

Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240525

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

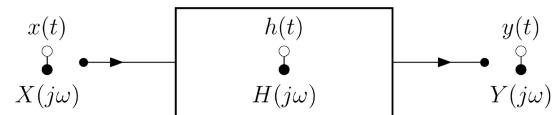
1 LTI-Systeme (S. 171)	2	6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)	6
1.1 Zusammenhänge zwischen den Größen (S. 174-176)	2	6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab	6
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	7 Stabilität im Nyquist-Diagramm	6
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2	7.1 Offener und geschlossener Regelkreis	6
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2	7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	6
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2	7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)	6
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2	7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm	7
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2	8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)	7
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3	8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)	7
2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel	3	8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)	7
2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)	3	8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)	7
2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)	3	8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)	7
2.3 Rechenregeln mit Dezibel	3	8.5 ZRD mit MatLab	7
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3	8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)	7
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor	3	8.7 Matrix $\mathbf{b}\mathbf{m}\mathbf{A}$ diagonalisieren	8
2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3	8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2×2 Matrix invertieren	8
3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme	3	8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)	8
3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4	8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)	8
3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)	4	8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)	8
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm	4	8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)	9
3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4	8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)	9
3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4	8.14 Steuerbarkeit (S. 277)	9
3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm	4	8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)	9
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	5	8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)	9
3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)	5	9 Filter	10
3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	5	9.1 Grundtypen (S. 291)	10
4 Bodediagramm	5	9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$	10
4.1 Bodediagramme mit MatLab	5	9.3 Approximation im Frequenzbereich	10
4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)	5	9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)	10
4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)	6	9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$	10
5 Stabilität im Bodediagramm	6	9.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)	10
5.1 Amplitudenrand und Phasenrand	6	9.7 Standard-Filtertypen – Überblick	11
5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm	6	9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen	11
		9.9 Nomogramme (S. 393)	11
		9.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern	11
		9.11 Approximation nach Butterworth (S. 303)	11

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Größen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

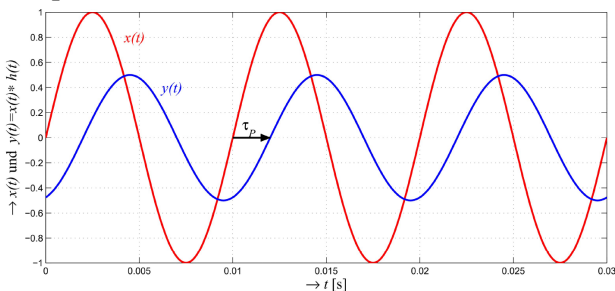
Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.

⇒ **Diese Verzögerung wird Phasenlaufzeit genannt**

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$

Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** t_0 ($= \tau_P = \tau_G$)

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}} \quad U_1 \text{ entspricht der Grundharmonischen} \\ \Rightarrow \text{Es gilt: } 1 > k \geq 0$$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)$$

1.6.2 Total Harmonic Disortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}} \quad U_1 \text{ entspricht der Grundharmonischen} \\ \Rightarrow \text{Es gilt: } \infty > \text{THD} \geq 0$$

geringe Verzerrungen: $\text{THD} \approx k$ allgemein: $\text{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$h(-\tau)$

\longleftrightarrow

$H^*(j\omega)$

$\varphi_{xx}(\tau)$

\longleftrightarrow

$\Phi_{xx}(j\omega)$

$h(\tau)$

\longleftrightarrow

$H(j\omega)$

$h(\tau) * h(-\tau)$

\longleftrightarrow

$|H(j\omega)|^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$\varphi_{yy}(\tau)$

\longleftrightarrow

$\Phi_{yy}(j\omega)$

AKF

PSD

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. \Rightarrow Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren \Rightarrow Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren \Rightarrow Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ($U_2 > U_1$) \Rightarrow positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ($U_2 < U_1$) \Rightarrow negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$T_{U_{tot}}$

$=$

$\frac{U_2}{U_1}$

\cdot

$\frac{U_3}{U_2}$

\cdot

$\frac{U_4}{U_3}$

\cdot

$\frac{U_5}{U_4}$

$=$

$\frac{U_5}{U_1}$

$=$

$\frac{10}{1}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

\cdot

$\frac{10}{1}$

$=$

50

$a_{U_{tot}}$

$=$

-20dB

$+$

3dB

$+$

3dB

$+$

-20dB

$=$

-34dB

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20 \text{ dB} + 3 \text{ dB} + 3 \text{ dB} - 20 \text{ dB} = -34 \text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 – 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 – 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 – 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 – 6 = 10 – 3 – 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 – 10 = 5 – 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 – 3 – 3 – 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
–1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$

$(L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{774.6 \text{ mV}} \right)$

$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$

$(L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{1.291 \text{ mA}} \right)$

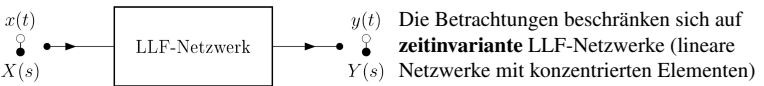
$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$

$(L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{1 \text{ mW}} \right)$

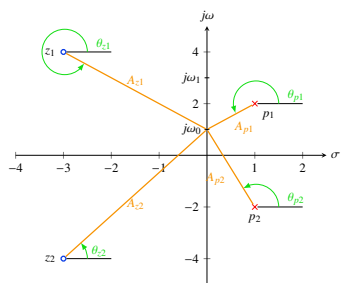
2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μW

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für eine bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

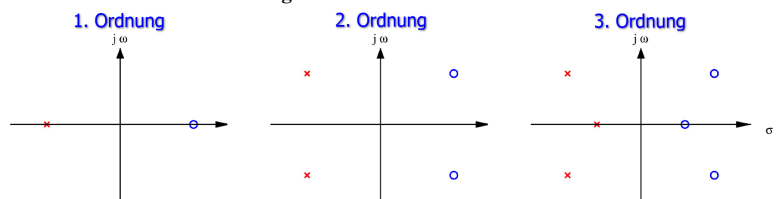
- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen – Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeller Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von –20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen ω konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF $H(S)$ kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

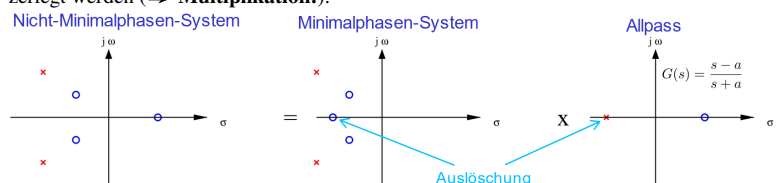
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
 - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

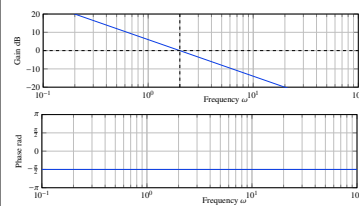
4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

4.2.1 Pol im Ursprung

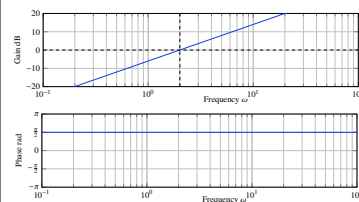
$$H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$$



- Betrag = Gerade mit Steigung –20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \alpha$
- Phase $-\frac{\pi}{2} = \text{const}$

4.2.2 Nullstelle im Ursprung

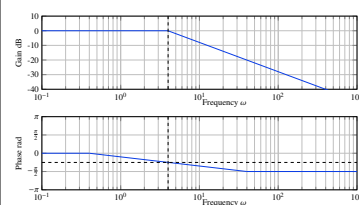
$$H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$$



- Betrag = Gerade mit Steigung +20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
- Phase $+\frac{\pi}{2} = \text{const}$

4.2.3 Reeller Pol

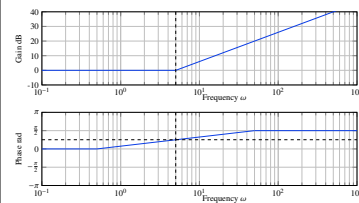
$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$$



- Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung –20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
- Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $-\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $-\frac{\pi}{4}$)

4.2.4 Reelle Nullstelle

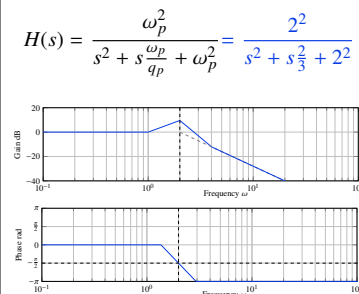
$$H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$$



- Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung +20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
- Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $+\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $+\frac{\pi}{4}$)

4.2.5 Konjugiert-komplexe Pole

$$\text{Voraussetzung: } |q_p| > \frac{1}{2}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_p}{2}$
2. $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_p
→ stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_p$
3. Maximalwert = $20 \cdot \log_{10}(q_p)$ bei ω_p
4. Gerade von $\omega = \frac{\omega_p}{2}$ zu Maximalwert
5. Gerade von Maximalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_p$

Phase zeichnen

1. 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10^{2q_p}}$
2. $-\pi$ ab $\omega > \omega_p \cdot 10^{2q_p}$
3. Gerade zwischen 0 und π Geraden
4. $(-\frac{\pi}{2})$ bei $\omega = \omega_p$

4.2.6 Konjugiert-komplexe Nullstellen

Voraussetzung: $|q_z| > \frac{1}{2}$

$$H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$$

Gain dB

Phase rad

Frequency ω

Betrag zeichnen

- 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\omega_z}{2}$
- +40 $\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ fein einzeichnen ab ω_z
→ stark zeichnen ab $\omega = 2 \cdot \omega_z$
- Minimalwert = $-20 \cdot \log_{10}(q_z)$ bei ω_z
- Gerade von $\omega = \frac{\omega_z}{2}$ zu Minimalwert
- Gerade von Minimalwert zu $\omega = 2 \cdot \omega_z$

Phase zeichnen

- 0 bis $\omega < \frac{\omega_z}{10 \cdot 2q_z}$
- + π ab $\omega > \omega_z \cdot 10 \frac{1}{2q_z}$
- Gerade zwischen 0 und $-\pi$ Geraden
- ($\frac{\pi}{2}$ bei $\omega = \omega_z$)

Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, S. 235

q_p	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{20} q_p}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{-\frac{1}{20} q_p}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
 - Betrag = $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
 - Phase = $\beta = \text{const}$

Gain dB

Phase rad

Frequency ω

4.2.8 Weitere Bemerkungen

- Inverser Frequenzgang:**
 - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
 - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
 - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am grössten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

UTF Tiefpass 2. Ordnung: $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$

Frequenz beim Maximum: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$

Höhe des Maximums: $|H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$

⇒ Es gilt: $\omega_{\max} \leq \omega_p$

4.3.1 Spezialfall $q = 1$

Frequenz: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$

Höhe: $|H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$

4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$

Frequenz: $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C}$

Höhe: $|H(\omega_{\max})| = \infty$

4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Frequenz: $\omega_{\max} = 0$

Höhe: $|H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$

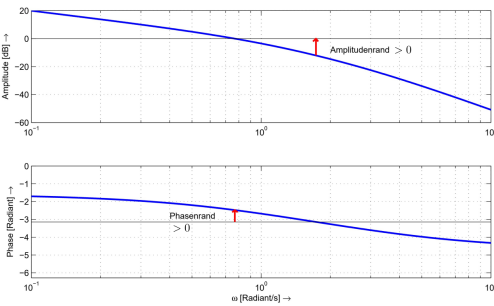
5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis $H(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei $s = 0$), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn $H(j\omega)$ für die **Durchgangsfrequenz** ω_D bei der die Amplitude $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0 \text{ dB}$ ist, und eine Phase $> -\pi$ hat.
⇒ Amplitudenrand und Phasenrand müssen > 0 sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Phase gleich $-\pi$ bzw. -180° ist.
- Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Abstand des Phasengangs zur $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzganges in Abhängigkeit der Frequenz f (aufsteigende Werte von f) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.
Auf die Konstruktion von Ortskurven wird im Modul Regelungstechnik 2 im Detail eingegangen. Darum soll hier nur auf die Beschreibung im Skript (S. 240 - 242) verwiesen werden.

6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems  
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve** $H(s)$ (**offener Regelkreis**) einen Aussage über die **Stabilität** des (**geschlossenen Regelkreises**) zu machen.
Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis

offener Regelkreis

geschlossener Regelkreis

$$H_{\text{geschlossen}}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

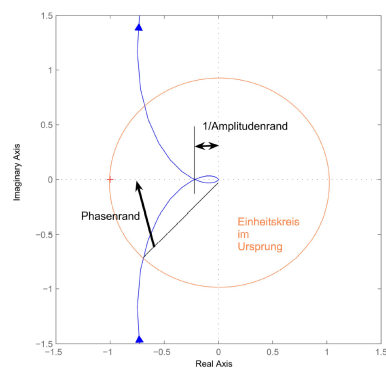
7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt $(-1, j0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern 'links liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

- Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.
- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Frequenz, bei welche die **negative** reelle Achse geschnitten wird: ω_π
 - Bei ω_π : $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$ = Abstand zum Ursprung
 - Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Frequenz, bei welche Eintritt in den Einheitskreis erfolgt: ω_D
 - Bei ω_D : Winkel bis zu 180°

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt $(-1, j0)$ 'links' liegen gelassen wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt.

Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

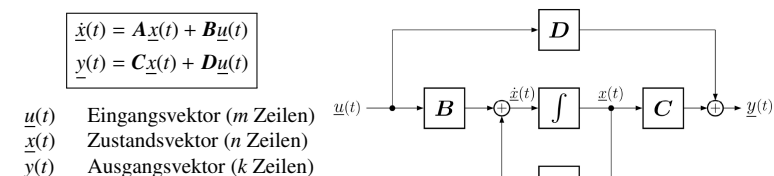
8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Grundidee: Differentialgleichung n . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)

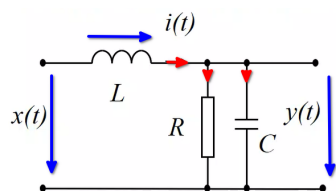
- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können \Rightarrow Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**, in der Elektrotechnik L und C
- Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)



- obere Gleichung: **Zustandsgleichung**
- untere Gleichung: **Ausgangsgleichung**
- A Systemmatrix** ($n \times n$ -Matrix)
Sie bestimmt das Verhalten des **ungestörten Systems** ($\underline{u}(t) = 0$) und bestimmt z.B. die innere Stabilität des gesamten Systems.
- B Eingangsmatrix (Steuermatrix)** ($n \times m$ -Matrix)
Sie bestimmt die Wirkung der **Steuergrößen** $\underline{u}(t)$ auf die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$
- C Ausgangsmatrix (Beobachtungsmatrix)** ($k \times n$ -Matrix)
Sie kennzeichnet die Abhängigkeit des **Zustandes** $\underline{x}(t)$ von der beobachtbaren Ausgangsgrösse $\underline{y}(t)$
- D Durchgangsmatrix** ($k \times m$ -Matrix)
Sie bestimmt die unmittelbare Wirkung der Eingangsgrösse $\underline{u}(t)$ auf den Ausgang $\underline{y}(t)$

Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität: $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Maschen: $L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + y(t) = x(t)$

Knoten: $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t (i(\tau) - \frac{y(\tau)}{R}) d\tau = y(t)$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

$$L \cdot i'(t) + y(t) = x(t)$$

$$i(t) - \frac{y}{R} = C \cdot y'(t)$$

$$i'(t) = -\frac{1}{L}y(t) + \frac{1}{L}x(t)$$

$$y'(t) = \frac{1}{C}i(t) - \frac{1}{RC}y(t)$$

Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

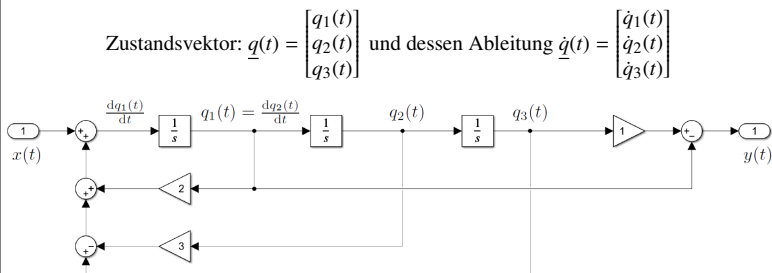
Zustände: $i(t), y(t)$
Eingang: $x(t)$
Ausgang: $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{bmatrix} i'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot x(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot x(t)$$

Beispiel: ZRD aus Signalfussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ und \underline{D} gefunden werden.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{q}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot x(t)$$

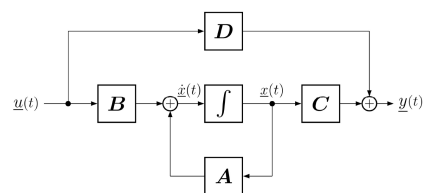
$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot x(t)$$

8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}\underline{U}(s)$$

$$\underline{Y}(s) = \underline{C}\underline{X}(s) + \underline{D}\underline{U}(s)$$

$\underline{U}(s)$ Eingangsvektor (m Zeilen)
 $\underline{X}(s)$ Zustandsvektor (n Zeilen)
 $\underline{Y}(s)$ Ausgangsvektor (k Zeilen)
 \underline{I} Einheitsmatrix
 $\underline{H}(s)$ Übertragungsmatrix ($k \times m$)



$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}(\underline{sI} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0)}_{\underline{H}(s)} + \underbrace{(\underline{C}(\underline{sI} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Mit Anfangsbedingungen $\underline{x}(0) = 0$ ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{(\underline{C}(\underline{sI} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Hinweis: Aus einem Signalfussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

8.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

Übertragungsmatrix

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matrizenform

$$\underline{Y}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{U}(s)$$

- $\underline{H}(s)$ hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix \underline{D}

Übertragungsfunktion

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$. Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

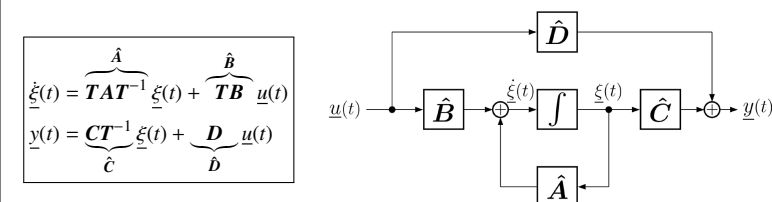
8.5 ZRD mit Matlab

$$H(s) = \frac{b_1 s^i + b_{i-1} s^{i-1} \dots b_1 s^1 + b_0}{a_1 s^i + a_{i-1} s^{i-1} \dots a_1 s^1 + a_0}$$

- `[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)` % $\underline{H}(s)$ aus Matrizen berechnen
- `(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)` % Matrizen aus $\underline{H}(s)$ berechnen

8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix** \underline{T} ($n \times n$ -Matrix, nicht singular, $\underline{T}\underline{T}^{-1} = \underline{I} = \underline{T}^{-1}\underline{T}$) kann man **verschiedenste Zustandsgrößen und Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 8.2 bezüglich $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$. Die bedeutet, dass die **Zustandsgrößen** $\underline{x}(t)$ und $\underline{x}(t)$ **willkürlich** gewählt werden können, solange \mathbf{T} nicht singulär ist (Determinante von $\mathbf{T} \neq 0$)

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrößen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

8.7 Matrix A diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix** \mathbf{A} diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ wird dann üblicherweise \mathbf{A}_{diag} verwendet.

- λ_i Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}
- \vec{v}_i Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A}
- \mathbf{V} Matrix mit Eigenvektoren von \mathbf{A}
- $\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda}$ Diagonalisierte Matrix \mathbf{A} mit Eigenwerten λ_i auf Diagonale
- \mathbf{T} Transformationsmatrix

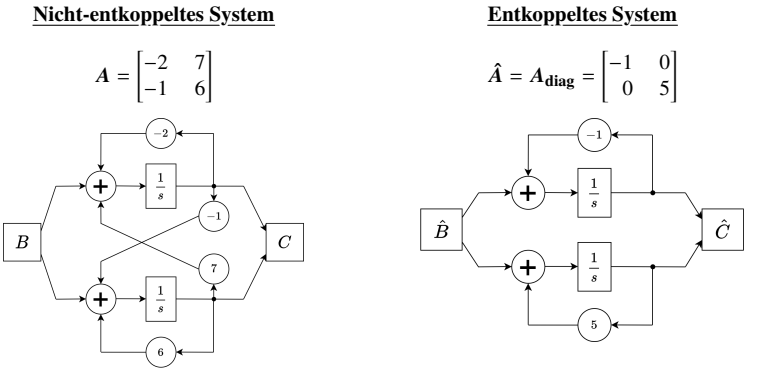
$$\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$$
$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{V}$$

8.7.1 Vorgehen Matrix diagonalisieren

- Ansatz: $\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen: $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow$ Eigenwerte λ_i
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren \vec{v}_i gefunden werden:
 - Eigenwert λ_i in Gleichungssystem $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ einsetzen
 - Einen Wert von $\vec{v}_i = 1$ wählen und Eigenvektor \vec{v}_i als Spaltenvektor schreiben
- Matrix \mathbf{V} aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix $\mathbf{\Lambda}$ 'zusammenbauen', indem man Eigenwerte λ_i auf Diagonale schreibt

8.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System



8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

Beispiel: Matrix-Diagonalisierung (S. 258)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -7 \\ 1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 6) - 7 \cdot (-1) = 0$$

\Rightarrow Mitternachtsformel liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$

Ersten Eigenwert $\lambda_1 = -1$ in $(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$ einsetzen

$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$
 $1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$

Wähle $v_{21} = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ Gleichen Vorgehen für zweiten Eigenvektor \vec{v}_2

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t)$ ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur einem Zustand würde man den Ansatz $\underline{x}(t) = e^{at}$ wählen. Da im Allgemeinen Systeme mit mehreren Zuständen betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Der Ansatz ist beschrieben als desser **Taylor-Reihe**. Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{B} \underline{u}(\tau) \, d\tau + \mathbf{D} \underline{u}(t)$$

Hinweis: $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$ heisst **Fundamentalmatrix**.

8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

$$e^{At} = \mathbf{\Phi}(t)$$

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im **Zeitbereich** zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische ($n \times n$) Fundamentalmatrix zu bestimmen

8.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1})\}$$

Beispiel: Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

Mit der **Systemmatrix** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ergibt sich $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$

Somit ist $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \circ \bullet \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)$

8.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_{\text{diag}}(t)} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

Wenn $\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$ ist und λ_i die Eigenwerte von \mathbf{A} sind

8.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

\Rightarrow Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

\Rightarrow Nicht in Vorlesung behandelt

8.10.5 Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

Die Matrix \mathbf{A} sei definiert als eine **Dreiecksmatrix** mit Parametern a und c

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

Die Potenz der Matrix wird berechnet aus

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} c^l & c^k \end{bmatrix}$$

Für $a = 1$ und $c = -1$ ergibt sich für \mathbf{A}^k

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^k - (-2)^k & cbl(-2)^k \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Fundamentalmatrix ist mittels Anwendung der Taylor-Reihe somit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

8.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$

$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$	$e^{A \cdot 0} = \mathbf{I}$
$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$	$(e^{A \cdot t})^{-1} = e^{-A \cdot t}$
$\mathbf{\Phi}^k(t) = \mathbf{\Phi}(kt)$	$(e^{A \cdot t})^k = e^{A \cdot k \cdot t}$
$\mathbf{\Phi}(t_1) \cdot \mathbf{\Phi}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_1 + t_2)$	$e^{A \cdot t_1} \cdot e^{A \cdot t_2} = e^{A(t_1+t_2)}$
$\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \mathbf{\Phi}(t_1 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0)$	$e^{A(t_2-t_1)} \cdot e^{A(t_1-t_0)} = e^{A(t_2-t_0)}$

Hinweis: $(\mathbf{\Phi}(t))$ ist stets invertierbar)

8.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

- 1 syms t % t als symbolischer Wert
- 2 A = [0 6; 1 5]; % Matrix A
- 3 expm(A*t) % Fundamentalmatrix

8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)

Die Impulsantwort $h(t)$ eines SISO-Systems ist gegeben durch

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B} * u(t) + \mathbf{D}u(t) = h(t) * u(t)$$
$$h(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$$

8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)

Ein LTI-System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben).
Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle **Eigenwerte** der **Systemmatrix** A einen **negativen Realteil** besitzen, ist das System **asymptotisch stabil**.

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \forall \lambda \quad \text{Re}\{\lambda\} < 0$$

Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht! Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet **nicht**, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix A des Systems einen negativen Realteil besitzen.
⇒ Pol-/Nullstellenkürzungen

8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist **beobachtbar**, wenn wir, gegeben das Eingangssignal $u(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$, über eine endliche Zeitspanne $0 \geq t \geq t_1$ die Zustände $\underline{x}(t)$ eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist **nicht beobachtbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die **keinen** Einfluss auf die Ausgänge $y(t)$ haben.
⇒ Man kann aus dem Verhalten von $y(t)$ **nicht** auf die Zustände $\underline{x}(t)$ schliessen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist **steuerbar**, wenn es für jeden Anfangszustand \underline{x}_0 und jeden Endzustand \underline{x}_1 eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne $0 \geq t \geq t_1$ von \underline{x}_0 zu \underline{x}_1 bringt, d.h. $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$.
- Ein System ist **nicht steuerbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die nicht von den Eingängen $u(t)$ beeinflusst werden.

Bemerkungen:

- System (A, B, C, D) ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir $\underline{x}(0)$ bestimmen können

8.14 Steuerbarkeit (S. 277)

Gemäss der äquivalenten ZRD-Darstellung (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV$, $\hat{B} = V^{-1}B$, $\hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{B} = V^{-1}B$ **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Zeile** von $\hat{B} = V^{-1}B$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig steuerbar**, wenn

- Der **Rang** der Steuerbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Steuerbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$				Dimension: $n \times n \cdot m$
A	Systemmatrix ($n \times n$)	n	Zustände	
B	Eingangsmatrix ($n \times m$)	m	Eingänge	

Steuerbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 ctrb(A, B); % Steuerbarkeitsmatrix
2 rank(ctrb(A, B)) % Rang der Steuerbarkeitsmatrix
```

8.15 Beobachtbarkeit (S. 278)

Gemäss der äquivalenten ZRD-Darstellung (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und \hat{D} mit einer Matrix V diagonalisiert, sodass $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV$, $\hat{B} = V^{-1}B$, $\hat{C} = CV$ und $\hat{D} = D$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), **alle** Elemente von $\hat{C} = CV$ **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$), in **jeder Spalte** von $\hat{C} = CV$ **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.15.1 Beobachtbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig beobachtbar**, wenn

- Der **Rang** der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $Q_{\text{Beobachtbarkeit}}$ **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$	Dimension:	$k \cdot n \times n$
	A	Systemmatrix ($n \times n$)
	C	Beobachtungsmatrix ($k \times m$)
	n	Zustände
	m	Eingänge
	k	Ausgänge

Beobachtbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 obsv(A, C); % Beobachtbarkeitsmatrix
2 rank(obsv(A, C)) % Rang der Beobachtbarkeitsmatrix
```

8.16 Standardformen der ZRD (S. 267)

Die allgemeine Differentialgleichung von SISO-Systemen der Form

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ergibt mit der Laplace-Transformation und mit $m \leq n$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Diese UTF $H(s)$ kann mit verschiedenen ZRDs (**Normalformen**) abgebildet werden.
Wichtig: Für alle folgenden Normalformen werden die Zustände x_i im blockdiagramm **unmittelbar nach den Integratoren** verwendet.

8.16.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

Die Regelungsnormalform kann **direkt aus der UTF** $H(s)$ aufgestellt werden.
Für $m = n$ gilt sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Ausgangsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.2 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

Ein System, welches in Beobachtungsnormalform dargestellt werden kann, ist **beobachtbar**! Für $m = n$ gilt sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Zustandsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.3 Regelungsnormalform ⇔ Beobachtungsnormalform

Die beiden Formen sind **dual** und weisen folgende Zusammenhänge auf (**Transposition**):

- A ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt
- B und C sind vertauscht
- D bleibt gleich

8.16.4 Jordan-Normalform (S. 271-273)

Die UTF wird mittels einer **Partialbruchzerlegung** dargestellt. Die Parameter der Partialbruchzerlegung können dann direkt in die Matrix $A = A_{\text{diag}}$ eingetragen werden.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = b_n + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

Die Diagonalform für **einfache, reelle Pole** mit $m = n$ ist:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Hinweis: Mit $m < n$ vereinfacht sich die **Ausgangsgleichung** zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.16.5 Diagonalform (S. 271-273)

Eine weitere Darstellungsform der Diagonalform ergibt sich mittels **Transposition** der Jordan-Normalform:

- **A** ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt (ergibt wiederum **A**)
- **B** und **C** sind vertauscht
- **D** bleibt gleich

9 Filter

9.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequenzselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequenzselektiven Grundtypen** sind:

- Tiefpass (TP)
- Bandpass (BP)
- Allpass
- Hochpass (HP)
- Bandsperre, Notch (BS)

9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)

Für den Frequenzgang $H(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$
$$H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $|H(j\omega)|^2$ ist immer eine Funktion in ω^2 , da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur $H(s)$ interessant** ist, muss $H(s)$ aus $|H(j\omega)|^2$ 'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

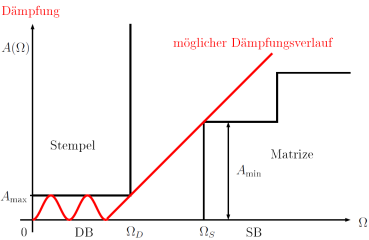
$$\underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{N(-s)}{D(-s)}}_{H(-s)} = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

Hinweis: $D(s)$ muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

9.3 Approximation im Frequenzbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet**. Zuerst soll der **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ im Frequenzbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

9.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



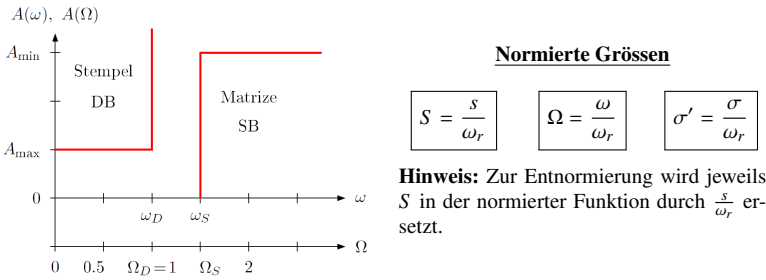
Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema beschrieben**. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.

- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung A_{max}**
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung A_{min}**

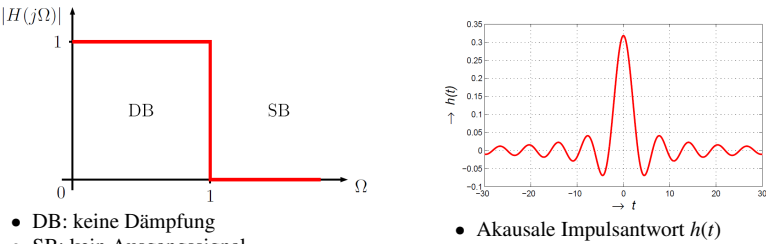
9.3.2 Frequenznormierung

Um möglichst kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs $\omega_r = \omega_D$
- **BP / BS:** Normierung bezüglich der Mittenfrequenz $\omega_r = \omega_m$



9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt füt die charakteristische Funktion $K(\Omega^2)$

Durchlassbereich (DB) $0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$ für $0 \leq \Omega < 1$ ⇒ $|H(j\Omega)|^2 \approx 1$

Sperrbereich (SB) $K(\Omega^2) \gg 1$ für $\Omega > 1$ ⇒ $|H(j\Omega)|^2 \approx 0$

9.6 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)

Tiefpassfilter n . Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweiligen einen **n -fachen Pol** auf der **negativen σ -Achse**.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n}$$

n Ordnung des Filters
 ω_c 3 dB-Punkt jedes der n Teilfilter

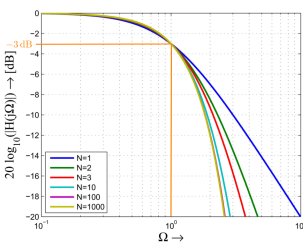
Will man bei der Kreisfrequenz ω_D eine Dämpfung von α dB haben, so muss ω_c (der n identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt[10^{\frac{\alpha}{20 \cdot n}} - 1]}$$

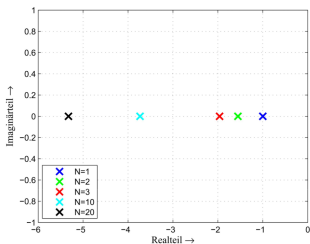
9.6.1 Eigenschaften kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer σ -Achse ⇒ Allpolfilter
- Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\text{max}} = 1$
- Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
- Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/ Dekade}$
- Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis ω_D

Amplitudengänge



Pol-Lagen



9.7 Standard-Filtertypen – Überblick

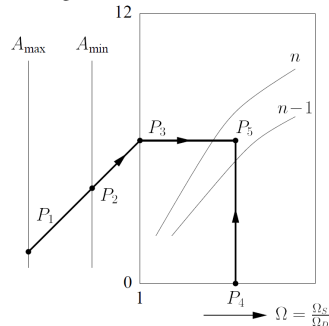
- **Butterworth**
 - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
 - + Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
 - Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
 - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
- **Bessel**
 - + **Flachster Übergang** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
 - + Konstante Gruppenlaufzeit
 - Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
- **Tschebyscheff-I**
 - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
 - **Rippel** im Durchlassbereich
 - Keine konstante Gruppenlaufzeit

9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen (⇒ 9.7)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen inkl. Normierung (⇒ 9.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder Nomogramm ⇒ 9.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen (⇒ Matlab)
5. Komponenten mittels Entnormierung bestimmen (Tabellen ⇒ 9.10)

9.9 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.



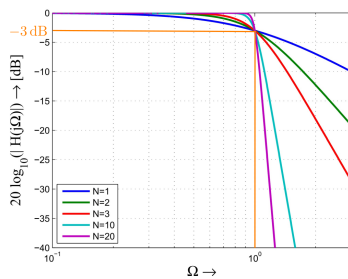
Benutzung von Nomogrammen

1. P_1 : Verbindung von A_{\max} zu A_{\min}
2. P_2 : Verlängerung von P_1 bis zum 'Diagramm-Rand'
3. P_3 : Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4. P_4 : Bei $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$ vertikale Linie ziehen
5. P_5 : Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve ⇒ Ordnung n der Kurve ablesen

9.10 Tabellen zum Entwurf von LC-Filtern (S. 409)

Achtung: Normierung der Widerstände beachten!

9.11 Approximation nach Butterworth (S. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$ gewählt. Der Amplitudengang $|H(j\Omega)|$ folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

9.11.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (S. 303)

- **Durchlassbereich**
 - Für $\Omega = 0$ ist für sämtliche n : $|H(0)| = H_{\max} = 1$
 - Für $\Omega = 1$ ist für sämtliche n : $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
 - Amplitudengang bei $\Omega = 0$ maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- **Sperrbereich**
 - Für $\Omega \gg 1$ wird $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$
- **Allgemein**
 - Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit

9.11.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (S. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{1}{s + (-s^2)^n} = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{D(-s)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ($D(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom):

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n$$

Mit dem Ansatz

$$D(s) = \prod_{j=1}^t (s^2 + a_j \cdot s + b_j) \prod_{j=2t+1}^n (s - c_j)$$

wird das Produkt $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

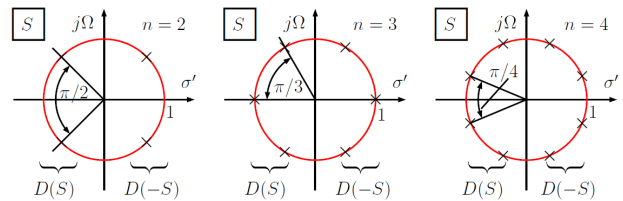
9.11.3 Bestimmung der Pol-Lage (S. 307)

Der Zusammenhang aus Abschnitt 9.11.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Auflösen der Gleichung nach s kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen: $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung n gerade: keine reellen Pole
- Ordnung n ungerade: zwei reelle Pole bei ± 1
- Für **Nennerpolynom** $D(s) = \frac{1}{H(s)}$ **müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!**

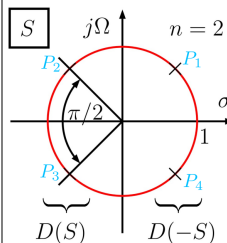


Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz: } H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

Für die Ordnung $n = 2$ ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + s^4 \Leftrightarrow s^4 = -1 \Leftrightarrow e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$



Aufgelöst nach s liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand $\frac{\pi}{4}$ verteilt.

Rechte Halbebene Linke Halbebene

$$\begin{array}{ll} P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

⇒ Für die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich aus

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{(s - P_2) \cdot (s - P_3)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion $H(s)$ auch mittels folgendem Ansatz für $D(s)$ und anschliessendem Koeffizientenvergleich von $D(s) \cdot D(-s)$ bestimmt werden.

$$\text{Ansatz: } D(s) = s^2 + a_1 s + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } D(s) \cdot D(-s) = s^4 + (2b_1 - a_1^2)s + b_1^2 \stackrel{!}{=} s^4 + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2} \text{ und } b_1 = 1 \Rightarrow s^2 + \sqrt{2}s + 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

9.11.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_D^{2n}) = A_{\max}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$

Mittels Umformungen und aufgelöst nach n ergibt sich die Filter-Ordnung als
[.] bedeutet 'aufrunden auf ganze Zahl'

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{\min}/10} - 1}{10^{A_{\max}/10} - 1}\right)}{2 \cdot \log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

⇒ Alternativ kann die Ordnung n auch mit dem Nomogramm bestimmt werden.