

Signale und Systeme 2

FS 24 – Prof. Dr. Heinz Mathis

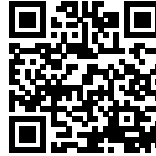
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20250527

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

1 LTI-Systeme (S. 171)	2	8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)	7
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2	8.1 Vorteile der Zustandsraumdarstellung (S. 253-254)	7
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)	7
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2	8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)	7
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2	8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)	7
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2	8.5 ZRD mit Matlab	7
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2	8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)	7
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2	8.7 Matrizen diagonalisieren	8
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3	8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren	8
		8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)	8
2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel	3	8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)	8
2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)	3	8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)	9
2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)	3	8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)	9
2.3 Rechenregeln mit Dezibel	3	8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)	9
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3	8.14 Steuerbarkeit (S. 277)	9
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel \leftrightarrow Faktor	3	8.15 Ausgangssteuerbarkeit (S. 280-281)	9
2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3	8.16 Beobachtbarkeit (S. 278)	9
		8.17 Standardformen der ZRD (S. 267)	10
3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme	3	9 Filter	10
3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4	9.1 Grundtypen (S. 291)	10
3.2 Pol-/Nullstellendiagramme (S. 212)	4	9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)	10
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol-/Nullstellendiagramm	4	9.3 Approximation im Frequenzbereich	10
3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4	9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)	11
3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4	9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$	11
3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/Nullstellendiagramm	4	9.6 Standard-Filtertypen – Überblick	11
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	5	9.7 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen	11
3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)	5	9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen	11
3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	5	9.9 Nomogramme (S. 393)	11
		9.10 LC-Filter: Entnormierung der Komponenten	11
4 Bodediagramm (S. 222)	5	10 Filter-Umwandlungen mittels Frequenztransformation	11
4.1 Bodediagramme mit Matlab	5	10.1 Transformation: Tiefpass – Hochpass (S. 344)	11
4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)	5	10.2 Transformation: Tiefpass – Bandpass (S. 348)	12
4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)	6	10.3 Transformation: Tiefpass – Bandsperre (S. 357)	12
5 Stabilität im Bodediagramm	6	11 Filter-Approximationen im Detail	12
5.1 Amplitudenrand und Phasenrand	6	11.1 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)	12
5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm	6	11.2 Approximation nach Butterworth (S. 303)	12
		11.3 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)	13
6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)	6	11.4 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)	13
6.1 Nyquistdiagramme mit Matlab	6	11.5 Approximation nach Cauer (S. 322)	13
		11.6 Approximation nach Bessel (S. 328)	14
7 Stabilität im Nyquist-Diagramm	6	12 Anhang	14
7.1 Offener und geschlossener Regelkreis	6	12.1 Übertragungsfunktionen verschiedener Filtertypen	14
7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	6	12.2 Ableitungsregeln	14
7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)	6	12.3 Ableitungs-Tabelle	14
7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm	6		

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Größen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort – Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

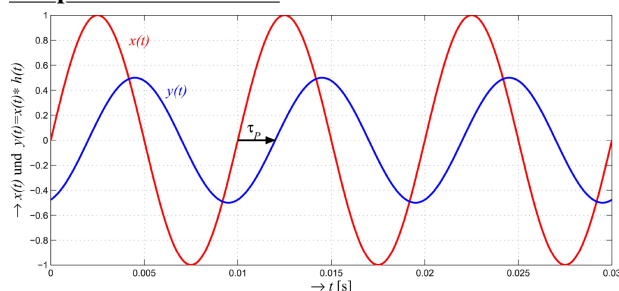
Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $1 > k \geq 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)$$

1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen: $\text{THD} \approx k$ allgemein: $\text{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j\omega = 0) = Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$h(-\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$H^*(j\omega)$

$\varphi_{xx}(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$\Phi_{xx}(j\omega)$

$h(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$H(j\omega)$

$h(\tau) * h(-\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$|H(j\omega)|^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$\varphi_{yy}(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$\Phi_{yy}(j\omega)$

AKF

PSD

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. \Rightarrow Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor \Leftrightarrow Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren \Rightarrow Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren \Rightarrow Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ($U_2 > U_1$) \Rightarrow positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ($U_2 < U_1$) \Rightarrow negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$T_{U_{tot}}$

$=$

$\frac{U_2}{U_1}$

\cdot

$\frac{U_3}{U_2}$

\cdot

$\frac{U_4}{U_3}$

\cdot

$\frac{U_5}{U_4}$

$=$

$\frac{U_5}{U_1}$

$=$

$\frac{10}{1}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{10}{1}$

$=$

50

$a_{U_{tot}}$

$=$

-20dB

$+$

3dB

$+$

3dB

$+$

-20dB

$=$

-34dB

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = 20\text{ dB} - 3\text{ dB} - 3\text{ dB} + 20\text{ dB} = 34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel \Leftrightarrow Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 - 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 - 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 - 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 - 10 = 5 - 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 - 3 - 3 - 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
-1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösse (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right) \qquad (L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right)$$

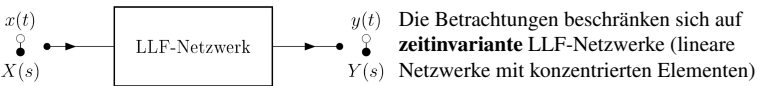
$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \qquad (L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right)$$

$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \qquad (L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{1\text{ mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μV

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differentialgleichung der folgenden Form beschreiben:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$	Zählerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$D(s)$	Nennerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$X(s)$	Eingangssignal im Frequenzbereich
$Y(s)$	Ausgangssignal im Frequenzbereich

Die Wurzeln der Gleichung $N(s) = 0$ ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von $D(s) = 0$ ergeben n Pole des Systems. **Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!**

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird $H(s)$ faktorisiert.
 \Rightarrow Die UTF $H(s)$ ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K **vollständig bestimmt!**

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell sind oder in konjugiert-komplexen Paaren auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^l (s^2 + 2\sigma_{pj}s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2l+1}^n (s - p_j)}$$

Legende:

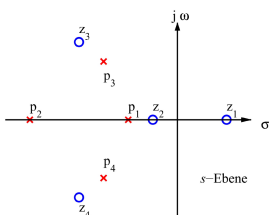
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Pole in der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann $H(s)$ mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^l (s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2l+1}^n (s - p_j)}$$

ω_{pj}	Polstellenfrequenzen	ω_{zi}	Nullstellenfrequenzen
q_{pj}	Polstellengüten	q_{zi}	Nullstellengüten

3.2 Pol-/Nullstellendiagramme (S. 212)



Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl `pzmap` einen solchen Plot

Pole	Kreuze
NS	Kreise

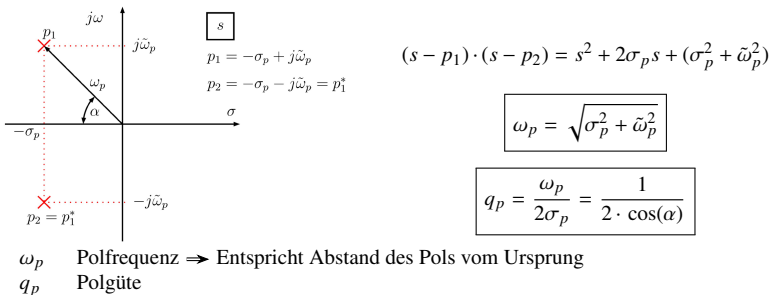
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol-/Nullstellendiagramm

Für **Grenzstabilität** gilt eine **UND-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte. Für **Stabilität** und **Instabilität** gilt eine **ODER-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.

- **Stabil:**
 - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE) $\Rightarrow \sigma < 0$
 - Keine Polstellen vorhanden
- **Asymptotisch stabil:**
 - Polstellen nur in der linken Halbebene (LHE)
- **Grenzstabil:**
 - **Keine** Polstellen in der rechten Halbebene (RHE) $\Rightarrow \sigma > 0$
 - Mindestens eine **einfache Polstelle** auf imaginärer Achse $\Rightarrow \sigma = 0$
 - **Keine doppelten** Polstellen auf der imaginären Achse $\Rightarrow \sigma = 0$
- **Instabil:**
 - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE) $\Rightarrow \sigma > 0$
 - Mindestens eine **mehrfache Polstelle** auf der imaginären Achse $\Rightarrow \sigma = 0$

3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



Grenzfälle

$\sigma_p = \omega_p$	Doppelpol auf neg. reeller Achse	$\Rightarrow q_p = \frac{1}{2}$
$\sigma_p = 0$	Polpaar auf imaginärer Achse	$\Rightarrow q_p = \infty$

3.4.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$$

- \Rightarrow Für einzelne (reelle) Pole ist die Güte q_p nicht definiert.
- \Rightarrow Die Polfrequenz ω_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

$$\sigma_{p1} = \sigma_{p2} \quad |q_p| = \frac{1}{2}$$

3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann $s = j\omega$ eingesetzt werden.

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$H(s)$	Übertragungsfunktion (UTF)	$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$H(j\omega)$	Frequenzgang	$\theta(\omega)$	Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- **Nyquist-Diagramm**
 $H(j\omega)$ wird in Polarkoordinaten mit ω als Parameter aufgetragen
- **Bode-Diagramm**
 $\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |H(s)|$ und $\theta(\omega)$ werden je in Funktion von $\log_{10}(\omega)$ aufgetragen

3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ in die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ als:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2) \dots (j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2) \dots (j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0 - p_1) = |j\omega_0 - p_1| \cdot e^{j\theta_{z1}} = A_{z1} \cdot e^{j\theta_{z1}}$$

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ in den **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ und den **Phasengang** $\theta(\omega)$ separiert werden:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \dots A_{zm} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \dots + \theta_{zm})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \dots A_{pn} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \dots + \theta_{pn})}}$$

Betrag

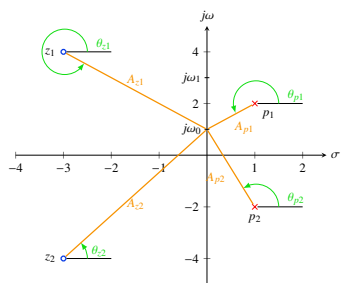
$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}}$$

Phase

$$\theta(\omega_0) = \text{Phase von } K + \sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^n \theta_{pj}$$

Damit Pole / NS komplex konjugiert werden: Diskriminante $D = b^2 - 4ac < 0$

3.6.1 Zusammenhang mit Pol-/Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für eine bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol-/Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen - Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeller Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von -20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen ω konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-/Nullstellendiagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-/Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF $H(S)$ kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

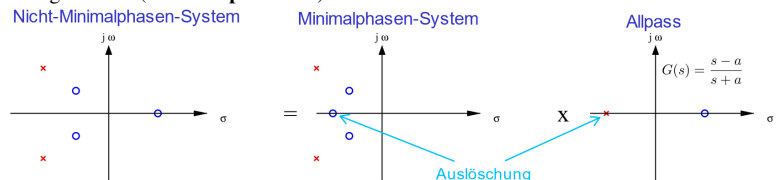
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)** ($\sigma \leq 0$)
 - ⇒ Nullstellen auf der $j\omega$ -Achse sind erlaubt!
 - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm (S. 222)

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-/Nullstellendiagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

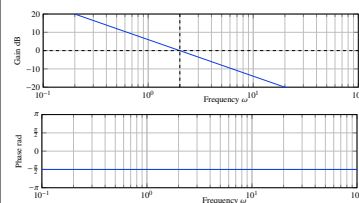
4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

4.2.1 Pol im Ursprung

$$H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$$



Betrag zeichnen

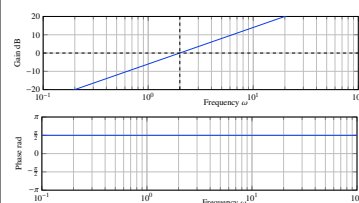
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = \alpha$
3. Gerade mit $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch $-\frac{\pi}{2}$

4.2.2 Nullstelle im Ursprung

$$H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$$



Betrag zeichnen

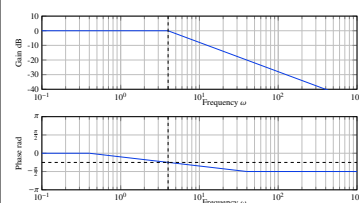
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
3. Gerade mit $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch $+\frac{\pi}{2}$

4.2.3 Reeller Pol

$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$$



Betrag zeichnen

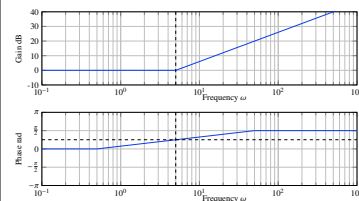
1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$
2. $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = \alpha$

Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega = \frac{\alpha}{10}$
2. $-\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot \alpha$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(-\frac{\pi}{4})$ bei $\omega = \alpha$

4.2.4 Reelle Nullstelle

$$H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$
2. $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = \alpha$

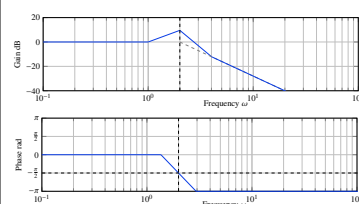
Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega = \frac{\alpha}{10}$
2. $+\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot \alpha$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(+\frac{\pi}{4})$ bei $\omega = \alpha$

4.2.5 Konjugiert-komplexe Pole

$$\text{Voraussetzung: } |q_p| > \frac{1}{2}$$

$$H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_p}{2}$
2. $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_p
⇒ stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_p$
3. Maximalwert = $20 \cdot \log_{10}(q_p)$ bei ω_p
4. Gerade von $\omega = \frac{\omega_p}{2}$ zu Maximalwert
5. Gerade von Maximalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_p$

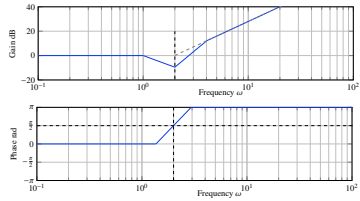
Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10 \cdot 2^{1/2q_p}}$
2. $-\pi$ ab $\omega > \omega_p \cdot 10 \cdot \frac{1}{2^{1/2q_p}}$
3. Gerade zwischen 0 und π Geraden
4. $(-\frac{\pi}{2})$ bei $\omega = \omega_p$

4.2.6 Konjugiert-komplexe Nullstellen

Voraussetzung: $|q_z| > \frac{1}{2}$

$$H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$$



Betrag zeichnen

- 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_z}{2}$
- +40 $\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_z
 \Rightarrow stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_z$
- Minimalwert = $-20 \cdot \log_{10}(q_z)$ bei ω_z
- Gerade von $\omega = \frac{\omega_z}{2}$ zu Minimalwert
- Gerade von Minimalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_z$

Phase zeichnen

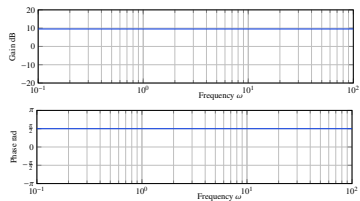
- 0 bis $\omega < \frac{\omega_z}{10 \cdot 2q_z}$
- + π ab $\omega > \omega_z \cdot 10 \cdot 2q_z$
- Gerade zwischen 0 und $-\pi$ Geraden
- ($\frac{\pi}{2}$ bei $\omega = \omega_z$)

Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, S. 235

q_p	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{20q_p}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{-\frac{1}{20q_p}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{i\beta} = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$
 - Betrag = $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
 - Phase = $\beta = \text{const}$



4.2.8 Weitere Bemerkungen

- Inverser Frequenzgang:**
 - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
 - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
 - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am größten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

$$\text{UTF Tiefpass 2. Ordnung: } H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$$

$$\text{Frequenz beim Maximum: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$$

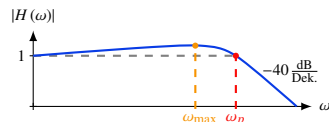
$$\text{Höhe des Maximums: } |H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$$

\Rightarrow Es gilt: $\omega_{\max} \leq \omega_p$

4.3.1 Spezialfall $q = 1$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

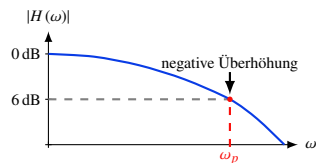
$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$$



4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C}$$

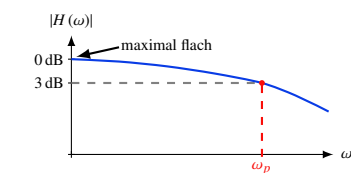
$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \infty$$



4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = 0$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$$



5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis $H(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei $s = 0$), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn $H(j\omega)$ für die **Durchgangsfrequenz** ω_D bei der die Amplitude $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0$ dB ist, und eine Phase $> -\pi$ hat.
 \Rightarrow Amplitudenrand und Phasenrand müssen > 0 sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

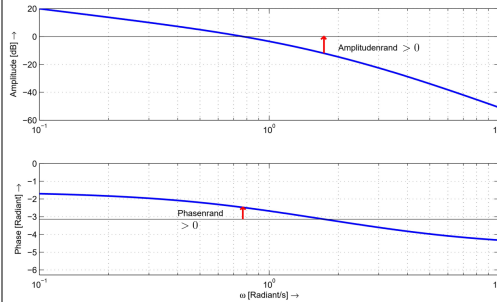
- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**

- Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Phase gleich $-\pi$ bzw. -180° ist.

• Phasenrand (Phasenreserve)

- Abstand des Phasengangs zur $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzgangs in Abhängigkeit der Frequenz f (aufsteigende Werte von f) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.

6.1 Nyquistdiagramme mit Matlab

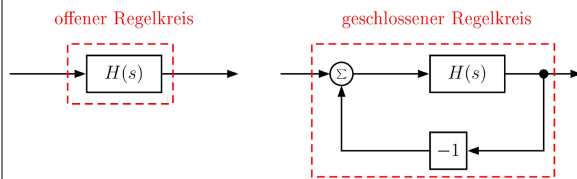
```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve** $H(s)$ (**offener Regelkreis**) einen Aussage über die **Stabilität** des **geschlossenen Regelkreises** zu machen.

Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



$$H_{\text{geschlossen}}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

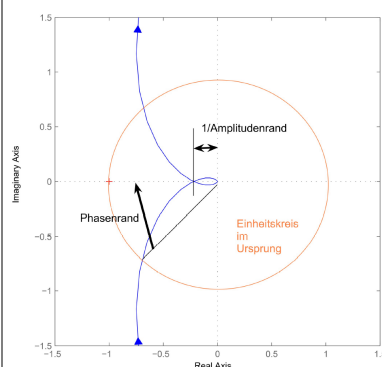
Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt $(-1 + j0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern 'links liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.

- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Frequenz, bei welcher die **negative** reelle Achse geschnitten wird: ω_π
 - Bei ω_π : $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$ = Abstand zum Ursprung
- Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Frequenz, bei welcher Eintritt in den Einheitskreis erfolgt: ω_D
 - Bei ω_D : Winkel bis zu 180°

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt $(-1 + j0)$ 'links liegen gelassen' wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt.

Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Grundidee: Differentialgleichung n . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

8.1 Vorteile der Zustandsraumdarstellung (S. 253-254)

- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können \Rightarrow Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**
 - in der Elektrotechnik L und C
- Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)\end{aligned}$$

$\underline{u}(t)$ Eingangsvektor (m Zeilen)
 $\underline{x}(t)$ Zustandsvektor (n Zeilen)
 $\underline{y}(t)$ Ausgangsvektor (k Zeilen)

- obere Gleichung: **Zustandsgleichung**
- untere Gleichung: **Ausgangsgleichung**
- A Systemmatrix** ($n \times n$ -Matrix)
 Sie bestimmt das Verhalten des **ungestörten Systems** ($\underline{u}(t) = 0$) und bestimmt z.B. die innere Stabilität des gesamten Systems.
- B Eingangsmatrix (Steuermatrix)** ($n \times m$ -Matrix)
 Sie bestimmt die Wirkung der **Steuergrößen** $\underline{u}(t)$ auf die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$
- C Ausgangsmatrix (Beobachtungsmatrix)** ($k \times n$ -Matrix)
 Sie kennzeichnet die Abhängigkeit des **Zustandes** $\underline{x}(t)$ von der beobachtbaren Ausgangsgröße $\underline{y}(t)$
- D Durchgangsmatrix** ($k \times m$ -Matrix)
 Sie bestimmt die unmittelbare Wirkung der Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ auf den Ausgang $\underline{y}(t)$

Beispiel: ZDR aus Differentialgleichung aufstellen

Gegeben ist folgende DGL:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t)$$

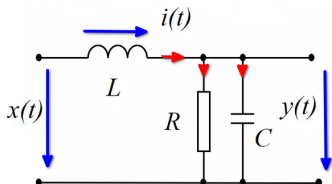
Die Differentialgleichung kann in zwei Gleichungen 1. Ordnung zerlegt werden: $x_2 = y$ und $x_1 = \dot{y}$. Somit ergibt sich folgendes dynamisches Verhalten der Zustände:

$$\dot{x}_2 = \dot{y} = x_1, \quad \dot{x}_1 = \ddot{y} = u - \dot{y} - \frac{1}{2}y = u - x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

In Matrixschreibweise ergibt sich also die ZDR:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität: $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

Maschen: $L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + y(t) = x(t)$

Knoten: $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \left(i(\tau) - \frac{y(\tau)}{R} \right) d\tau = y(t)$

$$L \cdot i'(t) + y(t) = x(t)$$

$$i(t) - \frac{y}{R} = C \cdot y'(t)$$

$$i'(t) = -\frac{1}{L}y(t) + \frac{1}{L}x(t)$$

$$y'(t) = \frac{1}{C}i(t) - \frac{1}{RC}y(t)$$

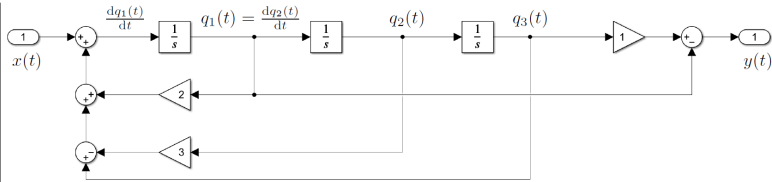
Zustände: $i(t), y(t)$
 Eingang: $x(t)$
 Ausgang: $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} i'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t) \\ \tilde{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot u(t)\end{aligned}$$

Beispiel: ZRD aus Signalflussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen A, B, C und D gefunden werden.

Zustandsvektor: $\underline{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$ und dessen Ableitung $\dot{\underline{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix}$

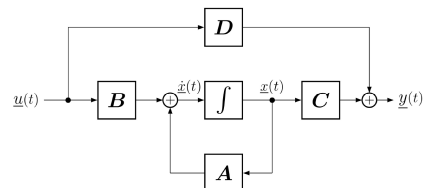


$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot u(t)\end{aligned}$$

8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)

$$\begin{aligned}s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) &= \underline{C}\underline{X}(s) + \underline{D}\underline{U}(s)\end{aligned}$$

$\underline{U}(s)$ Eingangsvektor (m Zeilen)
 $\underline{X}(s)$ Zustandsvektor (n Zeilen)
 $\underline{Y}(s)$ Ausgangsvektor (k Zeilen)
 \underline{I} Einheitsmatrix
 $\underline{H}(s)$ Übertragungsmatrix ($k \times m$)



$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Mit Anfangsbedingungen $\underline{x}(0) = 0$ ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Hinweis: Die Übertragungsmatrix $\underline{H}(s)$ lässt sich auch aus den diagonalisierten Matrizen berechnen!

$$\underline{H}(s) = \underline{C} \text{diag}(s\underline{I} - \underline{A}_{\text{diag}})^{-1} \underline{B}_{\text{diag}} + \underline{D}_{\text{diag}}$$

Hinweis: Aus einem Signalflussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

8.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

Übertragungsmatrix

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matrixform

$$\underline{Y}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{U}(s)$$

- $\underline{H}(s)$ hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix \underline{D}

Übertragungsfunktion

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen** $x(t)$. Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

8.5 ZRD mit Matlab

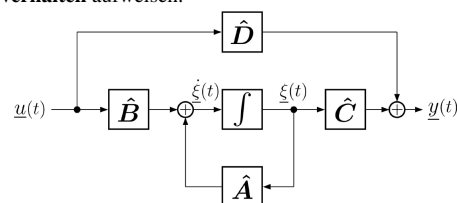
$$H(s) = \frac{b_1 s^i + b_{i-1} s^{i-1} \dots b_1 s^1 + b_0}{a_i s^i + a_{i-1} s^{i-1} \dots a_1 s^1 + a_0}$$

- `[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)` % $\underline{H}(s)$ aus Matrizen berechnen
- `(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)` % Matrizen aus $\underline{H}(s)$ berechnen

8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix** \underline{T} ($n \times n$ -Matrix, nicht singulär, $\underline{T}\underline{T}^{-1} = \underline{I} = \underline{T}^{-1}\underline{T}$) kann man **verschiedenste Zustandsgrößen** und **Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\xi}}(t) &= \underbrace{\underline{T}\underline{A}\underline{T}^{-1}}_{\hat{A}} \underline{\xi}(t) + \underbrace{\underline{T}\underline{B}}_{\hat{B}} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underbrace{\underline{C}\underline{T}^{-1}}_{\hat{C}} \underline{\xi}(t) + \underbrace{\underline{D}}_{\hat{D}} \underline{u}(t)\end{aligned}$$



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 8.2 bezüglich $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$. Das bedeutet, dass die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$ und $\underline{z}(t)$ **willkürlich** gewählt werden können, solange \mathbf{T} nicht singular ist (Determinante von $\mathbf{T} \neq 0$).

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrößen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

8.7 Matrizen diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix** \mathbf{A} diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ wird dann üblicherweise \mathbf{A}_{diag} verwendet.

λ_i	Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}
\vec{v}_i	Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A}
\mathbf{V}	Matrix mit Eigenvektoren von \mathbf{A}
$\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda}$	Diagonalisierte Matrix \mathbf{A} mit Eigenwerten λ_i auf Diagonale
\mathbf{T}	Transformationsmatrix

$$\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$
$$\mathbf{C}_{\text{diag}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$$

$$\mathbf{B}_{\text{diag}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$
$$\mathbf{D}_{\text{diag}} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$$
$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{V}$$

8.7.1 Vorgehen Matrix A diagonalisieren

- Ansatz: $\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen: $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow$ Eigenwerte λ_i
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren \vec{v}_i gefunden werden:
 - Eigenwert λ_i in Gleichungssystem $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ einsetzen
 - Einen Wert von $\vec{v}_i = 1$ wählen und Eigenvektor \vec{v}_i als Spaltenvektor schreiben
- Matrix \mathbf{V} aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix $\mathbf{\Lambda}$ 'zusammenbauen', indem man Eigenwerte λ_i auf Diagonale schreibt

Beispiel: Matrix A diagonalisieren (S. 258)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 7 \\ -1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) - 7 \cdot (-1) = 0$$

\Rightarrow Mitternachtsformel $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$

Form: $a\lambda^2 + b\lambda + c$

Ersten Eigenwert $\lambda_1 = -1$ in $(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$ einsetzen

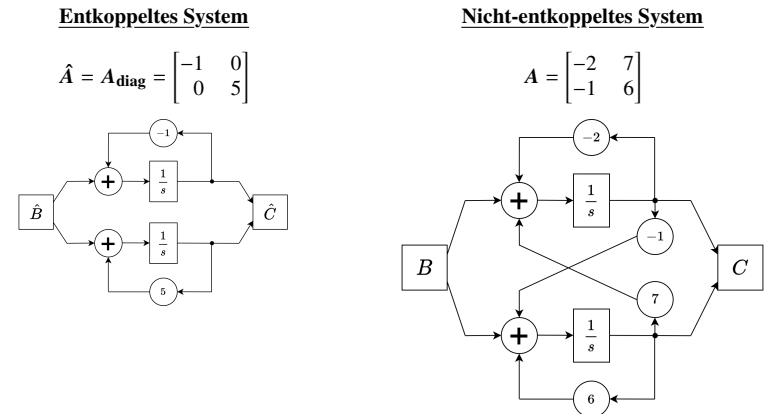
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$

Wähle $v_{21} = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

Gleiches Vorgehen für zweiten Eigenvektor \vec{v}_2

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{V} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

8.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System



8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A} \underline{x}(t) + \mathbf{B} \underline{u}(t)$ ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur **einem Zustand** würde man den Ansatz $\underline{x}(t) = e^{at}$ wählen. Da im Allgemeinen Systeme mit **mehreren Zuständen** betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Der Ansatz ist beschrieben als **Taylor-Reihe**.

Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} \Phi(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \underline{u}(\tau) \, d\tau + \mathbf{D} \underline{u}(t)$$

Hinweis: $\Phi(t) = e^{At}$ heisst **Fundamentalmatrix**.

8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

$$e^{At} = \Phi(t)$$

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im **Zeitbereich** zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische ($n \times n$) Fundamentalmatrix zu bestimmen.

8.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1})\}$$

Beispiel: Inverse Laplace-Transformation

Mit der **Systemmatrix** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ergibt sich $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$

Somit ist $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \circ \bullet \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \Phi(t)$

8.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von $\Phi(t) = e^{At}$

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathbf{V} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\Phi_{\text{diag}}(t)} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

Wenn $\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$ ist und λ_i die Eigenwerte von \mathbf{A} sind.

8.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

\Rightarrow TODO

8.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

Der Satz von Caley-Hamilton besagt, dass jede quadratische Matrix \mathbf{A} ihr eigenes charakteristisches Polynom erfüllt. Das bedeutet, wenn man das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ einer Matrix \mathbf{A} berechnet und dann die Matrix \mathbf{A} selbst einsetzt, ergibt sich die Nullmatrix.

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n = 0$$

Der Satz von Caley-Hamilton besagt nun, dass wenn man anstelle von λ die Matrix \mathbf{A} selbst einsetzt, die folgende Gleichung immer noch gilt:

$$p(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A}^2 + \dots + a_n \mathbf{A}^n = 0$$

Beispiel: Satz von Cayley-Hamilton

Gegeben sei die 2×2 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

char. Polynom:
 $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Alle Terme können nun eingesetzt werden:

$$\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zusammenhang zwischen Satz von Cayley-Hamilton und der $\Phi(t)$

Das Ziel ist es, wie bereits im vorangegangenen Beispiel, die **Fundamentalmatrix** e^{At} zu bestimmen. Dies lässt sich mithilfe der folgenden Taylor-Reihe ausdrücken:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Um diese Reihe zu vereinfachen, wird der **Satz von Cayley-Hamilton** eingesetzt. Dieser besagt, dass jede quadratische Matrix \mathbf{A}^k ihr eigenes charakteristisches Polynom erfüllt. Dadurch können alle höheren Potenzen \mathbf{A}^k mit $k \geq n$ durch eine Linearkombination der Matrizen $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ dargestellt werden. Somit ergibt sich eine endliche Darstellung

der Matrixexponentialfunktion:

$$e^{At} = b_0(t)\mathbf{I} + b_1(t)\mathbf{A} + b_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + b_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1}$$

Mit dem Zusammenhang der Eigenwerte ergibt sich schliesslich:

$$e^{\lambda_i t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_i + b_2(t)\lambda_i^2 + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

Zusammenfassung für 2x2-Matrix:

Für eine **2x2-Matrix** müssen also die **Eigenwerte** bestimmt werden und dann folgendes Gleichungssystem nach $b_0(t)$ und $b_1(t)$ aufgelöst werden:

$$e^{\lambda_{0t}} = b_0(t) + b_1(t) \cdot \lambda_0 e^{\lambda_{1t}} = b_0(t) + b_1(t) \cdot \lambda_1$$

Die **Fundamentalmatrix** $\Phi(t)$ kann dann über die folgende Gleichung einfach berechnet werden:

$$\Phi(t) = e^{At} = b_0(t) \cdot \mathbf{I} + b_1(t) \cdot \mathbf{A}$$

Beispiel: Bestimmung von $\Phi(t)$ mittels Satz von Cayley-Hamilton

Gegeben sei die Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
 char. Polynom:
$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

Somit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$. Eingesetzt in obiges System ergibt:

$$e^{-1t} = b_0(t) - b_1(t) * e^{-2t} = b_0(t) - 2b_1(t)$$

woraus sich für $b_0(t)$ und $b_1(t)$ folgende Funktionen ergeben:

$$b_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \qquad b_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Eingesetzt in:

$$\Phi(t) = e^{At} = b_0(t) \cdot I + b_1(t) \cdot A$$

ergibt sich die Fundamentalmatrix:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} + e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8.10.5 Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

Die Matrix A sei definiert als eine Dreiecksmatrix mit Parametern a und c

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

Die Potenz der Matrix wird berechnet aus

$$A^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} c^l & c^k \end{bmatrix}$$

Beispiel: Definition der Reihenentwicklung

Für $a = 1$ und $c = -2$ ergibt sich für A^k

$$A^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^k - (-2)^k & (-2)^k \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Fundamentalmatrix ist mittels Anwendung der Taylor-Reihe somit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\Phi(t) = e^{At}$

$\Phi(0) = I$	$e^{A \cdot 0} = I$
$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$	$(e^{A \cdot t})^{-1} = e^{-A \cdot t}$
$\Phi^k(t) = \Phi(kt)$	$(e^{A \cdot t})^k = e^{A \cdot k \cdot t}$
$\Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2)$	$e^{A \cdot t_1} \cdot e^{A \cdot t_2} = e^{A(t_1+t_2)}$
$\Phi(t_2 - t_1) \cdot \Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$	$e^{A(t_2-t_1)} \cdot e^{A(t_1-t_0)} = e^{A(t_2-t_0)}$

Hinweis: $\Phi(t)$ ist stets invertierbar

8.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

```
1 syms t % t als symbolischer Wert
2 A = [0 6; 1 5]; % Matrix A
3 expm(A*t) % Fundamentalmatrix
```

8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (s. 263)

Die Impulsantwort $h(t)$ eines SISO-Systems ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= C\Phi(t)B * u(t) + Du(t) = h(t) * u(t) \\ h(t) &= C\Phi(t)B + D\delta(t) \end{aligned}$$

8.12 Stabilität von ZRDs (s. 275)

Ein LTI-System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben).

Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle **Eigenwerte** der **Systemmatrix** A einen **negativen Realteil** besitzen, ist das System **asymptotisch stabil**.

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \rightarrow \forall \lambda \quad \text{Re}\{\lambda\} < 0$$

Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht! Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet **nicht**, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix A des Systems einen negativen Realteil besitzen.

⇒ Pol-/Nullstellenkürzungen

8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (s. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist **beobachtbar**, wenn wir, gegeben das Eingangssignal $\underline{u}(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$, über eine endliche Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ die Zustände $\underline{x}(t)$ eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist **nicht beobachtbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die **keinen** Einfluss auf diegänge $y(t)$ haben.
⇒ Man kann aus dem Verhalten von $\underline{y}(t)$ **nicht** auf die Zustände $\underline{x}(t)$ schliessen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist **steuerbar**, wenn es für jeden Anfangszustand \underline{x}_0 und jeden Endzustand \underline{x}_1 eine Steuerfunktion $\underline{u}(t)$ gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ von \underline{x}_0 zu \underline{x}_1 bringt, d.h. $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$.
- Ein System ist **nicht steuerbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die nicht von den Eingängen $\underline{u}(t)$ beeinflusst werden.

Bemerkungen:

- System (A, B, C, D) ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir $\underline{x}(0)$ bestimmen können

8.14 Steuerbarkeit (s. 277)

Gemäss der äquivalenten ZRD (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV$, $\hat{B} = V^{-1}B$, $\hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein SISO-System mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{B} = V^{-1}B$ **ungleich Null** sind.

Ein MIMO-System ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Zeile** von $\hat{B} = V^{-1}B$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig steuerbar**, wenn

- Der **Rang** der Steuerbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Steuerbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$		Dimension: $n \times n \cdot m$	
A	Systemmatrix ($n \times n$)	n	Zustände
B	Eingangsmatrix ($n \times m$)	m	Eingänge

Steuerbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 ctrb(A, B); % Steuerbarkeitsmatrix
2 rank(ctrb(A, B)) % Rang der Steuerbarkeitsmatrix
```

8.15 Ausgangssteuerbarkeit (s. 280-281)

Vielfach ist nicht nur die Beeinflussung der **Zustände** beim Entwurf eines Regelsystems gewünscht, sondern die Steuerung der **Ausgänge** $\underline{y}(t)$. Die **vollständige Steuerbarkeit** ist weder hinreichend noch notwendig für die **Ausgangssteuerbarkeit**. Die Ausgangssteuerbarkeit ist definiert als:

Ein **LTI-System** ist **vollständig ausgangssteuerbar**, wenn es eine **Steuerfunktion** $\underline{u}(t)$ gibt, welche die **Ausgänge** $\underline{y}(t)$ innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in einen **Endwert** $\underline{y}(t_1)$ bringt.

8.15.1 Ausgangssteuerbarkeitsmatrix

Es lässt sich zeigen, dass ein System nur dann vollständig ausgangssteuerbar ist, wenn die Ausgangssteuerbarkeitsmatrix $Q_{\text{Ausgangssteuerbarkeit}}$ ($k \times (n + 1) \cdot m$ -Matrix) den Rang k ($k :=$ Ausgänge) besitzt, wobei gilt:

$$Q_{\text{Ausgangssteuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} C & CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}BD \end{bmatrix}$$

8.16 Beobachtbarkeit (s. 278)

Gemäss der äquivalenten ZRD (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV$, $\hat{B} = V^{-1}B$, $\hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein SISO-System mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{C} = CV$ **ungleich Null** sind.

Ein MIMO-System ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Spalte** von $\hat{C} = CV$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.16.1 Beobachtbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig beobachtbar**, wenn

- Der **Rang** der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Beobachtbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$	Dimension: $k \cdot n \times n$
A	Systemmatrix ($n \times n$)
C	Beobachtungsmatrix ($k \times m$)
n	Zustände
m	Eingänge
k	Ausgänge

Beobachtbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 obsv(A, C);           % Beobachtbarkeitsmatrix
2 rank(obsv(A, C))      % Rang der Beobachtbarkeitsmatrix
```

8.17 Standardformen der ZRD (s. 267)

Die allgemeine Differentialgleichung von SISO-Systemen der Form

a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u

ergibt mit der Laplace-Transformation und mit m ≤ n

H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}

Diese UTF H(s) kann mit verschiedenen ZRDs (Normalformen) abgebildet werden.
Wichtig: Für alle folgenden Normalformen werden die Zustände x_i im blockdiagramm unmittelbar nach den Integratoren verwendet.

8.17.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

Die Regelungsnormalform kann direkt aus der UTF H(s) aufgestellt werden.
Für m = n sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

Matrix representation of the control normal form for m=n, showing state equations and output equation.

In den meisten Fällen ist m < n und die Ausgangsgleichung vereinfacht sich zu:

Matrix representation of the simplified output equation for m < n.

8.17.2 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

Ein System, welches in Beobachtungsnormalform dargestellt werden kann, ist beobachtbar! Für m = n sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

Matrix representation of the observation normal form for m=n, showing state equations and output equation.

In den meisten Fällen ist m < n und die Zustandsgleichung vereinfacht sich zu:

Matrix representation of the simplified state equation for m < n.

8.17.3 Regelungsnormalform ↔ Beobachtungsnormalform

Die beiden Formen sind dual und weisen folgende Zusammenhänge auf (Transposition):
• A ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt
• B und C sind vertauscht
• D bleibt gleich

8.17.4 Jordan-Normalform (S. 271-273)

Die UTF wird mittels einer Partialbruchzerlegung dargestellt. Die Parameter der Partialbruchzerlegung können dann direkt in die Matrix A = A_diag eingetragen werden.

H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = b_n + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}

Die Diagonalform für einfache, reelle Pole mit m = n ist:

Matrix representation of the diagonal form for simple real poles with m=n.

Hinweis: Mit m < n vereinfacht sich die Ausgangsgleichung zu:

Matrix representation of the simplified output equation for m < n in Jordan normal form.

8.17.5 Diagonalform (S. 271-273)

Eine weitere Darstellungsform der Diagonalform ergibt sich mittels Transposition der Jordan-Normalform:
• A ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt (ergibt wiederum A)
• B und C sind vertauscht
• D bleibt gleich

9 Filter

9.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich frequenzselektive, lineare Netzwerke, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf frequenzselektiven Grundtypen sind:
• Tiefpass (TP) • Bandpass (BP) • Allpass
• Hochpass (HP) • Bandsperre, Notch (BS)

9.2 Frequenzgang H(jω) – Übertragungsfunktion H(s) (S. 294)

Für den Frequenzgang H(jω) und die Übertragungsfunktion H(s) gelten die folgenden Zusammenhänge

|H(jω)|^2 = H(jω) · H*(jω) = H(jω) · H(-jω) = H(s) · H(-s) |_{s=jω}
H(s) · H(-s) = |H(jω)|^2 |_{ω^2=-s^2}

Hinweis: |H(jω)|^2 ist immer eine Funktion in ω^2, da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis jeweils nur H(s) interessant ist, muss H(s) aus |H(jω)|^2 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

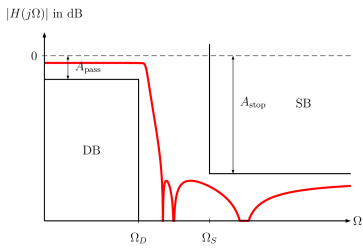
\frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N(-s)}{D(-s)} = |H(jω)|^2 |_{ω^2=-s^2}

Hinweis: D(s) muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

9.3 Approximation im Frequenzbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet. Zuerst soll der Amplitudengang |H(jω)| im Frequenzbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

9.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



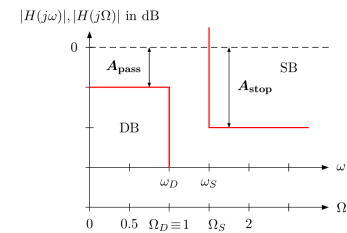
Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im Toleranzschema beschrieben. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.
• Im Durchlassbereich (DB) bestimmt der Stempel die maximal zulässige Dämpfung A_max
• Im Sperrbereich (SB) bestimmt die Matritze die minimal nötige Dämpfung A_min

A_{dB}(ω) = 10 · log(1/|H(ω)|^2) = -20 · log(|H(ω)|) ⇒ Dämpfung!

9.3.2 Frequenznormierung

Um möglichst kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- **BP / BS:** Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$

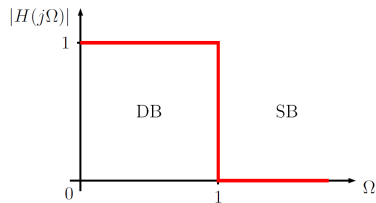


Normierte Grössen

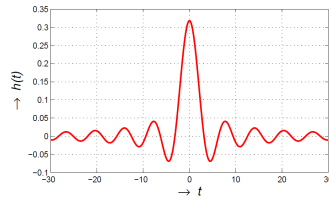
$$S = \frac{s}{\omega_r} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_r} \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}$$

Entnormierung: Jeweils S in der normierten Funktion durch $\frac{s}{\omega_r}$ ersetzen.

9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



- DB: keine Dämpfung
- SB: kein Ausgangssignal



- Akausale Impulsantwort $h(t)$

⇒ Ideales Tiefpass ist physikalisch nicht realisierbar. ⇒ **Approximationen**

9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt für die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

Durchlassbereich (DB) $0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$ für $0 \leq \Omega < 1$ ⇒ $|H(j\Omega)|^2 \approx 1$

Sperrbereich (SB) $K(\Omega^2) \gg 1$ für $\Omega > 1$ ⇒ $|H(j\Omega)|^2 \approx 0$

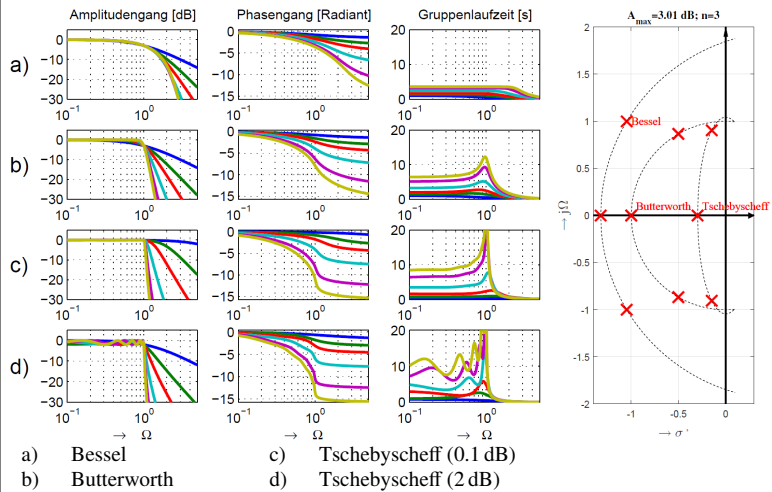
9.6 Standard-Filtertypen – Überblick

- **Kritisch-gedämpfte Filter**
 - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
 - + Kein Überspringen bei Impuls- und Sprungantwort
 - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
 - Kaskadierung von n wirkungsfreien, identischen Filtern 1. Ordnung
 - Bei $\Omega = 1$ ⇒ Dämpfung von 3 dB
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Allpolfilter: n Pole am gleichen Ort in der LHE
- **Butterworth**
 - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
 - + Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
 - Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
 - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
 - Bei $\Omega = 1$ ⇒ Dämpfung von 3 dB
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Allpolfilter: Pole auf Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{n}$
- **Tschebyscheff-I**
 - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
 - **Rippel im Durchlassbereich** (abhängig von Ordnung n)
 - Keine konstante Gruppenlaufzeit (wellig)
 - Bei $\Omega = 1$ ⇒ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor e
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Allpolfilter: Pole auf einer Ellipse
- **Tschebyscheff-II**
 - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
 - **Rippel im Sperrbereich** (abhängig von Ordnung n)
 - Relativ konstante Gruppenlaufzeit
 - Bei $\Omega = 1$ ⇒ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor e
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Kein Allpolfilter
- **Cauer**
 - + Steilster Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
 - **Rippel in Durchlassbereich und Sperrbereich** (abhängig von Ordnung n)
 - **Kombination aus Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II**
 - Kein Allpolfilter
- **Bessel**
 - + **Flachster Übergang** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
 - + Konstante Gruppenlaufzeit
 - Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
 - Allpolfilter: Pole auf exzentrischen Kreisen in LHE

9.7 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen

	Krit. Gedämpft	Butterworth	Tschebyscheff 1	Tschebyscheff 2	Cauer	Bessel
Allpolfilter	ja	ja	ja	nein	nein	ja
Pol-Lage	reelle Achse <0	Halbkreis LHE	Ellipse LHE	LHE	Ellipse LHE	exzent. Kreis
NS-Lage	-	-	-	$j\omega$ -Achse	$j\omega$ -Achse	-
DB	monoton	monoton maximalflach	wellig konst. Rippel	monoton	wellig konst. Rippel	monoton
SB	streng	monoton	monoton	wellig konst. Rippel	wellig konst. Rippel	monoton
Phasengang	sehr gut	mittel	schlecht	schlecht	wild	bestmöglich

9.7.1 Frequenzgänge / Lage der Pol- und Nullstellen (S. 334)

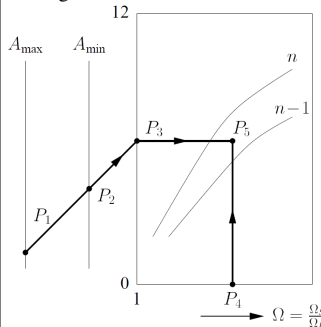


9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen (⇒ 9.6)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen **inkl. Normierung** (⇒ 9.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder **Nomogramm** ⇒ 9.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen (⇒ **Tabelle: Skript S. 397, Anhang 7B**)
5. Implementierung mit LC-Filtern: Topologie wählen (⇒ **Skript S. 409, Anhang 7C**)
6. **Normierte** Bauteilwerte aus entsprechender Tiefpass-Tabelle herauslesen (Anhang 7C)
7. **Falls nicht auf $\omega_r = \omega_{3dB}$ normiert wurde:** Normierte Werte auf Ω_{3dB} korrigieren: ⇒ Division durch **Korrekturfaktor** aus Skript S. 401 Tabelle 7.8
8. Komponenten mittels **Entnormierung** bestimmen (⇒ 9.10)
9. **Entnormierung** der Frequenz (⇒ 9.3.2)
 $\omega_{3dB} = \text{Korrekturfaktor} \cdot \omega_r = \text{Korrekturfaktor} \cdot 2\pi f_r$
10. Frequenztransformation (bzw. Komponenten-Transformation) zu HP, BP oder BS durchführen (⇒ 10)

9.9 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



Benutzung von Nomogrammen

1. P_1 : Verbindung von A_{\max} zu A_{\min}
2. P_2 : Verlängerung von P_1 bis zum 'Diagramm-Rand'
3. P_3 : Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4. P_4 : Bei $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$ vertikale Linie ziehen
5. P_5 : Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve ⇒ Ordnung n der Kurve ablesen

9.10 LC-Filter: Entnormierung der Komponenten

$$L = \frac{L_{\text{norm}}}{\omega_r} \cdot R_r$$

$$C = \frac{C_{\text{norm}}}{\omega_r \cdot R_r}$$

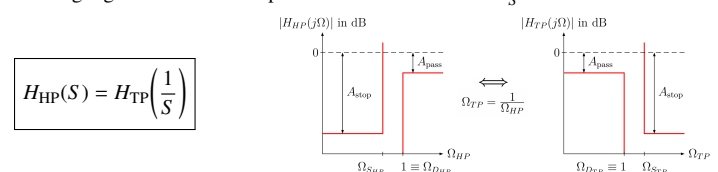
$$R = R_{\text{norm}} \cdot R_r$$

L_{norm} normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C
 C_{norm} normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C
 R_{norm} normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C
 ω_r Frequenz, auf welche normiert wurde (ω_D oder ω_m gemäss 9.3.2)
 R_r Tatsächlicher Wert von R_2 gemäss Topologie Skript S. 409

10 Filter-Umwandlungen mittels Frequenztransformation

10.1 Transformation: Tiefpass – Hochpass (S. 344)

In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle S durch $\frac{1}{S}$ ersetzt

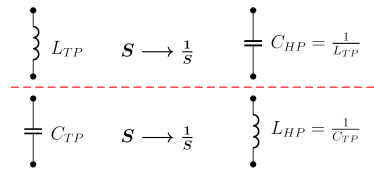


$$H_{HP}(S) = H_{TP}\left(\frac{1}{S}\right)$$

Zwischen allen normierten Frequenzen, im Speziellen den normierten **Eckfrequenzen** der **Sperrbereiche** $\Omega_{S_{TP}}$ und $\Omega_{S_{HP}}$ und **Durchlassbereiche** $\Omega_{D_{TP}}$ und $\Omega_{D_{HP}}$ gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{S_{HP}}} \quad 1 = \Omega_{D_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{D_{HP}}}$$

10.1.1 Bauteiltransformationen



10.1.2 Singularitäten

Pole: $P_{k,HP} = \frac{1}{P_{k,TP}}$
Nullstellen: $Z_{i,HP} = \frac{1}{Z_{i,TP}}$

⇒ Polgüte bleibt erhalten

10.2 Transformation: Tiefpass – Bandpass (s. 348)

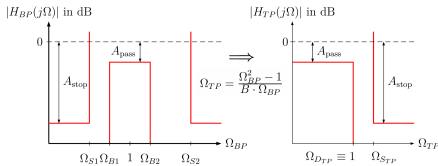
In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle S durch $\frac{S^2+1}{B \cdot S}$ ersetzt, wobei B der normierten Bandbreite entspricht.

Voraussetzung: $\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}}$

Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, muss sie erfüllt werden, indem das Toleranzschema 'strenger' ausgelegt wird.

$$H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S}\right)$$

$$B = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2} - \Omega_{B1}$$

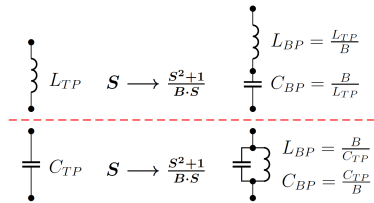


Zwischen allen normierten Frequenzen $\Omega_{S_{TP}}$, Ω_{S1} , Ω_{S2} , Ω_{B1} und Ω_{B2} gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{B} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}} = \frac{\omega_{S2} - \omega_{S1}}{\omega_{B2} - \omega_{B1}} = \frac{f_{S2} - f_{S1}}{f_{B2} - f_{B1}}$$

Hinweis: Die Transformation erhöht die Filterordnung um Faktor 2

10.2.1 Bauteiltransformationen



10.2.2 Singularitäten

⇒ Siehe Skript S. 351-352

10.3 Transformation: Tiefpass – Bandsperre (s. 357)

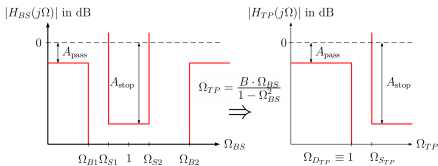
In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle S durch $\frac{B \cdot S}{S^2+1}$ ersetzt, wobei B der normierten Bandbreite entspricht.

Voraussetzung: $\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}}$

Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, muss sie erfüllt werden, indem das Toleranzschema 'strenger' ausgelegt wird.

$$H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{B \cdot S}{S^2 + 1}\right)$$

$$B = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2} - \Omega_{B1}$$

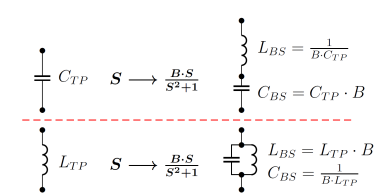


Zwischen allen normierten Frequenzen $\Omega_{S_{TP}}$, Ω_{S1} , Ω_{S2} , Ω_{B1} und Ω_{B2} gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{B}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \frac{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_{S2} - \omega_{S1}} = \frac{f_{B2} - f_{B1}}{f_{S2} - f_{S1}}$$

Hinweis: Die Transformation erhöht die Filterordnung um Faktor 2

10.3.1 Bauteiltransformationen



10.3.2 Singularitäten

⇒ Siehe Skript S.359

11 Filter-Approximationen im Detail

11.1 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (s. 299)

Tiefpassfilter n . Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweils einen **n -fachen Pol** auf der **negativen σ -Achse**.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n}$$

n Ordnung des Filters
 ω_c 3 dB-Punkt jedes der n Teilfilter

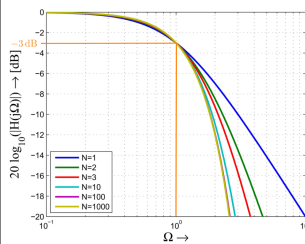
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10n}} - 1}}$$

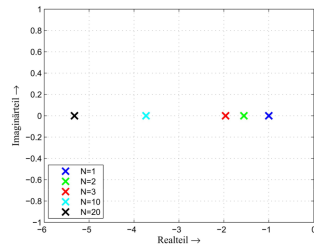
11.1.1 Eigenschaften kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ -Achse ⇒ Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3$ dB Dämpfung
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung näher in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

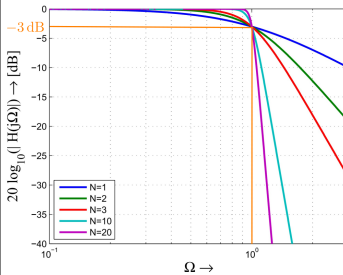
Amplitudengänge



Pol-Lagen



11.2 Approximation nach Butterworth (s. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

11.2.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (s. 303)

- Durchlassbereich**
 - Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
 - Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3$ dB Dämpfung
 - Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Sperrbereich**
 - Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Allgemein**
 - Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit

11.2.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (s. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{D(-s)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ($D(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n$$

Mit dem Ansatz

$$D(s) = \prod_{j=1}^n (s^2 + a_j \cdot s + b_j) \prod_{j=2n+1}^n (s - c_j)$$

wird das Produkt $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

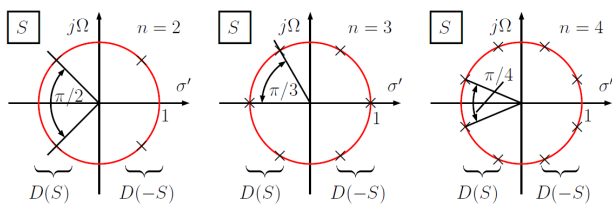
11.2.3 Bestimmung der Pol-Lage (s. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 11.2.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Auflösen der Gleichung nach s kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- Für **Nummerpolynom** $D(s) = \frac{1}{H(s)}$ müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!

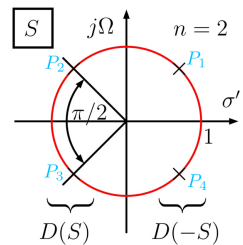


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz: } H(S) \cdot H(-S) = \frac{1}{D(S)} \cdot \frac{1}{H(S)} = \frac{1}{1 + (-S^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(S) \cdot D(-S) = 1 + S^4 \Leftrightarrow S^4 = -1 \Leftrightarrow e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$



Aufgelöst nach S liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene	Linke Halbebene
$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$
$P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$

\Rightarrow Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(s - P_2) \cdot (s - P_3)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion $H(S)$ auch mittels folgendem Ansatz für $D(S)$ und anschließendem Koeffizientenvergleich von $D(S) \cdot D(-S)$ bestimmt werden.

$$\text{Ansatz: } D(S) = S^2 + a_1 S + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } D(S) \cdot D(-S) = S^4 + (2b_1 - a_1^2)S + b_1^2 \stackrel{!}{=} S^4 + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2} \text{ und } b_1 = 1 \Rightarrow S^2 + \sqrt{2}S + 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

11.2.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_D^{2n}) = A_{pass}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_S^{2n}) = A_{stop}$$

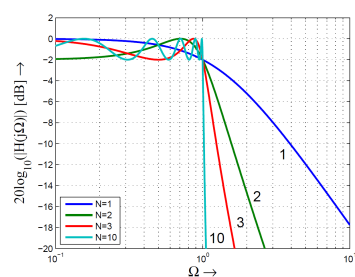
Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}\right)}{2 \cdot \log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

[.] bedeutet 'aufrunden auf ganze Zahl' (ceil()-Funktion)

\Rightarrow Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem **Nomogramm** bestimmt werden.

11.3 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)



Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-I als $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 \cdot C_n^2(\Omega)}}$$

e **Rippelfaktor** (Konstante)
 $C_n(\Omega)$ Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung n

Das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ ist im Durchlassbereich und im Sperrbereich **unterschiedlich definiert!**

$$\text{Durchlassbereich } (|\Omega| \leq 1)$$

$$\text{Sperrbereich } (|\Omega| \geq 1)$$

$$C_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos(\Omega))$$

$$C_n(\Omega) = \cosh(n \cdot \text{arccosh}(\Omega))$$

Für die Ordnung $n \geq 2$ lässt sich das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ mittels Rekursionsformel berechnen

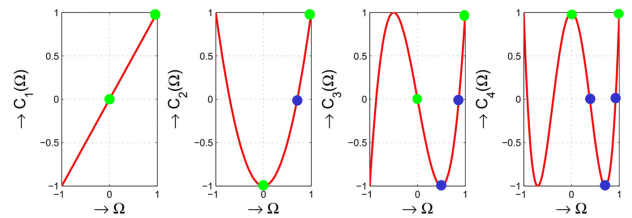
$$C_n(\Omega) = 2\Omega C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega) \quad C_0(\Omega) = 1 \quad C_1(\Omega) = \Omega$$

Zwischen dem Rippelfaktor e und der maximalen Dämpfung A_{max} gilt der Zusammenhang:

$$A_{max} = 10 \cdot \log_{10}(1 + e^2) \Leftrightarrow e = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

11.3.1 Eigenschaften der Tschebyscheff-I-Approximation (S. 311)

Im **Durchlassbereich** schwankt das Tschebyscheff-Polynom in den Grenzen ± 1 . Im **Sperrbereich** nimmt C_n monoton mit Ω zu.



• Durchlassbereich

- Für $\Omega = 0$ ist für ungerade n : $|H(0)| = H_{max} = 1$
- Für $\Omega = 0$ ist für gerade n : $|H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Rightarrow$ **nicht 3 dB Dämpfung**
- Aus der Anzahl **Wendepunkte** und **Endpunkte** des Amplitudengangs im **Durchlassbereich** ($0 \leq \Omega \leq 1$) lässt sich die **Ordnung n** bestimmen.

Ordnung = (Summe aller Wendepunkte) plus beide Endpunkte minus 1

• Sperrbereich

- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{e \cdot C_n(\Omega)} \Rightarrow$ **$-n \cdot 20$ dB/ Dekade** bzw. **$-n \cdot 6.02$ dB/ Oktave**
- Fixe Ordnung n : Je grösser der Rippelfaktor e , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich
- Fixer Rippelfaktor e : Je grösser die Ordnung n , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich

11.3.2 Pol-Lagen (S. 313)

- Die Pole liegen auf einer **Ellipse**
- Allpolfilter
- Je näher die Pole an der $j\omega$ -Achse liegen, desto mehr Rippel gibt es im Phasengang

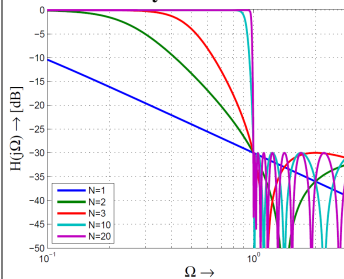
11.3.3 Filterordnung (S. 316)

$$n = \left\lceil \frac{\text{arccosh}\left(\sqrt{\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}}\right)}{\text{arccosh}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

\Rightarrow **Nomogramme!**

11.4 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)

Inverses Tschebyscheff-Filter

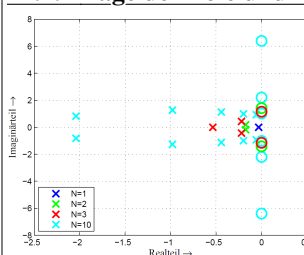


Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-II-Approximation als $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^2 C_n^2(\Omega)}}}$$

e **Rippelfaktor** (Konstante)
 $C_n(\Omega)$ Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung n

11.4.1 Lage der Pole und Nullstellen (S. 321)



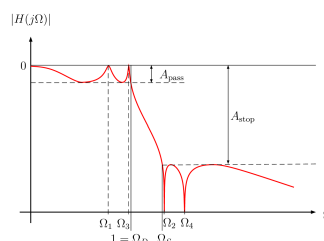
- Kein Allpolfilter**
- Gerade Ordnung n : n Pole und n Nullstellen
- Ungerade Ordnung n : n Pole und $n - 1$ Nullstellen

11.4.2 Filterordnung (S. 319)

$$n = \left\lceil \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

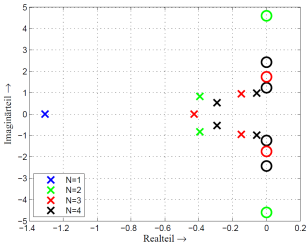
Die Filterordnung berechnet sich identisch wie bei der Tschebyscheff-I-Approximation!
 \Rightarrow Gleiches Nomogramm wie für Tschebyscheff-I

11.5 Approximation nach Caier (S. 322)



Kombination von Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II
Daher spricht man auch von Complete-Chebyshev- oder Chebyshev-Cauer-Filtern (CC-Filter).

11.5.1 Lage der Pole und Nullstellen (S. 325)



- **Kein** Allpolfilter
 - Gerade Ordnung n : n Pole und n Nullstellen
 - Ungerade Ordnung n : n Pole und $n - 1$ Nullstellen
- Nullstellen auf $j\omega$ -Achse **ausserhalb vom Einheitskreis**

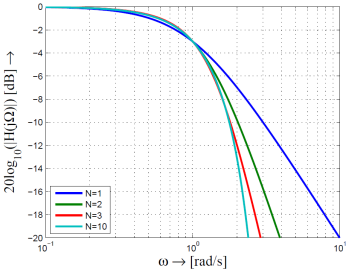
11.5.2 Filterordnung (S. 326)

$$n = \left\lceil \frac{K \left(\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S} \right)^2 \right) K \left(1 - \frac{10^{A_{pass}/10} - 1}{10^{A_{stop}/10} - 1} \right)}{K \left(1 - \left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S} \right)^2 \right) K \left(\frac{10^{A_{pass}/10} - 1}{10^{A_{stop}/10} - 1} \right)} \right\rceil$$

mit $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2(\theta)}} d\theta$

⇒ Nomogramm!

11.6 Approximation nach Bessel (S. 328)



Bessel-Filter liefern eine möglichst **lineare Phase**, d.h. eine **konstante Gruppenlaufzeit**.
Die Übertragungsfunktion $H(S)$ lautet

$$H(S) = K \cdot e^{-ST_0}$$

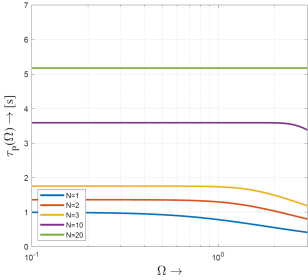
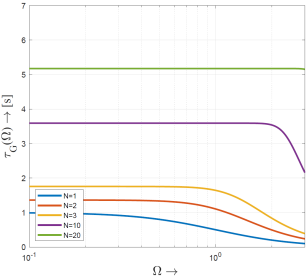
Für die Gruppenlaufzeit folgt somit

$$\tau_g(\Omega) = \frac{-d\theta(\Omega)}{d\Omega} = T_0 = \text{const}$$

Ohne Einschränkung kann in der UTF $T_0 = 1$ und $K = 1$ gesetzt werden:

$$H(S) = e^{-S} = \frac{1}{e^S} \approx \frac{1}{D(S)}$$

11.6.1 Gruppenlaufzeit $\tau_g(\Omega)$ und Phasenlaufzeit $\tau_p(\Omega)$ (S. 331)



12 Anhang

12.1 Übertragungsfunktionen verschiedener Filtertypen

Filtertyp	UTF $H(s)$	Bemerkung
Allpass	$\frac{s-a}{s+a}$	entspricht $\frac{H(-s)}{H(s)}$
Tiefpass	$\frac{a}{s+b}$	Zählergrad = 0
Hochpass	$\frac{as}{s+b}$	Zählergrad = Nennergrad
Bandpass	$\frac{as}{s^2+bs+c}$	Zählergrad \neq 0 und Zählergrad < Nennergrad
Bandsperre	$\frac{s^2+bs+c}{as}$	Nennergrad \neq 0 und Nennergrad < Zählergrad
FRN (Notch)	$K \cdot \frac{s^2+2\sigma_z s+\omega_p^2}{s^2+2\sigma_p s+\omega_p^2}$	mit $\sigma_p > \sigma_z$
FEN	$K \cdot \frac{s^2+2\sigma_z s+\omega_p^2}{s^2+2\sigma_p s+\omega_p^2}$	mit $\sigma_p < \sigma_z$

12.2 Ableitungsregeln

Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

12.3 Ableitungs-Tabelle

Function $f(x)$	Derivative $\frac{df(x)}{dx}$	Function $f(x)$	Derivative $\frac{df(x)}{dx}$
1	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$