

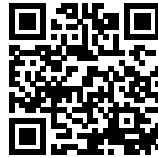
Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren:
Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:
1.0.20240602

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

1 LTI-Systeme (S. 171)	2	7 Stabilität im Nyquist-Diagramm	6
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2	7.1 Offener und geschlossener Regelkreis	6
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	6
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2	7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)	6
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2	7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm	7
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2	8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)	7
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2	8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)	7
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2	8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)	7
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3	8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)	7
2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel	3	8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)	7
2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)	3	8.5 ZRD mit Matlab	7
2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)	3	8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)	7
2.3 Rechenregeln mit Dezibel	3	8.7 Matrix $\mathbf{b}\mathbf{m}\mathbf{A}$ diagonalisieren	8
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3	8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2×2 Matrix invertieren	8
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor	3	8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)	8
2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3	8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)	8
3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme	3	8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)	8
3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4	8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)	9
3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)	4	8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)	9
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm	4	8.14 Steuerbarkeit (S. 277)	9
3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4	8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)	9
3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4	8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)	9
3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm	4	9 Filter	10
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	5	9.1 Grundtypen (S. 291)	10
3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)	5	9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$	10
3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	5	9.3 Approximation im Frequenzbereich	10
4 Bodediagramm	5	9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)	10
4.1 Bodediagramme mit Matlab	5	9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$	10
4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)	5	9.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)	10
4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)	6	9.7 Approximation nach Butterworth (S. 303)	11
5 Stabilität im Bodediagramm	6	9.8 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)	11
5.1 Amplitudenrand und Phasenrand	6	9.9 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)	12
5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm	6	9.10 Approximation nach Cauer (S. 322)	12
6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)	6	9.11 Approximation nach Bessel (S. 328)	12
6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab	6	9.12 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen	12
		9.13 Standard-Filtertypen – Überblick	12
		9.14 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen	13
		9.15 Nomogramme (S. 393)	13
		9.16 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern	13

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

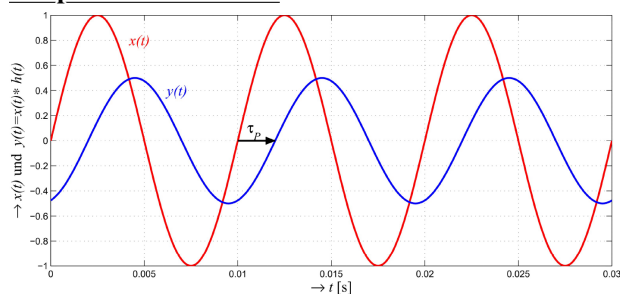
Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}} \quad \begin{array}{l} U_1 \text{ entspricht der Grundharmonischen} \\ \Rightarrow \text{Es gilt: } 1 > k \geq 0 \end{array}$$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)$$

1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}} \quad \begin{array}{l} U_1 \text{ entspricht der Grundharmonischen} \\ \Rightarrow \text{Es gilt: } \infty > \text{THD} \geq 0 \end{array}$$

geringe Verzerrungen: $\text{THD} \approx k$ allgemein: $\text{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$$\begin{array}{lcl} h(-\tau) & \longleftrightarrow & H^*(j\omega) \\ h(\tau) & \longleftrightarrow & H(j\omega) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \varphi_{xx}(\tau) & \longleftrightarrow & \Phi_{xx}(j\omega) \\ h(\tau) * h(-\tau) & \longleftrightarrow & |H(j\omega)|^2 \end{array} \right.$$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \longleftrightarrow \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. \Rightarrow Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren \Rightarrow Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren \Rightarrow Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.

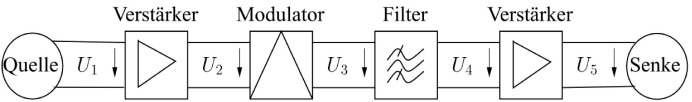
$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ($U_2 > U_1$) \Rightarrow positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ($U_2 < U_1$) \Rightarrow negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$$\begin{aligned} T_{U_{tot}} &= \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_5}{U_1} \\ &= \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{1} = 50 \\ a_{U_{tot}} &= -20\text{dB} + 3\text{dB} + 3\text{dB} + -20\text{dB} = -34\text{dB} \end{aligned}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20\text{ dB} + 3\text{ dB} + 3\text{ dB} - 20\text{ dB} = -34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 – 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 – 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 – 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 – 6 = 10 – 3 – 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 – 10 = 5 – 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 – 3 – 3 – 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
–1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

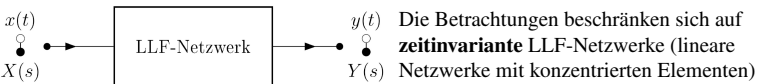
Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$\begin{aligned} (L_U)_{\text{rel}} &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right) & (L_U)_{\text{abs}} &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right) \\ (L_I)_{\text{rel}} &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right) & (L_I)_{\text{abs}} &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right) \\ (L_P)_{\text{rel}} &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) & (L_P)_{\text{abs}} &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{1\text{ mW}} \right) \end{aligned}$$

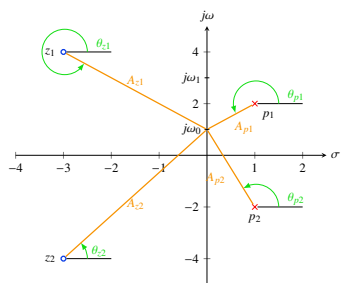
2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μW

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

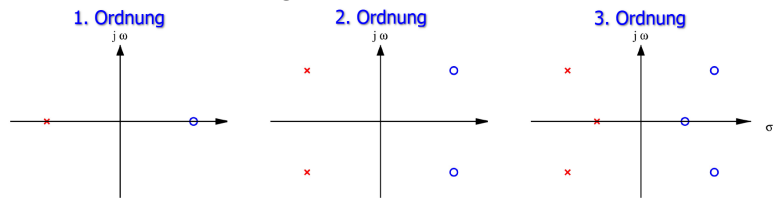
- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen – Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeler Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von –20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen ω konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF $H(S)$ kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

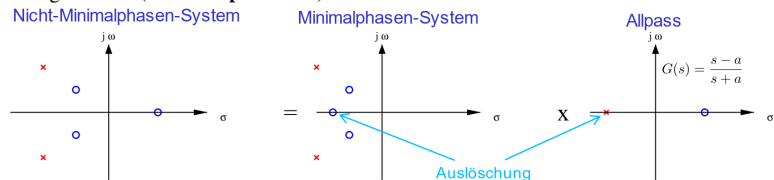
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
 - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

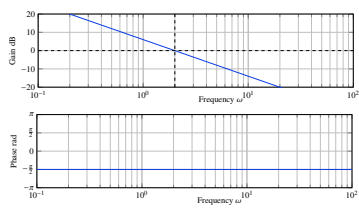
4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

4.2.1 Pol im Ursprung

$$H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$$



Betrag zeichnen

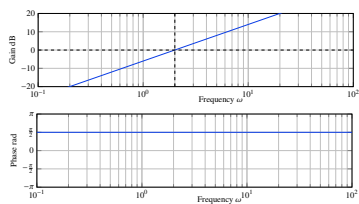
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = \alpha$
3. Gerade mit $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch $-\frac{\pi}{2}$

4.2.2 Nullstelle im Ursprung

$$H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$$



Betrag zeichnen

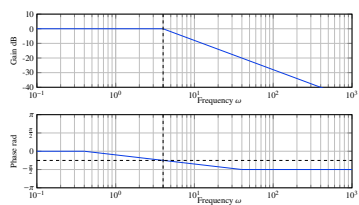
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
3. Gerade mit $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch $+\frac{\pi}{2}$

4.2.3 Reeller Pol

$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$$



Betrag zeichnen

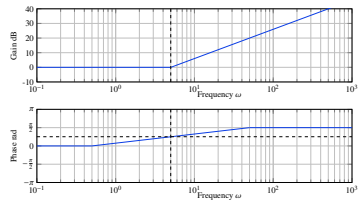
1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$
2. $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = \alpha$

Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega = \frac{\alpha}{10}$
2. $-\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot \alpha$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(-\frac{\pi}{4}$ bei $\omega = \alpha)$

4.2.4 Reelle Nullstelle

$$H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$
2. $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = \alpha$

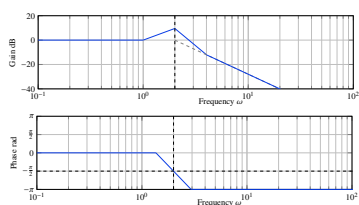
Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega = \frac{\alpha}{10}$
2. $+\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot \alpha$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(+\frac{\pi}{4}$ bei $\omega = \alpha)$

4.2.5 Konjugiert-komplexe Pole

$$\text{Voraussetzung: } |q_p| > \frac{1}{2}$$

$$H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$$



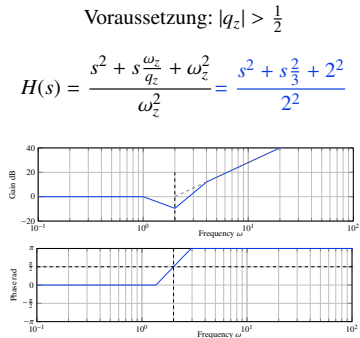
Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_p}{2}$
2. $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_p
→ stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_p$
3. Maximalwert = $20 \cdot \log_{10}(q_p)$ bei ω_p
4. Gerade von $\omega = \frac{\omega_p}{2}$ zu Maximalwert
5. Gerade von Maximalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_p$

Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10}$
2. $-\pi$ ab $\omega > \omega_p \cdot 10 \frac{1}{2q_p}$
3. Gerade zwischen 0 und π Geraden
4. $(-\frac{\pi}{2}$ bei $\omega = \omega_p)$

4.2.6 Konjugiert-komplexe Nullstellen

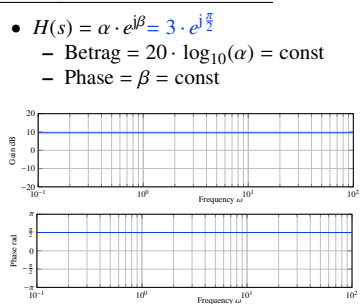


- Betrag zeichnen
- 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_z}{2}$
 - +40 $\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_z
→ stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_z$
 - Minimalwert = $-20 \cdot \log_{10}(q_z)$ bei ω_z
 - Gerade von $\omega = \frac{\omega_z}{2}$ zu Minimalwert
 - Gerade von Minimalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_z$
- Phase zeichnen
- 0 bis $\omega < \frac{\omega_z}{10 \cdot 2q_z}$
 - + π ab $\omega > \omega_z \cdot 10^{\frac{1}{2q_z}}$
 - Gerade zwischen 0 und $-\pi$ Geraden
 - ($\frac{\pi}{2}$ bei $\omega = \omega_z$)

Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, S. 235

q_p	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{4q_p}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{-\frac{1}{4q_p}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.2.7 Konstanter Faktor



4.2.8 Weitere Bemerkungen

- Inverser Frequenzgang:**
 - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
 - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
 - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am grössten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

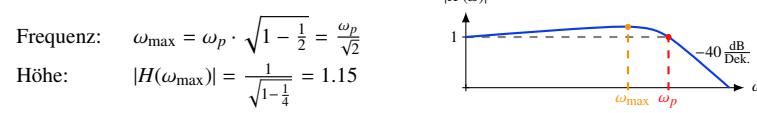
UTF Tiefpass 2. Ordnung: $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$

Frequenz beim Maximum: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$

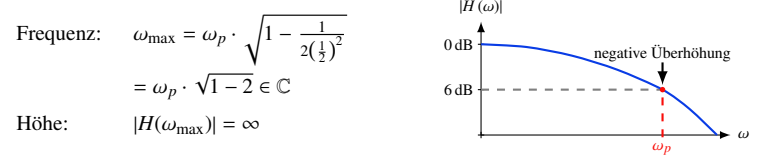
Höhe des Maximums: $|H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$

⇒ Es gilt: $\omega_{\max} \leq \omega_p$

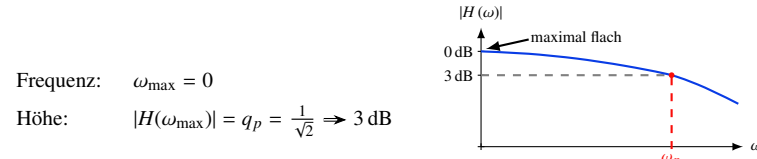
4.3.1 Spezialfall $q = 1$



4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$



4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$



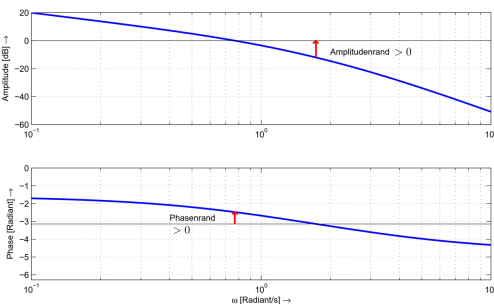
5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis $H(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei $s = 0$), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn $H(j\omega)$ für die **Durchgangsfrequenz** ω_D bei der die Amplitude $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0 \text{ dB}$ ist, und eine Phase $> -\pi$ hat.
⇒ Amplitudenrand und Phasenrand müssen > 0 sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Phase gleich $-\pi$ bzw. -180° ist.
- Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Abstand des Phasengangs zur $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzganges in Abhängigkeit der Frequenz f (aufsteigende Werte von f) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.
Auf die Konstruktion von Ortskurven wird im Modul Regelungstechnik 2 im Detail eingegangen. Darum soll hier nur auf die Beschreibung im Skript (S. 240 - 242) verwiesen werden.

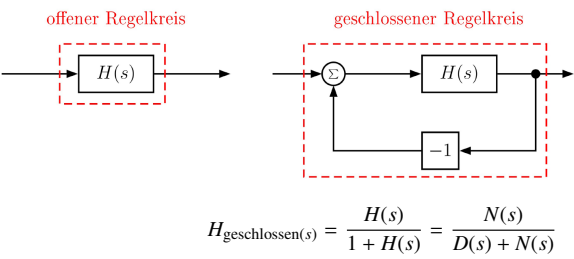
6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems  
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve** $H(s)$ (**offener Regelkreis**) einen Aussage über die **Stabilität** des (**geschlossenen Regelkreises**) zu machen.
Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

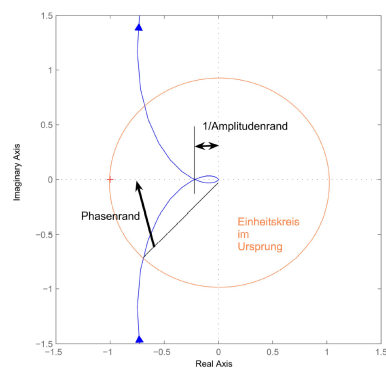
Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt $(-1, j0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern **'links** liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.

- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Frequenz, bei welche die **negative** reelle Achse geschnitten wird: ω_π
 - Bei ω_π : $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$ = Abstand zum Ursprung
- Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Frequenz, bei welche Eintritt in den Einheitskreis erfolgt: ω_D
 - Bei ω_D : Winkel bis zu 180°

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt $(-1, j0)$ 'links' liegen gelassen wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt.

Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

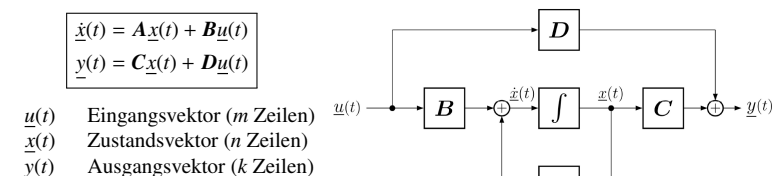
8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Grundidee: Differentialgleichung n . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)

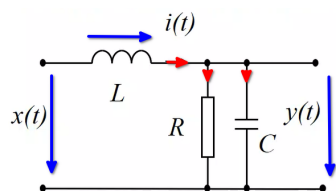
- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können \Rightarrow Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**, in der Elektrotechnik L und C
- Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)



- obere Gleichung: **Zustandsgleichung**
- untere Gleichung: **Ausgangsgleichung**
- A Systemmatrix** ($n \times n$ -Matrix)
Sie bestimmt das Verhalten des **ungestörten Systems** ($\underline{u}(t) = 0$) und bestimmt z.B. die innere Stabilität des gesamten Systems.
- B Eingangsmatrix (Steuermatrix)** ($n \times m$ -Matrix)
Sie bestimmt die Wirkung der **Steuergrößen** $\underline{u}(t)$ auf die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$
- C Ausgangsmatrix (Beobachtungsmatrix)** ($k \times n$ -Matrix)
Sie kennzeichnet die Abhängigkeit des **Zustandes** $\underline{x}(t)$ von der beobachtbaren Ausgangsgrösse $\underline{y}(t)$
- D Durchgangsmatrix** ($k \times m$ -Matrix)
Sie bestimmt die unmittelbare Wirkung der Eingangsgrösse $\underline{u}(t)$ auf den Ausgang $\underline{y}(t)$

Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität: $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

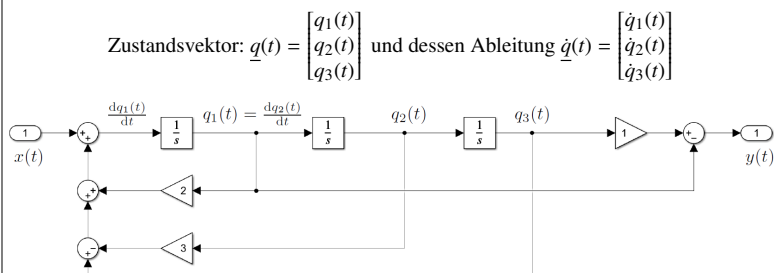
Zustände: $i(t), y(t)$
 Eingang: $x(t)$
 Ausgang: $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}'(t) \\ \dot{y}'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot x(t)$$

Beispiel: ZRD aus Signalfussdiagramm aufstellen

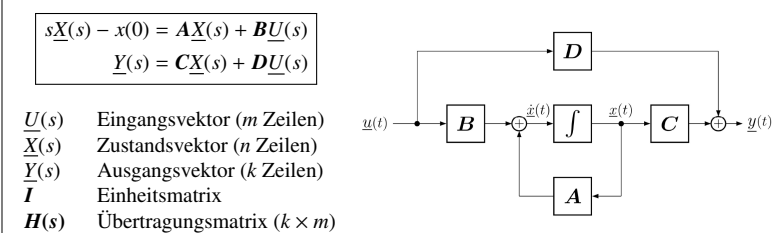
Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen A, B, C und D gefunden werden.



$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot x(t)$$

8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)



Mit Anfangsbedingungen $\underline{x}(0) = 0$ ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{(\underline{C}(\underline{s}\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Hinweis: Aus einem Signalfussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

8.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

- | Übertragungsmatrix | Übertragungsfunktion |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> MIMO-Systeme Beschreibung in Matrizenform | <ul style="list-style-type: none"> SISO-Systeme Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung |
| $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$ | $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$ |
| <ul style="list-style-type: none"> $H(s)$ hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix D | |

8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen** $x(t)$. Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

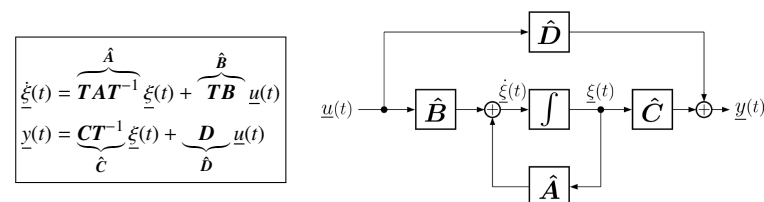
8.5 ZRD mit Matlab

$$H(s) = \frac{b_i s^i + b_{i-1} s^{i-1} \dots b_1 s^1 + b_0}{a_i s^i + a_{i-1} s^{i-1} \dots a_1 s^1 + a_0}$$

- `[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)` % $H(s)$ aus Matrizen berechnen
- `(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)` % Matrizen aus $H(s)$ berechnen

8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix** T ($n \times n$ -Matrix, nicht singular, $TT^{-1} = I = T^{-1}T$) kann man **verschiedenste Zustandsgrößen und Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 8.2 bezüglich $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$. Die bedeutet, dass die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$ und $\underline{x}(t)$ **willkürlich** gewählt werden können, solange \mathbf{T} nicht singulär ist (Determinante von $\mathbf{T} \neq 0$)

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrößen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

8.7 Matrix A diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix** \mathbf{A} diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ wird dann üblicherweise \mathbf{A}_{diag} verwendet.

- λ_i Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}
- \vec{v}_i Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A}
- \mathbf{V} Matrix mit Eigenvektoren von \mathbf{A}
- $\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda}$ Diagonalisierte Matrix \mathbf{A} mit Eigenwerten λ_i auf Diagonale
- \mathbf{T} Transformationsmatrix

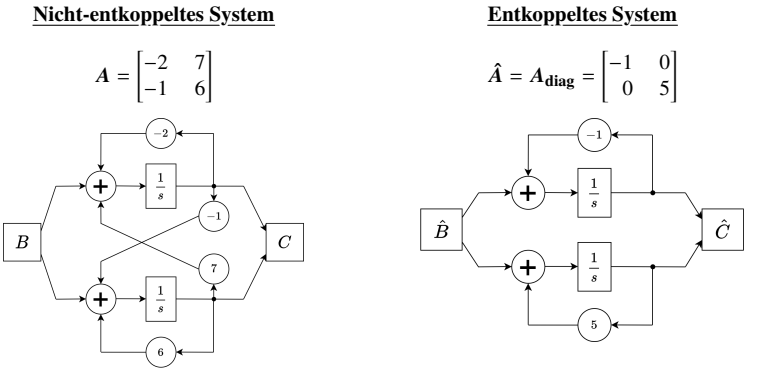
$$\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$$
$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{V}$$

8.7.1 Vorgehen Matrix diagonalisieren

- Ansatz: $\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen: $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow$ Eigenwerte λ_i
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren \vec{v}_i gefunden werden:
 - Eigenwert λ_i in Gleichungssystem $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ einsetzen
 - Einen Wert von $\vec{v}_i = 1$ wählen und Eigenvektor \vec{v}_i als Spaltenvektor schreiben
- Matrix \mathbf{V} aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix $\mathbf{\Lambda}$ 'zusammenbauen', indem man Eigenwerte λ_i auf Diagonale schreibt

8.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System



8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

Beispiel: Matrix-Diagonalisierung (S. 258)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -7 \\ 1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 6) - 7 \cdot (-1) = 0$$

\Rightarrow Mitternachtsformel liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$

Ersten Eigenwert $\lambda_1 = -1$ in $(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$ einsetzen $1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$
 $1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$

Wähle $v_{21} = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ Gleichen Vorgehen für zweiten Eigenvektor \vec{v}_2

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t)$ ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur einem Zustand würde man den Ansatz $\underline{x}(t) = e^{at}$ wählen. Da im Allgemeinen Systeme mit mehreren Zuständen betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Der Ansatz ist beschrieben als desser **Taylor-Reihe**. Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{B} \underline{u}(\tau) \, d\tau + \mathbf{D} \underline{u}(t)$$

Hinweis: $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$ heisst **Fundamentalmatrix**.

8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

$$e^{At} = \mathbf{\Phi}(t)$$

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im **Zeitbereich** zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische $(n \times n)$ Fundamentalmatrix zu bestimmen

8.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1})\right\}$$

Beispiel: Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

Mit der **Systemmatrix** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ergibt sich $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$

Somit ist $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \circ \bullet \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)$

8.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \vdots \\ & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_{\text{diag}}(t)} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$
 Wenn $\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$ ist und λ_i die Eigenwerte von \mathbf{A} sind

8.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

\Rightarrow Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

\Rightarrow Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.5 Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

Die Matrix \mathbf{A} sei definiert als eine **Dreiecksmatrix** mit Parametern a und c
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

Die Potenz der Matrix wird berechnet aus
$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} c^l & c^k \end{bmatrix}$$

Beispiel: Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

Für $a = 1$ und $c = -1$ ergibt sich für \mathbf{A}^k

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^k - (-2)^k & cbl(-2)^k \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Fundamentalmatrix ist mittels Anwendung der Taylor-Reihe somit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$

$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$	$e^{\mathbf{A} \cdot 0} = \mathbf{I}$
$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$	$(e^{\mathbf{A} \cdot t})^{-1} = e^{-\mathbf{A} \cdot t}$
$\mathbf{\Phi}^k(t) = \mathbf{\Phi}(kt)$	$(e^{\mathbf{A} \cdot t})^k = e^{\mathbf{A} \cdot k \cdot t}$
$\mathbf{\Phi}(t_1) \cdot \mathbf{\Phi}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_1 + t_2)$	$e^{\mathbf{A} \cdot t_1} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}$
$\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \mathbf{\Phi}(t_1 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0)$	$e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)} \cdot e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t_2-t_0)}$

Hinweis: $(\mathbf{\Phi}(t))$ ist stets invertierbar)

8.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

```
1 syms t % t als symbolischer Wert
2 A = [0 6; 1 5]; % Matrix A
3 expm(A*t) % Fundamentalmatrix
```

8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)

Die Impulsantwort $h(t)$ eines SISO-Systems ist gegeben durch

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B} * \underline{u}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) = h(t) * \underline{u}(t)$$
$$h(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$$

8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)

Ein LTI-System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben).
Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle **Eigenwerte** der **Systemmatrix** A einen **negativen Realteil** besitzen, ist das System **asymptotisch stabil**.

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \rightarrow \quad \forall \lambda \quad \operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$$

Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht! Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet **nicht**, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix A des Systems einen negativen Realteil besitzen.
⇒ Pol-/Nullstellenkürzungen

8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist **beobachtbar**, wenn wir, gegeben das Eingangssignal $u(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$, über eine endliche Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ die Zustände $\underline{x}(t)$ eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist **nicht beobachtbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die **keinen** Einfluss auf die Ausgänge $y(t)$ haben.
⇒ Man kann aus dem Verhalten von $y(t)$ **nicht** auf die Zustände $\underline{x}(t)$ schliessen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist **steuerbar**, wenn es für jeden Anfangszustand \underline{x}_0 und jeden Endzustand \underline{x}_1 eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ von \underline{x}_0 zu \underline{x}_1 bringt, d.h. $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$.
- Ein System ist **nicht steuerbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die nicht von den Eingängen $u(t)$ beeinflusst werden.

Bemerkungen:

- System (A, B, C, D) ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir $\underline{x}(0)$ bestimmen können

8.14 Steuerbarkeit (S. 277)

Gemäss der äquivalenten ZRD-Darstellung (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV$, $\hat{B} = V^{-1}B$, $\hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{B} = V^{-1}B$ **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Zeile** von $\hat{B} = V^{-1}B$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig steuerbar**, wenn

- Der **Rang** der Steuerbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Steuerbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$				Dimension: $n \times n \cdot m$
A	Systemmatrix ($n \times n$)	n	Zustände	
B	Eingangsmatrix ($n \times m$)	m	Eingänge	

Steuerbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 ctrb(A, B);           % Steuerbarkeitsmatrix
2 rank(ctrb(A, B))      % Rang der Steuerbarkeitsmatrix
```

8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)

Gemäss der äquivalenten ZRD-Darstellung (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV$, $\hat{B} = V^{-1}B$, $\hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{C} = CV$ **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Spalte** von $\hat{C} = CV$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.15.1 Beobachtbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig beobachtbar**, wenn

- Der **Rang** der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Beobachtbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$	Dimension:	$k \cdot n \times n$
	A	Systemmatrix ($n \times n$)
	C	Beobachtungsmatrix ($k \times m$)
	n	Zustände
	m	Eingänge
	k	Ausgänge

Beobachtbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 obsv(A, C);           % Beobachtbarkeitsmatrix
2 rank(obsv(A, C))      % Rang der Beobachtbarkeitsmatrix
```

8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)

Die allgemeine Differentialgleichung von SISO-Systemen der Form

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ergibt mit der Laplace-Transformation und mit $m \leq n$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Diese UTF $H(s)$ kann mit verschiedenen ZRDs (**Normalformen**) abgebildet werden.
Wichtig: Für alle folgenden Normalformen werden die Zustände x_i im blockdiagramm **unmittelbar nach den Integratoren** verwendet.

8.16.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

Die Regelungsnormalform kann **direkt aus der UTF** $H(s)$ aufgestellt werden.
Für $m = n$ gilt sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Ausgangsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.2 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

Ein System, welches in Beobachtungsnormalform dargestellt werden kann, ist **beobachtbar**! Für $m = n$ gilt sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Zustandsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.3 Regelungsnormalform ⇔ Beobachtungsnormalform

Die beiden Formen sind **dual** und weisen folgende Zusammenhänge auf (**Transposition**):

- A ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt
- B und C sind vertauscht
- D bleibt gleich

8.16.4 Jordan-Normalform (S. 271-273)

Die UTF wird mittels einer **Partialbruchzerlegung** dargestellt. Die Parameter der Partialbruchzerlegung können dann direkt in die Matrix $A = A_{\text{diag}}$ eingetragen werden.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = b_n + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

Die Diagonalform für **einfache, reelle Pole** mit $m = n$ ist:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Hinweis: Mit $m < n$ vereinfacht sich die Ausgangsgleichung zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.5 Diagonalform (S. 271-273)

Eine weitere Darstellungsform der Diagonalform ergibt sich mittels **Transposition** der Jordan-Normalform:

- **A** ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt (ergibt wiederum **A**)
- **B** und **C** sind vertauscht
- **D** bleibt gleich

9 Filter

9.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequenzelektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequenzelektiven Grundtypen** sind:

- Tiefpass (TP)
 - Hochpass (HP)
- Bandpass (BP)
 - Bandsperre, Notch (BS)
- Allpass

9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)

Für den Frequenzgang $H(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$
$$H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $|H(j\omega)|^2$ ist immer eine Funktion in ω^2 , da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur $H(s)$ interessant** ist, muss $H(s)$ aus $|H(j\omega)|^2$ 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

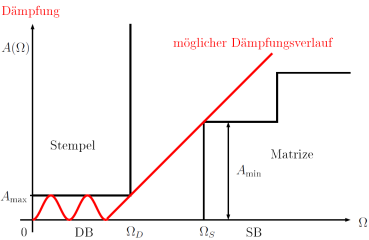
$$\frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N(-s)}{D(-s)} = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $D(s)$ muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

9.3 Approximation im Frequenzbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet**. Zuerst soll der **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ im Frequenzbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

9.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema** beschrieben. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.

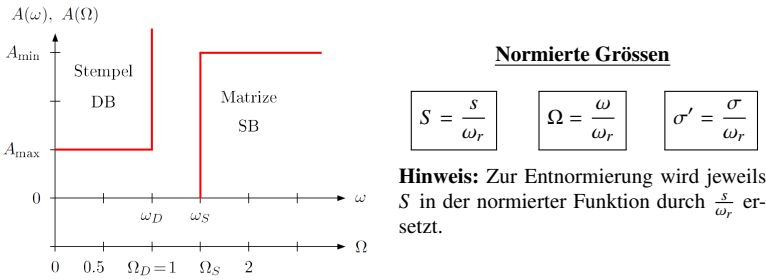
- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung A_{max}**
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung A_{min}**

$$A_{\text{dB}}(\omega) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{|H(\omega)|^2}\right) = -20 \cdot \log(|H(\omega)|) \Rightarrow \text{Dämpfung!}$$

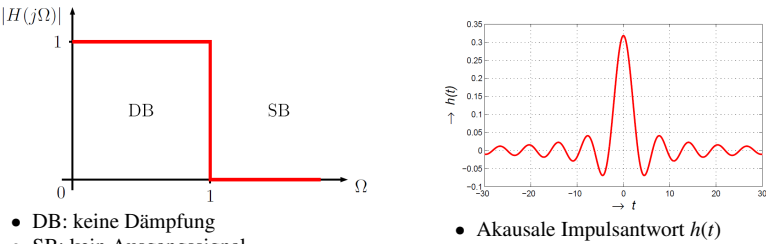
9.3.2 Frequenznormierung

Um möglichst kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- **BP / BS:** Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$



9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



⇒ Ideales Tierpass ist physikaltisch nicht realisierbar. ⇒ **Approximationen**

9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt füt die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

Durchlassbereich (DB) $0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$ für $0 \leq \Omega < 1 \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 \approx 1$

Sperrbereich (SB) $K(\Omega^2) \gg 1$ für $\Omega > 1 \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 \approx 0$

9.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)

Tiefpassfilter n . Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweiligen einen **n -fachen Pol** auf der **negativen σ -Achse**.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n}$$

n

ω_c

Ordnung des Filters

3 dB-Punkt jedes der n Teilfilter

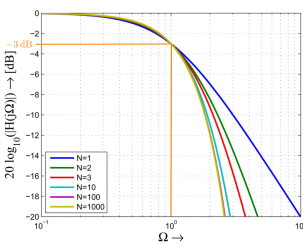
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10 \cdot n}} - 1}}$$

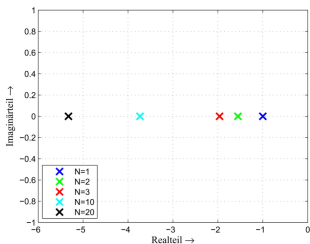
9.6.1 Eigenschaften kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ -Achse ⇒ Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\text{max}} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/ Dekade}$
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

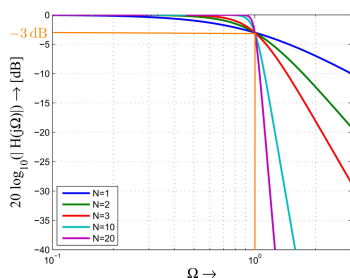
Amplitudengänge



Pol-Lagen



9.7 Approximation nach Butterworth (S. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

9.7.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (S. 303)

• Durchlassbereich

- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind

• Sperrbereich

- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB / Dekade}$

• Allgemein

- Amplitudengang ist streng-monoton fallend \Rightarrow keine Welligkeit

9.7.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (S. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{D(-s)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ($D(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n$$

Mit dem Ansatz

$$D(s) = \prod_{j=1}^n (s^2 + a_j \cdot s + b_j) \prod_{j=2n+1}^{2n} (s - c_j)$$

wird das Produkt $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

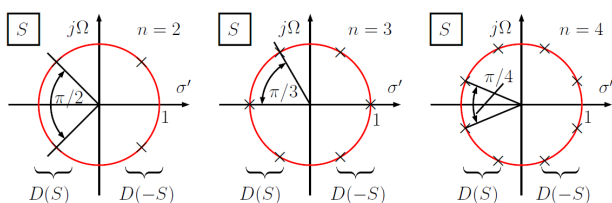
9.7.3 Bestimmung der Pol-Lage (S. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 9.7.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Auflösen der Gleichung nach S kommen die Pole auf dem Einheitskreis zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- Für Nennerpolynom $D(s) = \frac{1}{H(s)}$ müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!

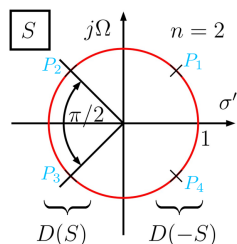


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz: } H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + s^4 \Leftrightarrow s^4 = -1 \Leftrightarrow e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$



Aufgelöst nach S liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Linke Halbebene

$$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

\Rightarrow Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der linken Halbebene relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(s - P_2) \cdot (s - P_3)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion $H(s)$ auch mittels folgendem Ansatz für $D(s)$ und anschliessendem Koeffizientenvergleich von $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt werden.

$$\text{Ansatz: } D(s) = s^2 + a_1 s + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } D(s) \cdot D(-s) = s^4 + (2b_1 - a_1^2)s + b_1^2 \stackrel{!}{=} s^4 + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2} \text{ und } b_1 = 1 \Rightarrow s^2 + \sqrt{2}s + 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

9.7.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_D^{2n}) = A_{\max}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$

Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als
[.] bedeutet 'aufrunden auf ganze Zahl'

\Rightarrow Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem Nomogramm bestimmt werden.

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}\right)}{2 \cdot \log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

9.8 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)

Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-I als

$$K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega) \text{ gewählt.}$$

Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 \cdot C_n^2(\Omega)}}$$

e

$C_n(\Omega)$

Rippelfaktor (Konstante)

Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung n

Das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ ist im Durchlassbereich und im Sperrbereich **unterschiedlich definiert!**

Durchlassbereich ($|\Omega| \leq 1$)

$$C_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos(\Omega))$$

Sperrbereich ($|\Omega| \geq 1$)

$$C_n(\Omega) = \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(\Omega))$$

Für die Ordnung $n \geq 2$ lässt sich das Tschebyscheff-Polynom $C_n(\Omega)$ mittels Rekursionsformel berechnen

$$C_n(\Omega) = 2\Omega C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega)$$

$$C_0(\Omega) = 1$$

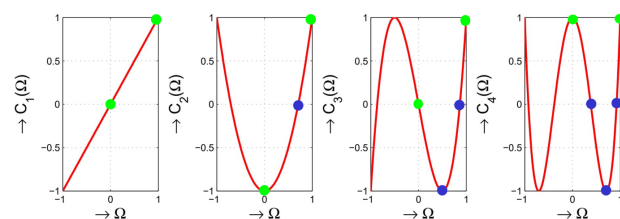
$$C_1(\Omega) = \Omega$$

Zwischen dem Rippelfaktor e und der maximalen Dämpfung A_{\max} gilt der Zusammenhang:

$$A_{\max} = 10 \cdot \log_{10}(1 + e^2) \Leftrightarrow e = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

9.8.1 Eigenschaften der Tschebyscheff-I-Approximation (S. 311)

Im **Durchlassbereich** schwankt das Tschebyscheff-Polynom in den Grenzen ± 1 . Im **Sperrbereich** nimmt C_n monoton mit Ω zu.



• Durchlassbereich

- Für $\Omega = 0$ ist für ungerade n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für $\Omega = 0$ ist für gerade n : $|H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Rightarrow$ **nicht** 3 dB Dämpfung
- Aus der Anzahl **Extremstellen** und **Endpunkte** des Amplitudengangs im **Durchlassbereich** ($0 \leq \Omega \leq 1$) lässt sich die **Ordnung n** bestimmen.
Ordnung = Summe aller Extremstellen plus beide Endpunkte minus 1

• Sperrbereich

- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{e \cdot C_n(\Omega)} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB / Dekade}$ bzw. **$-n \cdot 6.02 \text{ dB / Oktave}$**
- Fixe Ordnung n : Je grösser der Rippelfaktor e , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich
- Fixer Rippelfaktor e : Je grösser die Ordnung n , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich

9.8.2 Pol-Lagen (S. 313)

- Die Pole liegen auf einer Ellipse
- Allpassfilter
- Je näher die Pole an der $j\omega$ -Achse liegen, desto mehr Rippel gibt es im Phasengang

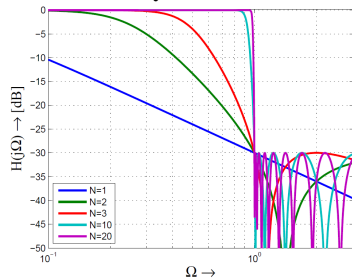
9.8.3 Filterordnung (S. 316)

$$n = \left\lceil \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

\Rightarrow Nomgramme!

9.9 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)

Inverses Tschebyscheff-Filter

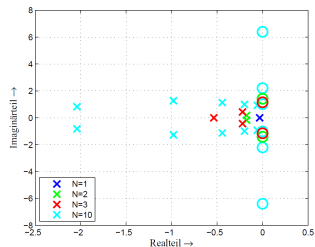


Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-II-Approximation als $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^2 C_n^2(\frac{1}{\Omega})}}}$$

e Rippelfaktor (Konstante)
 $C_n(\Omega)$ Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung n

9.9.1 Pol-Lagen (S. 321)



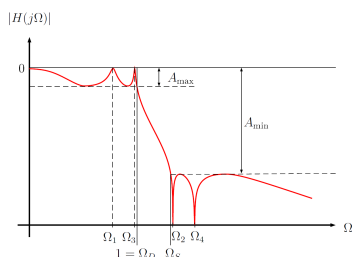
- **Kein Allpolfilter**
 - Gerade Ordnung n : n Pole und n Nullstellen
 - Ungerade Ordnung n : n Pole und $n - 1$ Nullstellen

9.9.2 Filterordnung (S. 319)

$$n = \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_D}\right)}$$

Die Filterordnung berechnet sich identisch wie bei der Tschebyscheff-I-Approximation!
 ⇒ Gleiches Nomogramm wie für Tschebyscheff-I

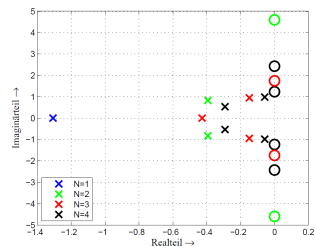
9.10 Approximation nach Cauer (S. 322)



Kombination von Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II

Daher spricht man auch von Complete-Chebyshev- oder Chebyshev-Cauer-Filtern (CC-Filter).

9.10.1 Pol-Lagen (S. 325)



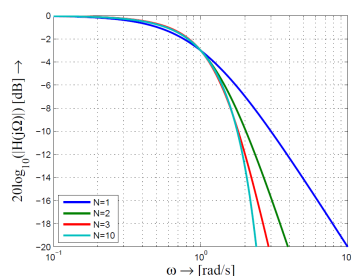
- **Kein Allpolfilter**
 - Gerade Ordnung n : n Pole und n Nullstellen
 - Ungerade Ordnung n : n Pole und $n - 1$ Nullstellen

9.10.2 Filterordnung (S. 326)

$$n = \frac{\left| \frac{K\left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2 K\left(1 - \frac{A_{\max}/10^{-1}}{A_{\min}/10^{-1}}\right)}{K\left(1 - \left(\frac{\Omega_D}{\Omega_S}\right)^2\right) K\left(\frac{A_{\max}/10^{-1}}{A_{\min}/10^{-1}}\right)} \right|}{\arccos\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_D}\right)} \quad \text{mit } K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta$$

⇒ Nomogramm!

9.11 Approximation nach Bessel (S. 328)



Bessel-Filter liefern eine möglichst **lineare Phase**, d.h. eine **konstante Gruppenlaufzeit**. Die Übertragungsfunktion $H(S)$ lautet

$$H(S) = K \cdot e^{-ST_0}$$

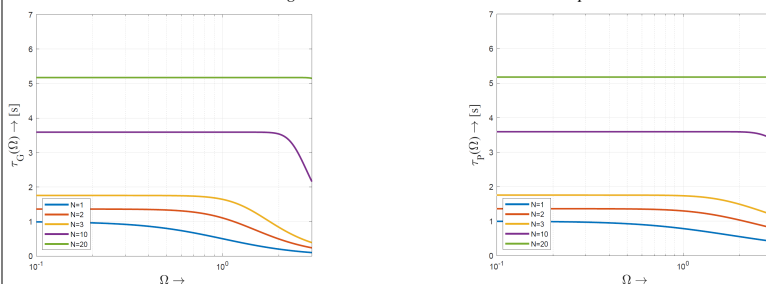
Für die Gruppenlaufzeit folgt somit

$$\tau_g(\Omega) = \frac{-d\theta(\Omega)}{d\Omega} = T_0 = \text{const}$$

Ohne Einschränkung kann in der UTF $T_0 = 1$ und $K = 1$ gesetzt werden:

$$H(S) = e^{-S} = \frac{1}{e^S} \approx \frac{1}{D(S)}$$

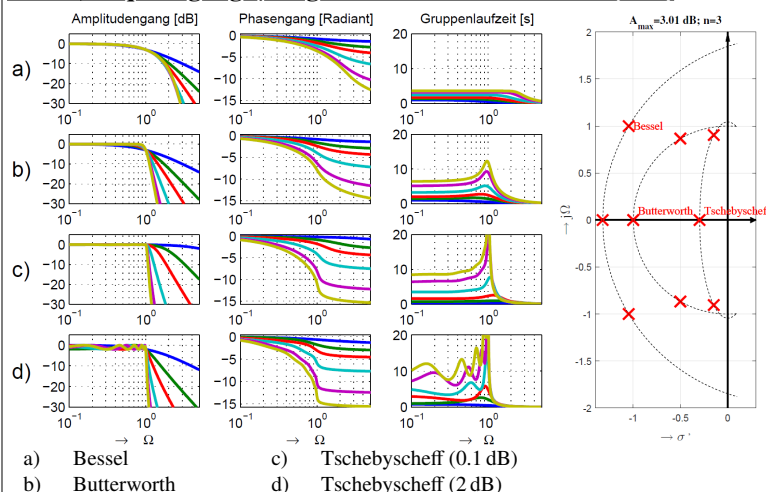
9.11.1 Gruppenlaufzeit $\tau_g(\Omega)$ und Phasenlaufzeit $\tau_p(\Omega)$ (S. 331)



9.12 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen

	Krit. Gedämpft	Butterworth	Tschebyscheff 1	Tschebyscheff 2	Cauer	Bessel
Allpolfilter	ja	ja	ja	nein	nein	ja
Pol-Lage	reelle Achse <0	Halbkreis LHE	Ellipse LHE	LHE	LHE	exzent. Kreis
NS-Lage	-	-	-	jω-Achse	jω-Achse	-
DB	streng monoton	streng monoton steilstmöglich	wellig konst. Rippel	streng monoton	wellig	streng monoton
SB	streng monoton	streng monoton	streng monoton	wellig konst. Rippel	wellig	streng monoton
Phasengang	sehr gut	mittel	schlecht	schlecht	wild	bestmöglich

9.12.1 Frequenzgänge / Lage der Pol- und Nullstellen (S. 334)



9.13 Standard-Filtertypen – Überblick

• kritisch-Gedämpfte Filter

- + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
- + Kein Überspringen bei Impuls- und Sprungantwort
- Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
- Kaskadierung von n wirkungsfreien, identischen Filtern 1. Ordnung
- Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung von 3 dB
- Steilheit: $-n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Allpolfilter: n Pole am gleichen Ort in der LHE

• Butterworth

- + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
- + Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
- + Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
- Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
- Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung von 3 dB
- Steilheit: $-n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Allpolfilter: Pole auf Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{n}$

• Tschebyscheff-I

- + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
- **Rippel** im **Durchlassbereich** (abhängig von Ordnung n)
- Keine konstante Gruppenlaufzeit (wellig)
- Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor e
- Steilheit: $-n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Allpolfilter: Pole auf einer Ellipse

• Tschebyscheff-II

- + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
- **Rippel** im **Sperrbereich** (abhängig von Ordnung n)
- Relativ konstante Gruppenlaufzeit
- Bei $\Omega = 1 \Rightarrow$ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor e
- Steilheit: $-n \cdot 20$ dB/ Dekade
- Kein Allpolfilter

• Cauer

- + **Steilster Übergang** von Durchlass- zu Sperrbereich
- **Rippel** in **Durchlassbereich** und **Sperrbereich** (abhängig von Ordnung n)
- **Kombination aus Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II**
- Kein Allpolfilter

• Bessel

- + **Flachster Übergang** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
- + Konstante Gruppenlaufzeit

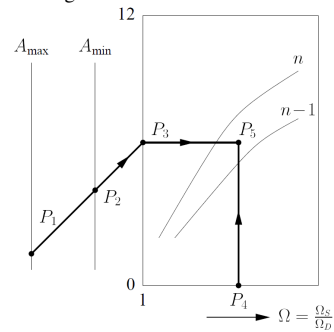
- Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
- Allpolfilter: Pole auf exzentrischen Kreisen in LHE

9.14 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen (\Rightarrow 9.13)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen inkl. Normierung (\Rightarrow 9.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder Nomogramm \Rightarrow 9.15)
4. Übertragungsfunktion bestimmen (\Rightarrow Tabellen oder Matlab)
5. Komponenten mittels Entnormierung bestimmen (Tabellen \Rightarrow 9.16)

9.15 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



Benutzung von Nomogrammen

1. P_1 : Verbindung von A_{\max} zu A_{\min}
2. P_2 : Verlängerung von P_1 bis zum 'Diagramm-Rand'
3. P_3 : Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4. P_4 : Bei $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$ vertikale Linie ziehen
5. P_5 : Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve \Rightarrow Ordnung n der Kurve ablesen

9.16 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern (S. 409)

Achtung: Normierung der Widerstände beachten!