

Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240402

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



Inhaltsverzeichnis

1 LTI-Systeme (S. 171)	2		
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2		
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2		
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2		
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2		
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2		
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2		
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2		
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3		
2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel	3		
2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)	3		
2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)	3		
2.3 Rechenregeln mit Dezibel	3		
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3		
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor	3		
2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3		
3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme	3		
3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4		
3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)	4		
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm	4		
3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4		
		3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4
		3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm	4
		3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	5
		3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)	5
		3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	5
		4 Bodediagramm	5
		4.1 Bodediagramme mit Matlab	5
		4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)	5
		4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)	6
		5 Stabilität im Bodediagramm	6
		5.1 Amplitudenrand und Phasenrand	6
		5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm	6
		6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)	6
		6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab	6
		7 Stabilität im Nyquist-Diagramm	6
		7.1 Offener und geschlossener Regelkreis	6
		7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	6
		7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)	6
		7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm	6

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

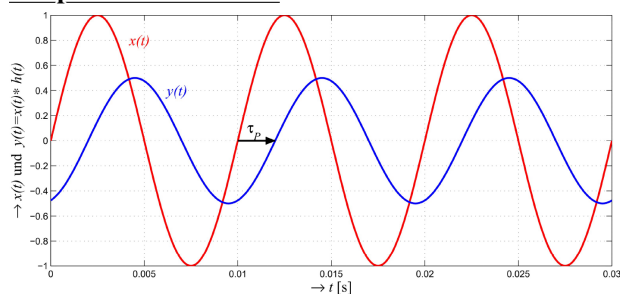
Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$

Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $1 > k \geq 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)$$

1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
⇒ Es gilt: $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen: $\text{THD} \approx k$ allgemein: $\text{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$$\begin{array}{lcl} h(-\tau) & \longleftrightarrow & H^*(j\omega) \\ h(\tau) & \longleftrightarrow & H(j\omega) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \varphi_{xx}(\tau) & \longleftrightarrow & \Phi_{xx}(j\omega) \\ h(\tau) * h(-\tau) & \longleftrightarrow & |H(j\omega)|^2 \end{array} \right.$$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \longleftrightarrow \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren \Rightarrow Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren \Rightarrow Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor** T_U definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass** g_U definiert.

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ($U_2 > U_1$) \Rightarrow positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ($U_2 < U_1$) \Rightarrow negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$$\begin{aligned} T_{U_{tot}} &= \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_5}{U_1} \\ &= \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{1} = 50 \\ a_{U_{tot}} &= -20\text{dB} + 3\text{dB} + 3\text{dB} + -20\text{dB} = -34\text{dB} \end{aligned}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20\text{ dB} + 3\text{ dB} + 3\text{ dB} - 20\text{ dB} = -34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen \Rightarrow Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 – 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 – 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 – 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 – 6 = 10 – 3 – 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 – 10 = 5 – 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 – 3 – 3 – 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
–1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

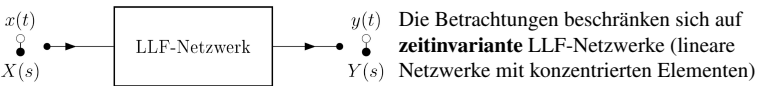
$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$
$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$
$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$(L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right)$$
$$(L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right)$$
$$(L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{1\text{ mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μW

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differentialgleichung der folgenden Form beschreiben:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$	Zählerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$D(s)$	Nennerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal

Die Wurzeln der Gleichung $N(s) = 0$ ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von $D(s) = 0$ ergeben n Pole des Systems. **Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!**

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird $H(s)$ faktorisiert.
 \Rightarrow Die UTF $H(s)$ ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K **vollständig bestimmt!**

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiert komplexe Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^t (s^2 + 2\sigma_{pj}s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2t+1}^n (s - p_j)}$$

Legende:

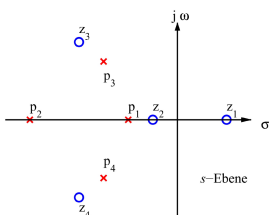
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Pole in der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann $H(s)$ mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^t (s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2t+1}^n (s - p_j)}$$

ω_{pj}	Polstellenfrequenzen	ω_{zi}	Nullstellenfrequenzen
q_{pj}	Polstellengüten	q_{zi}	Nullstellengüten

3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)



Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot

Pole Kreuze
NS Kreise

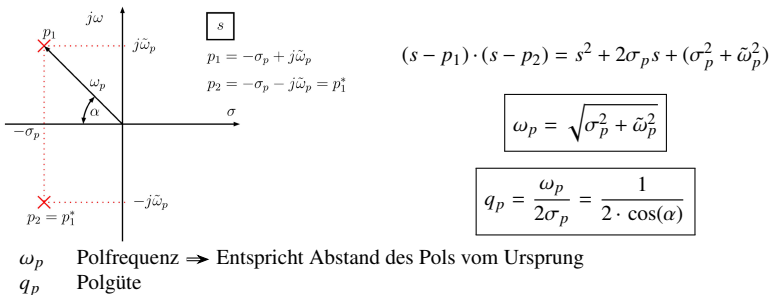
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol- Nullstellendiagramm

Für **Grenzstabilität** gilt eine **UND-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte. Für **Stabilität und Instabilität** gilt eine **ODER-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.

- **Stabil:**
 - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE)
 - Keine Polstellen vorhanden
- **Grenzstabil:**
 - **Keine** Polstellen in der rechten Halbebene (RHE)
 - Mindestens eine **einfache Polstelle** auf imaginärer Achse
 - **Keine doppelten** Polstellen auf der imaginären Achse
- **Instabil:**
 - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE)
 - Mindestens eine **mehrfache Polstelle** auf der imaginären Achse

3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



Grenzfälle

$\sigma_p = \omega_p$	Doppelpol auf neg. reeller Achse	$\Rightarrow q_p = \frac{1}{2}$
$\sigma_p = 0$	Polpar auf imaginärer Achse	$\Rightarrow q_p = \infty$

3.4.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$$

- \Rightarrow Für einzelne (reelle) Pole ist die Güte q_p nicht definiert.
- \Rightarrow Die Polfrequenz ω_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

$$\sigma_{p1} = \sigma_{p2} \quad |q_p| = \frac{1}{2}$$

3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann $s = j\omega$ eingesetzt werden.

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$H(s)$	Übertragungsfunktion (UTF)	$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$H(j\omega)$	Frequenzgang	$\theta(\omega)$	Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- **Nyquist-Diagramm**
 $H(j\omega)$ wird in Polarkoordinaten mit ω als Parameter aufgetragen
- **Bode-Diagramm**
 $\alpha_{dB}(\omega)$ und $\theta(\omega)$ werden je in Funktion von $\log_{10}(\omega)$ aufgetragen

3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ in die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ als:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2) \dots (j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2) \dots (j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0 - p_1) = |j\omega_0 - p_1| \cdot e^{j\theta_{z1}} = A_{z1} \cdot e^{j\theta_{z1}}$$

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ in den **Amplitudengang** $|H(j\omega)|$ und den **Phasengang** $\theta(\omega)$ separiert werden:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \dots A_{zm} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \dots + \theta_{zm})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \dots A_{pn} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \dots + \theta_{pn})}}$$

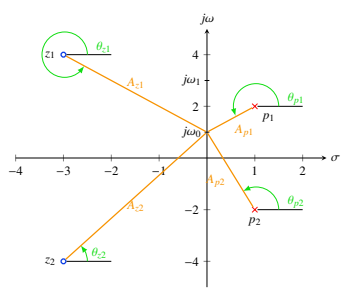
Betrag

$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}}$$

Phase

$$\theta(\omega_0) = \underbrace{\text{Phase von } K}_{\text{meistens 0}} + \sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^n \theta_{pj}$$

3.6.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

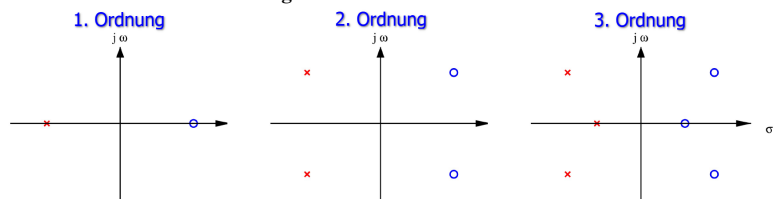
- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen - Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeler Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von -20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen ω konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-Nullstellen-Diagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF $H(S)$ kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk $H_M(s)$ und einen Allpass $H_A(s)$ **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

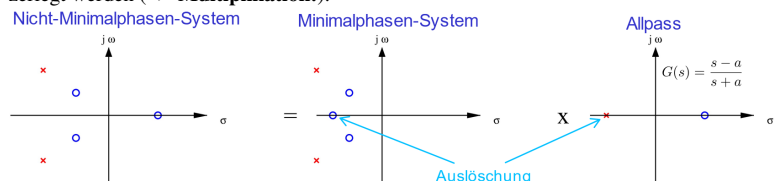
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
 - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
 - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
 - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



4 Bodediagramm

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-Nullstellen-Diagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

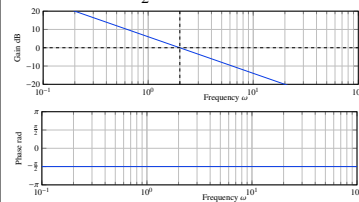
4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems  
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems  
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

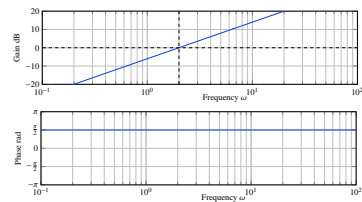
4.2.1 Pol im Ursprung

- $H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$
 - Betrag = Gerade mit Steigung -20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \alpha$
 - Phase = $-\frac{\pi}{2} = \text{const}$



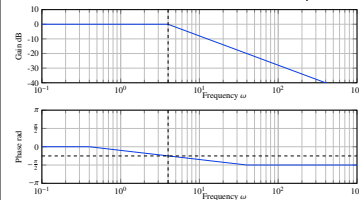
4.2.2 Nullstelle im Ursprung

- $H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$
 - Betrag = Gerade mit Steigung +20 dB/Dek, Schnittpunkt mit 0 dB-Linie bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$
 - Phase = $+\frac{\pi}{2} = \text{const}$



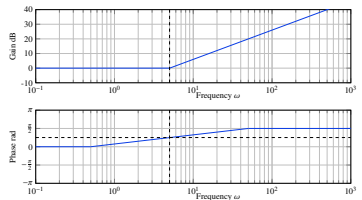
4.2.3 Reeller Pol

- $H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung -20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $-\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $-\frac{\pi}{4}$)



4.2.4 Reelle Nullstelle

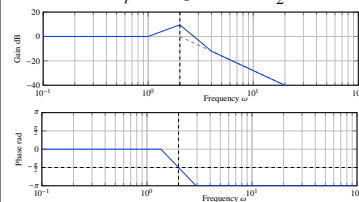
- $H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = \alpha$; für $\omega > \alpha$ Gerade mit Steigung +20 dB/Dek durch Punkt mit Amplitude 0 dB und $\omega = \alpha$
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\alpha}{10}$; für $\omega > 10\alpha$ Konstante mit Wert $+\frac{\pi}{2}$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \alpha$ beträgt Phase $+\frac{\pi}{4}$)



4.2.5 Konj.-komplexe Pole

Voraussetzung: $|q_p| > \frac{1}{2}$

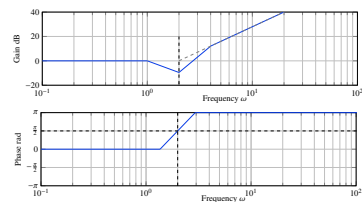
- $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von 0 bis $\frac{\omega_p}{2}$; für $\omega > 2\omega_p$ eine Gerade mit Steigung -40 dB/Dek; Überhöhung bei $\omega = \omega_p$ mit Maximalwert $20 \cdot \log_{10}(q_p)$; Approximation der Überhöhung von mit weiteren Geraden
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10}$; für $\omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}$ Konstante mit Wert $-\pi$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \omega_p$ beträgt Phase $-\frac{\pi}{2}$)



4.2.6 Konj.-komplexe NS

Voraussetzung: $|q_z| > \frac{1}{2}$

- $H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$
 - Betrag = Konstante mit Wert 0 dB von 0 bis $\frac{\omega_p}{2}$; für $\omega > 2\omega_p$ eine Gerade mit Steigung +40 dB/Dek; Senke bei $\omega = \omega_p$ mit Minimalwert $-20 \cdot \log_{10}(q_p)$; Approximation der Senke mit weiteren Geraden
 - Phase = Konstante mit Wert 0 bis $\omega < \frac{\omega_p}{10}$; für $\omega > \omega_p \cdot 10^{\frac{1}{2q_p}}$ Konstante mit Wert $+\pi$; dazwischen eine Gerade (bei $\omega = \omega_p$ beträgt Phase $+\frac{\pi}{2}$)

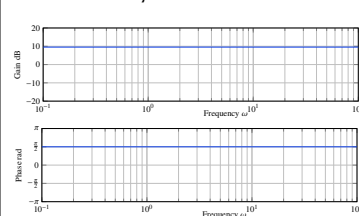


Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, Seite 235

q_p	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{2q_p}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{\frac{1}{2q_p}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
 - Betrag = $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
 - Phase = $\beta = \text{const}$



4.2.8 Weitere Bemerkungen

- **Inverser Frequenzgang:**
 - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
 - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- **Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
 - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am grössten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

$$\text{UTF Tiefpass 2. Ordnung: } H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$$

$$\text{Frequenz beim Maximum: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$$

$$\text{Höhe des Maximums: } |H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$$

⇒ Es gilt: $\omega_{\max} \leq \omega_p$

4.3.1 Spezialfall $q = 1$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$$

4.3.2 Spezialfall $q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Frequenz: } \omega_{\max} &= \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} \\ &= \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = \infty$$

4.3.3 Spezialfall $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Frequenz: } \omega_{\max} = 0$$

$$\text{Höhe: } |H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$$

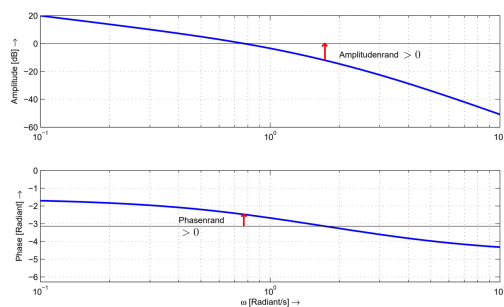
5 Stabilität im Bodediagramm

Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis $H(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei $s = 0$), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn $H(j\omega)$ für die **Durchgangsfrequenz** ω_D bei der die Amplitude $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0$ dB ist, und eine Phase $> -\pi$ hat.
⇒ Amplitudenrand und Phasenrand müssen > 0 sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

- **Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Phase gleich $-\pi$ bzw. -180° ist.
- **Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Abstand des Phasengangs zur $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz ω , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzganges in Abhängigkeit der Frequenz f (aufsteigende Werte von f) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.

Auf die Konstruktion von Ortskurven wird im Modul Regelungstechnik 2 im Detail eingegangen. Darum soll hier nur auf die Beschreibung im Skript (S. 240 - 242) verwiesen werden.

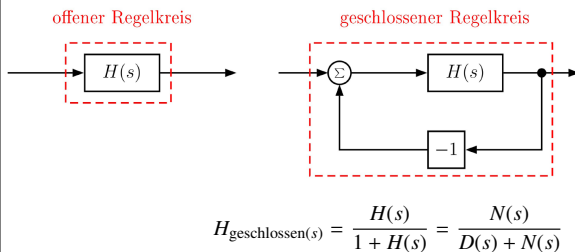
6.1 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 1/s;    % UTF des Systems  
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve** $H(s)$ (**offener Regelkreis**) einen Aussage über Die **Stabilität** des (**geschlossenen Regelkreises**) zu machen. Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



$$H_{\text{geschlossen}(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

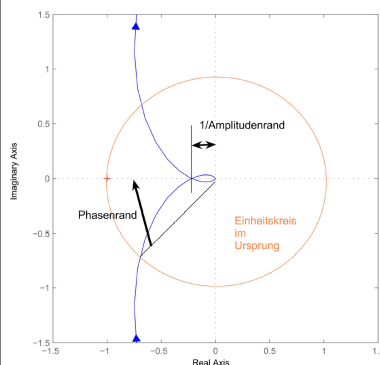
Ist der **offene** Regelkreis $H(s)$ **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt $(-1, j0)$ mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern 'links liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.

- **Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
 - Frequenz, bei welcher die **negative** reelle Achse geschnitten wird: ω_π
 - Bei ω_π : $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$ = Abstand zum Ursprung
- **Phasenrand (Phasenreserve)**
 - Frequenz, bei welcher Eintritt in den Einheitskreis erfolgt: ω_D
 - Bei ω_D : Winkel bis zu 180°

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt $(-1, j0)$ 'links liegen gelassen' wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt.

Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand > 0 sind.