Stap 4: Bereken de verdraaiingshoek ϕ.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{TL}{JG} \\ &= \frac{225 \times 10^3 \times 60}{8,64 \times 10^{-4} \times 75 \times 10^9} \\ &= 0,2085\,\text{rad} \approx 11,9^\circ \end{aligned} \tag{72}$$

5. Resultaten

De resultaten zijn:

$$\tau_{\text{max}} = 44,3\,\text{MPa}, \quad \phi = 0,2085\,\text{rad} \approx 11,9^\circ. \tag{73}$$

Documentatie en Conclusie

- We hebben de maximale schuifspanning en de verdraaiingshoek berekend door gebruik te maken van torsieformules.
- Deze berekeningen volgen uit **Sectie 5.3** van Hibbeler's *Mechanics of Materials*, waar de theorie van torsie voor holle assen wordt behandeld.
- **Key takeaway:** De sterkte en vervorming van een as kunnen nauwkeurig worden bepaald door de geometrische eigenschappen van de doorsnede en de materiaalconstanten.

Wat onze studenten zeggen

Ids

Erg goede 1 op 1 bijles van een betrokken studentdocent die goed begrijpt wat belangrijk is aan het vak. Zeker een aanrader om je vak te halen!

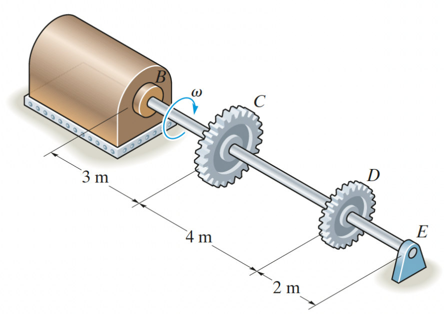
Dennis

Voor iedereen aan te raden die wat extra hulp kan gebruiken of een zetje in de goede richting. Paar lessen gedaan voor een belangrijk tentamen wat me niet lag en na fijne en duidelijke uitleg afgerond met een 8.4!

Studiehalen.nl

Probleem 5-61

5–61. The turbine develops 150 kW of power, which is transmitted to the gears such that both C and D receive an equal amount. If the rotation of the 100-mm-diameter A-36 steel shaft is ω = 500 rev/min., determine the absolute maximum shear stress in the shaft and the rotation of end B of the shaft relative to E. The journal bearing at E allows the shaft to turn freely about its axis.



Probs. 5–60/61

Figure 14: Het probleem gekopieerd uit het boek.

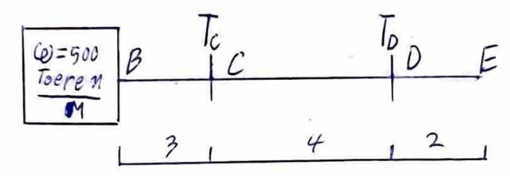


Figure 15: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

- **Gevraagd:** Bereken de maximale schuifspanning (τ_{max}) in de schacht en de rotatie van B ten opzichte van E ($\phi_{B>E}$).
- **Gegevens:**

$$\begin{aligned} P &= 150\,\text{kW} = 150 \times 10^3\,\text{W}, \\ \omega &= 500\,\text{rpm} = \frac{500 \cdot 2\pi}{60} = 52.36\,\text{rad/s}, \\ L_1 &= 3\,\text{m}, \quad L_2 = 2\,\text{m}, \\ d &= 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m}, \\ G &= 75\,\text{GPa} = 75 \times 10^9\,\text{Pa}. \end{aligned} \tag{74}$$

2. Analyseer de gegeven informatie

- Het torsiemoment wordt berekend met:
$$T = \frac{P}{\omega}. \tag{75}$$
- Het torsiemoment verdeelt zich als:
$$T_C = T_D = \frac{T}{2}. \tag{76}$$
- De maximale schuifspanning wordt gegeven door:
$$\tau_{\text{max}} = \frac{Tr}{J}, \tag{77}$$
  waarbij:
  - $r = \frac{d}{2}$ (straal van de as),
  - $J = \frac{\pi}{2} r^4$ (polair traagheidsmoment).
- De rotatie van B ten opzichte van E wordt berekend met:
$$\phi_{B>E} = \sum \frac{TL}{JG}. \tag{78}$$

3. Maak een plan

1. Bereken het totale torsiemoment T en verdeel het in de segmenten.
2. Bereken het polaire traagheidsmoment J.
3. Bereken de maximale schuifspanning ($\tau_{\max}$).
4. Bereken de rotatie ($\phi_{B>E}$).

4. Los stapsgewijs op

Stap 1: Bereken het torsiemoment T.

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{150 \times 10^3}{52.36} = 2864.789\,\text{Nm}. \tag{79}$$

Het torsiemoment wordt verdeeld:

$$T_C = T_D = \frac{T}{2} = \frac{2864.789}{2} = 1432.394\,\text{Nm}. \tag{80}$$

Stap 2: Bereken het polaire traagheidsmoment J. De straal van de as:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05\,\text{m}. \tag{81}$$

Het polaire traagheidsmoment:

$$J = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2}(0.05)^4 = 1.9635 \times 10^{-6}\,\text{m}^4. \tag{82}$$

Stap 3: Bereken de maximale schuifspanning $\tau_{\max}$. De maximale schuifspanning bevindt zich in segment BC waar $T = 2864.789\,\text{Nm}$:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Tr}{J} \\ &= \frac{2864.789 \cdot 0.05}{1.9635 \times 10^{-6}} \\ &= 14.6\,\text{MPa}\end{aligned} \tag{83}$$

Stap 4: Bereken de rotatie van B ten opzichte van E.

$$\begin{aligned}\phi_{B>E} &= \frac{1}{JG}\left[TL_1 + T_C L_2\right] \\ &= \frac{[2864.789 \cdot 3 + 1432.394 \cdot 4]}{1.9635 \times 10^{-6} \cdot 75 \times 10^9} \\ &= \frac{14323.943}{1.4726 \times 10^5} \\ &= 0.0195\,\text{rad} \\ &\approx 1.11^\circ\end{aligned} \tag{84}$$

5. Geef de uitkomst

- **Maximale schuifspanning:**

$$\tau_{\max} = 14.6\,\text{MPa}. \tag{85}$$

- **Rotatie van B ten opzichte van E:**

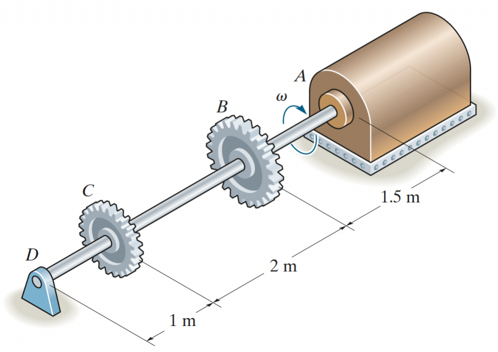
$$\phi_{B>E} = 0.0195\,\text{rad} = 1.11^\circ. \tag{86}$$

Documentatie en Conclusie

- De berekening van schuifspanning en rotatie in assen wordt uitgevoerd met behulp van de torsieformules uit Hibbeler *Sectie 5.3*.
- Deze methoden zijn cruciaal voor het begrijpen van de spanningsverdeling en vervorming in transmissiesystemen.

Probleem 5-63

5–63. The turbine develops 300 kW of power, which is transmitted to the gears such that both B and C receive an equal amount. If the rotation of the 100-mm-diameter A992 steel shaft is ω = 600 rev/min., determine the absolute maximum shear stress in the shaft and the rotation of end D of the shaft relative to A. The journal bearing at D allows the shaft to turn freely about its axis.



Prob. 5–63

Figure 16: Het probleem gekopieerd uit het boek.

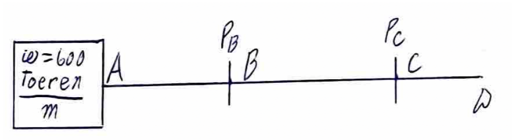


Figure 17: De free body diagram die bij dit probleem hoort.

1. Begrijp het probleem

- **Gevraagd:** Bereken de maximale schuifspanning ($\tau_{\max}$) in de schacht en de rotatie van D ten opzichte van A ($\phi_{D>A}$).
- **Gegevens:**
  - $P = 300\,\text{kW} = 300 \times 10^3\,\text{W}$
  - $\omega = 600\,\text{rpm} = \frac{600\cdot 2\pi}{60} = 20\pi\,\text{rad/s}$
  - $L = 0.5\,\text{m}, \quad L_{BA} = 3L = 1.5\,\text{m}, \quad L_{CB} = 2L = 1.0\,\text{m}$
  - $d = 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m}$
  - $G = 75\,\text{GPa} = 75 \times 10^9\,\text{Pa}$

2. Analyseer de gegeven informatie

Vermogen wordt gelijk verdeeld over tandwielen B en C:

$$P_B = P_C = \frac{P}{2} = 150\,\text{kW}. \tag{87}$$

Het torsiemoment wordt berekend met:

$$T_B = T_C = \frac{P_B}{\omega}. \tag{88}$$

De maximale schuifspanning wordt gegeven door:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max} r}{J}, \tag{89}$$

waarbij:

- $r = \frac{d}{2}$ (straal van de as),
- $J = \frac{\pi}{2} r^4$ (polair traagheidsmoment).

De rotatie van D ten opzichte van A wordt berekend met:

$$\phi_{D>A} = \sum \frac{TL}{JG}. \tag{90}$$

3. Maak een plan

1. Bereken het torsiemoment T_B en T_C, evenals T_{BA}.
2. Bereken het polair traagheidsmoment J.
3. Bereken de maximale schuifspanning ($\tau_{\max}$).
4. Bereken de rotatie ($\phi_{D>A}$).

4. Los stapsgewijs op

Stap 1: Bereken de torsiemomenten.

$$T_B = T_C = \frac{P_B}{\omega} = \frac{150 \times 10^3}{20\pi} = \frac{7500}{\pi}\,\text{Nm}. \tag{91}$$

Het torsiemoment in segment BA is:

$$T_{BA} = T_B + T_C = \frac{7500}{\pi} + \frac{7500}{\pi} = \frac{15000}{\pi}\,\text{Nm}. \tag{92}$$

Stap 2: Bereken het polaire traagheidsmoment J.

De straal van de as is:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05\,\text{m}. \tag{93}$$

Het polaire traagheidsmoment:

$$J = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2}(0.05)^4 = 1.9635 \times 10^{-6}\,\text{m}^4. \tag{94}$$

Stap 3: Bereken de maximale schuifspanning $\tau_{\max}$.

De maximale schuifspanning bevindt zich in segment BA, waar $T_{\max} = T_{BA} = \frac{15000}{\pi}$ Nm:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{T_{\max} r}{J} \\ &= \frac{\frac{15000}{\pi} \cdot 0.05}{1.9635 \times 10^{-6}} \\ &= 24.3\,\text{MPa}. \end{aligned} \tag{95}$$

Stap 4: Bereken de rotatie van D ten opzichte van A.

$$\begin{aligned} \phi_{D>A} &= \frac{1}{JG}\left(T_{DC}L_{DC} + T_{CB}L_{CB} + T_{BA}L_{BA}\right) \\ &= \frac{\left(0 + \frac{7500}{\pi} \cdot 1 + \frac{15000}{\pi} \cdot 1.5\right)}{1.9635 \times 10^{-6} \cdot 75 \times 10^9} \\ &= \frac{30000}{\pi \cdot 1.4726 \times 10^5} \\ &= 0.0162\,\text{rad} \\ &\approx 0.929^\circ \end{aligned} \tag{96}$$

5. Resultaten

- **Maximale schuifspanning:**

$$\tau_{\max} = 24.3\,\text{MPa}. \tag{97}$$

- **Rotatie van D ten opzichte van A:**

$$\phi_{D>A} = 0.0162\,\text{rad} = 0.929^\circ. \tag{98}$$

Documentatie en Conclusie

- De berekeningen van schuifspanning en rotatie volgen de principes van torsie uit Hibbeler *Sectie 5.3*.
- Deze technieken zijn belangrijk voor het analyseren van complexe transmissiesystemen.

Wat onze studenten zeggen

Youri

Erg goede bijlessen, hij loopt alles goed samen met je door. En heeft daarbij perfect balans tussen jezelf laten nadenken en uitvogelen, en ondersteunend de opdracht door gaan. Zeker aan te raden :)

Jetske

Via Studiehalen.nl werd ik gekoppeld aan een student die mij echt supergoed geholpen heeft waardoor ik nu veel meer vertrouwen heb dat ik mijn tentamen ga halen!

Studiehalen.nl