Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis
Autoren:
Simona Stitz, Laurin Haitzer

Simone Stitz, Laurin Heitzer

 $\begin{tabular}{ll} Version: \\ 1.0.20240331 \\ \underline{https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2} \end{tabular}$



Inhaltsverzeichnis

LTI-Systeme (S. 171)				2.6	Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3
1	.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2				
1	.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	3	Freg	qunzverhalten analoger LTI-Systeme	3
1	.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2		3.1	Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4
1	.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2		3.2	Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)	4
1	.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2		3.3	Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm	4
1	.6 Klirrfaktor (S. 189)	2		3.4	Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4
1	.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2		3.5	Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4
1	.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3		3.6	Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm	4
				3.7	Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	-
2 I	Dämpfung, Verstärkung, Dezibel			3.8	Allpassnetzwerk (S. 220)	-
2	.1 Dämpfungsfaktor <i>D</i> (S. 206)	3		3.9	Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	
2	.2 Dämpfungsmass <i>a</i> in Dezibel (S. 206)	3				
2	.3 Rechenregeln mit Dezibel	3	4	Bode	ediagramm	5
2	.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3		4.1	Approximationen im Bodediagramm	-
2	.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor	3			Bodediagramme mit Matlab	

1 LTI-Systeme (s. 171)

x(t)	Eingangssignal
v(t)	Ausgangssignal

 $\delta(t)$ Dirac-Stoss

h(t)Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)

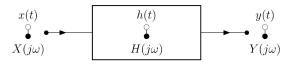
 $H(j\omega)$ Frequenzgang $|H(j\omega)|$ Amplitudengang $\theta(j\omega)$

Phasengang $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF) H(s)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort h(t) und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein

Fourier-Transformationspaar:



Die Impulsantwort h(t) und die Übertragungsfunktion H(s) sind ein Laplace-Transformationspaar:

$$h(t) \circ --- H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \circ - Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

Impulsantwort

Einheitssprungantwort g(t)

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \ \mathrm{d}\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort h(t) für alle t < 0gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für reine Sinus-Schwingungen exakt bestimmbar! Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

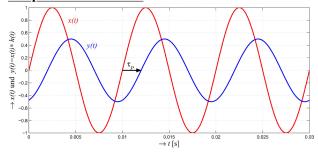
Das Ausgangssignal y(t) = x(t) * h(t) ist gegenüber dem Eingangssignal x(t) mit Faktor α gewichtet und um die Zeit to verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird Phasenlaufzeit genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

 $\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet nicht, dass ein System akausal ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit mehreren Frequenzanteilen

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die Verzögerung der Hüllkurve der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-\,\mathrm{d}\theta(\omega)}{\,\mathrm{d}\omega}$$

 $\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als Laufzeit des Signals interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei Vierpolen mit konzentrierten Elementen ist in bestimmten Frequenzbereichen eine negative Gruppenlaufzeit möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung nicht vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber früher als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die Signalverzögernug, Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ und Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der Amplitudengang ebenfalls konstant ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$ Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** t_0 (= $\tau_P = \tau_G$)

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem nicht verzerrungsfrei.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine Dämpfung eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer linearen Verzerrung

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch Übersteuerung des Systems (Kanal) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten neue, im Ursprungssignal nicht enthaltene Schwingungen auf.

Ein Mass für nichtlineare Verzerrungen ist der Klirrfaktor

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des Effektivwerts der neu am Ausgang eines Systems entstandenen Harmonischen zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

 U_1 entspricht der Grundharmonischen \Rightarrow Es gilt: $1 > k \ge 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k}\right)$$

1.6.2 Total Harmonic Disortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

THD =
$$\sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$
 U_1 entspricht der Grundharmonischen \Rightarrow Es gilt: $\infty > \text{THD} \ge 0$

geringe Verzerrungen: THD $\approx k$ allgemein: THD > k

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (s. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort h(t) eines verzerrungsfreien Signals:

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt

- **1. Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$ → Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- **2. Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$ (äquivalenz zu Abschnitt 1.4) → Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal x(t) (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantowort h(t) übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal y(t) gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \circ - \Phi Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals y(t) bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

 $H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von x(t)

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{vv}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch y(t) schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \circ \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \, \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals y(t) gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals y(t) berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^{2} = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^{2} \Phi_{xx}(j\omega) d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals x(t) (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals y(t) eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ - \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ - \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \circ - \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor ${\cal D}$ bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die Effektivwerte von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass *a* in Dezibel (8. 206)

Durch ${\bf logarithmieren}$ des Dämpfungsfaktors Derhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$dB = 10 \cdot \log_{10}(v) \iff v = 10^{\frac{dB}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren → Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren → Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entspreched negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungs-

Filter

mass
$$a$$
 wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.
$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Verstärker

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

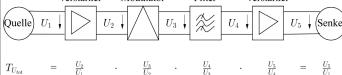
• Verstärkung: $(U_2 > U_1) \Rightarrow$ positive Dezibel-Zahl

Modulator

• **Dämpfung:** $(U_2 < U_1) \Rightarrow$ negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (S. 209)

Verstärker



$$T_{U_{tot}} = \frac{G_2}{U_1}$$
 . $\frac{G_3}{U_2}$. $\frac{G_4}{U_3}$. $\frac{G_3}{U_4} = \frac{G_3}{U_1}$

$$= \frac{10}{1}$$
 . $\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\frac{10}{1}$ = 50
$$a_{U_{tot}} = -20 \text{dB} + 3 \text{dB} + 3 \text{dB} + -20 \text{dB} = -34 \text{dB}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20 \,\mathrm{dB} + 3 \,\mathrm{dB} + 3 \,\mathrm{dB} - 20 \,\mathrm{dB} = -34 \,\mathrm{dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel - Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen → Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotent von bekannten Werten darstellen

→ Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	$100 = 10 \cdot 10$
12	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
10	10
9 = 3 + 3 + 3	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
8 = 5 - 3	$6.4 = 3.2 \cdot 2$
7 = 10 - 3	$5 = \frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	$4 = 2 \cdot 2$
5 = 15 - 10	$3.2 = \frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3	$2.5 = \frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 - 10 = 5 - 3	$1.6 = \frac{16}{10}$
1 = 10 - 3 - 3 - 3	$1.25 = \frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
-1	$0.8 = \frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$(L_{U})_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_{2}}{U_{1}} \right)$$

$$(L_{U})_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_{2}}{774.6 \,\text{mV}} \right)$$

$$(L_{I})_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_{2}}{I_{1}} \right)$$

$$(L_{I})_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_{2}}{1.291 \,\text{mA}} \right)$$

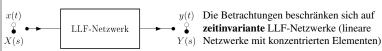
$$(L_{P})_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{2}}{P_{1}} \right)$$

$$(L_{P})_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{2}}{1.000 \,\text{mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dΒμV	1 μW

3 Frequnzverhalten analoger LTI-Systeme



3.1 Zusammenhang Frequenzgang - UTF (s. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differntialfleichung der folgenden Form beschrei-

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Zählerpolynom mit konstanten, reelen Koeffizienten

D(s)Nennerpolynom mit konstanten, reelen Koeffizienten

x(t)Eingangssignal

y(t)Ausgangssignal

Die Wurzeln der Gleichung N(s) = 0 ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von D(s) = 0 ergeben n Pole des Systems. Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird H(s) faktorisiert. \rightarrow Die UTF H(s) ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K vollständig bestimmt!

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}_{j=1}^{n} (s - p_j)$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiertkomplexe Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reelen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \underbrace{\frac{\prod\limits_{i=1}^{r}(s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2)\prod\limits_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{t}(s^2 + 2\sigma_{pj}s + \omega_{pj}^2)\prod\limits_{j=2t+1}^{n}(s - p_j)}$$

Legende:

- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Polein der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann H(s) mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{i=1\\i=1}}^{r} (s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} s + \omega_{zi}^2) \prod_{\substack{i=2r+1\\i=2r+1}}^{m} (s - z_i)}_{p_i}$$

Polstellenfrequenzen ω_{zi} Polstellengüten

Nullstellenfrequenzen Nullstellengüten

3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)

s-Ebene

Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot Pole Kreuze

Kreise

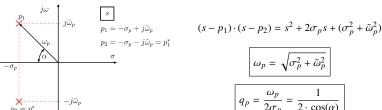
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm

Für Grenzstabilität gilt eine UND-Verknüpfung der aufgeführten Punkte. Für Stabilität und Instabilität gilt eine ODER-Verknüpfung der aufgeführten Punkte.

- Stabil:
 - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE)
 - Keine Polstellen vorhanden
- Grenzstabil:
 - Keine Polstellen in der rechten Halbebene (RHE)
 - Mindestens eine einfache Polstelle auf imaginärer Achse
 - Keine doppelten Polstellen auf der imaginären Achse
- Instabil:
 - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE)
 - Mindestens eine mehrfache Polstelle auf der imaginären Achse

3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



Polfrequenz → Entspricht Abstand des Pols vom Ursprung ω_p q_p

Grenzfälle

Doppelpol auf neg. reeller Achse $\sigma_p = \omega_p$ $\sigma_p = 0$ Polpar auf imaginärer Achse

3.4.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

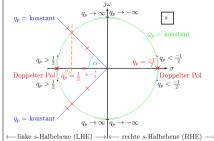
$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \le \frac{1}{2}$$

- Für einzelne (reelle) Pole ist ist die Güte q_p nicht definiert
- \Rightarrow Die Polfrequenz ω_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

$$\overline{\sigma_{p1} = \sigma_{p2}} \quad |q_p| = \frac{1}{2}$$

3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- · Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann $s = j\omega$ eingesetzt werden.

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

Übertragungsfunktion (UTF) H(s) $H(j\omega)$ Frequenzgang

 $|H(j\omega)|$ Amplitudengang $\theta(\omega)$ Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

Nyquist-Diagramm

 $H(j\omega)$ wird in Polarkoordinaten mit ω als Parameter aufgezeichnet

Bode-Diagramm

 $\alpha_{\rm dB}(\omega)$ und $\theta(\omega)$ werden je in Funktion von $\log_{10}(\omega)$ aufgezeichnet

3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ in die Übertragungsfunktion H(s) ergibt sich der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ als:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2)\cdots(j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2)\cdots(j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0-p_1)=|j\omega_0-z_1|\cdot e^{j\theta_{z1}}=A_{z1}\cdot e^{j\theta_{z1}}$$

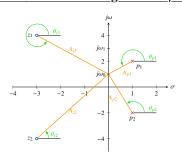
Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ in den Amplitudengang $|H(j\omega)|$ und den Phasengang $\theta(\omega)$ separiert werden:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdots A_{zm} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \cdots + \theta_{zm})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdots A_{pm} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \cdots + \theta_{pm})}}$$

$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}}$$

Phase
$$\theta(\omega_0) = \underbrace{\text{Phase von } K}_{\text{meistens } 0} + \sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^m \theta_{pj}$$

3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als Abstand und Phase zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.6.2 Rückschlüsse auf Amplitudengang

- Es werden vor allem die Abstände betrachtet
- Pol- und Nullstellen können sich aufheben
- Bei $\omega = 0$ gilt:
 - Wenn Nullstelle $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = \infty \Rightarrow \theta(j\omega_0) = \frac{\pi}{2}$
 - Wenn Pol \Rightarrow $|H(j\omega_0)| = 0 \Rightarrow \theta(j\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$
- Wenn weder Pol noch NS \Rightarrow $|H(j\omega_0)|$ hat endlichen Wert $\Rightarrow \theta(j\omega_0) = 0$
- Bei $\omega = \infty$ gilt:
 - Wenn Zählergrad > Nennergrad $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = \infty$
 - Wenn Zählergrad = Nennergrad $\Rightarrow |H(j\omega_0)|$ hat endlichen Wert
 - Wenn Zählergrad < Nennergrad $\Rightarrow |H(j\omega_0)| = 0$

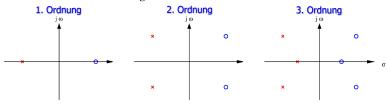
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

3.8 Allpassnetzwerk (s. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen** ω **konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

 \Rightarrow Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur j** ω -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration



UTF Allpass:
$$H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen streng monoton abfallenden Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF H(S) kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (\Rightarrow siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

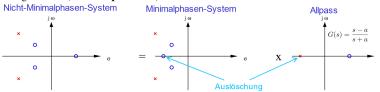
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)
 - entweder ein frei wählbarer Amplituden- oder Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (\Rightarrow Multiplikation!).



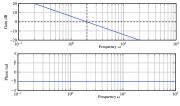
4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramm und zugehötiger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

4.1 Approximationen im Bodediagramm

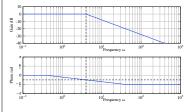
4.1.1 Pol im Ursprung

- $H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$
 - Betrag = Gerade mit Steigung
 -20 dB/Dek, Schnittpunkt mit
 0 dB-Linie bei ω = α
 - Phase $-\frac{\pi}{2}$ = const

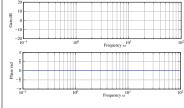


4.1.3 Reeller Pol

- $H(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha}+1} = \frac{4}{s+4}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung -20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $-\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $-\frac{\pi}{4}$)

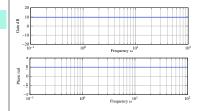


4.1.5 Konj.-komplexe Pole



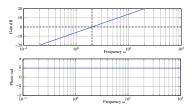
4.1.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
 - Betrag = $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
 - Phase = β = const



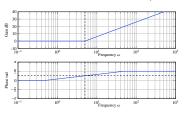
4.1.2 Nullstelle im Ursprung

- $H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$
 - Betrag = Gerade mit Steigung +20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
 - Phase $+\frac{\pi}{2}$ = const

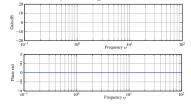


4.1.4 Reelle Nullstelle

- $H(s) = \frac{s+\alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s+5}{5}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung +20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $+\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $+\frac{\pi}{4}$)



4.1.6 Konj.-komplexe Nullstellen



4.1.8 Weitere Bemerkungen

4.2 Bodediagramme mit Matlab

- s = tf('s');
- $_{2} G = 1 + 0.1 *s;$
- bode(G)
- % UTF des Systems
- % Bode-Plot des Systems
- 4 bodemag(G) % Ampli
- % Amplitudengang des Systems