Signale und Systeme 2

FS 24 Prof. Dr. Heinz Mathis

Autoren:
Authors

Version:
1.0.20240330
https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2

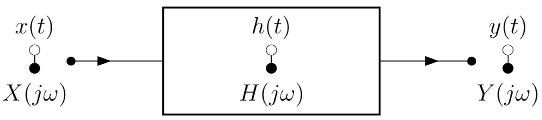
Inhaltsverzeichnis

1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$\lvert H(j\omega)\rvert$	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)

Die Impulsantwort $h(t)$ und der Frequenzgang $H(j\omega)$ sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$\boxed{h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(s)}$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s) = H(s) \cdot X(s)}$$

1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort - Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$\boxed{h(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

$$\boxed{H(s) = s \cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s} H(s)}$$

1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort $h(t)$ für alle $t < 0$ gleich Null sein.

1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

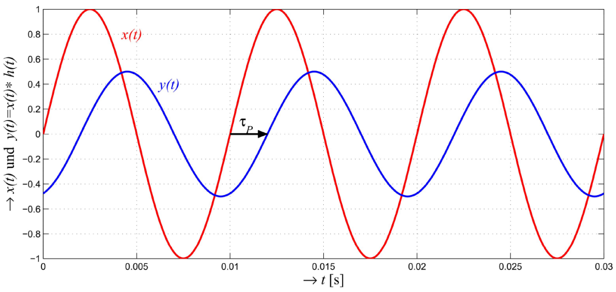
$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \circ\!\!-\!\!\bullet h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Das Ausgangssignal $y(t) = x(t) * h(t)$ ist gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ mit Faktor α gewichtet und um die Zeit t_0 verzögert.
⇒ **Diese Verzögerung wird Phasenlaufzeit genannt**

$$\boxed{\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Beispiel: Phasenlaufzeit



1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\boxed{\tau_G(\omega) = \frac{-\,\mathrm{d}\theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega}}$$

$\theta(\omega)$ entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)
Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!
⇒ Das System ist **nicht** akausal!
Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögernug, Phasenlaufzeit** $\tau_P(\omega)$ und **Gruppenlaufzeit** $\tau_G(\omega)$ sind identisch, wenn

$$\boxed{\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0}$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h. $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen** t_0 $(= \tau_P = \tau_G)$

1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen werden.
Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.
Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \cdots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2}}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
➔ Es gilt: $1 > k \geq 0$

1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$\boxed{a_k = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{k}\right)}$$

1.6.2 Total Harmonic Disortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\boxed{\mathrm{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \cdots + U_n^2}{U_1^2}}}$$

U_1 entspricht der Grundharmonischen
➔ Es gilt: $\infty > \mathrm{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen: $\mathrm{THD} \approx k$ allgemein: $\mathrm{THD} > k$

1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang $H(j\omega)$ und Impulsantwort $h(t)$ eines verzerrungsfreien Signals:

$$\boxed{H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \circ\!\!-\!\!\bullet h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)}$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. **Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz) ⇔ $|H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$
   ➔ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
2. **Phase** proportional zur Frequenz ⇔ $\theta(\omega) = -\omega\, t_0$
   (äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ➔ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal $x(t)$ (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantowort $h(t)$ übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal $y(t)$ gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = H(s) \cdot X(s)}$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert Y_0 des Ausgangssignals $y(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0$ entspricht

$$\boxed{Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)}$$

$H(j\omega)$ = Frequenzgang und X_0 = linearer Mittelwert von $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da $\varphi_{yy}(\tau)$ und Y_0 nicht von t abhängen, ist auch $y(t)$ schwach stationär.

$$\boxed{\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, h(\beta)\, \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)}$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$h(-\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$H^*(j\omega)$	$\varphi_{xx}(\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\Phi_{xx}(j\omega)$
$h(\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$H(j\omega)$	$h(\tau) * h(-\tau)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lvert H(j\omega)\rvert^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$$\underbrace{\varphi_{yy}(\tau)}_{\text{AKF}} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \underbrace{\Phi_{yy}(j\omega)}_{\text{PSD}}$$

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren $\Phi(j\omega)$

$$\boxed{\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2\, \Phi_{xx}(j\omega)}$$

Für die AKF des Ausgangssignals $y(t)$ gilt

$$\boxed{\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, \Phi_{xx}(j\omega)\, e^{j\omega\tau}\, \mathrm{d}\omega}$$

Die Leistung Y^2 des Ausgangssignals $y(t)$ berechnet sich beim Zeitpunkt $\tau = 0$ als

$$\boxed{Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, \Phi_{xx}(j\omega)\, \mathrm{d}\omega}$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ des stochastischen, reellen Eingangssignals $x(t)$ (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals $y(t)$ eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)}$$

$$\boxed{\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)}$$

Somit gilt:

$$\boxed{\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi^*_{xy}(j\omega)}$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen. Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor D (S. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor D bezeichnet

$$\boxed{D_P = \frac{P_1}{P_2}} \qquad \boxed{D_U = \frac{U_1}{U_2}} \qquad \boxed{D_I = \frac{I_1}{I_2}}$$

Die Indizes U, P, I stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass a in Dezibel (S. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors D erhält man das Dämpfungsmass a

$$\boxed{a_P = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} \qquad \boxed{a_U = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)} \qquad \boxed{a_I = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)}$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel

$$\boxed{\mathrm{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \;\Leftrightarrow\; v = 10^{\frac{\mathrm{dB}}{10}}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren $\Rightarrow$ Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren $\Rightarrow$ Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)

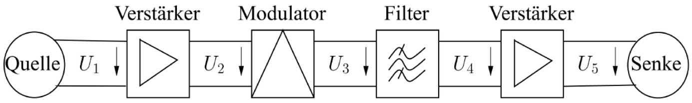
Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs.
Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor T_U** definiert. Analog zum Dämpfungsmass a wird ein **Verstärkungsmass g_U** definiert.

$$\boxed{T_U = \frac{U_2}{U_1}} \qquad \boxed{g_U = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)}$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** $(U_2 > U_1)$ $\Rightarrow$ positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** $(U_2 < U_1)$ $\Rightarrow$ negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (S. 209)



$$\begin{aligned}
T_{U_{tot}} &= \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_5}{U_1} \\
&= \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{1} = 50 \\
a_{U_{tot}} &= \text{-20dB} + \text{3dB} + \text{3dB} + \text{-20dB} = \text{-34dB}
\end{aligned}$$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass g ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = -20\,\mathrm{dB} + 3\,\mathrm{dB} + 3\,\mathrm{dB} - 20\,\mathrm{dB} = -34\,\mathrm{dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel – Faktor

Vorgehen: Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen
$\Rightarrow$ Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

Vorgehen: Gesuchten Faktor als Produkt / Quotent von bekannten Werten darstellen
$\Rightarrow$ Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	**Faktor**
$20 = 10 + 10$	$100 = 10 \cdot 10$
12	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
10	10
$9 = 3 + 3 + 3$	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$8 = 5 - 3$	$6.4 = 3.2 \cdot 2$
$7 = 10 - 3$	$5 = \frac{10}{2}$
$6 = 3 + 3$	$4 = 2 \cdot 2$
$5 = 15 - 10$	$3.2 = \frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
$4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3$	$2.5 = \frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
$2 = 12 - 10 = 5 - 3$	$1.6 = \frac{16}{10}$
$1 = 10 - 3 - 3 - 3$	$1.25 = \frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
-1	$0.8 = \frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösser (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \qquad (L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_2}{774.6\,\mathrm{mV}}\right)$$

$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \qquad (L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{1.291\,\mathrm{mA}}\right)$$

$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \qquad (L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_2}{1\,\mathrm{mW}}\right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	**Bezugsgrösse**	**Notation**	**Bezugsgrösse**
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dB µV	1 µW

3 Frequnzverhalten analoger LTI-Systeme

Die Betrachtungen beschränken sich auf **zeitinvariante** LLF-Netzwerke (lineare Netzwerke mit konzentrierten Elementen)

3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differntialfleichung der folgenden Form beschreiben:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

$N(s)$	Zählerpolynom mit konstanten, reelen Koeffizienten
$D(s)$	Nennerpolynom mit konstanten, reelen Koeffizienten
$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal

Die Wurzeln der Gleichung $N(s) = 0$ ergeben m endliche Nullstellen; die Wurzeln von $D(s) = 0$ ergeben n Pole des Systems. **Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!**

3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird $H(s)$ faktorisiert.
⇒ Die UTF $H(s)$ ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor K **vollständig bestimmt**!

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiert-komplexe Paare auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reelen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r}(s^2 + 2\sigma_{zi}s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{t}(s^2 + 2\sigma_{pj}s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2t+1}^{n}(s - p_j)}$$

Legende:

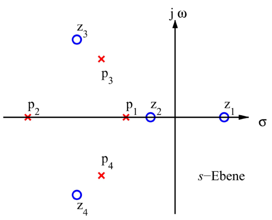
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Polein der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann $H(s)$ mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_{K} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r}(s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}}s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{t}(s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}}s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2t+1}^{n}(s - p_j)}$$

ω_{pj}	Polstellenfrequenzen	ω_{zi}	Nullstellenfrequenzen
q_{pj}	Polstellengüten	q_{zi}	Nullstellengüten

3.2 Pol- und Nullstellendiagramme (S. 212)

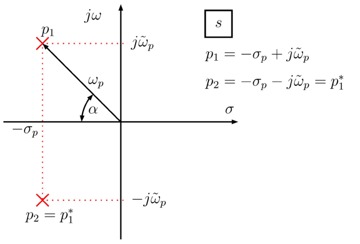


Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.
In Matlab erzeugt der Befehl `pzmap` einen solchen Plot

Pole	Kreuze
NS	Kreise

3.3 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



$$(s - p_1)\cdot(s - p_2) = s^2 + 2\sigma_p s + (\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2)$$

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}}$$

$$\boxed{q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma_p} = \frac{1}{2\cdot\cos(\alpha)}}$$

ω_p	Polfrequenz ⇒ Entspricht Abstand des Pols vom Ursprung
q_p	Polgüte

Grenzfälle

$\sigma_p = \omega_p$	Doppelpol auf neg. reeller Achse	⇒ $q_p = \frac{1}{2}$
$\sigma_p = 0$	Polpar auf imaginärer Achse	⇒ $q_p = \infty$

3.3.1 Reelle Pole

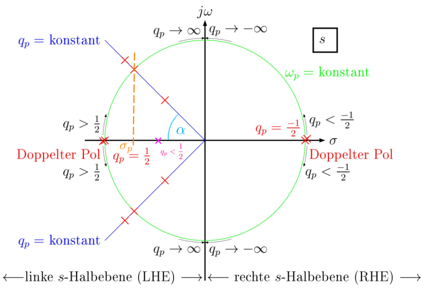
$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1}\cdot\sigma_{p2}}} \qquad \boxed{q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1}\cdot\sigma_{p2}}}{\sigma_{p1}+\sigma_{p2}} \le \frac{1}{2}}$$

⇒ Für einzelne (reelle) Pole ist ist die Güte q_p nicht definiert.
⇒ Die Polfrequenz ω_p entspricht dem Abstand zum Ursprung.

Identische Werte

$\sigma_{p1} = \sigma_{p2}$ $\quad |q_p| = \frac{1}{2}$

3.3.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

3.4 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann $s = j\omega$ eingesetzt werden.

$$\boxed{H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|\cdot e^{j\theta(\omega)}}$$

$H(s)$	Übertragungsfunktion (UTF)	$\lvert H(j\omega)\rvert$	Amplitudengang
$H(j\omega)$	Frequenzgang	$\theta(\omega)$	Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- Nyquist-Diagramm
  $H(j\omega)$ wird in Polarkoordinaten mit ω als Parameter aufgezeichnet
- **Bode-Diagramm**
  $\alpha_{\mathrm{dB}}(\omega)$ und $\theta(\omega)$ werden je in Funktion von $\log_{10}(\omega)$ aufgezeichnet

3.5 Bestimmung Frequenzgang aus Pol- / Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ in die Übertragungsfunktion $H(s)$ ergibt sich der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ als:

$$H(j\omega_0) = K\cdot\frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2)\cdots(j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2)\cdots(j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)|\cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0 - p_1) = |j\omega_0 - z_1|\cdot e^{j\theta_{z1}} = A_{z1}\cdot e^{j\theta_{z1}}$$

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang $H(j\omega_0)$ in den Amplitudengang $|H(j\omega)|$ und den Phasengang $\theta(\omega)$ separiert werden:

$$\boxed{H(j\omega_0) = K\cdot\frac{A_{z1}\cdot A_{z2}\cdots A_{zm}\cdot e^{j(\theta_{z1}+\cdots+\theta_{zm})}}{A_{p1}\cdot A_{p2}\cdots A_{pm}\cdot e^{j(\theta_{p1}+\cdots+\theta_{pm})}}}$$

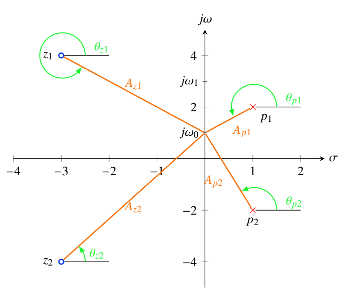
Betrag

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = K\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}A_{zi}}{\prod_{j=1}^{n}A_{pj}}}$$

Phase

$$\boxed{\theta(\omega_0) = \underbrace{\text{Phase von } K}_{\text{meistens } 0} + \sum_{i=1}^{m}\theta_{zi} - \sum_{j=1}^{m}\theta_{pj}}$$

3.5.1 Zusammenhang mit Pol- / Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz $j\omega$ ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für ein bestimmte Auswertungsfrequenz $j\omega_0$ können die Faktoren von $H(j\omega_0)$ als Abstand und Phase zu den Pol- bzw. Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol- Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K\cdot\frac{A_{z1}\cdot A_{z2}\cdot e^{j(\theta_{z1}+\theta_{z2})}}{A_{p1}\cdot A_{p2}\cdot e^{j(\theta_{p1}+\theta_{p2})}}$$

3.5.2 Rückschlüsse auf Amplitudengang

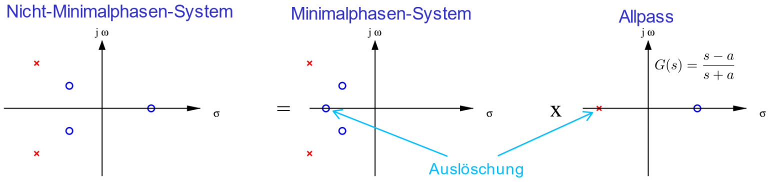
- Es werden vor allem die **Abstände** betrachtet
- Pol- und Nullstellen können sich aufheben
- Bei $\omega = 0$ gilt:
  - Wenn Nullstelle ⇒ $|H(j\omega_0)| = \infty$ ⇒ $\theta(j\omega_0) = \frac{\pi}{2}$
  - Wenn Pol ⇒ $|H(j\omega_0)| = 0$ ⇒ $\theta(j\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$
  - Wenn weder Pol noch NS ⇒ $|H(j\omega_0)|$ hat endlichen Wert ⇒ $\theta(j\omega_0) = 0$
- Bei $\omega = \infty$ gilt:
  - Wenn Zählergrad > Nennergrad ⇒ $|H(j\omega_0)| = \infty$
  - Wenn Zählergrad = Nennergrad ⇒ $|H(j\omega_0)|$ hat endlichen Wert
  - Wenn Zählergrad < Nennergrad ⇒ $|H(j\omega_0)| = 0$

3.6 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 220)

- Minimalphasennetzwerke:
  - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)**
  - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
  - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden ($\Rightarrow$ **Multiplikation!**).



3.6.1 Allpass

4 Bodediagramm