

# Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

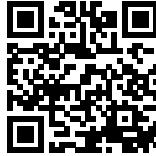
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240420

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>

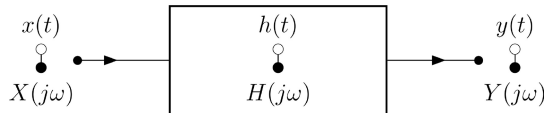


## 1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

### 1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort  $h(t)$  und der Frequenzgang  $H(j\omega)$  sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort  $h(t)$  und die Übertragungsfunktion  $H(s)$  sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

#### 1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

#### 1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort  $h(t)$  für alle  $t < 0$  gleich Null sein.

## 1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!  
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

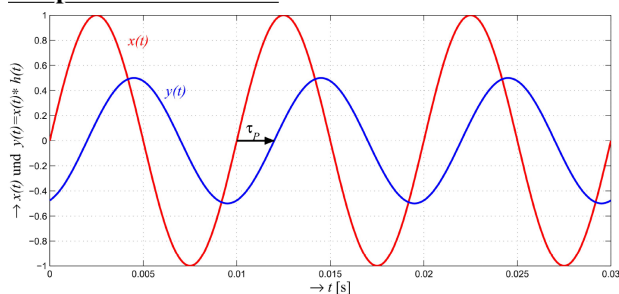
Das Ausgangssignal  $y(t) = x(t) * h(t)$  ist gegenüber dem Eingangssignal  $x(t)$  mit Faktor  $\alpha$  gewichtet und um die Zeit  $t_0$  verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

#### Beispiel: Phasenlaufzeit



#### 1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

## 1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit  $\tau_G(\omega)$  die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

#### 1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

## 1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit**  $\tau_P(\omega)$  und **Gruppenlaufzeit**  $\tau_G(\omega)$  sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h.  $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$

Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen**  $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

## 1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

#### 1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

#### 1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

## 1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

$U_1$  entspricht der Grundharmonischen  
⇒ Es gilt:  $1 > k \geq 0$

#### 1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{k} \right)$$

#### 1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

$U_1$  entspricht der Grundharmonischen  
⇒ Es gilt:  $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen:  $\text{THD} \approx k$  allgemein:  $\text{THD} > k$

## 1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang  $H(j\omega)$  und Impulsantwort  $h(t)$  eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz)  $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$   
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz  $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$   
(äquivalenz zu Abschnitt ??) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal  $x(t)$  (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort  $h(t)$  übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal  $y(t)$  gemäss Abschnitt ?? aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert  $Y_0$  des Ausgangssignals  $y(t)$  bei der Frequenz  $\omega = 0$  entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$  = Frequenzgang und  $X_0$  = linearer Mittelwert von  $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da  $\varphi_{yy}(\tau)$  und  $Y_0$  nicht von  $t$  abhängen, ist auch  $y(t)$  schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$$\begin{array}{lcl} h(-\tau) & \longleftrightarrow & H^*(j\omega) \\ h(\tau) & \longleftrightarrow & H(j\omega) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \varphi_{xx}(\tau) & \longleftrightarrow & \Phi_{xx}(j\omega) \\ h(\tau) * h(-\tau) & \longleftrightarrow & |H(j\omega)|^2 \end{array} \right.$$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \longleftrightarrow \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren  $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals  $y(t)$  gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung  $Y^2$  des Ausgangssignals  $y(t)$  berechnet sich beim Zeitpunkt  $\tau = 0$  als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen  $\varphi_{xy}(\tau)$  und  $\varphi_{yx}(\tau)$  des stochastischen, reellen Eingangssignals  $x(t)$  (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals  $y(t)$  eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor  $D$  (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor  $D$  bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes  $U, P, I$  stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass  $a$  in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors  $D$  erhält man das Dämpfungsmass  $a$

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren  $\Rightarrow$  Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren  $\Rightarrow$  Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor**  $T_U$  definiert. Analog zum Dämpfungsmass  $a$  wird ein **Verstärkungsmass**  $g_U$  definiert.

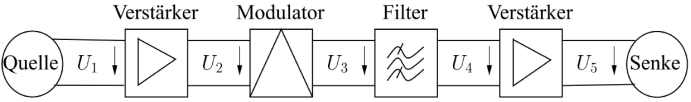
$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ( $U_2 > U_1$ )  $\Rightarrow$  positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ( $U_2 < U_1$ )  $\Rightarrow$  negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$$\begin{aligned} T_{U_{tot}} &= \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_5}{U_1} \\ &= \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{1} = 50 \\ a_{U_{tot}} &= -20\text{dB} + 3\text{dB} + 3\text{dB} + -20\text{dB} = -34\text{dB} \end{aligned}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass  $g$  ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20\text{ dB} + 3\text{ dB} + 3\text{ dB} - 20\text{ dB} = -34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

**Vorgehen:** Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen  $\Rightarrow$  Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

**Vorgehen:** Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen  $\Rightarrow$  Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 – 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 – 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 – 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 – 6 = 10 – 3 – 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 – 10 = 5 – 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 – 3 – 3 – 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
–1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

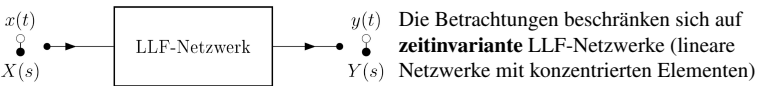
$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)$$
$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right)$$
$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$(L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right)$$
$$(L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right)$$
$$(L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{1\text{ mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

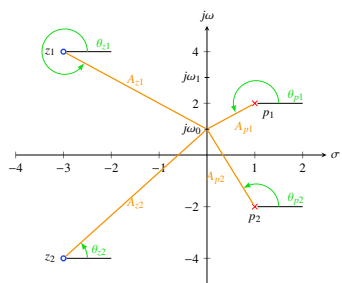
Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μW

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme





### 3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz  $j\omega$  ist variabel und 'wandert' auf der imaginären Achse. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz  $j\omega_0$  können die Faktoren von  $H(j\omega_0)$  als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

### 3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

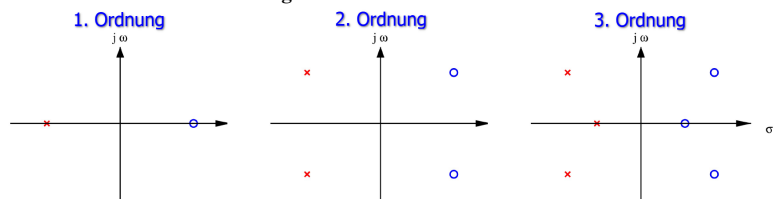
- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen - Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeler Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von -20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

### 3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen  $\omega$  konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur  $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF  $H(S)$  kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk  $H_M(s)$  und einen Allpass  $H_A(s)$  **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt ??)

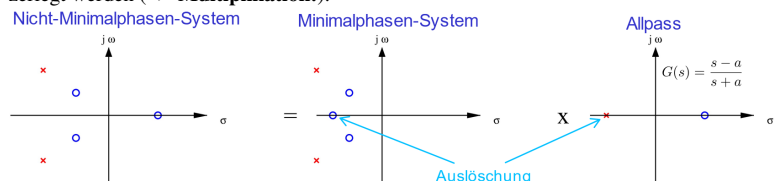
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

### 3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
  - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
  - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
  - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

#### Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



## 4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

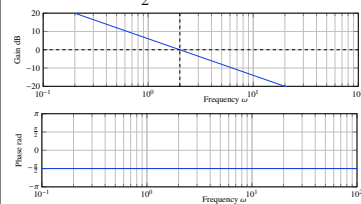
### 4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s;      % UTF des Systems
3 bode(G)               % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G)            % Amplitudengang des Systems
```

## 4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

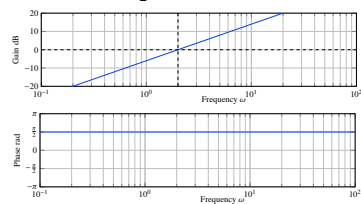
### 4.2.1 Pol im Ursprung

- $H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$ 
  - Betrag = Gerade mit Steigung -20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei  $\omega = \alpha$
  - Phase =  $-\frac{\pi}{2} = \text{const}$



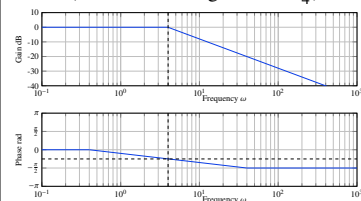
### 4.2.2 Nullstelle im Ursprung

- $H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$ 
  - Betrag = Gerade mit Steigung +20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei  $\omega = \frac{1}{\alpha}$
  - Phase =  $+\frac{\pi}{2} = \text{const}$



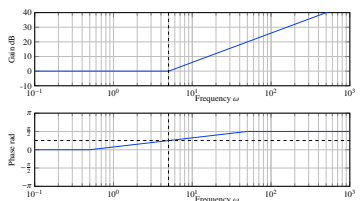
### 4.2.3 Reeller Pol

- $H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$ 
  - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \alpha$ ; für  $\omega > \alpha$  Gerade mit Steigung -20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und  $\omega = \alpha$
  - Phase = Konstante mit Wert 0 bis  $\omega < \frac{\alpha}{10}$ ; für  $\omega > 10\alpha$  Konstante mit Wert  $-\frac{\pi}{2}$ ; dazwischen eine Gerade (bei  $\omega = \alpha$  beträgt Phase  $-\frac{\pi}{4}$ )



### 4.2.4 Reelle Nullstelle

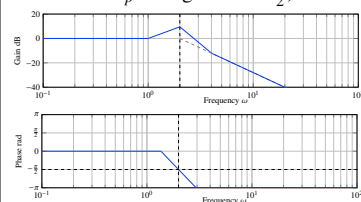
- $H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$ 
  - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \alpha$ ; für  $\omega > \alpha$  Gerade mit Steigung +20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und  $\omega = \alpha$
  - Phase = Konstante mit Wert 0 bis  $\omega < \frac{\alpha}{10}$ ; für  $\omega > 10\alpha$  Konstante mit Wert  $+\frac{\pi}{2}$ ; dazwischen eine Gerade (bei  $\omega = \alpha$  beträgt Phase  $+\frac{\pi}{4}$ )



### 4.2.5 Konj.-komplexe Pole

Voraussetzung:  $|q_p| > \frac{1}{2}$

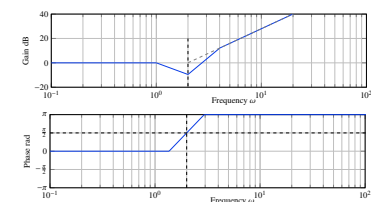
- $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$ 
  - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von 0 bis  $\frac{\omega_p}{2}$ ; für  $\omega > 2\omega_p$  eine Gerade mit Steigung -40 dB/Dek; Überhöhung bei  $\omega = \omega_p$  mit Maximalwert  $20 \cdot \log_{10}(q_p)$ ; Approximation der Überhöhung von mit weiteren Geraden
  - Phase = Konstante mit Wert 0 bis  $\omega < \frac{\omega_p}{10}$ ; für  $\omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}$  Konstante mit Wert  $-\pi$ ; dazwischen eine Gerade (bei  $\omega = \omega_p$  beträgt Phase  $-\frac{\pi}{2}$ )



### 4.2.6 Konj.-komplexe NS

Voraussetzung:  $|q_z| > \frac{1}{2}$

- $H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$ 
  - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von 0 bis  $\frac{\omega_p}{2}$ ; für  $\omega > 2\omega_p$  eine Gerade mit Steigung +40 dB/Dek; Senke bei  $\omega = \omega_p$  mit Minimalwert  $-20 \cdot \log_{10}(q_p)$ ; Approximation der Senke mit weiteren Geraden
  - Phase = Konstante mit Wert 0 bis  $\omega < \frac{\omega_p}{10}$ ; für  $\omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}$  Konstante mit Wert  $+\pi$ ; dazwischen eine Gerade (bei  $\omega = \omega_p$  beträgt Phase  $+\frac{\pi}{2}$ )

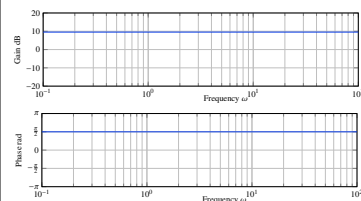


Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, Seite 235

$q_p$	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{2q_p}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{\frac{1}{2q_p}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

### 4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ 
  - Betrag =  $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
  - Phase =  $\beta = \text{const}$



### 4.2.8 Weitere Bemerkungen

- **Inverser Frequenzgang:**
  - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
  - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- **Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
  - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am grössten



### 4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

$$\text{UTF Tiefpass 2. Ordnung: } H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$$

$$\text{Frequenz beim Maximum: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$$

$$\text{Höhe des Maximums: } |H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$$

⇒ Es gilt:  $\omega_{\max} \leq \omega_p$

#### 4.3.1 Spezialfall $q = 1$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$$

#### 4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Frequenz: } \omega_{\max} &= \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} \\ &= \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \infty$$

#### 4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = 0$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$$

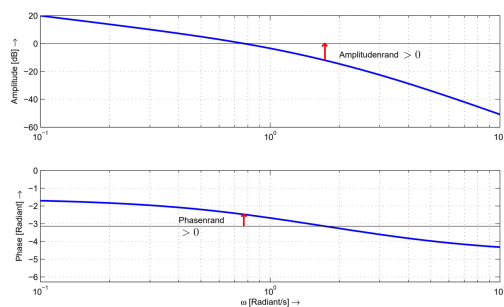
## 5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis  $H(s)$  nur Pole in der linken  $s$ -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei  $s = 0$ ), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn  $H(j\omega)$  für die **Durchgangsfrequenz**  $\omega_D$  bei der die Amplitude  $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0$  dB ist, und eine Phase  $> -\pi$  hat.  
⇒ Amplitudenrand und Phasenrand müssen  $> 0$  sein, damit das System stabil ist!

### 5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

- **Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
  - Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz  $\omega$ , bei der die Phase gleich  $-\pi$  bzw.  $-180^\circ$  ist.
- **Phasenrand (Phasenreserve)**
  - Abstand des Phasengangs zur  $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz  $\omega$ , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

### 5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand  $> 0$  sind.

## 6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzganges in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  (aufsteigende Werte von  $f$ ) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.

Auf die Konstruktion von Ortskurven wird im Modul Regelungstechnik 2 im Detail eingegangen. Darum soll hier nur auf die Beschreibung im Skript (S. 240 - 242) verwiesen werden.

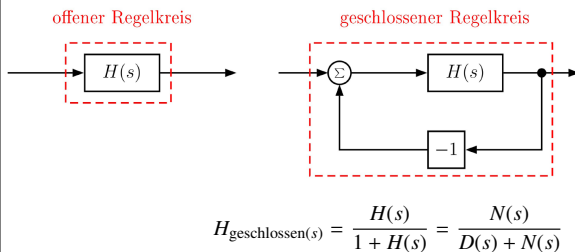
### 6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems  
3 nyquist(G)
```

## 7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve**  $H(s)$  (**offener Regelkreis**) einen Aussage über Die **Stabilität** des (**geschlossenen Regelkreises**) zu machen. Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

## 7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



## 7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

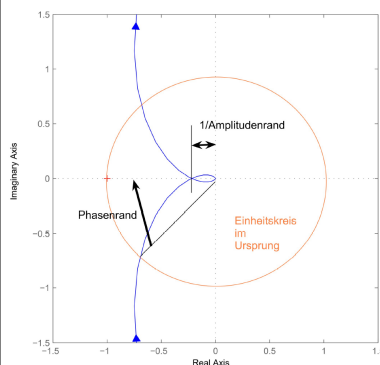
Ist der **offene** Regelkreis  $H(s)$  **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis  $\frac{H(s)}{1+H(s)}$  asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt  $(-1, j0)$  mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern **'links** liegen lässt'.

## 7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.

- **Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
  - Frequenz, bei welche die **negative** reelle Achse geschnitten wird:  $\omega_\pi$
  - Bei  $\omega_\pi$ :  $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$  = Abstand zum Ursprung
- **Phasenrand (Phasenreserve)**
  - Frequenz, bei welche Eintritt in den Einheitskreis erfolgt:  $\omega_D$
  - Bei  $\omega_D$ : Winkel bis zu  $180^\circ$

## 7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt  $(-1, j0)$  **'links** liegen gelassen' wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt.

Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand  $> 0$  sind.

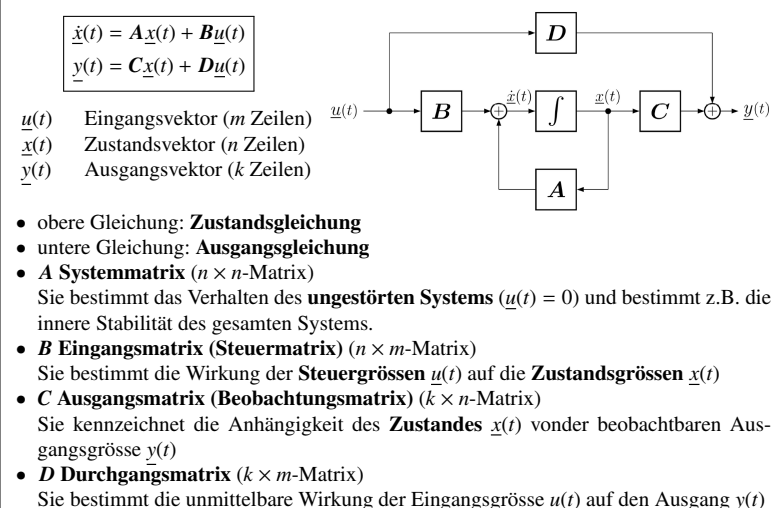
## 8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

**Grundidee:** Differentialgleichung  $n$ . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von  $n$  Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

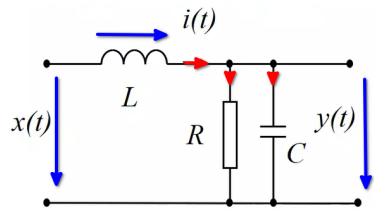
### 8.1 Vorteile der ZRD (S. 253-254)

- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die ebie der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können ⇒ Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**, in der Elektrotechnik L und C
- **Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

### 8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)



Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität:  $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$   
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität:  $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$   
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Maschen:  $L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + y(t) = x(t)$

Knoten:  $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \left( i(\tau) - \frac{y(\tau)}{R} \right) d\tau = y(t)$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

$$L \cdot i'(t) + y(t) = x(t)$$
$$i(t) - \frac{y}{R} = C \cdot y'(t)$$

Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

$$i'(t) = -\frac{1}{L}y(t) + \frac{1}{L}x(t)$$
$$y'(t) = \frac{1}{C}i(t) - \frac{1}{RC}y(t)$$

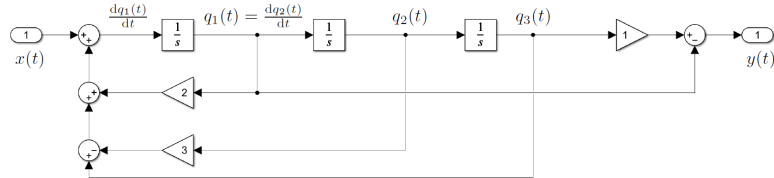
Zustände:  $i(t), y(t)$   
Eingang:  $x(t)$   
Ausgang:  $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{bmatrix} i'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot x(t)$$

Beispiel: ZRD aus Signalflussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen **A**, **B**, **C** und **D** gefunden werden.



Zustandsvektor:  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

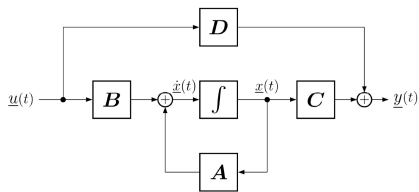
8.3 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen**  $x(t)$ . Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

8.4 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)

$$s\underline{X}(s) - x(0) = \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}\underline{U}(s)$$
$$\underline{Y}(s) = \underline{C}\underline{X}(s) + \underline{D}\underline{U}(s)$$

$\underline{U}(s)$  Eingangsvektor ( $m$  Zeilen)  
 $\underline{X}(s)$  Zustandsvektor ( $n$  Zeilen)  
 $\underline{Y}(s)$  Ausgangsvektor ( $k$  Zeilen)  
 $\underline{I}$  Einheitsmatrix  
 $\underline{H}(s)$  Übertragungsmatrix



$$\underline{Y}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0) + \underbrace{(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Mit Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

**Hinweis:** Aus einem Signalflussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

8.4.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

Übertragungsmatrix

Übertragungsfunktion

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matritzenform

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = \underline{H}(s) \cdot U(s)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

- $H(s)$  hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix **D**