Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren:
Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:
1.0.20240516
https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2

Inhaltsverzeichnis

1 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

Grundidee: Differentialgleichung n. Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von n Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

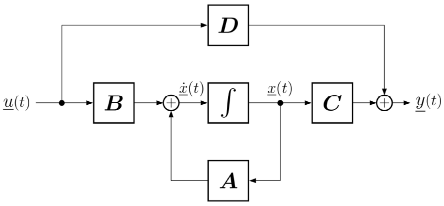
1.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)

- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können $\Rightarrow$ Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**, in der Elektrotechnik L und C
- **Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

1.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)

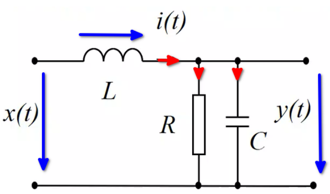
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\underline{x}(t) + \boldsymbol{B}\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t) &= \boldsymbol{C}\underline{x}(t) + \boldsymbol{D}\underline{u}(t)\end{aligned}}$$

$\underline{u}(t)$	Eingangsvektor (m Zeilen)
$\underline{x}(t)$	Zustandsvektor (n Zeilen)
$\underline{y}(t)$	Ausgangsvektor (k Zeilen)



- obere Gleichung: **Zustandsgleichung**
- untere Gleichung: **Ausgangsgleichung**
- $\boldsymbol{A}$ **Systemmatrix** ($n \times n$-Matrix)
  Sie bestimmt das Verhalten des **ungestörten Systems** ($\underline{u}(t) = 0$) und bestimmt z.B. die innere Stabilität des gesamten Systems.
- $\boldsymbol{B}$ **Eingangsmatrix (Steuermatrix)** ($n \times m$-Matrix)
  Sie bestimmt die Wirkung der **Steuergrössen** $\underline{u}(t)$ auf die **Zustandsgrössen** $\underline{x}(t)$
- $\boldsymbol{C}$ **Ausgangsmatrix (Beobachtungsmatrix)** ($k \times n$-Matrix)
  Sie kennzeichnet die Abhängigkeit des **Zustandes** $\underline{x}(t)$ von der beobachtbaren Ausgangsgrösse $\underline{y}(t)$
- $\boldsymbol{D}$ **Durchgangsmatrix** ($k \times m$-Matrix)
  Sie bestimmt die unmittelbare Wirkung der Eingangsgrösse $\underline{u}(t)$ auf den Ausgang $\underline{y}(t)$

Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität: $\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_L(t)}{L}$
  $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$
- DGL Kapazität: $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(t)}{C}$
  $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Maschen: } L\cdot\frac{\partial i(t)}{\partial t} + y(t) = x(t)\\ &\text{Knoten: } \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t}\left(i(\tau) - \frac{y(\tau)}{R}\right)\mathrm{d}\tau = y(t)\end{aligned}}$$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

$$L\cdot i'(t) + y(t) = x(t)$$
$$i(t) - \frac{y}{R} = C\cdot y'(t)$$

Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

$$i'(t) = -\frac{1}{L}y(t) + \frac{1}{L}x(t)$$
$$y'(t) = \frac{1}{C}i(t) - \frac{1}{RC}y(t)$$

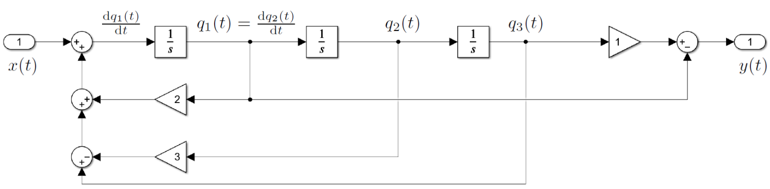
Zustände:	$i(t)$, $y(t)$
Eingang:	$x(t)$
Ausgang:	$\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix} i'(t)\\ y'(t)\end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\cdot\begin{bmatrix} i(t)\\ y(t)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}\cdot x(t)\\ \tilde{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\cdot\begin{bmatrix} i(t)\\ y(t)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}}\cdot x(t)\end{aligned}}$$

Beispiel: ZRD aus Signalflussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ gefunden werden.

$$\text{Zustandsvektor: } \underline{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{bmatrix} \text{ und dessen Ableitung } \underline{\dot{q}}(t) = \begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\\ \dot{q}_3(t)\end{bmatrix}$$

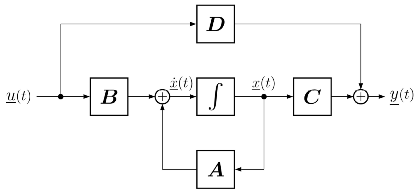


$$\boxed{\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\\ \dot{q}_3(t)\end{bmatrix}}_{\dot{q}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{bmatrix}}_{q(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}\cdot x(t)\\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{bmatrix}}_{q(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}}\cdot x(t)\end{aligned}}$$

1.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)

$$\boxed{\begin{aligned}s\underline{X}(s) - x(0) &= \boldsymbol{A}\underline{X}(s) + \boldsymbol{B}\underline{U}(s)\\ \underline{Y}(s) &= \boldsymbol{C}\underline{X}(s) + \boldsymbol{D}\underline{U}(s)\end{aligned}}$$

$\underline{U}(s)$	Eingangsvektor (m Zeilen)
$\underline{X}(s)$	Zustandsvektor (n Zeilen)
$\underline{Y}(s)$	Ausgangsvektor (k Zeilen)
$\boldsymbol{I}$	Einheitsmatrix
$\boldsymbol{H}(s)$	Übertragungsmatrix ($k \times m$)



$$\boxed{\underline{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\underline{x}(0) + \underbrace{(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})}_{\boldsymbol{H}(s)}\,\underline{U}(s)}$$

Mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\boxed{\underline{Y}(s) = \underbrace{(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})}_{\boldsymbol{H}(s)}\,\underline{U}(s)}$$

Hinweis: Aus einem Signalflussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Grössen der ZRD zu finden.

1.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

Übertragungsmatrix

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matrizenform

$$Y(s) = \boldsymbol{H}(s)\cdot U(s)$$

- $H(s)$ hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}$

Übertragungsfunktion

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = H(s)\cdot U(s)$$

1.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrössen** $x(t)$. Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

1.5 ZRD mit Matlab

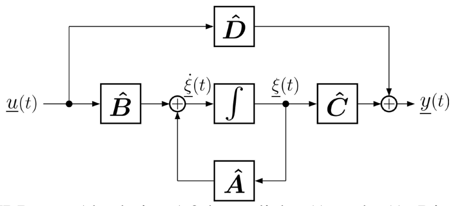
$$H(s) = \frac{b_i s^i + b_{i-1}s^{i-1}\cdots b_1 s^1 + b_0}{a_i s^i + a_{i-1}s^{i-1}\cdots a_1 s^1 + a_0}$$

```
[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)     % H(s) aus Matritzen berechnen
(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)     % Matritzen aus H(s) berechnen
```

1.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix** $\boldsymbol{T}$ ($n \times n$-Matrix, nicht singulär, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}$) kann man **verschiedenste Zustandsgrössen und Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{\xi}}(t) &= \overbrace{\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}}^{\hat{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\xi}(t) + \overbrace{\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}}^{\hat{\boldsymbol{B}}}\,\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t) &= \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}}_{\hat{\boldsymbol{C}}}\,\underline{\xi}(t) + \underbrace{\boldsymbol{D}}_{\hat{\boldsymbol{D}}}\,\underline{u}(t)\end{aligned}}$$



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 1.2 bezüglich $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$. Die bedeutet, dass die **Zustandsgrössen** $\underline{\xi}(t)$ und $\underline{x}(t)$ **willkürlich** gewählt werden können, solange $\boldsymbol{T}$ nicht singulär ist (Determinante von $\boldsymbol{T} \neq 0$)

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrössen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

1.7 Matrix A diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix** $\boldsymbol{A}$ diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$ wird dann üblicherweise $\boldsymbol{A}_{\mathbf{diag}}$ verwendet.

λ_i	Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$
$\vec{v}_i$	Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{V}$	Matrix mit Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{diag}} = \boldsymbol{\Lambda}$	Diagonalisierte Matix $\boldsymbol{A}$ mit Eigenwerten λ_i auf Diagonale
$\boldsymbol{T}$	Transformationsmatrix

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{\mathbf{diag}} = \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{V}^{-1} \\ \boldsymbol{T}^{-1} &= \boldsymbol{V} \end{aligned}}$$

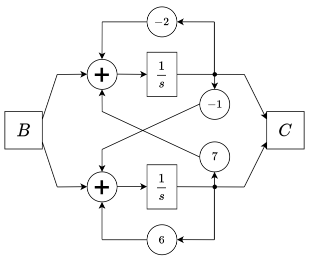
1.7.1 Vorgehen Matrix diagonalisieren

- Ansatz: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ bzw. $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen: $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$
  $\Rightarrow$ Eigenwerte λ_i
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren $\vec{v}_i$ gefunden werden:
  - Eigenwert λ_i in Gleichungssystem $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ einsetzen
  - Einen Wert von $\vec{v}_i = 1$ wählen und Eigenvektor $\vec{v}_i$ als Spaltenvektor schreiben
- Matrix $\boldsymbol{V}$ aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ 'zusammenbauen', indem man Eigenwerte λ_i auf Diagonale schreibt

1.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System

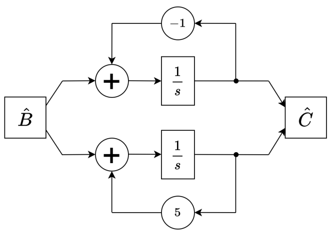
Nicht-entkoppeltes System

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$



Entkoppeltes System

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{diag}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$



1.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \text{mit } \det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$$

Beispiel: Matrix-Diagonalisierung (S. 258)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -7 \\ 1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 6) - 7 \cdot (-1) = 0$$

$\Rightarrow$ Mitternachtsformel liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$

Ersten Eigenwert $\lambda_1 = -1$ in $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$ einsetzen

$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$

Wähle $v_{21} = 1 \quad \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ Gleichen Vorgehen für zweiten Eigenvektor $\vec{v}_2$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

1.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung $\underline{\dot{x}}(t) = \boldsymbol{A}\underline{x}(t) + \boldsymbol{B}\underline{u}(t)$ ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur einem Zustand würde man den Ansatz $\underline{x}(t) = e^{at}$ wählen.
Da im Allgemeinen Systeme mit mehreren Zuständen betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$$

Der Ansatz ist beschrieben als desser **Taylor-Reihe.**
Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

$$\boxed{\underline{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\Phi}(t)\,\underline{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\,\boldsymbol{B}\,\underline{u}(t)\;\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\,\underline{u}(t)}$$

Hinweis: $\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$ heisst **Fundamentalmatrix**.

1.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

$$\boxed{e^{\boldsymbol{A} \cdot t} = \boldsymbol{\Phi}(t)}$$

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im **Zeitbereich** zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische $(n \times n)$ Fundamentalmatrix zu bestimmen

1.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1})\right\}}$$

Beispiel: Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

Mit der **Systemmatrix** $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ergibt sich $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$

Somit ist $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \circ\!\!-\!\!\bullet \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(t)$

1.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von $\boldsymbol{\Phi}(t)$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A} \cdot t} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \cdots & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_{diag}(t)} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}$$

Wenn $\boldsymbol{A}_{\mathbf{diag}} = \boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V}$ ist und λ_i die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind

1.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

$\Rightarrow$ Nicht in Vorlesung behandelt

1.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

$\Rightarrow$ Nicht in Vorlesung behandelt

1.10.5 Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ sei definiert als eine **Dreiecksmatrix** mit Parameteren a und c

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

Die Potenz der Matrix wird berechnet aus

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ \sum\limits_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} & c^k \end{bmatrix}$$

1.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$

$\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{I}$	$e^{\boldsymbol{A} \cdot 0} = \boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \boldsymbol{\Phi}(-t)$	$(e^{\boldsymbol{A} \cdot t})^{-1} = e^{-\boldsymbol{A} \cdot t}$
$\boldsymbol{\Phi}^k(t) = \boldsymbol{\Phi}(kt)$	$(e^{\boldsymbol{A} \cdot t})^k = e^{\boldsymbol{A} \cdot k \cdot t}$
$\boldsymbol{\Phi}(t_1) \cdot \boldsymbol{\Phi}(t_2) = \boldsymbol{\Phi}(t_1 + t_2)$	$e^{\boldsymbol{A} \cdot t_1} \cdot e^{\boldsymbol{A} \cdot t_2} = e^{\boldsymbol{A}(t_1 + t_2)}$
$\boldsymbol{\Phi}(t_2 - t_1) \cdot \boldsymbol{\Phi}(t_1 - t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_2 - t_0)$	$e^{\boldsymbol{A}(t_2 - t_1)} \cdot e^{\boldsymbol{A}(t_1 - t_0)} = e^{\boldsymbol{A}(t_2 - t_0)}$

Hinweis: $(\boldsymbol{\Phi}(t)$ ist stets invertierbar)

1.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

```
syms t              % t als symbolischer Wert
A = [0 6; 1 5];     % Matrix A
expm(A*t)           % Fundamentalmatrix
```

1.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)

Die Impulsantwort $h(t)$ eines SISO-Systems ist gegeben durch

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B} * u(t) + \boldsymbol{D}u(t) = h(t) * u(t) \\ h(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t) \end{aligned}}$$

1.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)

Ein LTI-System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben).
Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle **Eigenwerte** der **Systemmatrix** $\boldsymbol{A}$ einen **negativen Realteil** besitzen, ist das System **asymptotisch stabil**.

$$\boxed{|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \quad \rightarrow \forall \lambda \quad \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0}$$

Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht! Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet **nicht**, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ des Systems einen negativen Realteil besitzen.
$\Rightarrow$ Pol-/Nullstellenkürzungen

1.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist **beobachtbar**, wenn wir, gegeben das Eingangssignal $\underline{u}(t)$ und das Ausgangssignal $\underline{y}(t)$, über eine endliche Zeitspanne $0 \geq t \geq t_1$ die Zustände $\underline{x}(t)$ eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist **nicht beobachtbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die **keinen** Einfluss auf die Ausgänge $\underline{y}(t)$ haben.
  $\Rightarrow$ Man kann aus dem Verhalten von $\underline{y}(t)$ **nicht** auf die Zustände $\underline{x}(t)$ schliessen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist **steuerbar**, wenn es für jeden Anfangszustand $\underline{x}_0$ und jeden Endzustand $\underline{x}_1$ eine Steuerfunktion $\underline{u}(t)$ gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne $0 \geq t \geq t_1$ von $\underline{x}_0$ zu $\underline{x}_1$ bringt, d.h. $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$.
- Ein System ist **nicht steuerbar**, wenn es Zustände $\underline{x}(t)$ gibt, die nicht von den Eingängen $\underline{u}(t)$ beeinflusst werden.

Bemerkungen:
- System $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir $\underline{x}(0)$ bestimmen können

1.14 Steuerbarkeit (S. 277)

Gemäss der äquivalenten ZRD-Darstellung (siehe Abschnitt 1.6) werden die Matritzen $\hat{\boldsymbol{A}}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{C}}$ und $\hat{\boldsymbol{D}}$ mit einer Matrix $\boldsymbol{V}$ diagonalisert, sodass $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_{\text{diag}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$, $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}$ und $\hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($\boldsymbol{A}_{\text{diag}} = \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$), **alle** Elemente von $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}$ **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($\boldsymbol{A}_{\text{diag}} = \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$), in **jeder Zeile** von $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}$ **mindestens ein** Element **ungleich Null** ist.

1.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig steuerbar**, wenn
- Der **Rang** der Steuerbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $\boldsymbol{Q}_{\text{Steuerbarkeit}}$ **ungleich Null ist**

$$\boxed{\boldsymbol{Q}_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}}$$

Dimension: $n \times n \cdot m$

$\boldsymbol{A}$	Systemmatrix ($n \times n$)	n	Zustände
$\boldsymbol{B}$	Eingangsmatrix ($n \times m$)	m	Eingänge

Steuerbarkeitsmatrix in Matlab

```
ctrb(A, B);          % Steuerbarkeitsmatrix
rank(ctrb(A, B))     % Rang der Steuerbarkeitsmatrix
```

1.15 Beobachtbarkeit (S. 278)

Gemäss der äquivalenten ZRD-Darstellung (siehe Abschnitt 1.6) werden die Matritzen $\hat{\boldsymbol{A}}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{C}}$ und $\hat{\boldsymbol{D}}$ mit einer Matrix $\boldsymbol{V}$ diagonalisert, sodass $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_{\text{diag}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$, $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}$ und $\hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ($\boldsymbol{A}_{\text{diag}} = \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$), **alle** Elemente von $\hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}$ **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ($m > 1$) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ($\boldsymbol{A}_{\text{diag}} = \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$), in **jeder Spalte** von $\hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}$ **mindestens ein** Element **ungleich Null** ist.

1.15.1 Beobachtbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig beobachtbar**, wenn
- Der **Rang** der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung** n des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ($m = 1$): Die **Determinante** von $\boldsymbol{Q}_{\text{Beobachtbarkeit}}$ **ungleich Null ist**

$$\boxed{\boldsymbol{Q}_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix}}$$

Dimension:	$k \cdot n \times n$
$\boldsymbol{A}$	Systemmatrix ($n \times n$)
$\boldsymbol{C}$	Beobachtungsmatrix ($k \times m$)
n	Zustände
m	Eingänge
k	Ausgänge

Beobachtbarkeitsmatrix in Matlab

```
obsv(A, C);          % Beobachtbarkeitsmatrix
rank(obsv(A, C))     % Rang der Beobachtbarkeitsmatrix
```

1.16 Standardformen der ZRD (S. 267)

Die allgemeine Differentialgleichung von SISO-Systemen der Form

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} u}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u$$

ergibt mit der Laplace-Transformation und mit $m \leq n$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

Diese UTF $H(s)$ kann mit verschiedenen ZRDs (**Normalformen**) abgebildet werden.
Wichtig: Für alle folgenden Normalformen werden die Zustände x_i im blockdiagramm **unmittelbar nach den Integratoren** verwendet.

1.16.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

Die Regelungsnormalform kann **direkt aus der UTF** $H(s)$ aufgestellt werden.
Für $m = n$ gilt sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Ausgangsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

1.16.2 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

Ein System, welches in Beobachtungsnormalform dargestellt werden kann, ist **beobachtbar!** ür $m = n$ gilt sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist $m < n$ und die **Zustandsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

1.16.3 Regelungsnormalform ⇔ Beobachtungsnormalform

Die beiden Formen sind **dual** und weisen folgende Zusammenhänge auf:
- $\boldsymbol{A}$ ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt
- $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ sind vertauscht
- $\boldsymbol{D}$ bleibt gleich

1.16.4 Diagonalform und Jordan-Normalform (S. 271-273)

TO BE DONE LATER