Poglavje 5

Deljivost

5.1 Relacija deljivosti

Naravno število n je **delitelj** naravnega števila n (**deljenec**), če obstaja naravno število k (**kvocient**), da velja:

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}.$$

Naravno število m deli naravno število n, ko je število n večkratnik števila m.

$$m \mid n \Leftrightarrow n = k \cdot m; \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

Število m je delitelj samega sebe in vseh svojih večkratnikov.
1 je delitelj vsakega naravnega števila.

Če d deli naravni števili m in n, $n > m$, potem d deli tudi vsoto in razliko števil m in n.

Pri deljenju poljubnega naravnega števila n z naravnim številom m imamo dve možnosti: n je deljivo z m ali n ni deljivo z m.

Relacija deljivosti je:

1. **refleksivna**:
$$a \mid a;$$
2. **antisimetrična**:
$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b;$$
3. **tranzitivna**:
$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c.$$

Relacija s temi lastnostmi je relacija **delne urejenosti**, zato relacija deljivosti delno ureja množico $\mathbb{N}$.

Naloga 5.1. *Zapišite vse delitelje števil.*

- 6
- 16
- 37
- 48
- 120

Naloga 5.2. *Pokažite, da trditev velja.*

- *Izraz* $x-3$ *deli izraz* x^2-2x-3.
- *Izraz* $x+2$ *deli izraz* x^3+x^2-4x-4.
- *Izraz* $x-2$ *deli izraz* x^3-8.

Naloga 5.3. *Pokažite, da trditev velja.*

- $19 \mid \left(3^{21}-3^{20}+3^{18}\right)$
- $7 \mid \left(3\cdot 4^{11}+4^{12}+7\cdot 4^{10}\right)$
- $14 \mid \left(5\cdot 3^{6}+2\cdot 3^{8}-3\cdot 3^{7}\right)$
- $25 \mid \left(7\cdot 2^{23}-3\cdot 2^{24}+3\cdot 2^{25}-2^{22}\right)$
- $11 \mid \left(2\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{7}+10^{8}\right)$
- $35 \mid \left(6^{32}-36^{15}\right)$

Naloga 5.4. *Pokažite, da trditev velja.*

- $3 \mid \left(2^{2n+1}-5\cdot 2^{2n}+9\cdot 2^{2n-1}\right)$
- $29 \mid \left(5^{n+3}-2\cdot 5^{n+1}+7\cdot 5^{n+2}\right)$
- $10 \mid \left(3\cdot 7^{4n-1}-4\cdot 7^{4n-2}+7^{4n+1}\right)$
- $10 \mid \left(9^{3n-1}+9\cdot 9^{3n+1}+9^{3n}-9^{3n+2}\right)$
- $5 \mid \left(7\cdot 2^{4n-2}+3\cdot 4^{2n}-16^{n}\right)$

Naloga 5.5. *Pokažite, da je za poljubno naravno število u vrednost izraza*

$$(u+7)(7-u)-3(3-u)(u+5)$$

večkratnik števila 4.