

Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

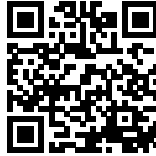
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240619

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

| | | | |
|--|----------|--|-----------|
| 1 LTI-Systeme (S. 171) | 2 | 8 Zustandsraumdarstellung (ZRD) | 7 |
| 1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176) | 2 | 8.1 Vorteile der Zustandsraumdarstellung (S. 253-254) | 7 |
| 1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183) | 2 | 8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255) | 7 |
| 1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182) | 2 | 8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264) | 7 |
| 1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186) | 2 | 8.4 Ordnung eines Systems (S. 256) | 7 |
| 1.5 Verzerrungen (S. 187-188) | 2 | 8.5 ZRD mit Matlab | 7 |
| 1.6 Klirrfaktor (S. 189) | 2 | 8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257) | 7 |
| 1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190) | 2 | 8.7 Matrizen diagonalisieren | 8 |
| 1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194) | 3 | 8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren | 8 |
| 2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel | 3 | 8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260) | 8 |
| 2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206) | 3 | 8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263) | 8 |
| 2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206) | 3 | 8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263) | 8 |
| 2.3 Rechenregeln mit Dezibel | 3 | 8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275) | 8 |
| 2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209) | 3 | 8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277) | 9 |
| 2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel \leftrightarrow Faktor | 3 | 8.14 Steuerbarkeit (S. 277) | 9 |
| 2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210) | 3 | 8.15 Beobachtbarkeit (S. 278) | 9 |
| 3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme | 3 | 8.16 Standardformen der ZRD (S. 267) | 9 |
| 3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211) | 4 | 9 Filter | 10 |
| 3.2 Pol-/Nullstellendiagramme (S. 212) | 4 | 9.1 Grundtypen (S. 291) | 10 |
| 3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol-/Nullstellendiagramm | 4 | 9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294) | 10 |
| 3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214) | 4 | 9.3 Approximation im Frequenzbereich | 10 |
| 3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216) | 4 | 9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297) | 10 |
| 3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/Nullstellendiagramm | 4 | 9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$ | 10 |
| 3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln | 5 | 9.6 Standard-Filtertypen – Überblick | 10 |
| 3.8 Allpassnetzwerk (S. 220) | 5 | 9.7 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen | 11 |
| 3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221) | 5 | 9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen | 11 |
| 4 Bodediagramm (S. 222) | 5 | 9.9 Nomogramme (S. 393) | 11 |
| 4.1 Bodediagramme mit Matlab | 5 | 9.10 LC-Filter: Entnormierung der Komponenten | 11 |
| 4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230) | 5 | 10 Filter-Umwandlungen mittels Frequenztransformation | 11 |
| 4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228) | 6 | 10.1 Transformation: Tiefpass – Hochpass (S. 344) | 11 |
| 5 Stabilität im Bodediagramm | 6 | 10.2 Transformation: Tiefpass – Bandpass (S. 348) | 11 |
| 5.1 Amplitudenrand und Phasenrand | 6 | 10.3 Transformation: Tiefpass – Bandsperre (S. 357) | 11 |
| 5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm | 6 | 11 Filter-Approximationen im Detail | 11 |
| 6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240) | 6 | 11.1 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299) | 11 |
| 6.1 Nyquistdiagramme mit Matlab | 6 | 11.2 Approximation nach Butterworth (S. 303) | 12 |
| 7 Stabilität im Nyquist-Diagramm | 6 | 11.3 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310) | 12 |
| 7.1 Offener und geschlossener Regelkreis | 6 | 11.4 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319) | 13 |
| 7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium | 6 | 11.5 Approximation nach Cauer (S. 322) | 13 |
| 7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve) | 6 | 11.6 Approximation nach Bessel (S. 328) | 13 |
| 7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm | 6 | 12 Anhang | 13 |
| | | 12.1 Ableitungsregeln | 13 |
| | | 12.2 Ableitungs-Tabelle | 13 |

1 LTI-Systeme (S. 171)

| | |
|-------------------|---|
| $x(t)$ | Eingangssignal |
| $y(t)$ | Ausgangssignal |
| $\delta(t)$ | Dirac-Stoss |
| $h(t)$ | Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss) |
| $H(j\omega)$ | Frequenzgang |
| $ H(j\omega) $ | Amplitudengang |
| $\theta(j\omega)$ | Phasengang |
| $H(s)$ | $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF) |

1.1 Zusammenhänge zwischen den Größen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort – Einheitssprungantwort

| | |
|--------|-----------------------|
| $h(t)$ | Impulsantwort |
| $g(t)$ | Einheitssprungantwort |

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

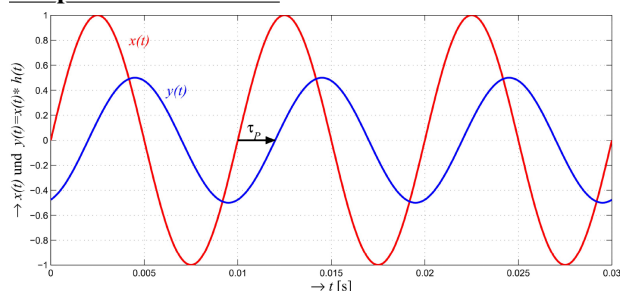
Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $1 > k \geq 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)$$

1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen: $\text{THD} \approx k$ allgemein: $\text{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j\omega = 0) = Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$h(-\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$H^*(j\omega)$

$\varphi_{xx}(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$\Phi_{xx}(j\omega)$

$h(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$H(j\omega)$

$h(\tau) * h(-\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$|H(j\omega)|^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$\varphi_{yy}(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$\Phi_{yy}(j\omega)$

AKF

PSD

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. \Rightarrow Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor \Leftrightarrow Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren \Rightarrow Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren \Rightarrow Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs.

Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.

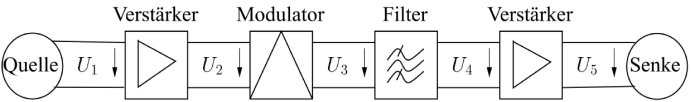
$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ($U_2 > U_1$) \Rightarrow positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ($U_2 < U_1$) \Rightarrow negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$T_{U_{tot}}$

$=$

$\frac{U_2}{U_1}$

\cdot

$\frac{U_3}{U_2}$

\cdot

$\frac{U_4}{U_3}$

\cdot

$\frac{U_5}{U_4}$

$=$

$\frac{U_5}{U_1}$

$=$

$\frac{10}{1}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{10}{1}$

$=$

50

$a_{U_{tot}}$

$=$

-20dB

$+$

3dB

$+$

3dB

$+$

-20dB

$=$

-34dB

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = 20\text{ dB} - 3\text{ dB} - 3\text{ dB} + 20\text{ dB} = 34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel \Leftrightarrow Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

| Dezibel | Faktor |
|-------------------------|---|
| 20 = 10 + 10 | 100 = 10 · 10 |
| 12 | 16 = 2 · 2 · 2 · 2 |
| 10 | 10 |
| 9 = 3 + 3 + 3 | 8 = 2 · 2 · 2 |
| 8 = 5 - 3 | 6.4 = 3.2 · 2 |
| 7 = 10 - 3 | 5 = $\frac{10}{2}$ |
| 6 = 3 + 3 | 4 = 2 · 2 |
| 5 = 15 - 10 | 3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$ |
| 4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3 | 2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$ |
| 3 | 2 |
| 2 = 12 - 10 = 5 - 3 | 1.6 = $\frac{16}{10}$ |
| 1 = 10 - 3 - 3 - 3 | 1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$ |
| 0 | 1 |
| -1 | 0.8 = $\frac{4}{5}$ |

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösse (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right) \qquad (L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right)$$

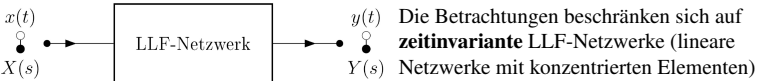
$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \qquad (L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right)$$

$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \qquad (L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{1\text{ mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

| Notation | Bezugsgrösse | Notation | Bezugsgrösse |
|----------|--------------|----------|--------------|
| dBW | 1 W | dBm | 1 mW |
| dBV | 1 V | dBμV | 1 μV |

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differentialgleichung der folgenden Form beschreiben:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

| | |
|--------|---|
| $N(s)$ | Zählerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten |
| $D(s)$ | Nennerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten |
| $X(s)$ | Eingangssignal im Frequenzbereich |
| $Y(s)$ | Ausgangssignal im Frequenzbereich |

Die Wurzeln der Gleichung $N(s) = 0$ ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von $D(s) = 0$ ergeben n Pole des Systems. **Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!**

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird $H(s)$ faktorisiert.
 \Rightarrow Die UTF $H(s)$ ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K **vollständig bestimmt!**

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell sind oder in konjugiert-komplexen Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + 2\sigma_{zi} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^l (s^2 + 2\sigma_{pj} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2l+1}^n (s - p_j)}$$

Legende:

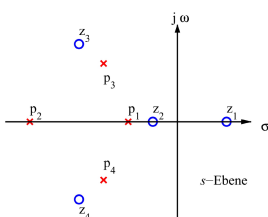
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Pole in der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann $H(s)$ mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^l (s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2l+1}^n (s - p_j)}$$

| | | | |
|---------------|----------------------|---------------|-----------------------|
| ω_{pj} | Polstellenfrequenzen | ω_{zi} | Nullstellenfrequenzen |
| q_{pj} | Polstellengüten | q_{zi} | Nullstellengüten |

3.2 Pol-/Nullstellendiagramme (S. 212)



Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot

| | |
|------|--------|
| Pole | Kreuze |
| NS | Kreise |

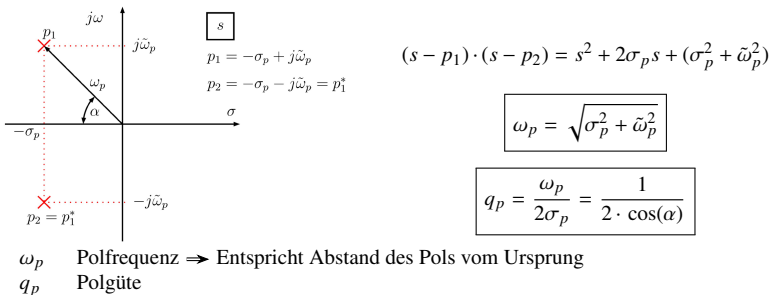
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol-/Nullstellendiagramm

Für **Grenzstabilität** gilt eine **UND-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte. Für **Stabilität** und **Instabilität** gilt eine **ODER-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.

- **Stabil:**
 - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE) $\Rightarrow \sigma < 0$
 - Keine Polstellen vorhanden
- **Asymptotisch stabil:**
 - Polstellen nur in der linken Halbebene (LHE)
- **Grenzstabil:**
 - **Keine** Polstellen in der rechten Halbebene (RHE) $\Rightarrow \sigma > 0$
 - Mindestens eine **einfache Polstelle** auf imaginärer Achse $\Rightarrow \sigma = 0$
 - **Keine doppelten** Polstellen auf der imaginären Achse $\Rightarrow \sigma = 0$
- **Instabil:**
 - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE) $\Rightarrow \sigma > 0$
 - Mindestens eine **mehrfache Polstelle** auf der imaginären Achse $\Rightarrow \sigma = 0$

3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



Grenzfälle

| | | |
|-----------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| $\sigma_p = \omega_p$ | Doppelpol auf neg. reeller Achse | $\Rightarrow q_p = \frac{1}{2}$ |
| $\sigma_p = 0$ | Polpaar auf imaginärer Achse | $\Rightarrow q_p = \infty$ |

3.4.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$$

- \Rightarrow Für einzelne (reelle) Pole ist die Güte q_p nicht definiert.
- \Rightarrow Die Polfrequenz ω_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

$$\sigma_{p1} = \sigma_{p2} \quad |q_p| = \frac{1}{2}$$

3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann $s = j\omega$ eingesetzt werden.

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

| | | | |
|--------------|----------------------------|------------------|----------------|
| $H(s)$ | Übertragungsfunktion (UTF) | $ H(j\omega) $ | Amplitudengang |
| $H(j\omega)$ | Frequenzgang | $\theta(\omega)$ | Phasengang |

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- **Nyquist-Diagramm**
 $H(j\omega)$ wird in Polarkoordinaten mit ω als Parameter aufgetragen
- **Bode-Diagramm**
 $\alpha_{dB}(\omega)$ und $\theta(\omega)$ werden je in Funktion von $\log_{10}(\omega)$ aufgetragen

3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ in die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ als:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2) \dots (j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2) \dots (j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0 - p_1) = |j\omega_0 - p_1| \cdot e^{j\theta_{z1}} = A_{z1} \cdot e^{j\theta_{z1}}$$

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ in den **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ und den **Phasengang** $\theta(\omega)$ separiert werden:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \dots A_{zm} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \dots + \theta_{zm})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \dots A_{pn} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \dots + \theta_{pn})}}$$

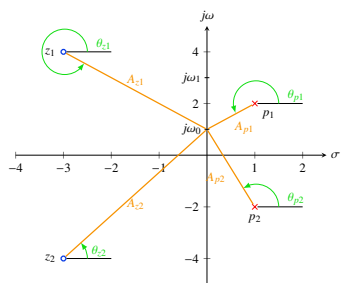
Betrag

$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}}$$

Phase

$$\theta(\omega_0) = \text{Phase von } K + \sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^n \theta_{pj}$$

3.6.1 Zusammenhang mit Pol-/Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für eine bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol-/Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen - Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeller Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von -20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen ω konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-/Nullstellendiagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-/Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF $H(S)$ kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

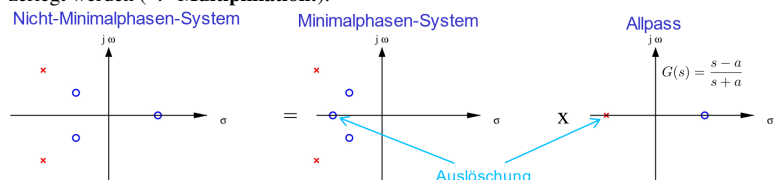
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)** ($\sigma \leq 0$)
 - ⇒ Nullstellen auf der $j\omega$ -Achse sind erlaubt!
 - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm (S. 222)

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-/Nullstellendiagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

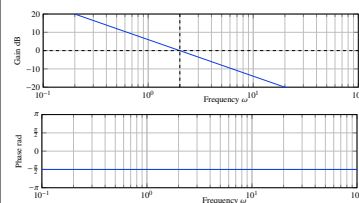
4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

4.2.1 Pol im Ursprung

$$H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$$



Betrag zeichnen

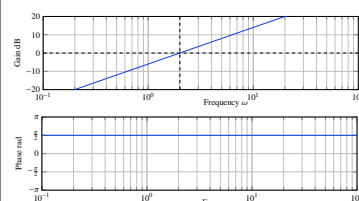
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = \alpha$
3. Gerade mit $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch $-\frac{\pi}{2}$

4.2.2 Nullstelle im Ursprung

$$H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$$



Betrag zeichnen

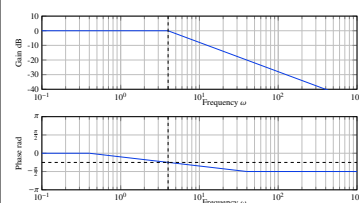
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
3. Gerade mit $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch $+\frac{\pi}{2}$

4.2.3 Reeller Pol

$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$$



Betrag zeichnen

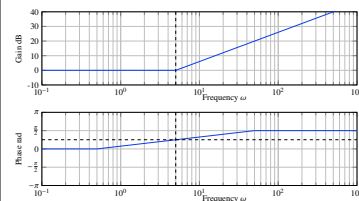
1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$
2. $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = \alpha$

Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega = \frac{\alpha}{10}$
2. $-\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot \alpha$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(-\frac{\pi}{4})$ bei $\omega = \alpha$

4.2.4 Reelle Nullstelle

$$H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$
2. $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = \alpha$

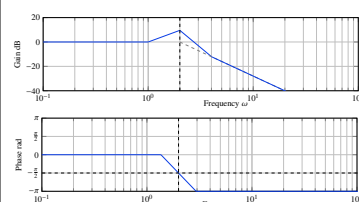
Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega = \frac{\alpha}{10}$
2. $+\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot \alpha$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(+\frac{\pi}{4})$ bei $\omega = \alpha$

4.2.5 Konjugiert-komplexe Pole

$$\text{Voraussetzung: } |q_p| > \frac{1}{2}$$

$$H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_p}{2}$
2. $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_p
⇒ stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_p$
3. Maximalwert = $20 \cdot \log_{10}(q_p)$ bei ω_p
4. Gerade von $\omega = \frac{\omega_p}{2}$ zu Maximalwert
5. Gerade von Maximalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_p$

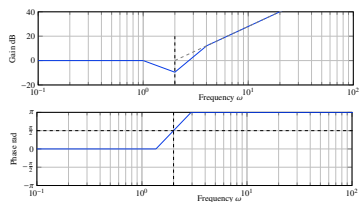
Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10 \cdot 2q_p}$
2. $-\pi$ ab $\omega > \omega_p \cdot 10 \cdot \frac{1}{2q_p}$
3. Gerade zwischen 0 und π Geraden
4. $(-\frac{\pi}{2})$ bei $\omega = \omega_p$

4.2.6 Konjugiert-komplexe Nullstellen

Voraussetzung: $|q_z| > \frac{1}{2}$

$$H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$$



Betrag zeichnen

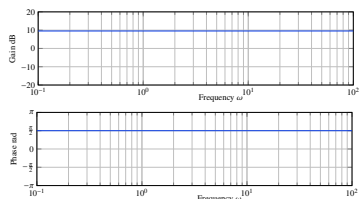
- 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_z}{2}$
 - +40 $\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_z
 \Rightarrow stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_z$
 - Minimalwert = $-20 \cdot \log_{10}(q_z)$ bei ω_z
 - Gerade von $\omega = \frac{\omega_z}{2}$ zu Minimalwert
 - Gerade von Minimalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_z$
- Phase zeichnen
- 0 bis $\omega < \frac{\omega_z}{10 \cdot 2q_z}$
 - + π ab $\omega > \omega_z \cdot 10 \cdot 2q_z$
 - Gerade zwischen 0 und $-\pi$ Geraden
 - ($\frac{\pi}{2}$ bei $\omega = \omega_z$)

Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, S. 235

| q_p | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|-------------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $10^{\frac{1}{20q_p}}$ | 10 | 3.16 | 2.15 | 1.78 | 1.47 | 1.33 | 1.26 | 1.21 | 1.15 | 1.12 | 1.06 | 1.02 | 1.01 |
| $10^{-\frac{1}{20q_p}}$ | 0.1 | 0.316 | 0.464 | 0.562 | 0.681 | 0.750 | 0.794 | 0.825 | 0.866 | 0.891 | 0.944 | 0.977 | 0.989 |

4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
 - Betrag = $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
 - Phase = $\beta = \text{const}$



4.2.8 Weitere Bemerkungen

- Inverser Frequenzgang:**
 - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
 - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
 - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am größten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

UTF Tiefpass 2. Ordnung: $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$

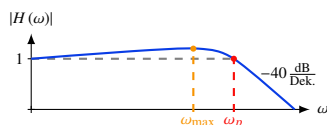
Frequenz beim Maximum: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$

Höhe des Maximums: $|H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$

\Rightarrow Es gilt: $\omega_{\max} \leq \omega_p$

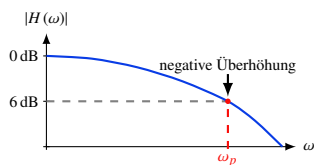
4.3.1 Spezialfall $q = 1$

Frequenz: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$
Höhe: $|H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$



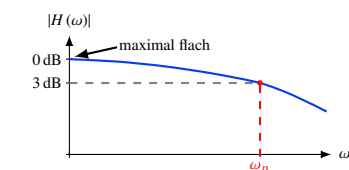
4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$

Frequenz: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C}$
Höhe: $|H(\omega_{\max})| = \infty$



4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Frequenz: $\omega_{\max} = 0$
Höhe: $|H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$



5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis $H(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei $s = 0$), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn $H(j\omega)$ für die **Durchgangsfrequenz** ω_D bei der die Amplitude $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0 \text{ dB}$ ist, und eine Phase $> -\pi$ hat.
 \Rightarrow Amplitudenrand und Phasenrand müssen > 0 sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

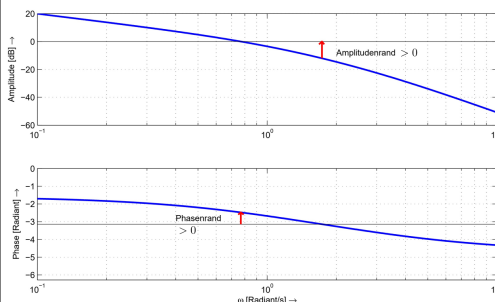
- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**

– Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Phase gleich $-\pi$ bzw. -180° ist.

• Phasenrand (Phasenreserve)

– Abstand des Phasengangs zur $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzgangs in Abhängigkeit der Frequenz f (aufsteigende Werte von f) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.

6.1 Nyquistdiagramme mit Matlab

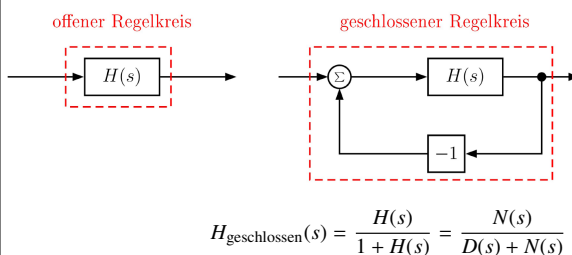
```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems  
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve** $H(s)$ (**offener Regelkreis**) einen Aussage über die **Stabilität** des **geschlossenen Regelkreises** zu machen.

Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

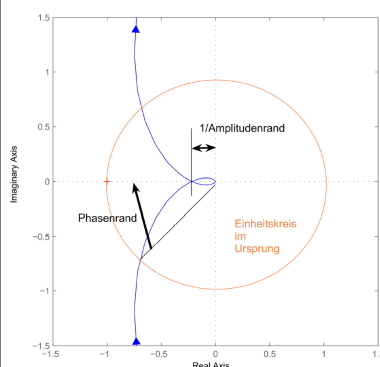
Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt $(-1 + j0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern 'links liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.

- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Frequenz, bei welcher die **negative** reelle Achse geschnitten wird: ω_π
 - Bei ω_π : $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$ = Abstand zum Ursprung
- Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Frequenz, bei welcher Eintritt in den Einheitskreis erfolgt: ω_D
 - Bei ω_D : Winkel bis zu 180°

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt $(-1 + j0)$ 'links liegen gelassen' wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt. Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Grundidee: Differentialgleichung n . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

8.1 Vorteile der Zustandsraumdarstellung (S. 253-254)

- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können \Rightarrow Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**
 - in der Elektrotechnik L und C
- Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

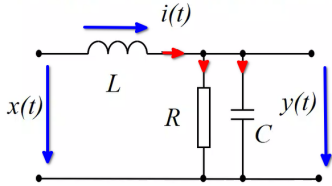
8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)\end{aligned}$$

$\underline{u}(t)$ Eingangsvektor (m Zeilen)
 $\underline{x}(t)$ Zustandsvektor (n Zeilen)
 $\underline{y}(t)$ Ausgangsvektor (k Zeilen)

- obere Gleichung: **Zustandsgleichung**
- untere Gleichung: **Ausgangsgleichung**
- A Systemmatrix** ($n \times n$ -Matrix)
 Sie bestimmt das Verhalten des **ungestörten Systems** ($\underline{u}(t) = 0$) und bestimmt z.B. die innere Stabilität des gesamten Systems.
- B Eingangsmatrix (Steuermatrix)** ($n \times m$ -Matrix)
 Sie bestimmt die Wirkung der **Steuergrößen** $\underline{u}(t)$ auf die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$
- C Ausgangsmatrix (Beobachtungsmatrix)** ($k \times n$ -Matrix)
 Sie kennzeichnet die Abhängigkeit des **Zustandes** $\underline{x}(t)$ von der beobachtbaren Ausgangsgröße $\underline{y}(t)$
- D Durchgangsmatrix** ($k \times m$ -Matrix)
 Sie bestimmt die unmittelbare Wirkung der Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ auf den Ausgang $\underline{y}(t)$

Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität: $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

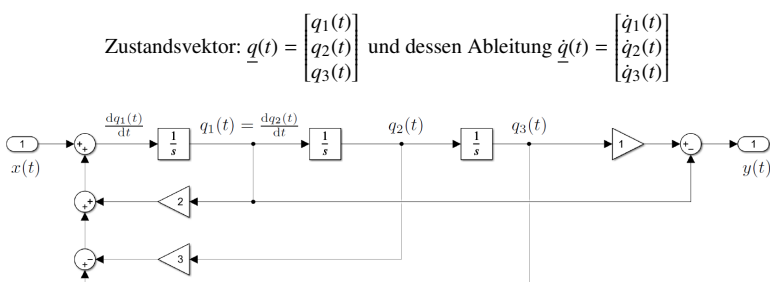
Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

Zustände: $i(t), y(t)$
 Eingang: $x(t)$
 Ausgang: $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} i'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot x(t) \\ \tilde{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot x(t)\end{aligned}$$

Beispiel: ZRD aus Signalfussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ und \underline{D} gefunden werden.

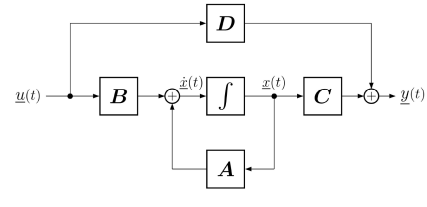


$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot x(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot x(t)\end{aligned}$$

8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)

$$\begin{aligned}s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) &= \underline{C}\underline{X}(s) + \underline{D}\underline{U}(s)\end{aligned}$$

$\underline{U}(s)$ Eingangsvektor (m Zeilen)
 $\underline{X}(s)$ Zustandsvektor (n Zeilen)
 $\underline{Y}(s)$ Ausgangsvektor (k Zeilen)
 \underline{I} Einheitsmatrix
 $\underline{H}(s)$ Übertragungsmatrix ($k \times m$)



$$\underline{Y}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0) + \underbrace{(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)}\underline{U}(s)$$

Mit Anfangsbedingungen $\underline{x}(0) = 0$ ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)}\underline{U}(s)$$

Hinweis: Die Übertragungsmatrix $\underline{H}(s)$ lässt sich auch aus den diagonalisierten Matrizen berechnen!

$$\underline{H}(s) = \underline{C}_{\text{diag}}(s\underline{I} - \underline{A}_{\text{diag}})^{-1}\underline{B}_{\text{diag}} + \underline{D}_{\text{diag}}$$

Hinweis: Aus einem Signalfussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

8.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

Übertragungsmatrix

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matrizenform

$$\underline{Y}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{U}(s)$$

- $\underline{H}(s)$ hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix \underline{D}

Übertragungsfunktion

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen** $x(t)$. Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

8.5 ZRD mit Matlab

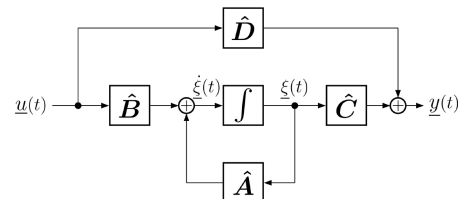
$$\underline{H}(s) = \frac{b_i s^i + b_{i-1} s^{i-1} \dots b_1 s^1 + b_0}{a_i s^i + a_{i-1} s^{i-1} \dots a_1 s^1 + a_0}$$

- `[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)` % $\underline{H}(s)$ aus Matrizen berechnen
- `(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)` % Matrizen aus $\underline{H}(s)$ berechnen

8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix** \underline{T} ($n \times n$ -Matrix, nicht singulär, $\underline{T}\underline{T}^{-1} = \underline{I} = \underline{T}^{-1}\underline{T}$) kann man **verschiedenste Zustandsgrößen und Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\xi}}(t) &= \underbrace{\underline{T}\underline{A}\underline{T}^{-1}}_{\hat{\underline{A}}} \underline{\hat{\xi}}(t) + \underbrace{\underline{T}\underline{B}}_{\hat{\underline{B}}} \underline{u}(t) \\ \underline{\hat{y}}(t) &= \underbrace{\underline{C}\underline{T}^{-1}}_{\hat{\underline{C}}} \underline{\hat{\xi}}(t) + \underbrace{\underline{D}}_{\hat{\underline{D}}} \underline{u}(t)\end{aligned}$$



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 8.2 bezüglich $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$. Das bedeutet, dass die **Zustandsgrößen** $\underline{\hat{\xi}}(t)$ und $\underline{x}(t)$ **willkürlich** gewählt werden können, solange \underline{T} nicht singulär ist (Determinante von $\underline{T} \neq 0$).

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrößen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

8.7 Matrizen diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix** A diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix $\hat{A} = TAT^{-1}$ wird dann üblicherweise A_{diag} verwendet.

- λ_i Eigenwerte der Matrix A
- \vec{v}_i Eigenvektoren der Matrix A
- V Matrix mit Eigenvektoren von A
- $A_{\text{diag}} = \Lambda$ Diagonalisierte Matix A mit Eigenwerten λ_i auf Diagonale
- T Transformationsmatrix

$$A_{\text{diag}} = \Lambda = V^{-1} \cdot A \cdot V$$
$$C_{\text{diag}} = C \cdot V$$

$$B_{\text{diag}} = V^{-1} \cdot B$$
$$D_{\text{diag}} = D$$

$$T = V^{-1}$$
$$T^{-1} = V$$

8.7.1 Vorgehen Matrix A diagonalisieren

- Ansatz: $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $(\lambda I - A) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen: $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow$ Eigenwerte λ_i
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren \vec{v}_i gefunden werden:
 - Eigenwert λ_i in Gleichungssystem $(\lambda_i I - A) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ einsetzen
 - Einen Wert von $\vec{v}_i = 1$ wählen und Eigenvektor \vec{v}_i als Spaltenvektor schreiben
- Matrix V aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix Λ 'zusammenbauen', indem man Eigenwerte λ_i auf Diagonale schreibt

Beispiel: Matrix A diagonalisieren (S. 258)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -7 \\ 1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 6) - 7 \cdot (-1) = 0$$

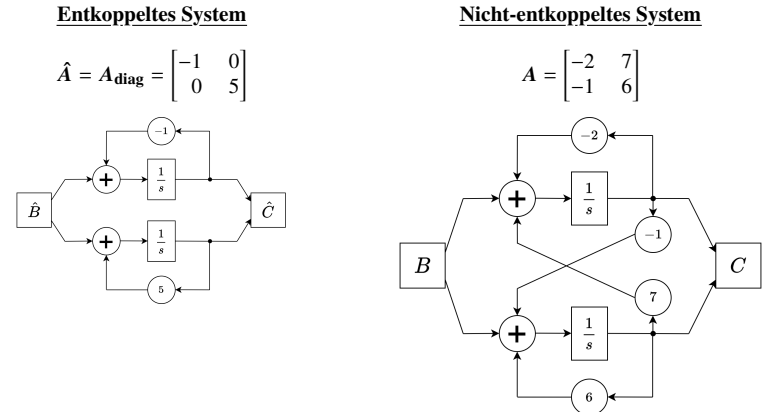
$$\Rightarrow \text{Mitternachtsformel } \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ liefert die Eigenwerte } \lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = 5$$

$$\text{Ersten Eigenwert } \lambda_1 = -1 \text{ in } (\lambda_1 I - A) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ einsetzen}$$
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$

$$\text{Wähle } v_{21} = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{Gleiches Vorgehen für zweiten Eigenvektor } \vec{v}_2$$

$$\Lambda = A_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

8.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System



8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det(A) = ad - bc$$

8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung $\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t)$ ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur **einem Zustand** würde man den Ansatz $\underline{x}(t) = e^{at}$ wählen. Da im Allgemeinen Systeme mit **mehreren Zuständen** betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{A^k}{k!}t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Der Ansatz ist beschrieben als **Taylor-Reihe**. Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

$$\underline{y}(t) = C \Phi(t) \underline{x}(0) + \int_0^t C \Phi(t - \tau) B \underline{u}(\tau) d\tau + D \underline{u}(t)$$

Hinweis: $\Phi(t) = e^{At}$ heisst **Fundamentalmatrix**.

8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

$$e^{At} = \Phi(t)$$

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im **Zeitbereich** zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische $(n \times n)$ Fundamentalmatrix zu bestimmen.

8.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A^{-1})\}$$

Beispiel: Inverse Laplace-Transformation

$$\text{Mit der Systemmatrix } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ ergibt sich } (sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Somit ist } (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \circ \bullet \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \Phi(t)$$

8.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von $\Phi(t) = e^{At}$

$$\Phi(t) = e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\Phi_{\text{diag}}(t)} \cdot V^{-1}$$

$$\text{Wenn } A_{\text{diag}} = V^{-1} \cdot A \cdot V \text{ ist und } \lambda_i \text{ die Eigenwerte von } A \text{ sind.}$$

8.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

\Rightarrow Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

\Rightarrow Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.5 Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

$$\text{Die Matrix } A \text{ sei definiert als eine Dreiecksmatrix mit Parametern } a \text{ und } c$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

$$\text{Die Potenz der Matrix wird berechnet aus}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} c^l & c^k \end{bmatrix}$$

Beispiel: Definition der Reihenentwicklung

$$\text{Für } a = 1 \text{ und } c = -2 \text{ ergibt sich für } A^k$$

$$A^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^k - (-2)^k & (-2)^k \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Fundamentalmatrix ist mittels Anwendung der Taylor-Reihe somit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\Phi(t) = e^{At}$

| | |
|---|--|
| $\Phi(0) = I$ | $e^{A \cdot 0} = I$ |
| $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ | $(e^{A \cdot t})^{-1} = e^{-A \cdot t}$ |
| $\Phi^k(t) = \Phi(kt)$ | $(e^{A \cdot t})^k = e^{A \cdot k \cdot t}$ |
| $\Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2)$ | $e^{A \cdot t_1} \cdot e^{A \cdot t_2} = e^{A(t_1+t_2)}$ |
| $\Phi(t_2 - t_1) \cdot \Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$ | $e^{A(t_2-t_1)} \cdot e^{A(t_1-t_0)} = e^{A(t_2-t_0)}$ |

Hinweis: $(\Phi(t))$ ist stets invertierbar)

8.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

```
1 syms t % t als symbolischer Wert
2 A = [0 6; 1 5]; % Matrix A
3 expm(A*t) % Fundamentalmatrix
```

8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)

Die Impulsantwort $h(t)$ eines SISO-Systems ist gegeben durch

$$y(t) = C \Phi(t) B * u(t) + D u(t) = h(t) * u(t)$$

$$h(t) = C \Phi(t) B + D \delta(t)$$

8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)

Ein LTI-System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben).

Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle **Eigenwerte** der **Systemmatrix A** einen **negativen Realteil** besitzen, ist das System **asymptotisch stabil**.

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \forall \lambda \quad \text{Re}\{\lambda\} < 0$$

Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht! Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet **nicht**, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix A des Systems einen negativen Realteil besitzen.

\Rightarrow Pol-/Nullstellenkürzungen

8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist **beobachtbar**, wenn wir, gegeben das Eingangssignal $\underline{u}(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$, über eine endliche Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ die Zustände $\underline{x}(t)$ eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist **nicht beobachtbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die **keinen** Einfluss auf die Ausgänge $y(t)$ haben.
⇒ Man kann aus dem Verhalten von $y(t)$ **nicht** auf die Zustände $\underline{x}(t)$ schliessen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist **steuerbar**, wenn es für jeden Anfangszustand \underline{x}_0 und jeden Endzustand \underline{x}_1 eine Steuerfunktion $\underline{u}(t)$ gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ von \underline{x}_0 zu \underline{x}_1 bringt, d.h. $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$.
- Ein System ist **nicht steuerbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die nicht von den Eingängen $\underline{u}(t)$ beeinflusst werden.

Bemerkungen:

- System (A, B, C, D) ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir $\underline{x}(0)$ bestimmen können

8.14 Steuerbarkeit (S. 277)

Gemäss der äquivalenten ZRD (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV, \hat{B} = V^{-1}B, \hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein SISO-System mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{B} = V^{-1}B$ **ungleich Null** sind.

Ein MIMO-System ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Zeile** von $\hat{B} = V^{-1}B$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

- Ein System ist **vollständig steuerbar**, wenn
- Der **Rang** der Steuerbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung n** des Systems
 - Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Steuerbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

| | | | | | | |
|---|---------------------------------|-----|----------|---------------------------------|--|--|
| $Q_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ | | | | Dimension: $n \times n \cdot m$ | | |
| A | Systemmatrix ($n \times n$) | n | Zustände | | | |
| B | Eingangsmatrix ($n \times m$) | m | Eingänge | | | |

Steuerbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 ctrb(A, B);           % Steuerbarkeitsmatrix
2 rank(ctrb(A, B))      % Rang der Steuerbarkeitsmatrix
```

8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)

Gemäss der äquivalenten ZRD (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV, \hat{B} = V^{-1}B, \hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein SISO-System mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{C} = CV$ **ungleich Null** sind.

Ein MIMO-System ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Spalte** von $\hat{C} = CV$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.15.1 Beobachtbarkeitsmatrix

- Ein System ist **vollständig beobachtbar**, wenn
- Der **Rang** der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung n** des Systems
 - Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Beobachtbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

| | | |
|--|-----|-------------------------------------|
| $Q_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ | | Dimension: $k \cdot n \times n$ |
| | A | Systemmatrix ($n \times n$) |
| | C | Beobachtungsmatrix ($k \times m$) |
| | n | Zustände |
| | m | Eingänge |
| | k | Ausgänge |

Beobachtbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 obsv(A, C);           % Beobachtbarkeitsmatrix
2 rank(obsv(A, C))      % Rang der Beobachtbarkeitsmatrix
```

8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)

Die allgemeine Differentialgleichung von SISO-Systemen der Form

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ergibt mit der Laplace-Transformation und mit $m \leq n$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Diese UTF $H(s)$ kann mit verschiedenen ZRDs (**Normalformen**) abgebildet werden.
Wichtig: Für alle folgenden Normalformen werden die Zustände x_i im blockdiagramm **unmittelbar nach den Integratoren** verwendet.

8.16.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

Die Regelungsnormalform kann **direkt aus der UTF $H(s)$** aufgestellt werden.
Für $m = n$ sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Ausgangsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.2 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

Ein System, welches in Beobachtungsnormalform dargestellt werden kann, ist **beobachtbar!** Für $m = n$ sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Zustandsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.3 Regelungsnormalform ↔ Beobachtungsnormalform

- Die beiden Formen sind **dual** und weisen folgende Zusammenhänge auf (**Transposition**):
- A ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt
 - B und C sind vertauscht
 - D bleibt gleich

8.16.4 Jordan-Normalform (S. 271-273)

Die UTF wird mittels einer **Partialbruchzerlegung** dargestellt. Die Parameter der Partialbruchzerlegung können dann direkt in die Matrix $A = A_{\text{diag}}$ eingetragen werden.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = b_n + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

Die Diagonalform für **einfache, reelle Pole** mit $m = n$ ist:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Hinweis: Mit $m < n$ vereinfacht sich die **Ausgangsgleichung** zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.5 Diagonalform (S. 271-273)

Eine weitere Darstellungsform der Diagonalform ergibt sich mittels **Transposition** der Jordan-Normalform:

- **A** ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt (ergibt wiederum **A**)
- **B** und **C** sind vertauscht
- **D** bleibt gleich

9 Filter

9.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequenzselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequenzselektiven Grundtypen** sind:

- Tiefpass (TP)
- Bandpass (BP)
- Allpass
- Hochpass (HP)
- Bandsperre, Notch (BS)

9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)

Für den Frequenzgang $H(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $|H(j\omega)|^2$ ist immer eine Funktion in ω^2 , da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur $H(s)$ interessant** ist, muss $H(s)$ aus $|H(j\omega)|^2$ 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

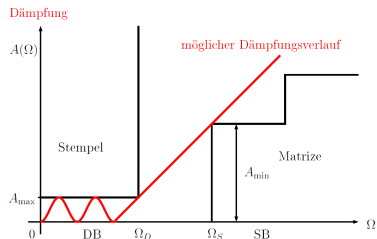
$$\underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{N(-s)}{D(-s)}}_{H(-s)} = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $D(s)$ muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

9.3 Approximation im Frequenzbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet**. Zuerst soll der **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ im Frequenzbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

9.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema beschrieben**. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.

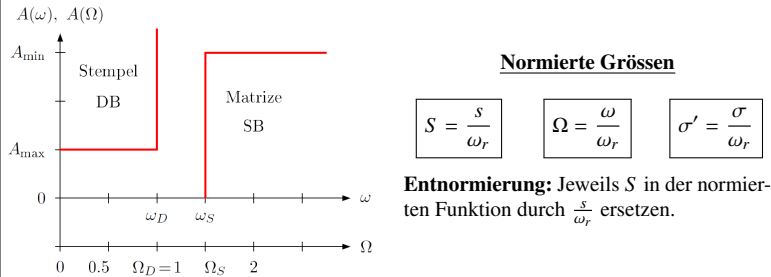
- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung A_{\max}**
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung A_{\min}**

$$A_{\text{dB}}(\omega) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{|H(\omega)|^2}\right) = -20 \cdot \log(|H(\omega)|) \Rightarrow \text{Dämpfung!}$$

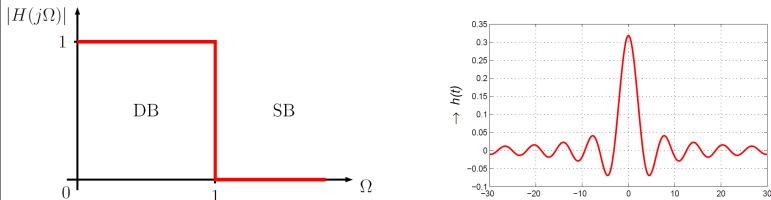
9.3.2 Frequenznormierung

Um möglichst kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich der **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- **BP / BS:** Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$



9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



- **DB:** keine Dämpfung
- **SB:** kein Ausgangssignal

- Akausale Impulsantwort $h(t)$

⇒ Ideales Tiefpass ist physikatisch nicht realisierbar. ⇒ **Approximationen**

9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt für die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

| | | | |
|-----------------------|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| Durchlassbereich (DB) | $0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$ | für $0 \leq \Omega < 1$ | ⇒ $ H(j\Omega) ^2 \approx 1$ |
| Sperrbereich (SB) | $K(\Omega^2) \gg 1$ | für $\Omega > 1$ | ⇒ $ H(j\Omega) ^2 \approx 0$ |

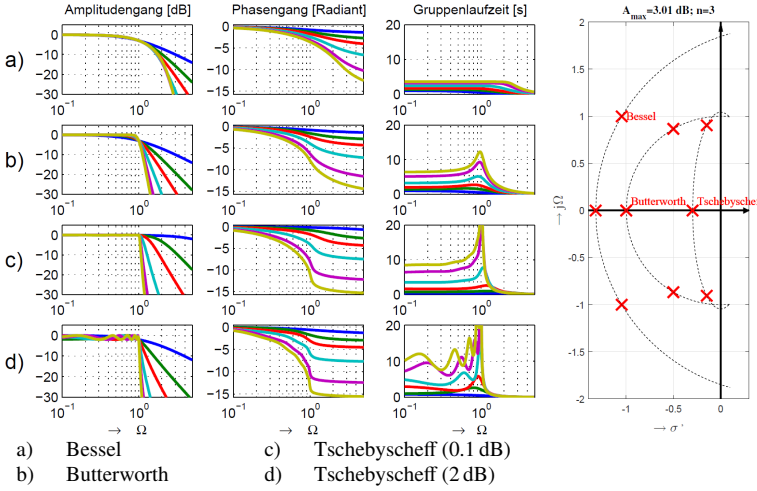
9.6 Standard-Filtertypen – Überblick

- **Kritisch-gedämpfte Filter**
 - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
 - + Kein Überspringen bei Impuls- und Sprungantwort
 - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
 - Kaskadierung von n wirkungsfreien, identischen Filtern 1. Ordnung
 - Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung von 3 dB
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Allpolfilter: n Pole am gleichen Ort in der LHE
- **Butterworth**
 - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
 - + Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
 - Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
 - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
 - Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung von 3 dB
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Allpolfilter: Pole auf Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{n}$
- **Tschebyscheff-I**
 - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
 - **Rippel im Durchlassbereich** (abhängig von Ordnung n)
 - Keine konstante Gruppenlaufzeit (wellig)
 - Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor e
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Allpolfilter: Pole auf einer Ellipse
- **Tschebyscheff-II**
 - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
 - **Rippel im Sperrbereich** (abhängig von Ordnung n)
 - Relativ konstante Gruppenlaufzeit
 - Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor e
 - Steilheit: $-n \cdot 20$ dB / Dekade
 - Kein Allpolfilter
- **Cauer**
 - + **Steilster Übergang** von Durchlass- zu Sperrbereich
 - **Rippel in Durchlassbereich und Sperrbereich** (abhängig von Ordnung n)
 - **Kombination aus Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II**
 - Kein Allpolfilter
- **Bessel**
 - + **Flachster Übergang** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
 - + Konstante Gruppenlaufzeit
 - Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
 - Allpolfilter: Pole auf exzentrischen Kreisen in LHE

9.7 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen

| | Krit. Gedämpft | Butterworth | Tschebyscheff 1 | Tschebyscheff 2 | Cauer | Bessel |
|--------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------|
| Allpolfilter | ja | ja | ja | nein | nein | ja |
| Pol-Lage | reelle Achse <0 | Halbkreis LHE | Ellipse LHE | LHE | Ellipse LHE | exzent. Kreis |
| NS-Lage | - | - | - | jw-Achse | jw-Achse | - |
| DB | monoton | monoton maximalflach | wellig konst. Rippel | monoton | wellig konst. Rippel | monoton |
| SB | streng | monoton | monoton | wellig konst. Rippel | wellig konst. Rippel | monoton |
| Phasengang | sehr gut | mittel | schlecht | schlecht | wild | bestmöglich |

9.7.1 Frequenzgänge / Lage der Pol- und Nullstellen (s. 334)

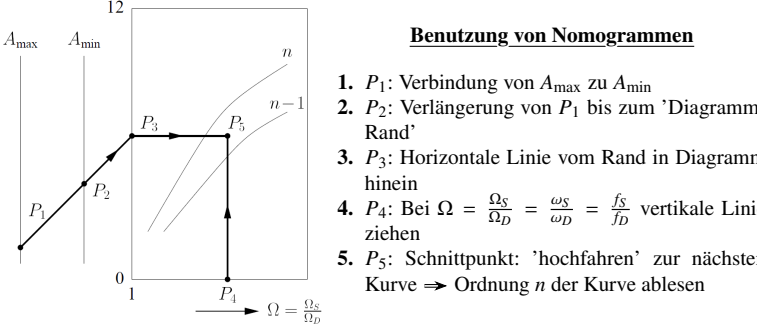


9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen (⇒ 9.6)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen inkl. **Normierung** (⇒ 9.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder **Nomogramm** ⇒ 9.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen (⇒ Tabelle: Skript S. 397, Anhang 7B)
5. Implementierung mit LC-Filtern: Topologie wählen (⇒ Skript S. 409, Anhang 7C)
6. **Normierte** Bauteilwerte aus entsprechender Tiefpass-Tabelle herauslesen (Anhang 7C)
7. **Falls nicht auf $\omega_r = \omega_{3dB}$ normiert wurde:** Normierte Werte auf Ω_{3dB} korrigieren: ⇒ Division durch **Korrekturfaktor** aus Skript S. 401 Tabelle 7.8
8. Komponenten mittels **Entnormierung** bestimmen (⇒ 9.10)
9. **Entnormierung** der Frequenz (⇒ 9.3.2)
 $\omega_{3dB} = \text{Korrekturfaktor} \cdot \omega_r = \text{Korrekturfaktor} \cdot 2\pi f_r$
10. Frequenztransformation (bzw. Komponenten-Transformation) zu HP, BP oder BS durchführen (⇒ 10)

9.9 Nomogramme (s. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



9.10 LC-Filter: Entnormierung der Komponenten

$$L = \frac{L_{\text{norm}}}{\omega_r} \cdot R_r$$

$$C = \frac{C_{\text{norm}}}{\omega_r \cdot R_r}$$

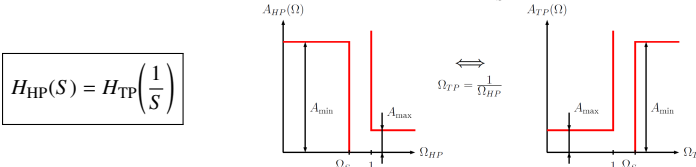
$$R = R_{\text{norm}} \cdot R_r$$

- L_{norm} normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C
- C_{norm} normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C
- R_{norm} normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C
- ω_r Frequenz, auf welche normiert wurde (ω_D oder ω_m gemäss 9.3.2)
- R_r Tatsächlicher Wert von R_2 gemäss Topologie Skript S. 409

10 Filter-Umwandlungen mittels Frequenztransformation

10.1 Transformation: Tiefpass – Hochpass (s. 344)

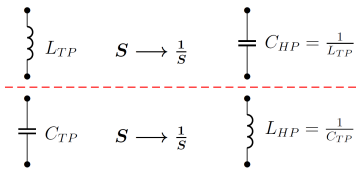
In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle S durch $\frac{1}{S}$ ersetzt



Zwischen allen normierten Frequenzen, im Speziellen den normierten Eckfrequenzen der **Sperrbereiche** $\Omega_{S_{TP}}$ und $\Omega_{S_{HP}}$ und **Durchlassbereiche** $\Omega_{D_{TP}}$ und $\Omega_{D_{HP}}$ gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{S_{HP}}} \quad 1 = \Omega_{D_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{D_{HP}}}$$

10.1.1 Bauteiltransformationen



10.1.2 Singularitäten

Pole: $P_{k,HP} = \frac{1}{P_{k,TP}}$
Nullstellen: $Z_{i,HP} = \frac{1}{Z_{i,TP}}$

⇒ Polgüte bleibt erhalten

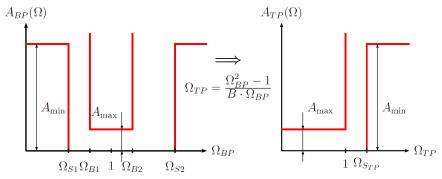
10.2 Transformation: Tiefpass – Bandpass (s. 348)

In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle S durch $\frac{S^2+1}{B \cdot S}$ ersetzt, wobei B der normierten Bandbreite entspricht.

Voraussetzung: $\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}}$
Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, muss sie erfüllt werden, indem das Toleranzschema 'strenger' ausgelegt wird.

$$H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{S^2+1}{B \cdot S}\right)$$

$$B = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2} - \Omega_{B1}$$

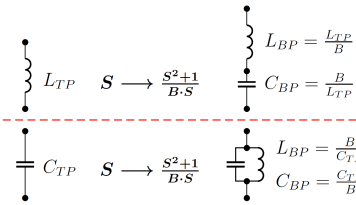


Zwischen allen normierten Frequenzen $\Omega_{S_{TP}}$, Ω_{S1} , Ω_{S2} , Ω_{B1} und Ω_{B2} gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{B} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}} = \frac{\omega_{S2} - \omega_{S1}}{\omega_{B2} - \omega_{B1}} = \frac{f_{S2} - f_{S1}}{f_{B2} - f_{B1}}$$

Hinweis: Die Transformation erhöht die Filterordnung um Faktor 2

10.2.1 Bauteiltransformationen



10.2.2 Singularitäten

⇒ Siehe Skript S. 351-352

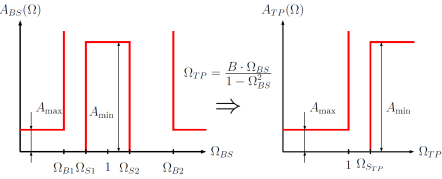
10.3 Transformation: Tiefpass – Bandsperre (s. 357)

In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle S durch $\frac{B \cdot S}{S^2+1}$ ersetzt, wobei B der normierten Bandbreite entspricht.

Voraussetzung: $\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}}$
Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, muss sie erfüllt werden, indem das Toleranzschema 'strenger' ausgelegt wird.

$$H_{BP}(S) = H_{TP}\left(\frac{B \cdot S}{S^2+1}\right)$$

$$B = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_r} = \Omega_{B2} - \Omega_{B1}$$

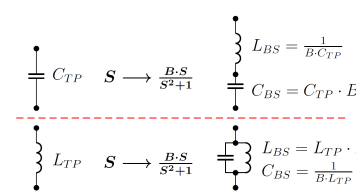


Zwischen allen normierten Frequenzen $\Omega_{S_{TP}}$, Ω_{S1} , Ω_{S2} , Ω_{B1} und Ω_{B2} gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{B}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \frac{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_{S2} - \omega_{S1}} = \frac{f_{B2} - f_{B1}}{f_{S2} - f_{S1}}$$

Hinweis: Die Transformation erhöht die Filterordnung um Faktor 2

10.3.1 Bauteiltransformationen



10.3.2 Singularitäten

⇒ Siehe Skript S.359

11 Filter-Approximationen im Detail

11.1 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (s. 299)

Tiefpassfilter n . Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweils einen **n -fachen Pol** auf der **negativen σ -Achse**.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n}$$

n

Ordnung des Filters

ω_c

3 dB-Punkt jedes der n Teilfilter

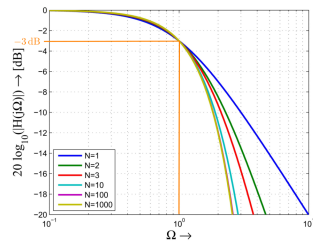
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10n}} - 1}}$$

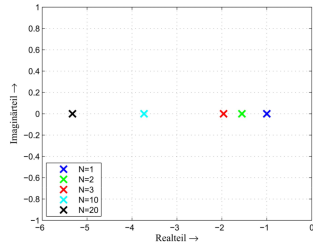
11.1.1 Eigenschaften kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ -Achse \Rightarrow Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 3 dB Dämpfung
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend \Rightarrow keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung näher in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

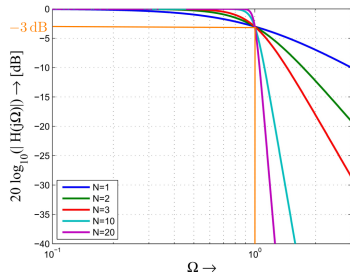
Amplitudengänge



Pol-Lagen



11.2 Approximation nach Butterworth (S. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

11.2.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (S. 303)

- **Durchlassbereich**
 - Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
 - Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 3 dB Dämpfung
 - Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- **Sperrbereich**
 - Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20$ dB/ Dekade
- **Allgemein**
 - Amplitudengang ist streng-monoton fallend \Rightarrow keine Welligkeit

11.2.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (S. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = \frac{1}{H(s) \cdot H(-s)} = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{D(-s)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ($D(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n$$

Mit dem Ansatz

$$D(s) = \prod_{j=1}^t (s^2 + a_j \cdot s + b_j) \prod_{j=2t+1}^n (s - c_j)$$

wird das Produkt $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

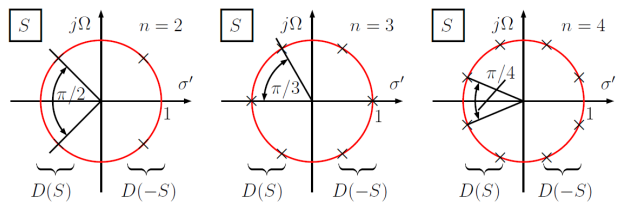
11.2.3 Bestimmung der Pol-Lage (S. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 11.2.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Auflösen der Gleichung nach s kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- Für **Nennerpolynom** $D(s) = \frac{1}{H(s)}$ **müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!**

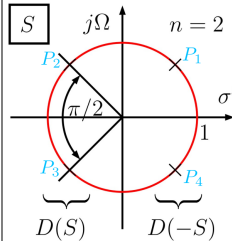


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz: } H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + s^4 \Leftrightarrow s^4 = -1 \Leftrightarrow e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$



Aufgelöst nach s liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Linke Halbebene

$$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

\Rightarrow Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(s - P_2) \cdot (s - P_3)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion $H(S)$ auch mittels folgendem Ansatz für $D(s)$ und anschliessendem Koeffizientenvergleich von $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt werden.

$$\text{Ansatz: } D(s) = s^2 + a_1 s + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } D(s) \cdot D(-s) = s^4 + (2b_1 - a_1^2)s + b_1^2 \stackrel{!}{=} s^4 + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2} \text{ und } b_1 = 1 \Rightarrow s^2 + \sqrt{2}s + 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

11.2.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_D^{2n}) = A_{\max}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$

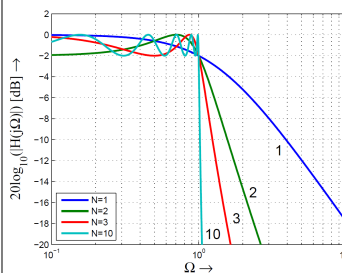
Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als

[.] bedeutet 'aufrunden' auf ganze Zahl' (ceil()-Funktion)

\Rightarrow Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem **Nomogramm** bestimmt werden.

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}\right)}{2 \cdot \log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

11.3 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)



Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-I als $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 \cdot C_n^2(\Omega)}}$$

e **Rippfaktor** (Konstante)
 $C_n(\Omega)$ Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung n

Das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ ist im Durchlassbereich und im Sperrbereich **unterschiedlich definiert!**

$$\text{Durchlassbereich } (|\Omega| \leq 1)$$

$$C_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos(\Omega))$$

$$\text{Sperrbereich } (|\Omega| \geq 1)$$

$$C_n(\Omega) = \cosh(n \cdot \text{arccosh}(\Omega))$$

Für die Ordnung $n \geq 2$ lässt sich das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ mittels Rekursionsformel berechnen

$$C_n(\Omega) = 2 \Omega C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega)$$

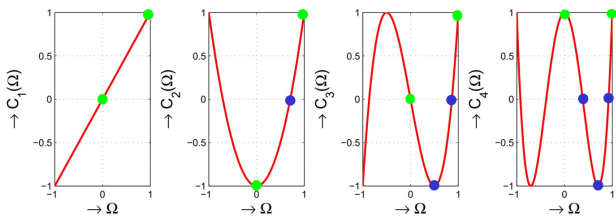
$$C_0(\Omega) = 1 \quad C_1(\Omega) = \Omega$$

Zwischen dem Rippfaktor e und der maximalen Dämpfung A_{\max} gilt der Zusammenhang:

$$A_{\max} = 10 \cdot \log_{10}(1 + e^2) \Leftrightarrow e = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

11.3.1 Eigenschaften der Tschebyscheff-I-Approximation (S. 311)

Im **Durchlassbereich** schwankt das Tschebyscheff-Polynom in den Grenzen ± 1 . Im **Sperrbereich** nimmt C_n monoton mit Ω zu.



• Durchlassbereich

- Für $\Omega = 0$ ist für ungerade n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 0$ ist für gerade n : $|H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Rightarrow$ **nicht** 3 dB Dämpfung
- Aus der Anzahl **Wendepunkte** und **Endpunkte** des Amplitudengangs im **Durchlassbereich** ($0 \leq \Omega \leq 1$) lässt sich die **Ordnung n** bestimmen.
- Ordnung = (Summe aller Wendepunkte) plus beide Endpunkte minus 1**

• Sperrbereich

- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{e \cdot C_n(\Omega)} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$ bzw. $-n \cdot 6.02 \text{ dB/Oktave}$
- Fixe Ordnung n : Je grösser der Rippfaktor e , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich
- Fixer Rippfaktor e : Je grösser die Ordnung n , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich

11.3.2 Pol-Lagen (S. 313)

- Die Pole liegen auf einer Ellipse
- Allpolfilter
- Je näher die Pole an der $j\omega$ -Achse liegen, desto mehr Rippel gibt es im Phasengang

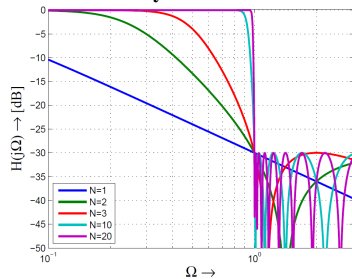
11.3.3 Filterordnung (S. 316)

$$n = \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10-1}}{10^{A_{\max}/10-1}}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)}$$

\Rightarrow **Nomogramme!**

11.4 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)

Inverses Tschebyscheff-Filter

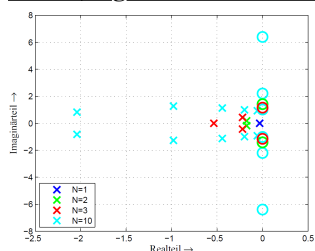


Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-II-Approximation als $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^2 C_n^2(\frac{1}{\Omega})}}}$$

e **Rippfaktor** (Konstante)
 $C_n(\Omega)$ Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung n

11.4.1 Lage der Pole und Nullstellen (S. 321)



• Kein Allpolfilter

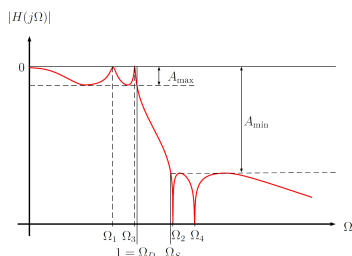
- Gerade Ordnung n : n Pole und n Nullstellen
- Ungerade Ordnung n : n Pole und $n-1$ Nullstellen

11.4.2 Filterordnung (S. 319)

$$n = \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10-1}}{10^{A_{\max}/10-1}}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)}$$

Die Filterordnung berechnet sich identisch wie bei der Tschebyscheff-I-Approximation!
 \Rightarrow Gleiches Nomogramm wie für Tschebyscheff-I

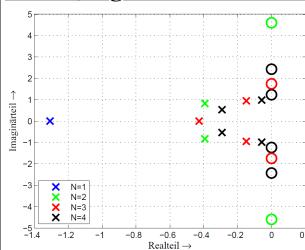
11.5 Approximation nach Cauer (S. 322)



Kombination von Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II

Daher spricht man auch von Complete-Chebyshev- oder Chebyshev-Cauer-Filtern (CC-Filter).

11.5.1 Lage der Pole und Nullstellen (S. 325)



• Kein Allpolfilter

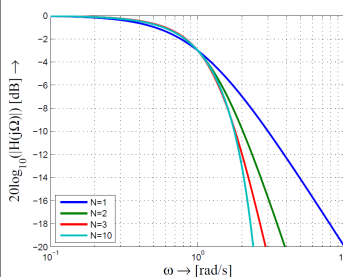
- Gerade Ordnung n : n Pole und n Nullstellen
- Ungerade Ordnung n : n Pole und $n-1$ Nullstellen
- Nullstellen auf $j\omega$ -Achse **ausserhalb vom Einheitskreis**

11.5.2 Filterordnung (S. 326)

$$n = \frac{\left| K\left(\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(1 - \frac{A_{\max}/10-1}{A_{\min}/10-1}\right) \right|}{\left| K\left(1 - \left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(\frac{A_{\max}/10-1}{A_{\min}/10-1}\right) \right|} \quad \text{mit } K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta$$

\Rightarrow **Nomogramm!**

11.6 Approximation nach Bessel (S. 328)



Bessel-Filter liefern eine möglichst **lineare Phase**, d.h. eine **konstante Gruppenlaufzeit**.

Die Übertragungsfunktion $H(S)$ lautet

$$H(S) = K \cdot e^{-S T_0}$$

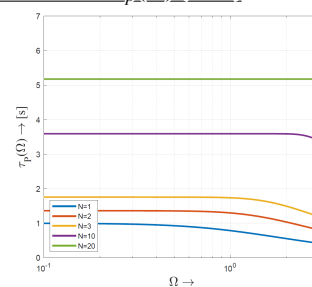
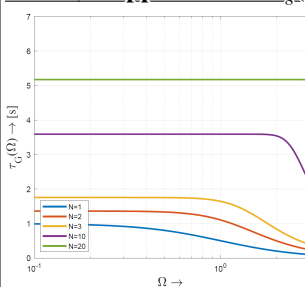
Für die Gruppenlaufzeit folgt somit

$$\tau_g(\Omega) = \frac{-d\theta(\Omega)}{d\Omega} = T_0 = \text{const}$$

Ohne Einschränkung kann in der UTF $T_0 = 1$ und $K = 1$ gesetzt werden:

$$H(S) = e^{-S} = \frac{1}{e^S} \approx \frac{1}{D(S)}$$

11.6.1 Gruppenlaufzeit $\tau_g(\Omega)$ und Phasenlaufzeit $\tau_p(\Omega)$ (S. 331)



12 Anhang

12.1 Ableitungsregeln

Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel $g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

12.2 Ableitungs-Tabelle

| Function $f(x)$ | Derivative $\frac{df(x)}{dx}$ |
|-----------------|-------------------------------|
| 1 | 0 |
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| x^a | $a \cdot x^{a-1}$ |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| e^x | e^x |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |

| Function $f(x)$ | Derivative $\frac{df(x)}{dx}$ |
|-----------------|---------------------------------------|
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| a^x | $\ln(a) \cdot a^x$ |