Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis
Autoren:
Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:
1.0.20240602
https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2

Inhaltsverzeichnis

1 Filter **2**
1.1 Grundtypen (S. 291) . . . 2
1.2 Frequnezgang H(jimg omega) – Übertragungsfunktion H(s) . . . 2
1.3 Approximation im Frequnezbereich . . . 2
1.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297) . . . 2
1.5 Amplitudengang mit char. Funktion K(Omega2) . . . 2
1.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299) . . . 2
1.7 Standard-Filtertypen – Überblick . . . 2
1.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen . . . 2
1.9 Nomogramme (S. 393) . . . 2
1.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern . . . 3
1.11 Approximation nach Butterworth (S. 303) . . . 3
1.12 Approximation nach Tschebyscheff-I . . . 3
1.13 Approximation nach Tschebyscheff-II . . . 4
1.14 Approximation nach Cauer . . . 4
1.15 Approximation nach Bessel . . . 4
1.16 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen . . . 4

1 Filter

1.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequnezselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequnezselektiven Grundtypen** sind:
- Tiefpass (TP)
- Hochpass (HP)
- Bandpass (BP)
- Bandsperre, Notch (BS)
- Allpass

1.2 Frequnezgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)

Für den Frequnezgang $H(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)\cdot H^*(j\omega) = H(j\omega)\cdot H(-j\omega) = H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s)\cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2\Big|_{\omega^2=-s^2}$$

Hinweis: $|H(j\omega)|^2$ ist immer eine Funktion in ω^2, da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur $H(s)$ interessant** ist, muss $H(s)$ aus $|H(j\omega)|^2$ 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

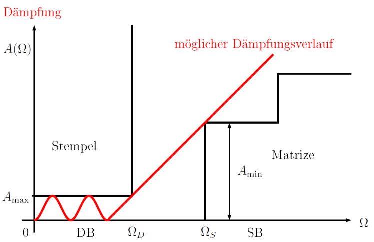
$$\boxed{\underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{H(s)}\cdot\underbrace{\frac{N(-s)}{D(-s)}}_{H(-s)} = |H(j\omega)|^2\Big|_{\omega^2=-s^2}}$$

Hinweis: $D(s)$ muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

1.3 Approximation im Frequnezbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet.** Zuerst soll der **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ im Frequnezbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

1.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation

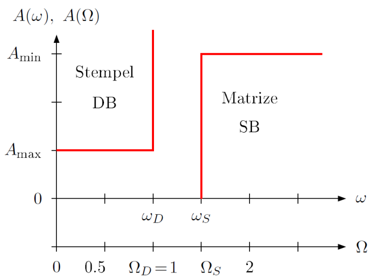


Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema beschrieben**. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.
- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung** A_{max}
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung** A_{min}

$$\boxed{A_{dB}(\omega) = 10\cdot\log\left(\frac{1}{|H(\omega)|^2}\right) = -20\cdot\log(|H(\omega)|) \quad \Rightarrow \text{Dämpfung!}}$$

1.3.2 Frequenznormierung

Um möglist kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:
- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- BP / BS: Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$

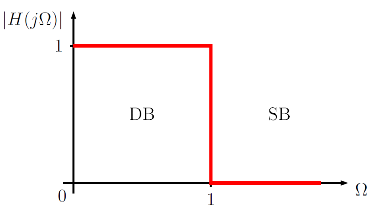


Normierte Grössen

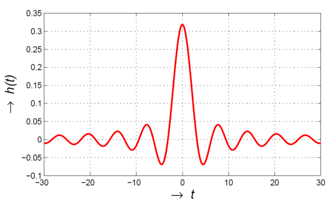
$$\boxed{S = \frac{s}{\omega_r}} \qquad \boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega_r}} \qquad \boxed{\sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}}$$

Hinweis: Zur Entnormierung wird jeweils S in der normierter Funktion durch $\frac{s}{\omega_r}$ ersetzt.

1.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



- DB: keine Dämpfung
- SB: kein Ausgangssignal



- Akausale Impulsantwort $h(t)$

$\Rightarrow$ Ideales Tierpass ist physikaltisch nicht realisierbar. $\Rightarrow$ **Approximationen**

1.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$\boxed{|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+K(\Omega^2)}}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt füt die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

Durchlassbereich (DB)	$0 \le K(\Omega^2) \ll 1$	für $0 \le \Omega < 1$	$\Rightarrow |H(j\Omega)|^2 \approx 1$
Sperrbereich (SB)	$K(\Omega^2) \gg 1$	für $\Omega > 1$	$\Rightarrow |H(j\Omega)|^2 \approx 0$

1.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)

Tiefpassfilter n. Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweilen einen **n-fachen Pol** auf der **negativen** σ-Achse.
- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{s}{\omega_c}\right)^n}}$$

n Ordnung des Filters
ω_c 3 dB-Punkt jeder des **n Teilfilter**

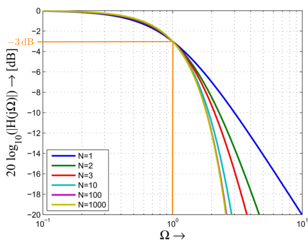
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\boxed{\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10\cdot n}}-1}}}$$

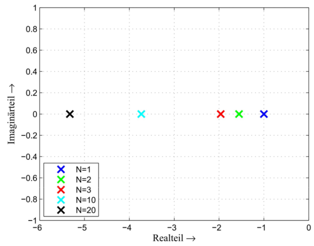
1.6.1 Eigenschaten kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ-Achse $\Rightarrow$ Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n: $|H(0)| = H_{max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n: $|H(j)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 3 dB Dämpfung
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow$ **$-n\cdot$20 dB / Dekade**
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend $\Rightarrow$ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

Amplitudengänge



Pol-Lagen



1.7 Standard-Filtertypen – Überblick

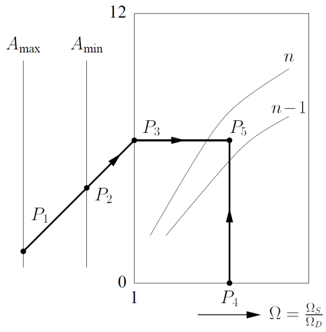
- **Butterworth**
  - \+ **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
  - \+ Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
  - \- Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
  - \- Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
- **Bessel**
  - \+ **Flachster Übergag** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
  - \+ Konstante Gruppenlaufzeit
  - \- Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
- **Tschebyscheff-I**
  - \+ Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
  - \- **Rippel** im Durchlassbereich
  - \- Keine konstante Gruppenlaufzeit

1.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen ($\Rightarrow$ 1.7)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen inkl. Normierung ($\Rightarrow$ 1.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder Nomogramm $\Rightarrow$ 1.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen ($\Rightarrow$ Tabellen oder Matlab)
5. Komponenten mittels Entnormierung bestimmen (Tabellen $\Rightarrow$ 1.10)

1.9 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



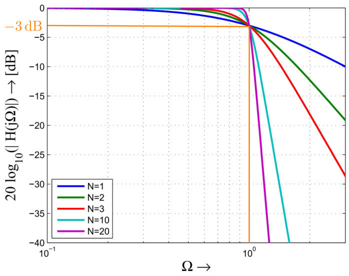
Benutzung von Nomogrammen

1. P_1: Verbindung von $A_{\max}$ zu $A_{\min}$
2. P_2: Verlängerung von P_1 bis zum 'Diagramm-Rand'
3. P_3: Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4. P_4: Bei $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$ vertikale Linie ziehen
5. P_5: Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve $\Rightarrow$ Ordnung n der Kurve ablesen

1.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern (S. 409)

Achtung: Normierung der Widerstände beachten!

1.11 Approximation nach Butterworth (S. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt.
Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^{2n}}}}$$

1.11.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (S. 303)

- **Durchlassbereich**
  - Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n: $|H(0)| = H_{\max} = 1$
  - Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n: $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 3 dB Dämpfung
  - Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- **Sperrbereich**
  - Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow$ **$-n \cdot 20$ dB/ Dekade**
- **Allgemein**
  - Amplitudengang ist streng-monoton fallend $\Rightarrow$ keine Welligkeit

1.11.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (S. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+K(\Omega^2)}\bigg|_{\Omega^2=-S^2} = \frac{1}{1+(-S^2)^n} = H(S)\cdot H(-S) = \frac{1}{D(S)}\cdot\frac{1}{D(-S)}$$

kann der folgende Teil isoliert werden ($D(S)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$\boxed{D(S)\cdot D(-S) = 1 + (-S^2)^n}$$

Mit dem Ansatz

$$\boxed{D(S) = \prod_{j=1}^{t}(S^2 + a_j\cdot S + b_j)\prod_{j=2t+1}^{n}(S-c_j)}$$

wird das Produkt $D(S)\cdot D(-S)$ bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

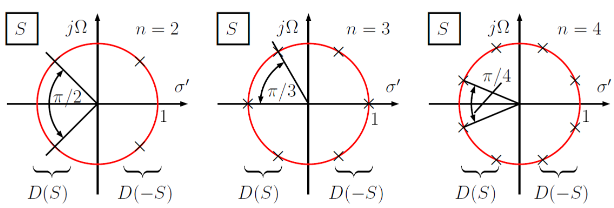
1.11.3 Bestimmung der Pol-Lage (S. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 1.11.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$\boxed{D(S)\cdot D(-S) = 1 + (-S^2)^n \stackrel{!}{=} 0}$$

Durch Auflösen der Gleichung nach S kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- **Für Nennerpolynom $D(S) = \frac{1}{H(S)}$ müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!**

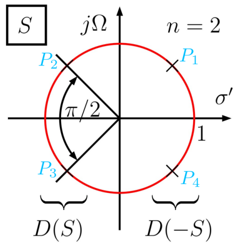


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz:}\quad H(S)\cdot H(-S) = \frac{1}{D(s)}\cdot\frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1+(-S^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(S)\cdot D(-S) = 1 + S^4 \quad\Leftrightarrow\quad S^4 = -1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{j\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$$



Aufgelöst nach S liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene	**Linke Halbebene**
$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$
$P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(S-P_2)\cdot(S-P_3)} = \frac{1}{S^2+\sqrt{2}S+1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion $H(S)$ auch mittels folgendem Ansatz für $D(S)$ und anschliessendem Koeffizientenvergleich von $D(S)\cdot D(-S)$ bestimmt werden.

$$\text{Ansatz:}\quad D(S) = S^2 + a_1 S + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich:}\quad D(S)\cdot D(-S) = S^4 + (2b_1 - a_1^2)S + b_1^2 \stackrel{!}{=} S^4 + 1$$

$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$ und $b_1 = 1 \quad \Rightarrow S^2 + \sqrt{2}S + 1 \quad \Rightarrow H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{S^2+\sqrt{2}S+1}$

1.11.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

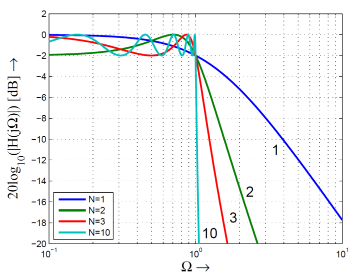
$$A(\Omega_D) = 10\cdot\log_{10}(1+\Omega_D^{2n}) = A_{\max} \qquad A(\Omega_S) = 10\cdot\log_{10}(1+\Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$

Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als
$\lceil.\rceil$ bedeutet '**aufrunden** auf ganze Zahl'

$$\boxed{n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}\right)}{2\cdot\log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil}$$

$\Rightarrow$ Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem Nomogramm bestimmt werden.

1.12 Approximation nach Tschebyscheff-I



Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-I als $K(\Omega^2) = e^2\cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt.
Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2\cdot C_n^2(\Omega)}}}$$

e	**Rippelfaktor** (Konstante)
$C_n(\Omega)$	Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ornung n

Das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ ist im Durchlassbereich und im Sperrbereich **unterschiedlich definiert!**

Duchlassbereich ($\lvert\Omega\rvert \leq 1$)	Sperrbereich ($\lvert\Omega\rvert \geq 1$)
$\boxed{C_n(\Omega) = \cos(n\cdot\arccos(\Omega))}$	$\boxed{C_n(\Omega) = \cosh(n\cdot\operatorname{arccosh}(\Omega))}$

Für die Ordnung $n \geq 2$ lässt sich das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ mittels Rekursionsformel berechnen

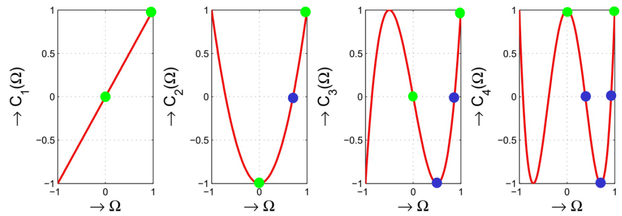
$$\boxed{C_n(\Omega) = 2\,\Omega\,C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega)} \qquad C_0(\Omega) = 1 \qquad C_1(\Omega) = \Omega$$

Zwischen dem Rippelfaktor e und der maximalen Dämpfung $A_{\max}$ gilt der Zusammenhang:

$$\boxed{A_{\max} = 10\cdot\log_{10}(1+e^2) \quad\Leftrightarrow\quad e = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}}-1}}$$

1.12.1 Eigenschaften der Tschebyscheff-I-Approximation

Im **Durchlassbereich** schwankt das Tschebyscheff-Polynom in den Grenzen ± 1. Im **Sperrbereich** nimmt C_n monoton mit Ω zu.



- **Durchlassbereich**
  - Für $\Omega = 0$ ist für **ungerade** n: $|H(0)| = H_{\max} = 1$
  - Für $\Omega = 0$ ist für gerade n: $|H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$
  - Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n: $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Rightarrow$ **nicht** 3 dB Dämpfung
  - Aus der Anzahl **Extremalstellen und Endpunkte** des Amplitudengangs im **Durchlassbereich** ($0 \leq \Omega \leq 1$) lässt sich die **Ordnung n** bestimmen.
    Ordnung = Summe aller Extremalstellen plus beide Endpunkte minus 1
- **Sperrbereich**
  - Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{e\cdot C_n(\Omega)} \Rightarrow$ **$-n\cdot 20$ dB/ Dekade** bzw. **$-n\cdot 6.02$ dB/ Oktave**

- Fixe Ordnung n: Je grösser der Rippelfaktor e, desto steiler der Abfall in den Sperrbereich
- Fixer Rippelfaktor e: Je grösser die Ordnung n, desto steiler der Abfall in den Sperrbereich

1.12.2 Pol-Lagen

- Die Pole liegen auf einer **Ellipse**
- Allpolfilter
- Je näher die Pole an der $j\omega$-Achse liegen, desto mehr Rippel gibt es im Phasengang

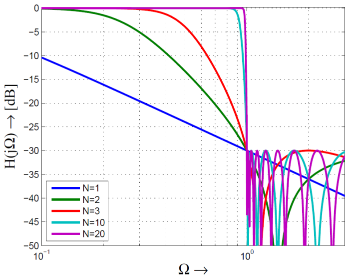
1.12.3 Filterordnung

$$\boxed{n = \left\lceil \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil}$$

$\Rightarrow$ Nomgramme!

1.13 Approximation nach Tschebyscheff-II

Inverses Tschebyscheff-Filter

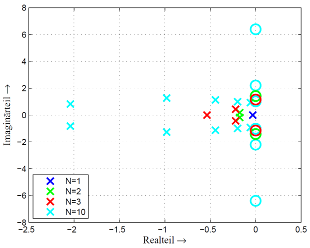


Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-II-Approximation als $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt.
Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^2 C_n^2\left(\frac{1}{\Omega}\right)}}}}$$

e	**Rippelfaktor** (Konstante)
$C_n(\Omega)$	Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ornung n

1.13.1 Pol-Lagen



- **Kein** Allpolfilter
  - Gerade Ordnung n: n Pole und n Nullstellen
  - **Un**gerade Ordnung n: n Pole und $n-1$ Nullstellen

1.13.2 Filterordnung

$$\boxed{n = \left\lceil \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil}$$

Die Filterordnung berechnet sich identisch wie bei der Tschebyscheff-I-Approximation!
$\Rightarrow$ Gleiches Nomogramm wie für Tschebyscheff-I

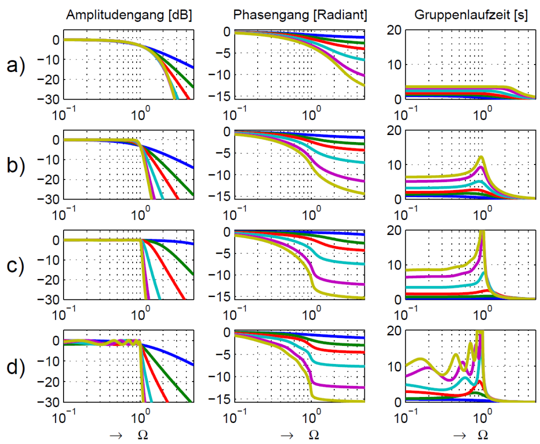
1.14 Approximation nach Cauer

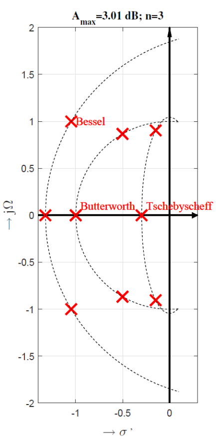
1.15 Approximation nach Bessel

1.16 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen

	Krit. Gedämpft	Butterworth	Tschebyscheff 1	Tschebyscheff 2	Cauer	Bessel
Allpolfilter	ja	ja	ja	nein	nein	ja
Pol-Lage	reelle Achse <0	Halbkreis LHE	Ellipse LHE	LHE	LHE	exzentr. Kreis
NS-Lage	-	-	-	$j\omega$-Achse	$j\omega$-Achse	-
DB	streng monoton	streng monoton steilstmöglich	streng monoton	wellig konst. Rippel	wellig	streng monoton
SB	streng monoton	streng monoton	streng monoton	wellig konst. Rippel	wellig	streng monoton
Phasengang	sehr gut	mittel	schlecht	schlecht	wild	bestmöglich

1.16.1 Frequenzgänge / Lage der Pol- und Nullstellen





a)	Bessel	c)	Tschebyscheff (0.1 dB)
b)	Butterworth	d)	Tschebyscheff (2 dB)