

Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

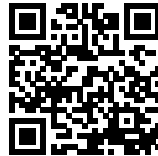
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240507

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

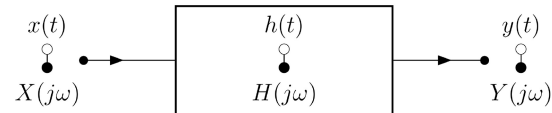
1 LTI-Systeme (S. 171)	2	5 Stabilität im Bodediagramm	6
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2	5.1 Amplitudenrand und Phasenrand	6
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm	6
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2	6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)	6
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2	6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab	6
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2	7 Stabilität im Nyquist-Diagramm	6
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2	7.1 Offener und geschlossener Regelkreis	6
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2	7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	6
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3	7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)	6
2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel	3	7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm	6
2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)	3	8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)	6
2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)	3	8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)	6
2.3 Rechenregeln mit Dezibel	3	8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)	6
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3	8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)	7
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor	3	8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)	7
2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3	8.5 ZRD mit Matlab	7
3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme	3	8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)	7
3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4	8.7 Matrix $\mathbf{b}\mathbf{m}\mathbf{A}$ diagonalisieren	7
3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)	4	8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2×2 Matrix invertieren	8
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm	4	8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)	8
3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4	8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)	8
3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4	8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)	8
3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm	4	8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)	8
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	5	8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)	8
3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)	5	8.14 Steuerbarkeit (S. 277)	8
3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	5	8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)	8
4 Bodediagramm	5	8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)	8
4.1 Bodediagramme mit Matlab	5		
4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)	5		
4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)	6		

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

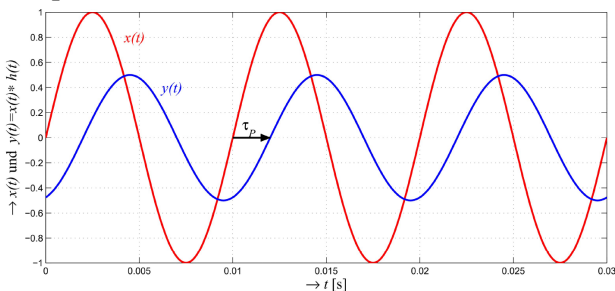
Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.

⇒ **Diese Verzögerung wird Phasenlaufzeit genannt**

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$

Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** t_0 ($= \tau_P = \tau_G$)

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $1 > k \geq 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)$$

1.6.2 Total Harmonic Disortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen: $\text{THD} \approx k$ allgemein: $\text{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$h(-\tau)$

\longleftrightarrow

$H^*(j\omega)$

$\varphi_{xx}(\tau)$

\longleftrightarrow

$\Phi_{xx}(j\omega)$

$h(\tau)$

\longleftrightarrow

$H(j\omega)$

$h(\tau) * h(-\tau)$

\longleftrightarrow

$|H(j\omega)|^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$\varphi_{yy}(\tau)$

\longleftrightarrow

$\Phi_{yy}(j\omega)$

AKF

PSD

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren \Rightarrow Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren \Rightarrow Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ($U_2 > U_1$) \Rightarrow positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ($U_2 < U_1$) \Rightarrow negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$T_{U_{tot}}$

$=$

$\frac{U_2}{U_1}$

\cdot

$\frac{U_3}{U_2}$

\cdot

$\frac{U_4}{U_3}$

\cdot

$\frac{U_5}{U_4}$

$=$

$\frac{U_5}{U_1}$

$=$

$\frac{10}{1}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{10}{1}$

$=$

50

$a_{U_{tot}}$

$=$

-20dB

$+$

3dB

$+$

3dB

$+$

-20dB

$=$

-34dB

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20 \text{ dB} + 3 \text{ dB} + 3 \text{ dB} - 20 \text{ dB} = -34 \text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 – 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 – 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 – 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 – 6 = 10 – 3 – 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 – 10 = 5 – 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 – 3 – 3 – 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
–1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$

$(L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{774.6 \text{ mV}} \right)$

$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$

$(L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{1.291 \text{ mA}} \right)$

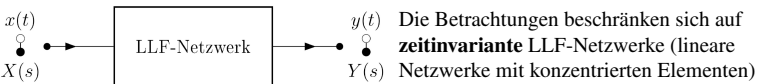
$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$

$(L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{1 \text{ mW}} \right)$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μW

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differentialgleichung der folgenden Form beschreiben:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$	Zählerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$D(s)$	Nennerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal

Die Wurzeln der Gleichung $N(s) = 0$ ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von $D(s) = 0$ ergeben n Pole des Systems. **Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!**

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird $H(s)$ faktorisiert.
 \Rightarrow Die UTF $H(s)$ ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K **vollständig bestimmt!**

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiert-komplexe Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^r (s^2 + 2\sigma_{pj}s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2r+1}^n (s - p_j)}$$

Legende:

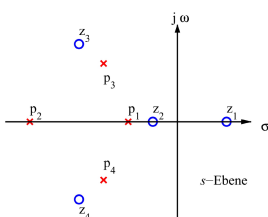
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Pole in der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann $H(s)$ mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2r+1}^n (s - p_j)}$$

ω_{pj}	Polstellenfrequenzen	ω_{zi}	Nullstellenfrequenzen
q_{pj}	Polstellengüten	q_{zi}	Nullstellengüten

3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)



Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot

Pole Kreuze
NS Kreise

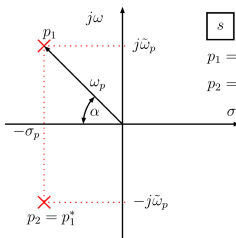
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm

Für **Grenzstabilität** gilt eine **UND-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte. Für **Stabilität und Instabilität** gilt eine **ODER-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.

- **Stabil:**
 - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE)
 - Keine Polstellen vorhanden
- **Asymptotisch stabil:**
 - Polstellen nur in der linken Halbebene (LHE)
- **Grenzstabil:**
 - **Keine** Polstellen in der rechten Halbebene (RHE)
 - Mindestens eine **einfache Polstelle** auf imaginärer Achse
 - **Keine doppelten** Polstellen auf der imaginären Achse
- **Instabil:**
 - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE)
 - Mindestens eine **mehrfache Polstelle** auf der imaginären Achse

3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



$$p_1 = -\sigma_p + j\omega_p$$

$$p_2 = -\sigma_p - j\omega_p = p_1^*$$

$$(s - p_1) \cdot (s - p_2) = s^2 + 2\sigma_p s + (\sigma_p^2 + \omega_p^2)$$

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \omega_p^2}$$

$$q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma_p} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)}$$

ω_p Polfrequenz \Rightarrow Entspricht Abstand des Pols vom Ursprung
 q_p Polgüte

Grenzfälle

$\sigma_p = \omega_p$ Doppelpol auf neg. reeller Achse $\Rightarrow q_p = \frac{1}{2}$
 $\sigma_p = 0$ Polpar auf imaginärer Achse $\Rightarrow q_p = \infty$

3.4.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

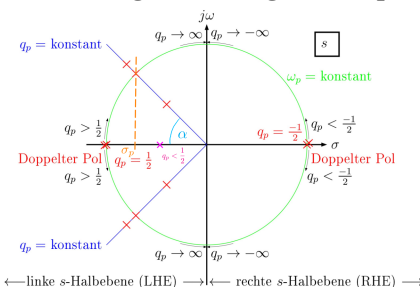
$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$$

- \Rightarrow Für einzelne (reelle) Pole ist die Güte q_p nicht definiert.
- \Rightarrow Die Polfrequenz ω_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

$$\sigma_{p1} = \sigma_{p2} \quad |q_p| = \frac{1}{2}$$

3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann $s = j\omega$ eingesetzt werden.

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$H(s)$	Übertragungsfunktion (UTF)	$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$H(j\omega)$	Frequenzgang	$\theta(\omega)$	Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- **Nyquist-Diagramm**
 $H(j\omega)$ wird in Polarkoordinaten mit ω als Parameter aufgezeichnet
- **Bode-Diagramm**
 $\alpha_{dB}(\omega)$ und $\theta(\omega)$ werden je in Funktion von $\log_{10}(\omega)$ aufgezeichnet

3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ in die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ als:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2) \dots (j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2) \dots (j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0 - p_1) = |j\omega_0 - p_1| \cdot e^{j\theta_{p1}} = A_{z1} \cdot e^{j\theta_{z1}}$$

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ in den **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ und den **Phasengang** $\theta(\omega)$ separiert werden:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \dots A_{zm} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \dots + \theta_{zm})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \dots A_{pn} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \dots + \theta_{pn})}}$$

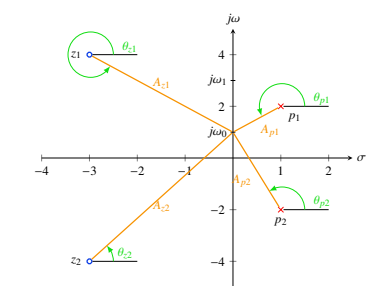
Betrag

$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}}$$

Phase

$$\theta(\omega_0) = \underbrace{\text{Phase von } K}_{\text{meistens 0}} + \sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^n \theta_{pj}$$

3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

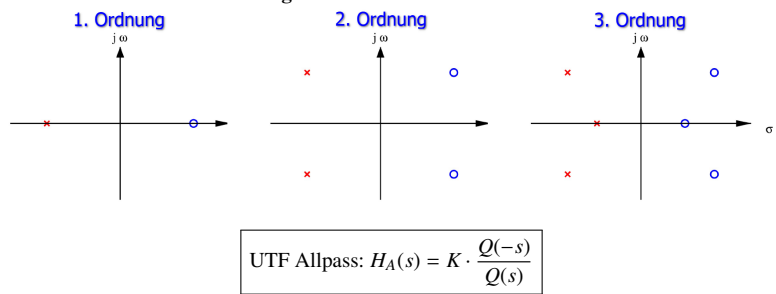
- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen – Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeler Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von –20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen ω konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration**



Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF $H(S)$ kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

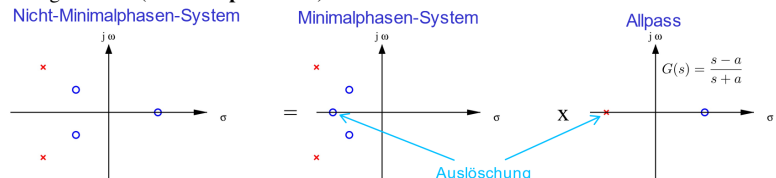
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
 - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

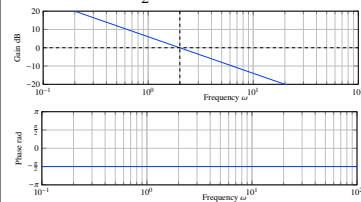
4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s;      % UTF des Systems
3 bode(G)              % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G)           % Amplitudengang des Systems
```

4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

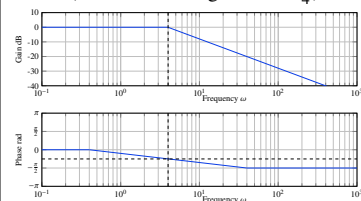
4.2.1 Pol im Ursprung

- $H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$
 - Betrag = Gerade mit Steigung –20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \alpha$
 - Phase = $-\frac{\pi}{2} = \text{const}$



4.2.3 Reeller Pol

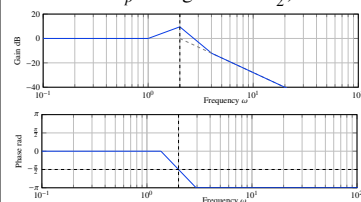
- $H(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha}+1} = \frac{4}{s+4}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung –20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $-\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $-\frac{\pi}{4}$)



4.2.5 Konj.-komplexe Pole

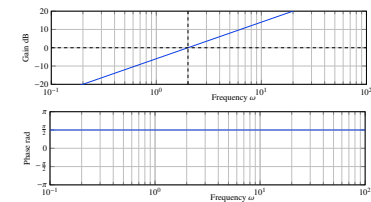
Voraussetzung: $|q_p| > \frac{1}{2}$

- $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von 0 bis $\frac{\omega_p}{2}$; für $\omega > 2\omega_p$ eine Gerade mit Steigung –40 dB/Dek; Überhöhung bei $\omega = \omega_p$ mit Maximalwert $20 \cdot \log_{10}(q_p)$; Approximation der Überhöhung von mit weiteren Geraden
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10}$; für $\omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}$ Konstante mit Wert $-\pi$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \omega_p$ beträgt Phase $-\frac{\pi}{2}$)



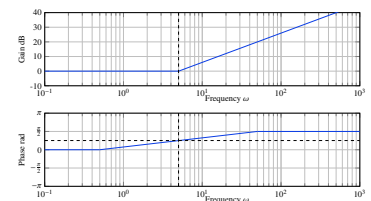
4.2.2 Nullstelle im Ursprung

- $H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$
 - Betrag = Gerade mit Steigung +20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
 - Phase = $+\frac{\pi}{2} = \text{const}$



4.2.4 Reelle Nullstelle

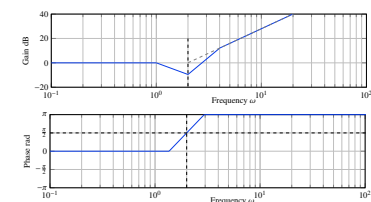
- $H(s) = \frac{s+\alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s+5}{5}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung +20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $+\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $+\frac{\pi}{4}$)



4.2.6 Konj.-komplexe NS

Voraussetzung: $|q_z| > \frac{1}{2}$

- $H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von 0 bis $\frac{\omega_p}{2}$; für $\omega > 2\omega_p$ eine Gerade mit Steigung +40 dB/Dek; Senke bei $\omega = \omega_p$ mit Minimalwert $-20 \cdot \log_{10}(q_p)$; Approximation der Senke mit weiteren Geraden
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10}$; für $\omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}$ Konstante mit Wert $+\pi$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \omega_p$ beträgt Phase $+\frac{\pi}{2}$)

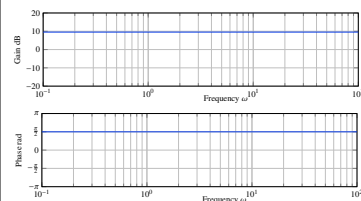


Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, Seite 235

q_p	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{2q_p}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{\frac{1}{4q_p}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
 - Betrag = $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
 - Phase = $\beta = \text{const}$



4.2.8 Weitere Bemerkungen

- **Inverser Frequenzgang:**
 - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
 - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- **Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
 - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am grössten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

$$\text{UTF Tiefpass 2. Ordnung: } H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$$

$$\text{Frequenz beim Maximum: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$$

$$\text{Höhe des Maximums: } |H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$$

⇒ Es gilt: $\omega_{\max} \leq \omega_p$

4.3.1 Spezialfall $q = 1$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$$

4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Frequenz: } \omega_{\max} &= \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} \\ &= \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \infty$$

4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = 0$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$$

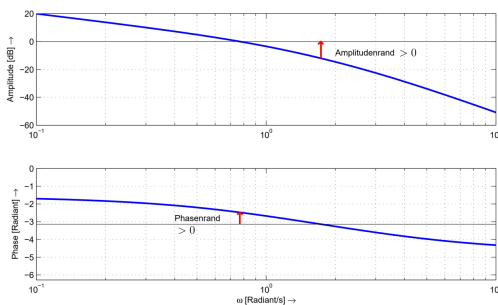
5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis $H(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei $s = 0$), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn $H(j\omega)$ für die **Durchgangsfrequenz** ω_D bei der die Amplitude $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0$ dB ist, und eine Phase $> -\pi$ hat.
⇒ Amplitudenrand und Phasenrand müssen > 0 sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

- **Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Phase gleich $-\pi$ bzw. -180° ist.
- **Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Abstand des Phasengangs zur $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzganges in Abhängigkeit der Frequenz f (aufsteigende Werte von f) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.

Auf die Konstruktion von Ortskurven wird im Modul Regelungstechnik 2 im Detail eingegangen. Darum soll hier nur auf die Beschreibung im Skript (S. 240 - 242) verwiesen werden.

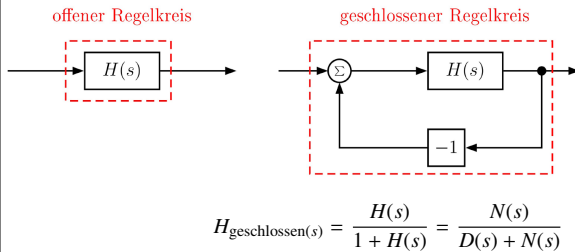
6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 1/s;    % UTF des Systems
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve** $H(s)$ (**offener Regelkreis**) einen Aussage über Die **Stabilität** des (**geschlossenen Regelkreises**) zu machen. Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

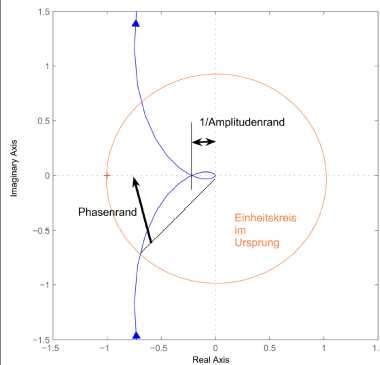
Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt $(-1, j0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern **'links** liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.

- **Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Frequenz, bei welche die **negative** reelle Achse geschnitten wird: ω_π
 - Bei ω_π : $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$ = Abstand zum Ursprung
- **Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Frequenz, bei welche Eintritt in den Einheitskreis erfolgt: ω_D
 - Bei ω_D : Winkel bis zu 180°

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt $(-1, j0)$ **'links** liegen gelassen' wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt.

Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

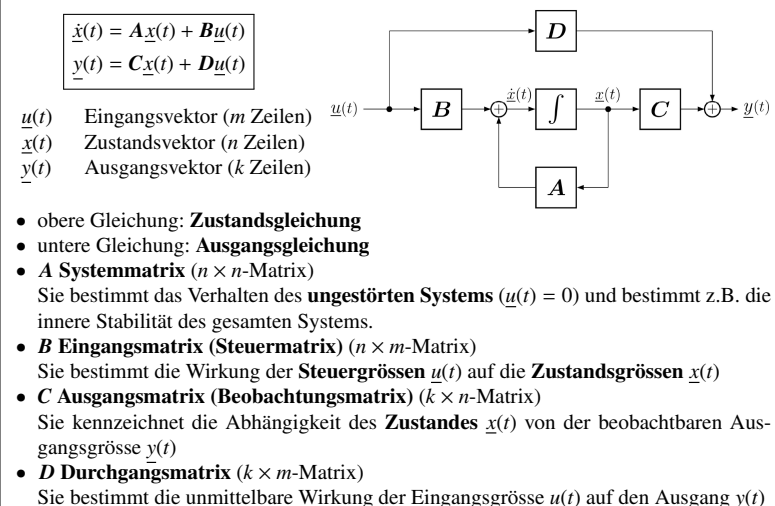
8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Grundidee: Differentialgleichung n . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

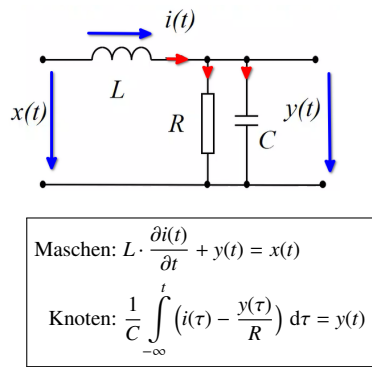
8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)

- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können ⇒ Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**, in der Elektrotechnik L und C
- **Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)



Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität: $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

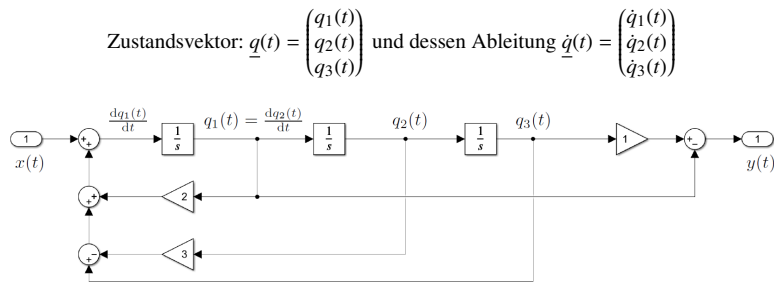
Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

Zustände: $i(t), y(t)$
Eingang: $x(t)$
Ausgang: $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t)$$
$$\tilde{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot x(t)$$

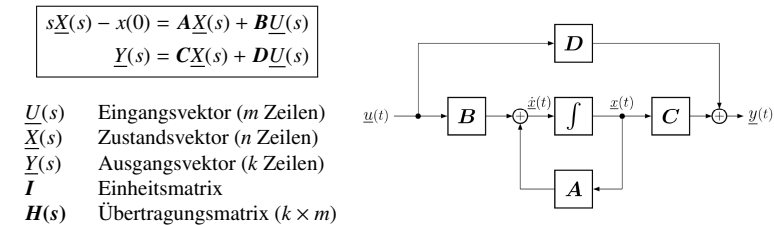
Beispiel: ZRD aus Signalfussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen A, B, C und D gefunden werden.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{q}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{q(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t)$$
$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{q(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot x(t)$$

8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)



Mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\tilde{Y}(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}_{H(s)} \tilde{U}(s)$$

Hinweis: Aus einem Signalfussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

8.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

Übertragungsmatrix

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matrizenform

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

- $H(s)$ hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix D

Übertragungsfunktion

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen** $x(t)$. Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

8.5 ZRD mit Matlab

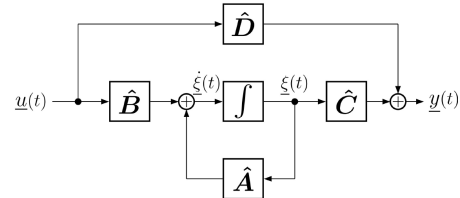
$$H(s) = \frac{b_i s^i + b_{i-1} s^{i-1} \dots b_1 s^1 + b_0}{a_i s^i + a_{i-1} s^{i-1} \dots a_1 s^1 + a_0}$$

- `[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)` % $H(s)$ aus Matrizen berechnen
- `(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)` % Matrizen aus $H(s)$ berechnen

8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix** T ($n \times n$ -Matrix, nicht singulär, $TT^{-1} = I = T^{-1}T$) kann man **verschiedenste Zustandsgrößen** und **Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{C} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} TAT^{-1} \\ CT^{-1} \end{bmatrix}} \xi(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{D} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} TB \\ D \end{bmatrix}} u(t)$$



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 8.2 bezüglich $y(t)$ und $u(t)$. Die bedeutet, dass die **Zustandsgrößen** $\xi(t)$ und $x(t)$ **willkürlich** gewählt werden können, solange T nicht singulär ist (Determinante von $T \neq 0$)

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrößen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

8.7 Matrix A diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix** A diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix $\hat{A} = TAT^{-1}$ wird dann üblicherweise A_{diag} verwendet.

- λ_i Eigenwerte der Matrix A
- \vec{v}_i Eigenvektoren der Matrix A
- V Matrix mit Eigenvektoren von A
- $A_{diag} = \Lambda$ Diagonalisierte Matrix A mit Eigenwerten λ_i auf Diagonale
- T Transformationsmatrix

$$A_{diag} = \Lambda = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

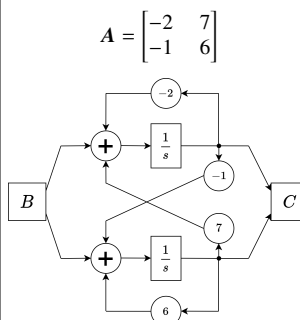
$$T = V^{-1}$$
$$T^{-1} = V$$

8.7.1 Vorgehen Matrix diagonalisieren

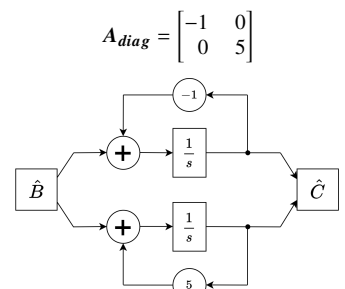
- Ansatz: $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $(\lambda I - A) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen: $|\lambda I - A| = 0$
 \Rightarrow Eigenwerte λ_i
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren \vec{v}_i gefunden werden:
 - Eigenwert λ_i in Gleichungssystem $(\lambda_i I - A) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ einsetzen
 - Einen Wert von $\vec{v}_i = 1$ wählen und Eigenvektor \vec{v}_i als Spaltenvektor schreiben
- Matrix V aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix Λ 'zusammenbauen', indem man Eigenwerte λ_i auf Diagonale schreibt

8.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System

Nicht-entkoppeltes System



Entkoppeltes System



8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

A = [a b; c d] A^-1 = 1/det(A) * [d -b; -c a] mit det(A) = ad - bc

Beispiel: Matrix-Diagonalisierung (S. 258)

A = [-2 7; -1 6] |lambda I - A| = [(lambda + 2) -7; 1 (lambda - 6)] = (lambda + 2) * (lambda - 6) - 7 * (-1) = 0 => Mitternachtsformel liefert die Eigenwerte lambda_1 = -1 und lambda_2 = 5

Ersten Eigenwert lambda_1 = -1 in (lambda_1 I - A) * v_1 = 0 einsetzen 1 * v_11 - 7 * v_21 = 0 1 * v_11 - 7 * v_21 = 0

Wähle v_21 = 1 -> v_1 = [7; 1] Gleichen Vorgehen für zweiten Eigenvektor v_2 Lambda = [lambda_1 0; 0 lambda_2] V = [v_1 v_2] = [v_11 v_12; v_21 v_22]

8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung x_dot(t) = A x(t) + B u(t) ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur einem Zustand würde man den Ansatz x(t) = e^{at} wählen. Da im Allgemeinen Systeme mit mehreren Zuständen betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

e^{At} = I + At + A^2/2! t^2 + ... + A^k/k! t^k + ... = sum_{k=0}^inf A^k t^k / k!

Der Ansatz ist beschrieben als desser Taylor-Reihe. Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor y(t) die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

y(t) = C Phi(t) x(0) + integral_0^t C Phi(t - tau) B u(tau) d tau + D u(t)

Hinweis: Phi(t) = e^{At} heisst Fundamentalmatrix.

8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

e^{A * t} = Phi(t)

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im Zeitbereich zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische (n x n) Fundamentalmatrix zu bestimmen

8.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

Phi(t) = L^-1{(sI - A^-1)}

Beispiel: Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

Mit der Systemmatrix A = [-1 0; 1 -2] ergibt sich (sI - A) = [s + 1 0; -1 s + 2]

Somit ist (sI - A)^-1 = [s + 1 0; -1 s + 2]^-1 = 1/((s + 1)(s + 2)) * [e^-t 0; e^-t - e^-2t e^-2t] = Phi(t)

8.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von Phi(t)

Phi(t) = e^{A * t} = [e^{lambda_1 t} ... 0; ... e^{lambda_2 t} ...; ... 0 ... e^{lambda_n t}] * V^-1 Wenn A diag = V^-1 * A * V ist und lambda_i die Eigenwerte von A sind

8.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

=> Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

=> Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.5 5 – Definition der Reihenentwicklung

Die Matrix A sei definiert als eine Dreiecksmatrix mit Parametern a und c

A = [a 0; 1 c]

Die Potenz der Matrix wird berechnet aus

A^k = [a 0]^k = [a^k 0; sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} c^k]

8.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix Phi(t)

Phi(0) = I	e^{A * 0} = I
Phi^-1(t) = Phi(-t)	(e^{A * t})^-1 = e^{-A * t}
Phi^k(t) = Phi(kt)	(e^{A * t})^k = e^{A * k * t}
Phi(t_1) * Phi(t_2) = Phi(t_1 + t_2)	e^{A * t_1} * e^{A * t_2} = e^{A * (t_1 + t_2)}
Phi(t_2 - t_1) * Phi(t_1 - t_0) = Phi(t_2 - t_0)	e^{A * (t_2 - t_1)} * e^{A * (t_1 - t_0)} = e^{A * (t_2 - t_0)}

Hinweis: (Phi(t) ist stets invertierbar)

8.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

```
1 syms t
2 A = [0 6; 1 5]; % Matrix A
3 expm(A*t) % Fundamentalmatrix
```

8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)

8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)

Ein LTI-System ist asymptotisch stabil, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben). Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix A einen negativen Realteil besitzen, ist das System asymptotisch stabil.

|lambda I - A| = 0 -> forall lambda Re{lambda} < 0

Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht! Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet nicht, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix A des Systems einen negativen Realteil besitzen. => Pol-/Nullstellenkürzungen

8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist beobachtbar, wenn wir, gegeben das Eingangssignal u(t) und das Ausgangssignal y(t), über eine endliche Zeitspanne 0 >= t >= t_1 die Zustände x(t) eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist nicht beobachtbar, wenn es Zustände x(t) gibt, die keinen Einfluss auf die Ausgänge y(t) haben. => Man kann aus dem Verhalten von y(t) nicht auf die Zustände x(t) schließen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist steuerbar, wenn es für jeden Anfangszustand x_0 und jeden Endzustand x_1 eine Steuerfunktion u(t) gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne 0 >= t >= t_1 von x_0 zu x_1 bringt, d.h. x(t_1) = x_1.
- Ein System ist nicht steuerbar, wenn es Zustände x(t) gibt, die nicht von den Eingängen u(t) beeinflusst werden.

Bemerkungen:

- System (A, B, C, D) ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir x(0) bestimmen können

8.14 Steuerbarkeit (S. 277)

8.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)

8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)

8.16.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

8.16.2 Alternative Regelungsnormalform (S. 268)

8.16.3 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

8.16.4 Alternative Beobachtungsnormalform (S. 270)

8.16.5 Diagonalform und Jordan-Normalform (S. 271-273)

8.16.6 Jrodan-Normalform für mehrfache, reelle Pole (S. 274)