

# MATEMATIKA

1. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,  
Univerza v Ljubljani

21. marec 2024

# Vsebina

- 1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe
- 2 Deljivost, izjave, množice
- 3 Racionalna števila
- 4 Realna števila, statistika
- 5 Pravokotni koordinatni sistem, linearna funkcija

# Section 1

## Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe

- 1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe
  - Naravna in cela števila
  - Računanje z naravnimi in celimi števili
  - Izraz, enačba, neenačba
  - Računanje s potencami z naravnimi eksponenti
  - Razčlenjevanje izrazov
  - Razstavljanje izrazov v množici  $\mathbb{Z}$
  - Reševanje linearnih in razcepnih enačb v množici  $\mathbb{Z}$
  - Reševanje linearnih neenačb v množici  $\mathbb{Z}$

2 Deljivost, izjave, množice

3 Racionalna števila

# Naravna števila

## Množica naravnih števil:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

Naravna števila lahko predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

- Vsako naravno število ( $n$ ) ima svojega naslednika ( $n + 1$ ).
- Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- Različni naravni števili imata različna naslednika: ( $n + 1 \neq m + 1$ ;  $n \neq m$ ).
- Če neka trditev velja za vsako naravno število in tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila – princip popolne indukcije.

V množici  $\mathbb{N}$  sta definirani notranji operaciji: **seštevanje** in **množenje**.

# Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma  $a$  in  $b$  priredimo **vsoto**  $a + b$ .

Vsota naravnih števil je naravno število:  $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}$ .

Lastnosti:

- **komutativnost** členov/zakon o zamenjavi členov:  $a + b = b + a$ .
- **asociativnost** členov/zakon o združevanju členov:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

# Množenje

Poljubnima naravnima številoma  $a$  in  $b$  priredimo **produkt**  $a \cdot b$ .

Produkt naravnih števil je naravno število:  $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}$ .

Lastnosti:

- **komutativnost** faktorjev/zakon o zamenjavi faktorjev:  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- **asociativnost** faktorjev/zakon o združevanju faktorjev:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- **distributivnost**/zakon o razčlenjevanju:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
- zakon o nevtralnem elementu:  $a \cdot 1 = a$ .



# Cela števila

## Množica celih števil:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Množica celih števil je definirana kot unija treh množic:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

- množica **pozitivnih celih števil** ( $\mathbb{Z}^+$ ) – naravna števila;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ( $\mathbb{Z}^-$ ) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

**Nasprotno število** števila  $a$  je  $-a$ .

Poleg seštevanja in množenja je kot notranja operacija množice celih števil definirano še **odštevanje**.

## Odštevanje

Poljubnima naravnima številoma  $a$  in  $b$  priredimo **razliko**  $a - b$ .

Odštevanje definiramo kot prištevanje nasprotne vrednosti:  $a - b = a + (-b)$

Za odštevanje velja zakon **distributivnosti**:  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ .

# Računski zakoni

- Komutativnostni zakon:

$$a + b = b + a \text{ in } a \cdot b = b \cdot a$$

- Asociativnostni zakon:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ in } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Zakon o nevtralnem elementu:

$$a + 0 = a \text{ in } a \cdot 1 = a$$

- Zakon o inverznem/nasprotnem elementu:

$$a + (-a) = 0$$

- Distributivnostni zakon:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

# Pravila za računanje s celimi števili

- $-(-a) = a$
- $0 \cdot a = 0$
- $-1 \cdot a = -a$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

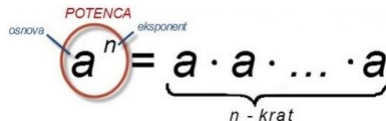


# Računanje z naravnimi in celimi števili

# Izraz, enačba, neenačba

# Računanje s potencami z naravnimi eksponenti

Potenca  $a^n$ , pri čemer je  $n \in \mathbb{N}$ , je produkt  $n$  faktorjev enakih  $a$ .



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n - \text{krat}}$$

## Pravila za računanje s potencami:

- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$  - potenci z enakima eksponentoma zmnožimo tako, da zmnožimo osnovi in prepisemo eksponent
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  - potenci z enako osnovo zmnožimo tako, da osnovo prepisemo in seštejemo eksponenta
- $(a^n)^m = a^{nm}$  - potenco potenciramo tako, da osnovo prepisemo in zmnožimo eksponenta



# Razčlenjevanje izrazov

# Razstavljanje izrazov v množici $\mathbb{Z}$

# Reševanje linearnih in razcepnih enačb v množici $\mathbb{Z}$

# Reševanje linearnih neenačb v množici $\mathbb{Z}$

# Section 2

## Deljivost, izjave, množice

## 1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe

## 2 Deljivost, izjave, množice

- Relacija deljivosti
- Pravila za deljivost
- Praštevila in sestavljena števila
- Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik
- Osnovni izrek o deljenju
- Evklidov algoritem in zveza  $Dv = ab$
- Številski sestavi
- Izjave
- Množice

## 3 Racionalna števila

# Relacija deljivosti

# Pravila za deljivost



# Praštevíla in sestavljena števíla

# Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

# Osnovni izrek o deljenju

# Evklidov algoritem in zveza $Dv = ab$

# Številski sestavi

# Izjave

# Množice

# Section 3

## Racionalna števila



- 1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe
- 2 Deljivost, izjave, množice
- 3 Racionalna števila**
  - Številski ulomki
  - Racionalna števila
  - Algebrski ulomki
  - Računanje z ulomki
  - Potence s celimi eksponenti
  - Pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti
  - Premo in obratno sorazmerje
  - Odstotki

# Številski ulomki

# Racionalna števila

# Urejenost racionalnih števil

# Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je urejena z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ). Za ulomka  $\frac{a}{b}$  in  $\frac{c}{d}$  ( $b, d \in \mathbb{N}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

# Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je urejena z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ). Za ulomka  $\frac{a}{b}$  in  $\frac{c}{d}$  ( $b, d \in \mathbb{N}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

- 1 prvi ulomek je večji od drugega  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad > bc$ ;

# Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je urejena z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ). Za ulomka  $\frac{a}{b}$  in  $\frac{c}{d}$  ( $b, d \in \mathbb{N}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

- 1 prvi ulomek je večji od drugega  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad > bc$ ;
- 2 drugi ulomek je večji od prvega  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad < bc$ ;

# Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je urejena z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ). Za ulomka  $\frac{a}{b}$  in  $\frac{c}{d}$  ( $b, d \in \mathbb{N}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

- 1 prvi ulomek je večji od drugega  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad > bc$ ;
- 2 drugi ulomek je večji od prvega  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad < bc$ ;
- 3 ulomka sta enaka  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad = bc$ .



# Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je urejena z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ). Za ulomka  $\frac{a}{b}$  in  $\frac{c}{d}$  ( $b, d \in \mathbb{N}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

- 1 prvi ulomek je večji od drugega  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad > bc$ ;
- 2 drugi ulomek je večji od prvega  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad < bc$ ;
- 3 ulomka sta enaka  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad = bc$ .

V množci ulomkov velja, da je vsak negativen ulomek manjši od vsakega pozitivnega ulomka.

# Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je urejena z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ). Za ulomka  $\frac{a}{b}$  in  $\frac{c}{d}$  ( $b, d \in \mathbb{N}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

- 1 prvi ulomek je večji od drugega  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad > bc$ ;
- 2 drugi ulomek je večji od prvega  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad < bc$ ;
- 3 ulomka sta enaka  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  natanko tedaj, ko je  $ad = bc$ .

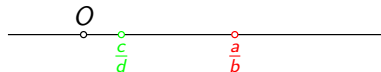
V množci ulomkov velja, da je vsak negativen ulomek manjši od vsakega pozitivnega ulomka.

Enaka ulomka predstavljata isto racionalno število.

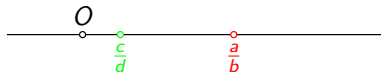


Slika večjega racionalnega števila  $\frac{a}{b}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{c}{d}$ .

Slika večjega racionalnega števila  $\frac{a}{b}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{c}{d}$ .

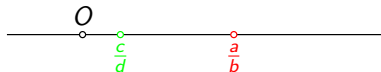


Slika večjega racionalnega števila  $\frac{a}{b}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{c}{d}$ .



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.

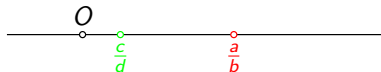
Slika večjega racionalnega števila  $\frac{a}{b}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{c}{d}$ .



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



Slika večjega racionalnega števila  $\frac{a}{b}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{c}{d}$ .



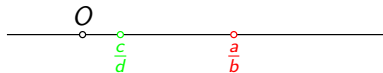
Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



Pri prehodu na nasprotno vrednost se neenačaj obrne:



Slika večjega racionalnega števila  $\frac{a}{b}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{c}{d}$ .



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



Pri prehodu na nasprotno vrednost se neenačaj obrne:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow -\frac{a}{b} > -\frac{c}{d}$$

# Lastnosti relacije urejenosti

# Lastnosti relacije urejenosti

## Monotonost vsote

# Lastnosti relacije urejenosti

## Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

# Lastnosti relacije urejenosti

## Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

# Lastnosti relacije urejenosti

## Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

# Lastnosti relacije urejenosti

## Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

## Tranzitivnost

# Lastnosti relacije urejenosti

## Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

## Tranzitivnost

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$





Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Množica racionalnih števil je povsod gosta, saj lahko med poljubnima racionalnima številoma vedno najdemo racionalno število (posledično je med dvema racionalnima številoma neskončno mnogo racionalnih števil).



# Algebrski ulomki

# Računanje z ulomki

# Potence s celimi eksponenti

# Pravila za računanje s celimi eksponenti

# Premo in obratno sorazmerje

# Odstotki

# Section 4

## Realna števila, statistika

- 1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe
- 2 Deljivost, izjave, množice
- 3 Racionalna števila
- 4 Realna števila, statistika
  - Realna števila
  - Kvadratni in kubični koren
  - Intervali
  - Absolutna vrednost
  - Sistem linearnih enačb
  - Obravnavanje linearnih enačb, neenačb, sistemov
  - Absolutna in relativna napaka



# Realna števila

# Kvadratni in kubični koren

# Intervali

# Absolutna vrednost

# Sistem linearnih enačb

# Obravnavanje linearnih enačb, neenačb, sistemov

# Absolutna in relativna napaka

# Sredine



# Razpršenost podatkov

# Prikazi

## Section 5

# Pravokotni koordinatni sistem, linearna funkcija

- 1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe
- 2 Deljivost, izjave, množice
- 3 Racionalna števila
- 4 Realna števila, statistika
- 5 Pravokotni koordinatni sistem, linearna funkcija
  - Pravokotni koordinatni sistem
  - Razdalja med točkama in razpolovišče daljice
  - Ploščina trikotnika
  - Osnovno o funkcijah
  - Linearna funkcija in premica

# Pravokotni koordinatni sistem

# Razdalja med točkama in razpolovišče daljice

# Ploščina trikotnika

# Osnovno o funkcijah



# Linearna funkcija in premica

# Oblike enačbe premice

# Presežišče premic

# Sistem linearnih neenačb

# Modeliranje z linearno funkcijo

# (i) Linearno programiranje