

# Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240331

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 LTI-Systeme (S. 171)</b>	<b>2</b>		
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176) . . . . .	2		
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183) . . . . .	2		
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182) . . . . .	2		
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186) . . . . .	2		
1.5 Verzerrungen (S. 187-188) . . . . .	2		
1.6 Klirrfaktor (S. 189) . . . . .	2		
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190) . . . . .	2		
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194) . . . . .	3		
<b>2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel</b>	<b>3</b>		
2.1 Dämpfungsfaktor $D$ (S. 206) . . . . .	3		
2.2 Dämpfungsmass $a$ in Dezibel (S. 206) . . . . .	3		
2.3 Rechenregeln mit Dezibel . . . . .	3		
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209) . . . . .	3		
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor . . . . .	3		
		2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210) . . . . .	3
		<b>3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme</b>	<b>3</b>
		3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211) . . . . .	4
		3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212) . . . . .	4
		3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm . . . . .	4
		3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214) . . . . .	4
		3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216) . . . . .	4
		3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm . . . . .	4
		3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln . . . . .	5
		3.8 Allpassnetzwerk (S. 220) . . . . .	5
		3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221) . . . . .	5
		<b>4 Bodediagramm</b>	<b>5</b>
		4.1 Approximationen im Bodediagramm . . . . .	5
		4.2 Bodediagramme mit Matlab . . . . .	5

## 1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

### 1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort  $h(t)$  und der Frequenzgang  $H(j\omega)$  sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort  $h(t)$  und die Übertragungsfunktion  $H(s)$  sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

#### 1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

#### 1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort  $h(t)$  für alle  $t < 0$  gleich Null sein.

## 1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!  
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

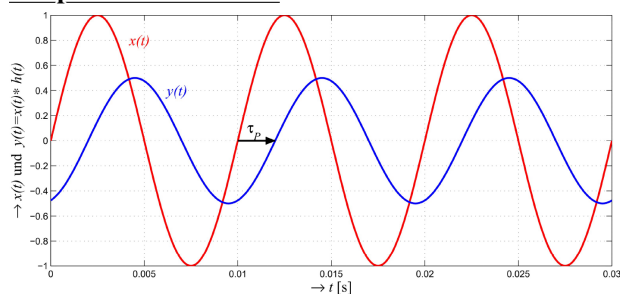
Das Ausgangssignal  $y(t) = x(t) * h(t)$  ist gegenüber dem Eingangssignal  $x(t)$  mit Faktor  $\alpha$  gewichtet und um die Zeit  $t_0$  verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

#### Beispiel: Phasenlaufzeit



#### 1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

## 1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit  $\tau_G(\omega)$  die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

#### 1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

## 1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit**  $\tau_P(\omega)$  und **Gruppenlaufzeit**  $\tau_G(\omega)$  sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h.  $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$   
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen**  $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

## 1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

#### 1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

#### 1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

## 1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

$U_1$  entspricht der Grundharmonischen  
⇒ Es gilt:  $1 > k \geq 0$

#### 1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{k} \right)$$

#### 1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

$U_1$  entspricht der Grundharmonischen  
⇒ Es gilt:  $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen:  $\text{THD} \approx k$       allgemein:  $\text{THD} > k$

## 1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang  $H(j\omega)$  und Impulsantwort  $h(t)$  eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz)  $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$   
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz  $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$   
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal  $x(t)$  (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort  $h(t)$  übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal  $y(t)$  gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert  $Y_0$  des Ausgangssignals  $y(t)$  bei der Frequenz  $\omega = 0$  entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$  = Frequenzgang und  $X_0$  = linearer Mittelwert von  $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da  $\varphi_{yy}(\tau)$  und  $Y_0$  nicht von  $t$  abhängen, ist auch  $y(t)$  schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$$\begin{array}{lcl} h(-\tau) & \longleftrightarrow & H^*(j\omega) \\ h(\tau) & \longleftrightarrow & H(j\omega) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \varphi_{xx}(\tau) & \longleftrightarrow & \Phi_{xx}(j\omega) \\ h(\tau) * h(-\tau) & \longleftrightarrow & |H(j\omega)|^2 \end{array} \right.$$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \longleftrightarrow \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren  $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals  $y(t)$  gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung  $Y^2$  des Ausgangssignals  $y(t)$  berechnet sich beim Zeitpunkt  $\tau = 0$  als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen  $\varphi_{xy}(\tau)$  und  $\varphi_{yx}(\tau)$  des stochastischen, reellen Eingangssignals  $x(t)$  (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals  $y(t)$  eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor  $D$  bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes  $U, P, I$  stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors  $D$  erhält man das Dämpfungsmass  $a$

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren  $\Rightarrow$  Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren  $\Rightarrow$  Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor**  $T_U$  definiert. Analog zum Dämpfungsmass  $a$  wird ein **Verstärkungsmass**  $g_U$  definiert.

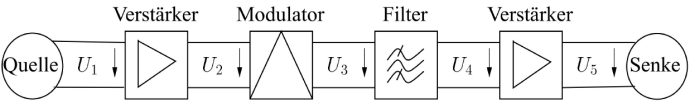
$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ( $U_2 > U_1$ )  $\Rightarrow$  positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ( $U_2 < U_1$ )  $\Rightarrow$  negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$$T_{U_{tot}} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_5}{U_1}$$
$$= \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{1} = 50$$
$$a_{U_{tot}} = -20\text{dB} + 3\text{dB} + 3\text{dB} + -20\text{dB} = -34\text{dB}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass  $g$  ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20\text{ dB} + 3\text{ dB} + 3\text{ dB} - 20\text{ dB} = -34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

**Vorgehen:** Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen  $\Rightarrow$  Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

**Vorgehen:** Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen  $\Rightarrow$  Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 – 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 – 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 – 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 – 6 = 10 – 3 – 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 – 10 = 5 – 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 – 3 – 3 – 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
–1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

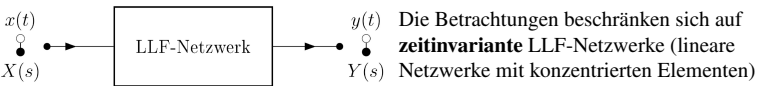
$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)$$
$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right)$$
$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$(L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right)$$
$$(L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right)$$
$$(L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{1\text{ mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μW

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differentialgleichung der folgenden Form beschreiben:

a\_n \frac{d^n y}{dt^n} + a\_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a\_1 \frac{dy}{dt} + a\_0 y = b\_m \frac{d^m x}{dt^m} + b\_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b\_1 \frac{dx}{dt} + b\_0 x

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b\_m s^m + b\_{m-1} s^{m-1} + \dots + b\_1 s + b\_0}{a\_n s^n + a\_{n-1} s^{n-1} + \dots + a\_1 s + a\_0} = \frac{N(s)}{D(s)}

N(s)	Zählerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
D(s)	Nennerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
x(t)	Eingangssignal
y(t)	Ausgangssignal

Die Wurzeln der Gleichung N(s) = 0 ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von D(s) = 0 ergeben n Pole des Systems. Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird H(s) faktorisiert. => Die UTF H(s) ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K vollständig bestimmt!

H(s) = \frac{b\_m}{a\_m} \cdot \frac{\prod\_{i=1}^m (s - z\_i)}{\prod\_{j=1}^n (s - p\_j)}

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiert komplexe Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten darzustellen.

H(s) = \frac{b\_m}{a\_m} \cdot \frac{\prod\_{i=1}^r (s^2 + 2\sigma\_{zi} s + \omega\_{zi}^2) \prod\_{i=2r+1}^m (s - z\_i)}{\prod\_{j=1}^t (s^2 + 2\sigma\_{pj} s + \omega\_{pj}^2) \prod\_{j=2t+1}^n (s - p\_j)}

Legende:

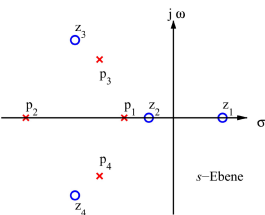
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Pole in der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann H(s) mittels Polfrequenzen und Polgüten beschrieben werden:

H(s) = \frac{b\_m}{a\_m} \cdot \frac{\prod\_{i=1}^r (s^2 + \frac{\omega\_{zi}}{q\_{zi}} s + \omega\_{zi}^2) \prod\_{i=2r+1}^m (s - z\_i)}{\prod\_{j=1}^t (s^2 + \frac{\omega\_{pj}}{q\_{pj}} s + \omega\_{pj}^2) \prod\_{j=2t+1}^n (s - p\_j)}

\omega_{pj}	Polstellenfrequenzen	\omega_{zi}	Nullstellenfrequenzen
q_{pj}	Polstellengüten	q_{zi}	Nullstellengüten

3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)



Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm. In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot Pole Kreuze NS Kreise

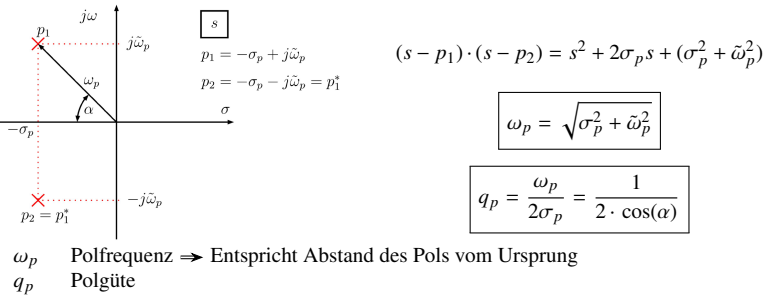
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm

Für Grenzstabilität gilt eine UND-Verknüpfung der aufgeführten Punkte. Für Stabilität und Instabilität gilt eine ODER-Verknüpfung der aufgeführten Punkte.

- Stabil:
  - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE)
  - Keine Polstellen vorhanden
- Grenzstabil:
  - Keine Polstellen in der rechten Halbebene (RHE)
  - Mindestens eine einfache Polstelle auf imaginärer Achse
  - Keine doppelten Polstellen auf der imaginären Achse
- Instabil:
  - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE)
  - Mindestens eine mehrfache Polstelle auf der imaginären Achse

3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



Grenzfälle

- sigma\_p = omega\_p Doppelpol auf neg. reeller Achse => q\_p = 1/2
- sigma\_p = 0 Polpar auf imaginärer Achse => q\_p = infinity

3.4.1 Reelle Pole

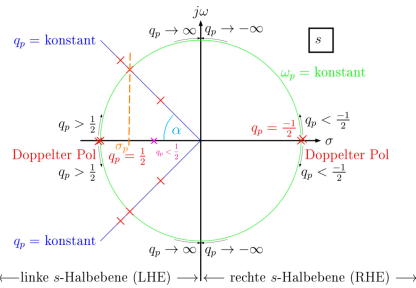
Formulas for omega\_p and q\_p for real poles.

- Für einzelne (reelle) Pole ist die Güte q\_p nicht definiert.
- Die Polfrequenz omega\_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

sigma\_p1 = sigma\_p2 | q\_p1 = 1/2

3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann s = j\*omega eingesetzt werden.

H(j\*omega) = H(s) |\_{s=j\*omega} = |H(j\*omega)| \* e^{j\*theta(omega)}

H(s)	Übertragungsfunktion (UTF)	H(j*omega)	Amplitudengang
H(j*omega)	Frequenzgang	theta(omega)	Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- Nyquist-Diagramm H(j\*omega) wird in Polarkoordinaten mit omega als Parameter aufgetragen
- Bode-Diagramm alpha\_DB(omega) und theta(omega) werden je in Funktion von log10(omega) aufgetragen

3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz j\*omega\_0 in die Übertragungsfunktion H(s) ergibt sich der Frequenzgang H(j\*omega\_0) als:

H(j\*omega\_0) = K \* ((j\*omega\_0 - z\_1)(j\*omega\_0 - z\_2)...(j\*omega\_0 - z\_m) / ((j\*omega\_0 - p\_1)(j\*omega\_0 - p\_2)...(j\*omega\_0 - p\_n))) = |H(j\*omega\_0)| \* e^{j\*theta(omega\_0)}

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

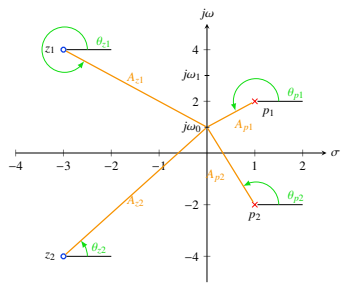
(j\*omega\_0 - p\_1) = |j\*omega\_0 - z\_1| \* e^{j\*theta\_{z1}} = A\_{z1} \* e^{j\*theta\_{z1}}

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang H(j\*omega\_0) in den Amplitudengang |H(j\*omega)| und den Phasengang theta(omega) separiert werden:

H(j\*omega\_0) = K \* (A\_{z1} \* A\_{z2} \* ... \* A\_{zm} \* e^{j(theta\_{z1} + ... + theta\_{zm})} / (A\_{p1} \* A\_{p2} \* ... \* A\_{pn} \* e^{j(theta\_{p1} + ... + theta\_{pn})}))

Betrag	Phase
H(j*omega_0)  = K * (prod_{i=1}^m A_{zi} / prod_{j=1}^n A_{pj})	theta(omega_0) = Phase von K + sum_{i=1}^m theta_{zi} - sum_{j=1}^n theta_{pj}

3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz  $j\omega$  ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz  $j\omega_0$  können die Faktoren von  $H(j\omega_0)$  als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.6.2 Rückschlüsse auf Amplitudengang

- Es werden vor allem die **Abstände** betrachtet
- Pol- und Nullstellen können sich aufheben
- Bei  $\omega = 0$  gilt:
  - Wenn Nullstelle  $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = \infty \Rightarrow \theta(j\omega_0) = \frac{\pi}{2}$
  - Wenn Pol  $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = 0 \Rightarrow \theta(j\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$
  - Wenn weder Pol noch NS  $\Rightarrow |H(j\omega_0)|$  hat endlichen Wert  $\Rightarrow \theta(j\omega_0) = 0$
- Bei  $\omega = \infty$  gilt:
  - Wenn Zählergrad > Nennergrad  $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = \infty$
  - Wenn Zählergrad = Nennergrad  $\Rightarrow |H(j\omega_0)|$  hat endlichen Wert
  - Wenn Zählergrad < Nennergrad  $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = 0$

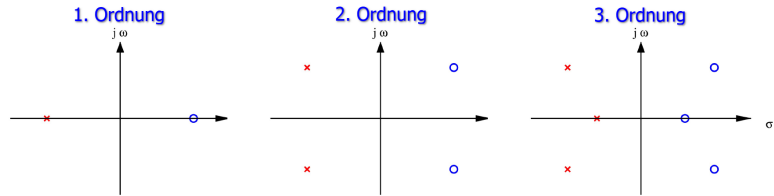
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen  $\omega$  konstant** ist

$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$

$\Rightarrow$  Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur  $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration**



UTF Allpass:  $H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF  $H(S)$  kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk  $H_M(s)$  und einen Allpass  $H_A(s)$  **zerlegt** werden ( $\Rightarrow$  siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

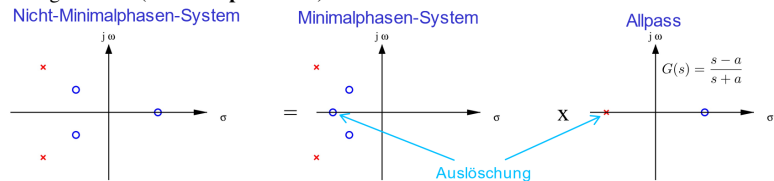
$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
  - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
  - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
  - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden ( $\Rightarrow$  **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramm und zugehöriger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

4.1 Approximationen im Bodediagramm

4.1.1 Pol im Ursprung

4.1.3 Reeller Pol

4.1.5 Konj.-komplexe Pole

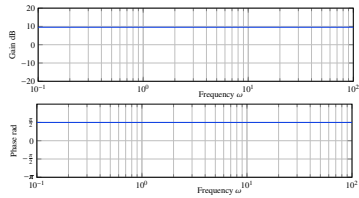
4.1.2 Nullstelle im Ursprung

4.1.4 Reelle Nullstelle

4.1.6 Konj.-komplexe Nullstellen

4.1.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ 
  - Betrag =  $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
  - Phase =  $\beta = \text{const}$



4.1.8 Weitere Bemerkungen

4.2 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```