Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis
Autoren:
Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:
1.0.20240529
https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2

Inhaltsverzeichnis

1 Filter

1.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequnezselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequnezselektiven Grundtypen** sind:

- Tiefpass (TP)
- Hochpass (HP)
- Bandpass (BP)
- Bandsperre, Notch (BS)
- Allpass

1.2 Frequnezgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)

Für den Frequnezgang $H(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2\Big|_{\omega^2=-s^2}$$

Hinweis: $|H(j\omega)|^2$ ist immer eine Funktion in ω^2, da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur $H(s)$ interessant** ist, muss $H(s)$ aus $|H(j\omega)|^2$ 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

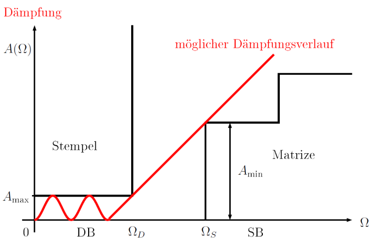
$$\boxed{\underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{N(-s)}{D(-s)}}_{H(-s)} = |H(j\omega)|^2\Big|_{\omega^2=-s^2}}$$

Hinweis: $D(s)$ muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

1.3 Approximation im Frequnezbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet.** Zuerst soll der **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ im Frequnezbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

1.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema beschrieben**. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.

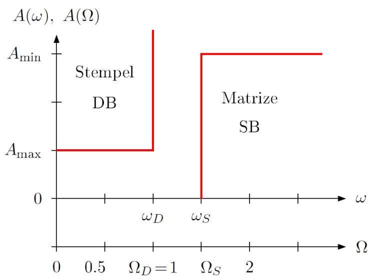
- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung** A_{max}
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung** A_{min}

$$\boxed{A_{dB}(\omega) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{|H(\omega)|^2}\right) = -20 \cdot \log(|H(\omega)|) \quad \Rightarrow \text{Dämpfung!}}$$

1.3.2 Frequenznormierung

Um möglist kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- BP / BS: Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$

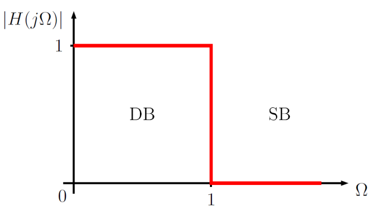


Normierte Grössen

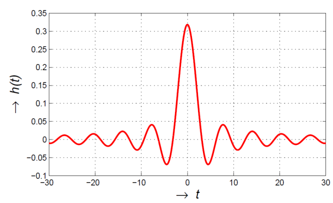
$$\boxed{S = \frac{s}{\omega_r}} \qquad \boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega_r}} \qquad \boxed{\sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}}$$

Hinweis: Zur Entnormierung wird jeweils S in der normierter Funktion durch $\frac{s}{\omega_r}$ ersetzt.

1.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



- DB: keine Dämpfung
- SB: kein Ausgangssignal



- Akausale Impulsantwort $h(t)$

$\Rightarrow$ Ideales Tierpass ist physikaltisch nicht realisierbar. $\Rightarrow$ **Approximationen**

1.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$\boxed{|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt füt die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

Durchlassbereich (DB)	$0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$	für $0 \leq \Omega < 1$	$\Rightarrow \|H(j\Omega)\|^2 \approx 1$
Sperrbereich (SB)	$K(\Omega^2) \gg 1$	für $\Omega > 1$	$\Rightarrow \|H(j\Omega)\|^2 \approx 0$

1.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)

Tiefpassfilter n. Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweilen einen ***n*-fachen Pol** auf der **negativen** σ-Achse.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n}}$$

n	Ordnung des Filters
ω_c	3 dB-Punkt jeder der ***n*** **Teilfilter**

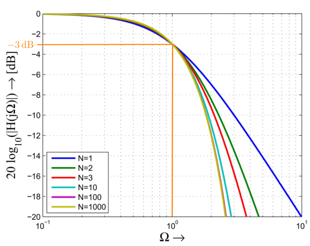
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\boxed{\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10 \cdot n}} - 1}}}$$

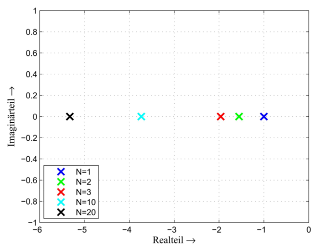
1.6.1 Eigenschaten kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ-Achse $\Rightarrow$ Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n: $|H(0)| = H_{max} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n: $|H(j)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 3 dB Dämpfung
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow$ **$-n \cdot 20$ dB / Dekade**
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend $\Rightarrow$ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

Amplitudengänge



Pol-Lagen



1.7 Standard-Filtertypen – Überblick

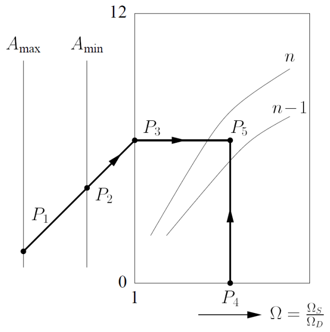
- **Butterworth**
  - \+ **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
  - \+ Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
  - \- Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
  - \- Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
- **Bessel**
  - \+ **Flachster Übergag** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
  - \+ Konstante Gruppenlaufzeit
  - \- Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
- **Tschebyscheff-I**
  - \+ Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
  - \- **Rippel** im Durchlassbereich
  - \- Keine konstante Gruppenlaufzeit

1.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen ($\Rightarrow$ 1.7)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen inkl. Normierung ($\Rightarrow$ 1.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder Nomogramm $\Rightarrow$ 1.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen ($\Rightarrow$ Matlab)
5. Komponenten mittels Entnormierung bestimmen (Tabellen $\Rightarrow$ 1.10)

1.9 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



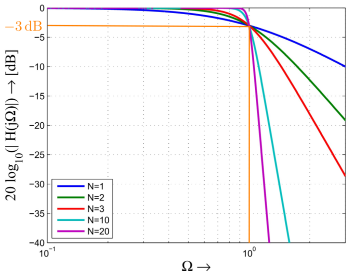
Benutzung von Nomogrammen

1. P_1: Verbindung von $A_{\max}$ zu $A_{\min}$
2. P_2: Verlängerung von P_1 bis zum 'Diagramm-Rand'
3. P_3: Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4. P_4: Bei $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$ vertikale Linie ziehen
5. P_5: Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve ⇛ Ordnung n der Kurve ablesen

1.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern (S. 409)

Achtung: Normierung der Widerstände beachten!

1.11 Approximation nach Butterworth (S. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt.
Der Amplitudengang $|H(\mathrm{j}\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$\boxed{|H(\mathrm{j}\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^{2n}}}}$$

1.11.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (S. 303)

- **Durchlassbereich**
  - Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n: $|H(0)| = H_{\max} = 1$
  - Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n: $|H(\mathrm{j})| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇛ 3 dB Dämpfung
  - Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- **Sperrbereich**
  - Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(\mathrm{j}\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n}$ ⇛ $-n \cdot 20$ **dB / Dekade**
- **Allgemein**
  - Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇛ keine Welligkeit

1.11.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(\mathrm{j}\Omega)|$ (S. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+K(\Omega^2)}\bigg|_{\Omega^2=-S^2} = \frac{1}{1+(-S^2)^n} = H(S)\cdot H(-S) = \frac{1}{D(S)}\cdot\frac{1}{D(-S)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ($D(S)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$\boxed{D(S)\cdot D(-S) = 1+(-S^2)^n}$$

Mit dem Ansatz

$$\boxed{D(S) = \prod_{j=1}^{t}(S^2 + a_j\cdot S + b_j)\prod_{j=2t+1}^{n}(S-c_j)}$$

wird das Produkt $D(S)\cdot D(-S)$ bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

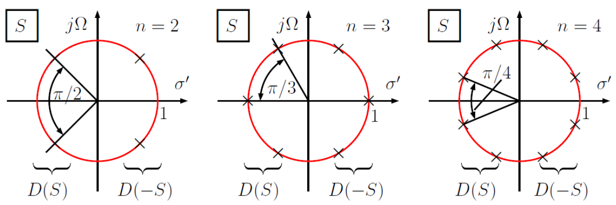
1.11.3 Bestimmung der Pol-Lage (S. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 1.11.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$\boxed{D(S)\cdot D(-S) = 1+(-S^2)^n \stackrel{!}{=} 0}$$

Durch Auflösen der Gleichung nach S kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- **Für Nennerpolynom $D(S) = \frac{1}{H(S)}$ müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!**

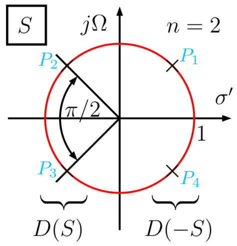


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz:}\quad H(S)\cdot H(-S) = \frac{1}{D(s)}\cdot\frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1+(-S^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(S)\cdot D(-S) = 1+S^4 \quad\Leftrightarrow\quad S^4 = -1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$$



Aufgelöst nach S liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene	**Linke Halbebene**
$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$
$P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$

⇛ Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(S-P_2)\cdot(S-P_3)} = \frac{1}{S^2+\sqrt{2}S+1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion $H(S)$ auch mittels folgendem Ansatz für $D(S)$ und anschliessendem Koeffizientenvergleich von $D(S)\cdot D(-S)$ bestimmt werden.

$$\text{Ansatz:}\quad D(S) = S^2 + a_1 S + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich:}\quad D(S)\cdot D(-S) = S^4 + (2b_1 - a_1^2)\,S + b_1^2 \stackrel{!}{=} S^4 + 1$$

⇛ $a_1 = \sqrt{2}$ und $b_1 = 1$ ⇛ $S^2 + \sqrt{2}S + 1$ ⇛ $H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{S^2+\sqrt{2}S+1}$

1.11.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10\cdot\log_{10}(1+\Omega_D^{2n}) = A_{\max} \qquad A(\Omega_S) = 10\cdot\log_{10}(1+\Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$

Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als
$\lceil.\rceil$ bedeutet '**aufrunden** auf ganze Zahl'

$$\boxed{n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}\right)}{2\cdot\log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil}$$

⇛ Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem Nomogramm bestimmt werden.

1.12 Approximation nach Tschebyscheff-I

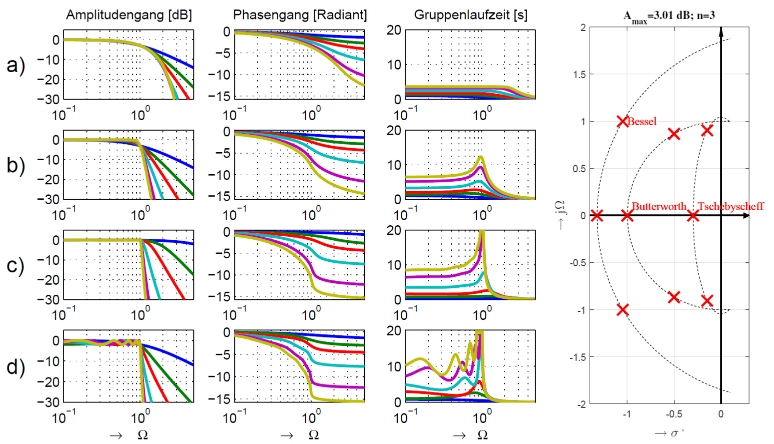
1.13 Approximation nach Tschebyscheff-II

1.14 Approximation nach Cauer

1.15 Approximation nach Bessel

1.16 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen

1.16.1 Frequenzgänge / Lage der Pol- und Nullstellen



a)	Bessel	c)	Tschebyscheff (0.1 dB)
b)	Butterworth	d)	Tschebyscheff (2 dB)