Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis
Autoren:
Authors

Version:
1.0.20240312
https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2

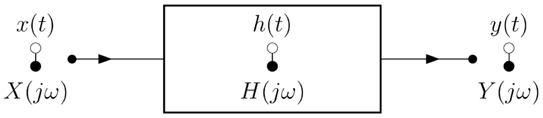
Inhaltsverzeichnis

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$\|H(j\omega)\|$	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$\boxed{h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(s)}$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s) = H(s) \cdot X(s)}$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$\boxed{h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau}$$

$$\boxed{H(s) = s \cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s} H(s)}$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

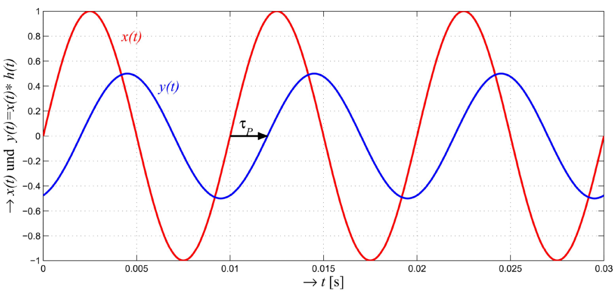
$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \circ\!\!-\!\!\bullet\, h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.
⇒ **Diese Verzögerung wird Phasenlaufzeit genannt**

$$\boxed{\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\boxed{\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)
Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!
⇒ Das System ist **nicht** akausal!
Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögernug, Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\boxed{\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0}$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** t_0 $(= \tau_P = \tau_G)$

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.
Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.
Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2}}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒Es gilt: $1 > k \geq 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$\boxed{a_k = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{k}\right)}$$

1.6.2 Total Harmonic Disortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\boxed{\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_n^2}{U_1^2}}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒Es gilt: $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen: THD $\approx k$ allgemein: THD $> k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantowort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$\boxed{H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)}$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. **Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) ⇔ $|H(j\omega)| =$ konstant $= \alpha \neq 0$
   ⇒Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
2. **Phase** proportional zur Frequenz ⇔ $\theta(\omega) = -\omega\, t_0$ (äquivalenz zu Abschnitt 1.4)
   ⇒Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantowort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s) = H(s) \cdot X(s)}$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$\boxed{Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)}$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\boxed{\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, h(\beta)\, \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)}$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare

$h(-\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$H^*(j\omega)$	$\varphi_{xx}(\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\Phi_{xx}(j\omega)$
$h(\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$H(j\omega)$	$h(\tau) * h(-\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\|H(j\omega)\|^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \circ\!\!-\!\!\bullet \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\boxed{\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2\, \Phi_{xx}(j\omega)}$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\boxed{\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, \Phi_{xx}(j\omega)\, e^{j\omega\tau}\, \mathrm{d}\omega}$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$\boxed{Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, \Phi_{xx}(j\omega)\, \mathrm{d}\omega}$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)}$$

$$\boxed{\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)}$$

Somit gilt:

$$\boxed{\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi^*_{xy}(j\omega)}$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$\boxed{D_P = \frac{P_1}{P_2}} \qquad \boxed{D_U = \frac{U_1}{U_2}} \qquad \boxed{D_I = \frac{I_1}{I_2}}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$\boxed{a_P = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} \qquad \boxed{a_U = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)} \qquad \boxed{a_I = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)}$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\boxed{\mathrm{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\mathrm{dB}}{10}}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren ⇒ Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren ⇒ Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)

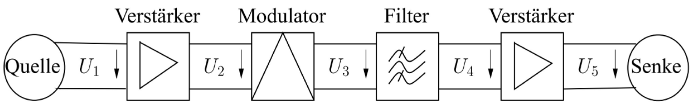
Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs.
Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor T_U** definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass g_U** definiert.

$$\boxed{T_U = \frac{U_2}{U_1}} \qquad \boxed{g_U = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)}$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** $(U_2 > U_1)$ ⇒ positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** $(U_2 < U_1)$ ⇒ negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (S. 209)



$$\begin{aligned}
T_{U_{tot}} &= \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_5}{U_1} \\
&= \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{1} = 50 \\
a_{U_{tot}} &= \text{-20dB} + \text{3dB} + \text{3dB} + \text{-20dB} = \text{-34dB}
\end{aligned}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20\,\mathrm{dB} + 3\,\mathrm{dB} + 3\,\mathrm{dB} - 20\,\mathrm{dB} = -34\,\mathrm{dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen ⇒ Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotent von bekannten Werten darstellen ⇒ Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
$100 = 10 \cdot 10$	$10 + 10$
12	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
10	10
$9 = 3 + 3 + 3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$8 = 5 - 3$	$3.2 \cdot 2 = 6.4$
$7 = 10 - 3$	$\frac{10}{2} = 5$
$6 = 3 + 3$	$2 \cdot 2 = 4$
$5 = 15 - 10$	$\frac{32}{10} = 3.2 = \sqrt{10}$
$4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3$	$\frac{10}{2 \cdot 2} = 2.5$
3	2
$2 = 12 - 10 = 5 - 3$	$\frac{16}{10} = 1.6$
$1 = 10 - 3 - 3 - 3$	$\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1.25$
0	1
-1	$\frac{4}{5} = 0.8$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \qquad (L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_2}{774.6\,\mathrm{mV}}\right)$$

$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \qquad (L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{1.291\,\mathrm{mA}}\right)$$

$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \qquad (L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_2}{1\,\mathrm{mW}}\right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBµV	1 µW

3 Frequnzverhalten analoger LTI-Systeme

3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differntialfleichung der folgenden Form beschreiben:

$$DGL$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$Laplace$$

$N(s)$	Zählerpolynom
$D(s)$	Nennerpolynom

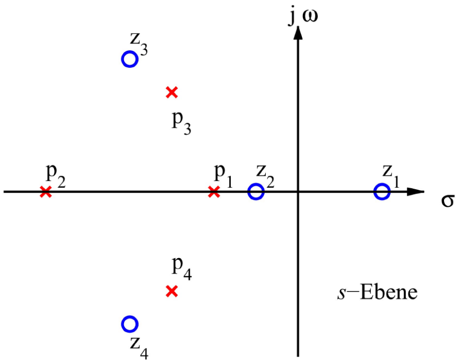
3.1.1 Umrechnung

$$\boxed{H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$H(s)$	Übertragungsfunktion (UTF)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$\lvert H(j\omega)\rvert$	Amplitudengang
$\theta(\omega)$	Phasengang

3.2 Bestimmung Frequenzgang aus UTF

3.3 Pol- und Nulstellendiagramme



3.4 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/ NS der UTF