

Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

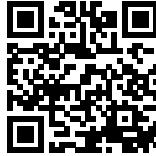
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240523

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

| | | | |
|---|----------|---|---|
| 1 Filter | 2 | | |
| 1.1 Grundtypen (S. 291) | 2 | 1.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299) | 2 |
| 1.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ | 2 | 1.7 Standard-Filtertypen – Überblick | 2 |
| 1.3 Approximation im Frequenzbereich | 2 | 1.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen | 2 |
| 1.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297) | 2 | 1.9 Nomogramme (S. 393) | 2 |
| 1.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega)$ | 2 | 1.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern | 2 |
| | | 1.11 Approximation nach Butterworth (S. 303) | 3 |

1 Filter

1.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequenzselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequenzselektiven Grundtypen** sind:

- Tiefpass (TP)
- Bandpass (BP)
- Allpass
- Hochpass (HP)
- Bandsperre, Notch (BS)

1.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)

Für den Frequenzgang $H(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$
$$H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $|H(j\omega)|^2$ ist immer eine Funktion in ω^2 , da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur $H(s)$ interessant** ist, muss $H(s)$ aus $|H(j\omega)|^2$ 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

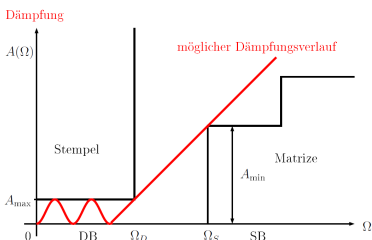
$$\underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{N(-s)}{D(-s)}}_{H(-s)} = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $D(s)$ muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

1.3 Approximation im Frequenzbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion**, die einen **vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet**. Zuerst soll der **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ im Frequenzbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

1.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



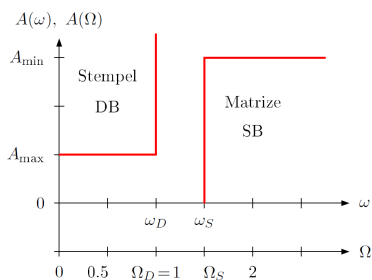
Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema beschrieben**. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.

- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung A_{\max}**
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung A_{\min}**

1.3.2 Frequenznormierung

Um möglichst kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- **BP / BS:** Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$



Normierte Größen

$$S = \frac{s}{\omega_r}$$

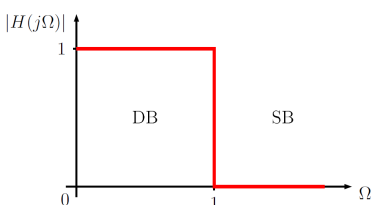
$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_r}$$

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}$$

Hinweis:

Zur Entnormierung wird jeweils S in der normierten Funktion durch $\frac{s}{\omega_r}$ ersetzt.

1.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



- DB: keine Dämpfung
- SB: kein Ausgangssignal

⇒ Ideales Tiefpass ist physikalisch nicht realisierbar. ⇒ **Approximationen**

1.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt für die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

| | | | |
|-----------------------|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| Durchlassbereich (DB) | $0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$ | für $0 \leq \Omega < 1$ | ⇒ $ H(j\Omega) ^2 \approx 1$ |
| Sperrbereich (SB) | $K(\Omega^2) \gg 1$ | für $\Omega > 1$ | ⇒ $ H(j\Omega) ^2 \approx 0$ |

1.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)

Tiefpassfilter n . Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweils einen **n -fachen Pol** auf der **negativen σ -Achse**.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n}$$

n Ordnung des Filters
 ω_c 3 dB-Punkt jedes der n Teilfilter

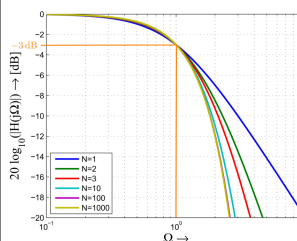
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{20n}} - 1}}$$

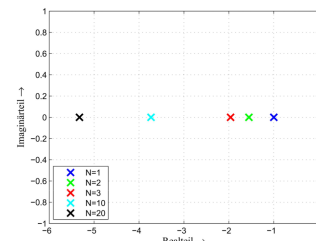
1.6.1 Eigenschaften kritisch-gedämpfter Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ -Achse ⇒ Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3$ dB Dämpfung
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20$ dB/Dekade
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

Amplitudengänge



Pol-Lagen



1.7 Standard-Filtertypen – Überblick

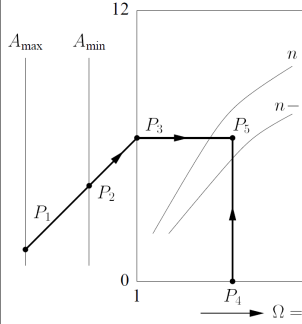
- **Butterworth**
 - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
 - + Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
 - + Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
 - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
- **Bessel**
 - + **Flachster Übergang** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
 - + Konstante Gruppenlaufzeit
 - Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
- **Tschebyscheff-I**
 - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
 - **Rippel** im Durchlassbereich
 - Keine konstante Gruppenlaufzeit

1.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen (⇒ 1.7)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen inkl. Normierung (⇒ 1.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder Nomogramm ⇒ 1.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen (⇒ Matlab)
5. Komponenten mittels Entnormierung bestimmen (Tabellen ⇒ 1.10)

1.9 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



Benutzung von Nomogrammen

1. P_1 : Verbindung von A_{\max} zu A_{\min}
2. P_2 : Verlängerung von P_1 bis zum 'Diagramm-Rand'
3. P_3 : Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4. P_4 : Bei $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$ vertikale Linie ziehen
5. P_5 : Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve ⇒ Ordnung n der Kurve ablesen

1.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern (S. 409)

Achtung: Normierung der Widerstände beachten!

1.11 Approximation nach Butterworth (S. 303)

Das die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt.

Allgemein

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

$\Rightarrow |H(j\Omega)|$ ist streng-monoton fallend!

Butterworth

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

1.11.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (S. 303)

Durchlassbereich

- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind

Sperrbereich

- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$

Allgemein

- Amplitudengang ist streng-monoton fallend \Rightarrow keine Welligkeit

1.11.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (S. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{1}{s + (-s^2)^n} = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{D(-s)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ($D(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n$$

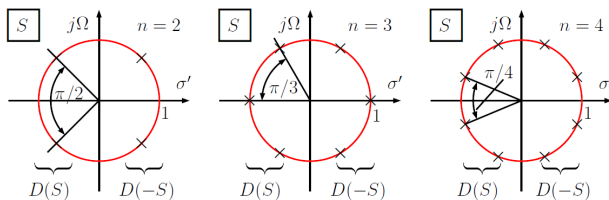
1.11.3 Bestimmung der Pol-Lage (S. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 1.11.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Auflösen der Gleichung nach s kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- Für Nennerpolynom $D(s) = \frac{1}{H(s)}$ müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!

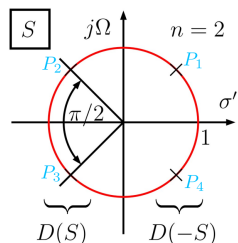


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz: } H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^4) \Leftrightarrow s^4 = -1 \Leftrightarrow e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$



Aufgelöst nach s liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Linke Halbebene

$$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

\Rightarrow Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(s - P_2) \cdot (s - P_3)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

1.11.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_D^{2n}) = A_{\max}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$

Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als
[.] bedeutet 'aufrunden auf ganze Zahl'

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}\right)}{2 \cdot \log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

\Rightarrow Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem Nomogramm bestimmt werden.