

## Algorytmy geometryczne, laboratorium 1 - sprawozdanie

### 1. Opis ćwiczenia

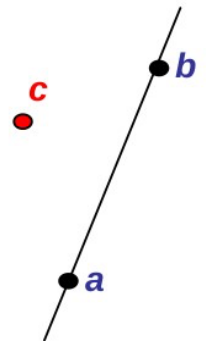
Zadaniem które należy wykonać na laboratorium 1 jest określenie po której stronie prostej znajduje się punkt. Można to wykonać przy pomocy algorytmu obliczającego wartość jednego z dwóch wyznaczników:

- 1) Wyznacznik macierzy 3x3:

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

- 2) Wyzacznik macierzy 2x2:

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$



Gdzie  $a_x$  i  $a_y$  to współrzędne odpowiednio x i y punktu a (tak samo z punktami b i c). Powyższe wyznaczniki pozwalają określić położenie punktu c względem prostej która jest wyznaczona przez punkty a i b. Jeżeli wyznacznik jest większy od 0 (albo od innej tolerancji dla zera epsilon) to punkt znajduje się z lewej strony prostej, jeżeli jest mniejszy od 0 (albo od innej tolerancji dla zera którą zmieniamy na ujemną) to punkt znajduje się po prawej stronie prostej a jeżeli wartość wyznacznika jest równa 0 (lub równa epsilon) to punkt leży na prostej. Pomimo, że powyższe wyznaczniki są sobie równoważne to na skutek niedoskonałości reprezentacji liczb rzeczywistych w komputerze wyniki mogą się różnić w zależności od użytego wyznacznika.

### 2. Środowisko, biblioteki oraz użyte narzędzia

Ćwiczenie zostało wykonane w Jupyter Notebook i napisane w języku Python z wykorzystaniem narzędzia Visualizer autorstwa koła naukowego BIT do wizualizacji obliczeń i rysowania wykresów. Wszystko było wykonywane na systemie operacyjnym macOS Sonoma14.6.1 I procesorze Apple M2 Pro arm64

### 3. Plan i sposób wykonania ćwiczenia

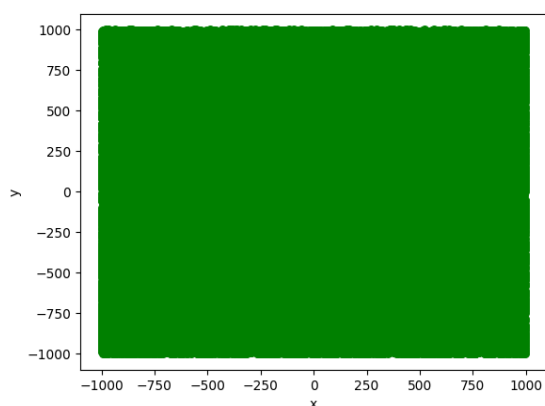
Wygenerowanie zbiorów punktów typu float:

- $10^5$  losowych punktów o współrzędnych z przedziału  $[-1000, 1000]$ ,
- $10^5$  losowych punktów o współrzędnych z przedziału  $[-10^{14}, 10^{14}]$ ,
- 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu  $R=100$ ,
- 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału  $[-1000, 1000]$  leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b), przyjmij:  
 $\mathbf{a} = [-1.0, 0.0]$ ,  $\mathbf{b} = [1.0, 0.1]$ .

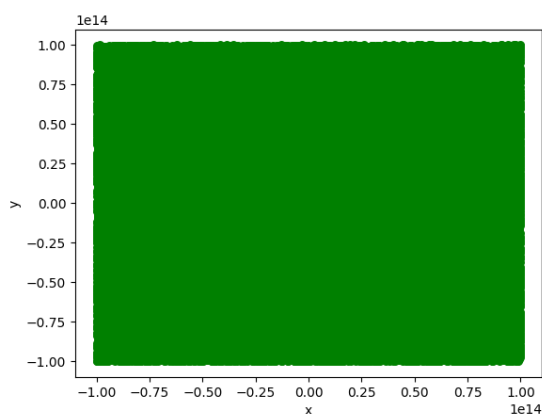
Do wygenerowania poniższych wykresów używam

a) Wykres\_a

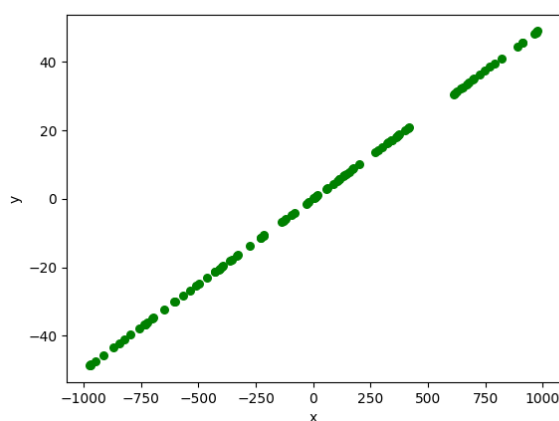
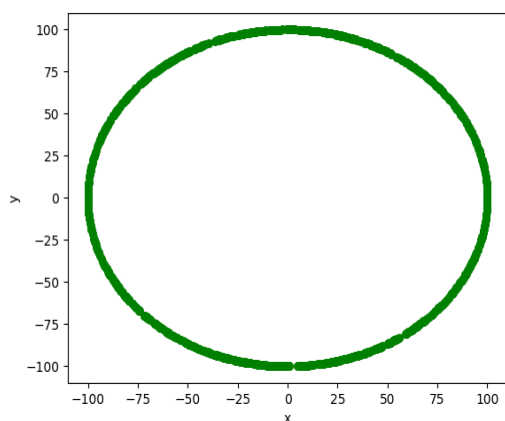
b) Wykres\_b



c) Wykres\_c



d) Wykres\_d



Następnie użyłem cztery funkcje obliczające wyznaczniki, które pozwolą nam zdeterminować po której stronie prostej wyznaczonej przez dwa punkty leży trzeci punkt:

- `mat_det_3x3` - funkcja obliczająca wyznacznik 3x3, zaimplementowana samodzielnie
- `mat_det_2x2` - funkcja obliczająca wyznacznik 2x2, zaimplementowana samodzielnie
- `mat_det_3x3_lib` - funkcja obliczająca wyznacznik 3x3, zaimplementowana przy pomocy biblioteki numpy
- `mat_det_2x2_lib` - funkcja obliczająca wyznacznik 2x2, zaimplementowana przy pomocy biblioteki numpy

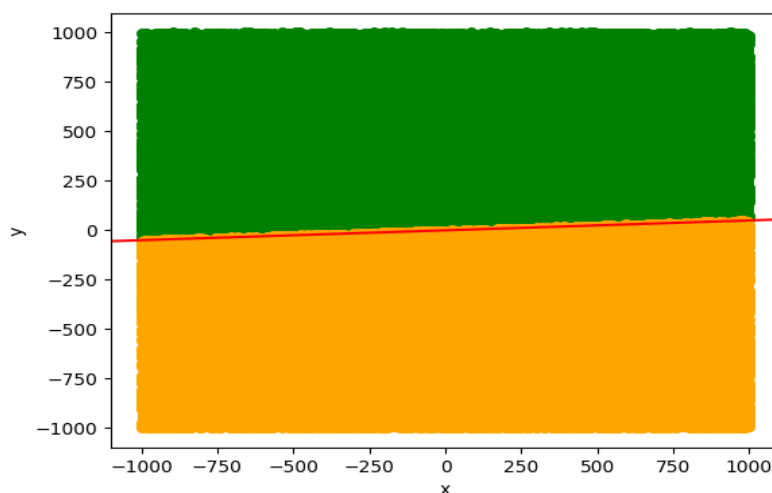
Kolor pomarańczowy dla punktów po prawej stronie prostej, zielony dla punktów po lewej stronie prostej, punkty na prostej pokolorowałem na fioletowo. Funkcje przedstawiające wyniki uwzględniają funkcję użytą do wyznaczenia wyznacznika, przyjętą tolerancję dla zera ( $\epsilon$ ) oraz wybraną precyzję floata.

## 4. Otrzymane wyniki oraz ich analiza

Używana funkcja do wyznaczenia wyznacznika	Liczba punktów po lewej	Liczba punktów po prawej	Liczba punktów na prostej
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	50039	49961	0
mat_det_3x3_lib	50039	49961	0
mat_det_2x2	50039	49961	0
mat_det_2x2_lib	50039	49961	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	50039	49961	0
mat_det_3x3_lib	50039	49961	0
mat_det_2x2	50039	49961	0
mat_det_2x2_lib	50039	49961	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	50039	49961	0
mat_det_3x3_lib	50039	49961	0
mat_det_2x2	50039	49961	0
mat_det_2x2_lib	50039	49961	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	50039	49961	0
mat_det_3x3_lib	50039	49961	0
mat_det_2x2	50039	49961	0
mat_det_2x2_lib	50039	49961	0

**Tabela 4.1** Rozkład punktów dla zbioru A

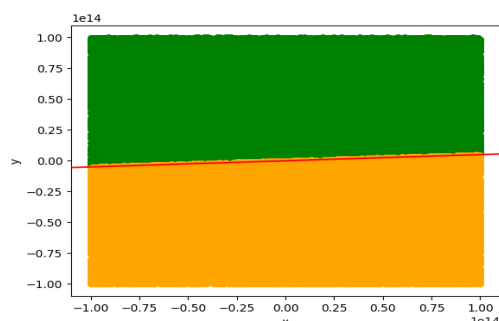
Jak widać w Tabeli 4.1, dla zbioru A wyniki są identyczne niezależnie od przyjętej tolerancji zera, wybranej funkcji do obliczenia wyznacznika oraz precyzji zmiennoprzecinkowej.



Używana funkcja do wyznaczenia wyznacznika	Liczba punktów po lewj	Liczba punktów po prawej	Liczba punktów na prostej
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	49936	50064	0
mat_det_3x3_lib	49936	50064	0
mat_det_2x2	49936	50064	0
mat_det_2x2_lib	49935	50065	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	49936	50064	0
mat_det_3x3_lib	49936	50064	0
mat_det_2x2	49936	50064	0
mat_det_2x2_lib	49935	50065	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	49936	50064	0
mat_det_3x3_lib	49936	50064	0
mat_det_2x2	49828	50172	0
mat_det_2x2_lib	6608	6659	86733
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	49936	50064	0
mat_det_3x3_lib	49936	50064	0
mat_det_2x2	49828	50172	0
mat_det_2x2_lib	6608	6659	86733

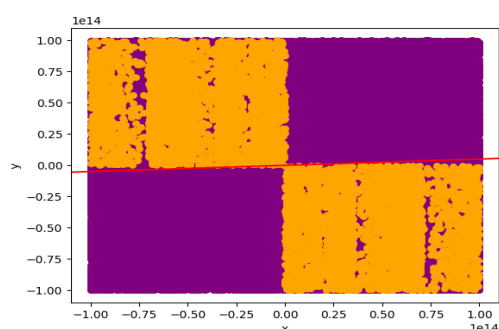
**Tabela 4.2** Rozkład punktów dla zbioru B

Rozkład dla zbioru B jest proporcjonalny dla większości sprawdzanych przypadków, bez znaczących różnic w klasyfikacji punktów. Wyjątek stanowi przypadek, w którym używam float32 i funkcji bibliotecznej do liczenia wyznacznika 2x2. Występuje ogromny rozrzut między założeniami zadania a wynikami pomiaru, co można zauważyć na Rysunku 4.3.



**Rysunek 4.2**

Rozkład dla zbioru B dla regularnych przypadków

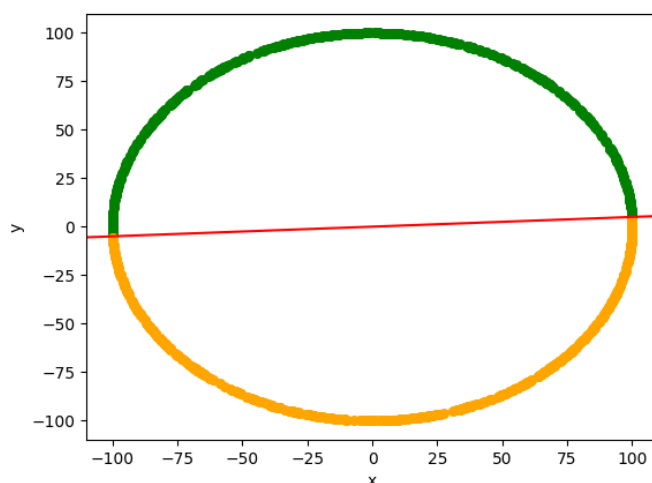


**Rysunek 4.3**

Rozkład dla zbioru B w przypadku float32 oraz funkcji bibliotecznej wyznacznika 2x2

Używana funkcja do wyznaczenia wyznacznika	Liczba punktów po lewej	Liczba punktów po prawej	Liczba punktów na prostej
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	513	487	0
mat_det_3x3_lib	513	487	0
mat_det_2x2	513	487	0
mat_det_2x2_lib	513	487	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	513	487	0
mat_det_3x3_lib	513	487	0
mat_det_2x2	513	487	0
mat_det_2x2_lib	513	487	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	513	487	0
mat_det_3x3_lib	513	487	0
mat_det_2x2	513	487	0
mat_det_2x2_lib	513	487	0
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	513	487	0
mat_det_3x3_lib	513	487	0
mat_det_2x2	513	487	0
mat_det_2x2_lib	513	487	0

**Tabela 4.3** Rozkład punktów dla zbioru C  
Rozkład jest proporcjonalny dla każdej kombinacji paramterów.

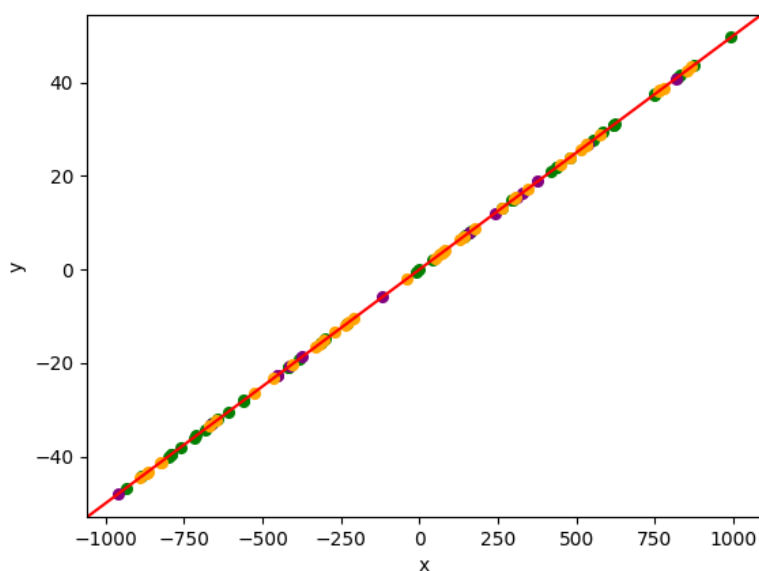


**Rysunek 4.4**  
Rozkład dla zbioru C

Używana funkcja do wyznaczenia wyznacznika	Liczba punktów po lewj	Liczba punktów po prawej	Liczba punktów na prostej
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	0	0	100
mat_det_3x3_lib	0	0	100
mat_det_2x2	0	0	100
mat_det_2x2_lib	0	0	100
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float64			
mat_det_3x3	0	0	100
mat_det_3x3_lib	0	0	100
mat_det_2x2	0	0	100
mat_det_2x2_lib	17	19	64
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-8)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	21	23	56
mat_det_3x3_lib	44	41	15
mat_det_2x2	21	23	56
mat_det_2x2_lib	48	51	1
Tolerancja $\text{eps}=10^{**}(-12)$ , precyzja float32			
mat_det_3x3	21	23	56
mat_det_3x3_lib	45	41	14
mat_det_2x2	49	51	0
mat_det_2x2_lib	21	23	56

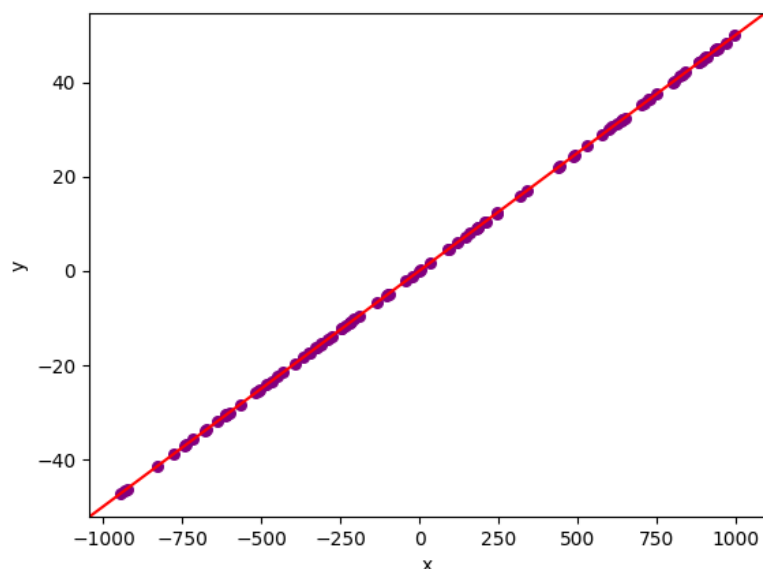
**Tabela 4.3** Rozkład punktów dla zbioru D

Rozkład punktów jest bezbłędny dla typu float64 i dużego epsilon; dla mniejszej tolerancji zera wyniki funkcji bibliotecznej do liczenia wyznacznika 2x2 zaczynają odbiegać od oczekiwanych, ale wciąż większość punktów znajduje się na prostej. Ciekawe zachowanie można zaobserwować, gdy wykorzystamy float32. Niezależnie od tolerancji zera i wybranej funkcji do obliczania wyznacznika rozrzut punktów jest bardzo duży. W tym przypadku widoczne są ograniczenia arytmetyki komputerowej.



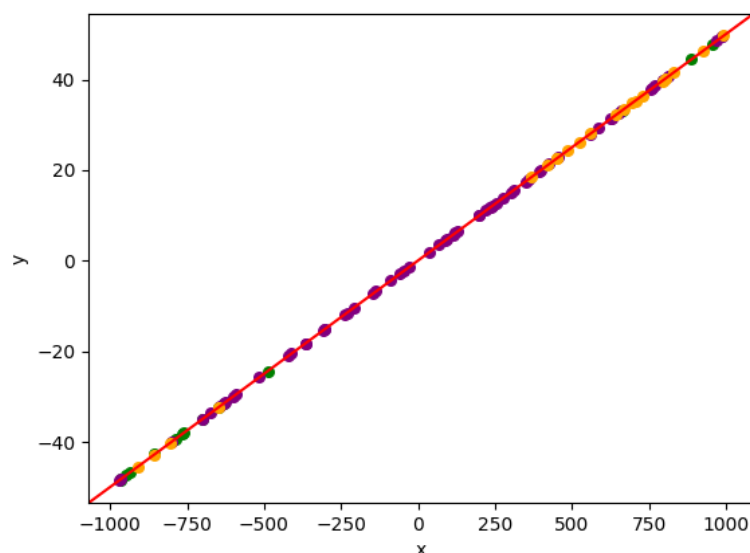
**Rysunek 4.4**

Rozkład punktów ze zbioru D na prostej dla  $\varepsilon = 10^{**}(-12)$  i float32. Kolor fioletowy oznacza punkt na prostej  
Kolor pomarańczowy oznacza punkt na prawo od prostej  
Kolor zielony oznacza punkt na lewo od prostej



**Rysunek 4.5**

Rozkład punktów ze zbioru D na prostej dla  $\varepsilon = 10^{**}(-8)$  i float64. Kolor fioletowy oznacza punkt na prostej



**Rysunek 4.6**

Rozkład punktów ze zbioru D na prostej dla  $\varepsilon = 10^{**}(-12)$ , float64 i funkcji `mat_det_2x2_lib`. Kolor fioletowy oznacza punkt na prostej. Kolor pomarańczowy oznacza punkt na prawo od prostej. Kolor zielony oznacza punkt na lewo od prostej

## 5. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych pomiarów zależą w dużym stopniu od przyjętych narzędzi, wartości epsilon, metody obliczeń oraz dokładności reprezentacji zmiennoprzecinkowej. W przypadku zbiorów A i C klasyfikacja punktów okazała się poprawna, pomijając drobne błędy pomiarowe. Natomiast w zbiorze D błędy wynikają głównie z ograniczeń arytmetyki komputerowej. Szczególnie interesujące wyniki przyniósł zbiór B, w którym zastosowanie epsilon, float32 oraz funkcji `mat_det_2x2_lib` wykazało niestabilność – wyniki nie były zgodne z założeniami zadania. Można przypuszczać, że jest to efekt zastosowanego algorytmu tej funkcji, który w połączeniu z nieprecyzyjnym float32 daje niewiarygodne rezultaty obliczeń.