# Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren: Authors

Version: 1.0.20240313

 $\underline{https:/\!/github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2}$ 



# Inhaltsverzeichnis

LTI-Systeme (S. 171) 2		2.1 Dämpfungsfaktor <i>D</i> (S. 206)	
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2	2.2 Dämpfungsmass <i>a</i> in Dezibel (S. 206)	
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	2.3 Rechenregeln mit Dezibel	
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2	2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2		
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2	2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2		
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2	3 Frequnzverhalten analoger LTI-Systeme	
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)		3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF	
		3.2 Pol- und Nulstellendiagramme	
Dämpfung, Verstärkung, Dezibel	3	3.3 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	

# 1 LTI-Systeme (s. 171)

x(t)	Eingangssignal
v(t)	Ausgangssignal

 $\delta(t)$ Dirac-Stoss

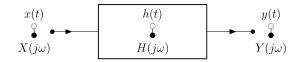
h(t)Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)

 $H(j\omega)$ Frequenzgang  $|H(j\omega)|$ Amplitudengang  $\theta(j\omega)$ 

Phasengang  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  Übertragungsfunktion (UTF) H(s)

# 1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort h(t) und der Frequenzgang  $H(j\omega)$  sind ein Fourier-Transformationspaar:



Die Impulsantwort h(t) und die Übertragungsfunktion H(s) sind ein Laplace-Transformationspaar:

$$h(t) \circ ---\bullet H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \circ - Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

# 1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

Impulsantwort

Einheitssprungantwort g(t)

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \ \mathrm{d}\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

# 1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort h(t) für alle t < 0gleich Null sein.

# **1.2 Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für reine Sinus-Schwingungen exakt bestimmbar! Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

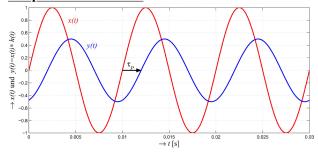
Das Ausgangssignal y(t) = x(t) \* h(t) ist gegenüber dem Eingangssignal x(t) mit Faktor  $\alpha$ gewichtet und um die Zeit to verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird Phasenlaufzeit genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

 $\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

#### **Beispiel: Phasenlaufzeit**



#### 1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet nicht, dass ein System akausal ist!

# **1.3 Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit mehreren Frequenzanteilen

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit  $\tau_G(\omega)$  die Verzögerung der Hüllkurve der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-\,\mathrm{d}\theta(\omega)}{\,\mathrm{d}\omega}$$

 $\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als Laufzeit des Signals interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

#### 1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei Vierpolen mit konzentrierten Elementen ist in bestimmten Frequenzbereichen eine negative Gruppenlaufzeit möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung nicht vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber früher als am Eingang auftreten.

# 1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die Signalverzögernug, Phasenlaufzeit  $\tau_P(\omega)$  und Gruppenlaufzeit  $\tau_G(\omega)$  sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der Amplitudengang ebenfalls konstant ist, d.h.  $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$ Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen**  $t_0$  (=  $\tau_P = \tau_G$ )

#### 1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem nicht verzerrungsfrei.

#### 1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine Dämpfung eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer linearen Verzerrung

# 1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch Übersteuerung des Systems (Kanal) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten neue, im Ursprungssignal nicht enthaltene Schwingungen auf.

Ein Mass für nichtlineare Verzerrungen ist der Klirrfaktor

# **1.6 Klirrfaktor** (S. 189)

Verhältnis des Effektivwerts der neu am Ausgang eines Systems entstandenen Harmonischen zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

 $U_1$  entspricht der Grundharmonischen  $\Rightarrow$  Es gilt:  $1 > k \ge 0$ 

# 1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{k}\right)$$

# 1.6.2 Total Harmonic Disortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

THD = 
$$\sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$
  $U_1$  entspricht der Grundharmonischen  $\Rightarrow$  Es gilt:  $\infty > \text{THD} \ge 0$ 

geringe Verzerrungen: THD  $\approx k$ 

allgemein: THD > k

# 1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (s. 190)

Frequenzgang  $H(j\omega)$  und Impulsantwort h(t) eines verzerrungsfreien Signals:

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt

- **1. Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz)  $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$ → Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- **2. Phase** proportional zur Frequenz  $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$ (äquivalenz zu Abschnitt 1.4) → Keine Phasenverzerrung vorhanden

# 1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal x(t) (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantowort h(t) übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal y(t) gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \circ - \Phi Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

#### 1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert  $Y_0$  des Ausgangssignals y(t) bei der Frequenz  $\omega = 0$  entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

 $H(j\omega)$  = Frequenzgang und  $X_0$  = linearer Mittelwert von x(t)

#### 1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da  $\varphi_{vv}(\tau)$  und  $Y_0$  nicht von t abhängen, ist auch y(t) schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

#### 1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren  $\Phi(j\omega)$ 

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \, \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals y(t) gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Die Leistung  $Y^2$  des Ausgangssignals y(t) berechnet sich beim Zeitpunkt  $\tau = 0$  als

$$Y^{2} = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^{2} \Phi_{xx}(j\omega) d\omega$$

# 1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen  $\varphi_{xy}(\tau)$  und  $\varphi_{yx}(\tau)$  des stochastischen, reellen Eingangssignals x(t) (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals y(t) eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ - \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ - \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \circ - \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

#### 2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

# **2.1 Dämpfungsfaktor** D (S. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor  ${\cal D}$  bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die Effektivwerte von Spannung, Leistung und Strom.

# **2.2 Dämpfungsmass** *a* in Dezibel (8. 206)

Durch  $\log$ arithmieren des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)$$

# 2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$dB = 10 \cdot \log_{10}(v) \iff v = 10^{\frac{dB}{10}}$$

#### 2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren → Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren → Dezibel-Werte subtrahieren

#### 2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entspreched negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor**  $T_U$  definiert. Analog zum Dämpfungs-

Filter

mass a wird ein **Verstärkungsmass**  $g_U$  definiert.

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)$$

Verstärker

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

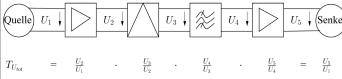
• Verstärkung:  $(U_2 > U_1) \Rightarrow$  positive Dezibel-Zahl

Modulator

• **Dämpfung:**  $(U_2 < U_1) \Rightarrow$  negative Dezibel-Zahl

# Beispiel: Kaskadiertes System (S. 209)

Verstärker



$$= \frac{10}{1} \quad \cdot \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdot \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdot \quad \frac{10}{1} = 50$$

$$a_{U_{tot}} = -20 \text{dB} \quad + \quad 3 \text{dB} \quad + \quad 3 \text{dB} \quad + \quad -20 \text{dB} = -34 \text{dB}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20 \,\mathrm{dB} + 3 \,\mathrm{dB} + 3 \,\mathrm{dB} - 20 \,\mathrm{dB} = -34 \,\mathrm{dB}$$

# 2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel - Faktor

**Vorgehen:** Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen → Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotent von bekannten Werten darstellen

→ Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	$100 = 10 \cdot 10$
12	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
10	10
9 = 3 + 3 + 3	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
8 = 5 - 3	$6.4 = 3.2 \cdot 2$
7 = 10 - 3	$5 = \frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	$4 = 2 \cdot 2$
5 = 15 - 10	$3.2 = \frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3	$2.5 = \frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 - 10 = 5 - 3	$1.6 = \frac{16}{10}$
1 = 10 - 3 - 3 - 3	$1.25 = \frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
-1	$0.8 = \frac{4}{5}$

#### 2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)

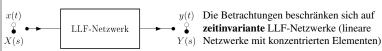
Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$\begin{split} (L_U)_{\rm rel} &= 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right) \\ (L_I)_{\rm rel} &= 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \\ (L_I)_{\rm rel} &= 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \\ (L_P)_{\rm rel} &= 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \\ \end{split}$$
 
$$\begin{split} (L_D)_{abs} &= 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{1.291 \, {\rm mA}} \right) \\ (L_P)_{abs} &= 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{1.091 \, {\rm mW}} \right) \end{split}$$

# 2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dΒμV	1 μW

#### 3 Frequnzverhalten analoger LTI-Systeme



# 3.1 Zusammenhang Frequenzgang - UTF

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differntialfleichung der folgenden Form beschrei-

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s)Zählerpolynom mit konstanten, reelen Koeffizienten

D(s)Nennerpolynom mit konstanten, reelen Koeffizienten

Eingangssignal x(t)

Ausgangssignal y(t)

Die Wurzeln der Gleichung N(s) = 0 ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von D(s) = 0 ergeben n Pole des Systems. Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!

# 3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird H(s) faktorisiert.  $\Rightarrow$  Die UTF H(s) ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K vollständig bestimmt!

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}_{j=1}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiertkomplexe Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reelen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \underbrace{\frac{\prod\limits_{i=1}^{r}(s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2)}{\prod\limits_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}}_{j=1}^{m}(s - z_i)$$

#### Legende:

- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Polein der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

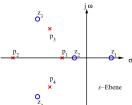
Alternativ kann H(s) mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \underbrace{\frac{\prod\limits_{i=1}^{r}(s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}}s + \omega_{zi}^2)}{\prod\limits_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}}_{\prod\limits_{i=2r+1}^{m}(s - p_j)}$$

Polstellenfrequenzen  $\omega_{zi}$ Polstellengüten

Nullstellenfrequenzen Nullstellengüten

# 3.2 Pol- und Nulstellendiagramme



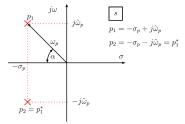
Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot

Pole Kreuze NS Kreise

# 3.3 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

#### Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



 $(s - p_1) \cdot (s - p_2) = s^2 + 2\sigma_p s + (\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2)$ 

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}$$

$$\omega_p = 1$$

Polfrequenz → Entspricht Abstand des Pols vom Ursprun  $\omega_n$ Polgüte

 $\sigma_p = \omega_p$  $\sigma_p = 0$ 

Doppelpol auf neg. reeller Achse  $\Rightarrow q_p = \frac{1}{2}$ Polpar auf imaginärer Achse  $\Rightarrow q_p = \infty$ 

$$\Rightarrow a_n = \infty$$

#### 3.3.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

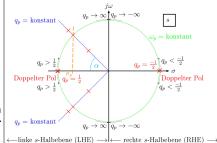
$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \le \frac{1}{2}$$

- $\rightarrow$  Für einzelne (reelle) Pole ist ist die Güte  $q_p$  nicht definiert
- $\rightarrow$  Die Polfrequenz  $\omega_p$  entspricht dem Abstand zum Ursprung

#### **Identische Werte** $\sigma_{p1}=\sigma_{p2}$

$$q_p = \frac{1}{2}$$

# 3.3.2 Verallgemeinerung des Beispiels



#### Hinweise

- · Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen