Matematika
Splošna gimnazija

ZAPISKI

22. februar 2026

Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite.

Jan Kastelic

Kazalo

Poglavje 1

Osnove logike

1.1 Izjave

Matematična izjava je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.
Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R**/**P**/**1**/$\top$;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N**/**0**/$\perp$.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami (A, B, C ...).

Naloga 1.1. *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število* 12 *deli število* 3.
- *Število* 3 *deli število* 10.
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je* 10 *dl isto kot* 1 *l?*
- *Število* 41 *je praštevilo.*

Naloga 1.2. *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- A*: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- B*: Število je deljivo s* 4 *natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s* 4.
- C*: Ostanek pri deljenju s* 4 *je lahko* 1, 2 *ali* 3.
- D*: Mesec februar ima 28 dni.*
- E*: Vsa praštevila so liha števila.*
- F*: Število* 1 *je naravno število.*
- G*: Praštevil je neskončno mnogo.*

1.1.1 Enostavne in sestavjene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.
Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

1.2 Logične operacije

1.2.1 Negacija

Negacija izjave A je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava A. Oznaka: $\neg\mathbf{A}$.

$\neg\mathbf{A}$ **Ni res**, da velja izjava A.

Če je izjava A pravilna, je $\neg A$ nepravilna in obratno: če je $\neg A$ pravilna, je A nepravilna.
Negacija negacije izjave je potrditev izjave. $\neg(\neg A) = A$

A	$\neg A$
P	N
N	P

Naloga 1.3. *Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.*

- A: $5 \cdot 8 = 30$
- B: *Število* 3 *je praštevilo.*
- C: *Največje dvomestno število je* 99.
- D: *Število* 62 *je večratnik števila* 4.
- E: *Praštevil je neskončno mnogo.*
- F: $7 \leqslant 5$
- G: *Naša pisava je cirilica.*

1.2.2 Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B nastane tako, da povežemo izjavi A in B z **in hkrati**.

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ Velja izjava A **in (hkrati)** izjava B.

Če sta izjavi A in B pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

Naloga 1.4. *Določite logično vrednost konjunkcijam.*

- *Število* 28 *je večratnik števila* 3 *in večkratnik števila* 8.
- *Število* 7 *je praštevilo in je deljivo s številom* 1.
- *Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.*
- *Ostanki pri deljenju števila s* 3 *so lahko* 0, 1 *ali* 2, *pri deljenju s* 5 *pa* 0, 1, 2, 3 *ali* 4.
- *Število je deljivo s* 3, *če je vsota števk deljiva s* 3, *in je deljivo z* 9, *če je vsota števk deljiva z* 9.

1.2.3 Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B nastane s povezavo **ali**.

A ∨ B Velja izjava A **ali** izjava B (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

Naloga 1.5. *Določite logično vrednost disjunkcijam.*
- *Število* 24 *je večratnik števila* 3 *ali* 8.
- *Število* 35 *ni večratnik števila* 7 *ali* 6.
- *Število* 5 *deli število* 16 *ali* 18.
- *Ploščina kvadrata s stranico a je* a^2 *ali obseg kvadrata je* $4a$.
- *Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika* $160°$, *ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.*

1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Naloga 1.6. *Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?*
- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

1.2.8 Implikacija

Implikacija izjav A in B je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

A ⇒ B **Če** velja izjava A, **potem** velja izjava B. / **Iz** A **sledi** B.

Izjava A je **pogoj** ali **privzetek**, izjava B pa **(logična) posledica** izjave A.
Implikacija je nepravilna, ko je izjava A pravilna, izjava B pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \Rightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Naloga 1.7. *Določite, ali so izjave pravilne.*
- *Če je število deljivo s* 100*, je deljivo tudi s* 4*.*
- *Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.*
- *Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Če sta števili* 2 *in* 3 *lihi števili, potem je produkt teh dveh števil sodo število.*
- *Če je število* 18 *deljivo z* 9*, potem je deljivo s* 3*.*
- *Če je* 7 *večkratnik števila* 7*, potem* 7 *deli število* 43*.*
- *Če je število deljivo s* 4*, potem je deljivo z* 2*.*

1.2.9 Ekvivalenca

Ekvivalenca izjavi A in B poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

A ⇔ B Izjava A velja, **če in samo če** velja izjava B./
Izjava A velja **natanko tedaj, ko** velja izjava B.

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.
Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Naloga 1.8. *Določite, ali so naslednje izjave pravilne.*
- *Število je deljivo z* 12 *natanko takrat, ko je deljivo s* 3 *in* 4 *hkrati.*
- *Število je deljivo s* 24 *natanko takrat, ko je deljivo s* 4 *in* 6 *hkrati.*
- *Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.*
- *Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z* 2*.*

1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

Naloga 1.9. *V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.*

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

1.2.11 Tavtologija in protislovje

Tavtologija ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavjena, pravilna.
Protislovje je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$ (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$ (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

1.3 Pomen izjav v matematiki

Aksiomi so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.
Izreki ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.
Definicije so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.

Poglavje 2

Osnove teorije množic

2.1 Množice

Množica je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.
Množica je določena, če:

- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ldots$ ali $A, B, C \ldots$).

Univerzalna množica ali **univerzum** ($\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

Element množice je objekt v množici.
Označujemo jih z malimi črkami ($a, b, c \ldots$).
Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr. $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$).
Element je lahko vsebovan v množici (npr. $a \in \mathcal{A}$) ali pa v množici ni vsebovan (npr. $d \notin \mathcal{A}$).

Prazna množica ($\emptyset, \{\}$) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka: $\mathbf{m}(\mathcal{A})$ ali $|\mathcal{A}|$.
Množica je lahko:

- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$.

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.
Njeno moč pišemo kot: $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$.
Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

Naloga 2.1. *Naštejte elemente množice in zapišite njeno moč, če je* $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leqslant 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leqslant 8)\}$

Naloga 2.2. *Naj bo* $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. *Zapišite množico z naštevanjem elementov. Določite še njeno moč.*

- *Množica vseh deliteljev števila 18.*
- *Množica praštevil, ki so manjša od 20.*
- *Množica večkratnikov števila* 5*, ki so večji od* 50 *in manjši ali enaki* 70.

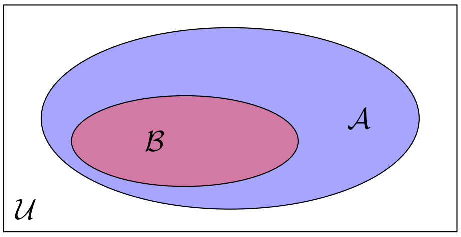
Naloga 2.3. *Zapišite množico s simboli.*
- *Množica vseh sodih naravnih števil.*
- *Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s* 7 *ostanek* 5.

Naloga 2.4. *Podane so množice tako, da so našteti njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.*
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

2.3 Podmnožice

Množica $\mathcal{B}$ je **podmnožica** množice $\mathcal{A}$, če za vsak element iz $\mathcal{B}$ velja, da je tudi element množice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \varnothing \subseteq \mathcal{A}$ – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$ je manjša ali enaka moči množice $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leqslant m(\mathcal{A})$$

Množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$, ki ni enaka množici $\mathcal{A}$, je **prava podmnožica** množice $\mathcal{A}$.

Potenčna množica množice $\mathcal{A}$ je množica vseh podmnožic množice $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{PA}$ / $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{PA} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{PA}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

Naloga 2.5. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. *Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

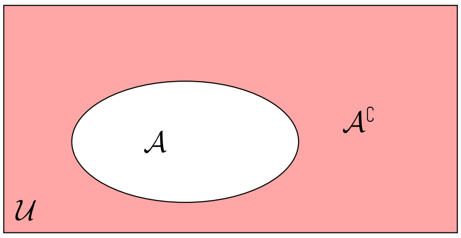
Naloga 2.6. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. *Zapiište njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

2.4 Operacije z množicami

2.4.1 Komplement množice

Komplement množice $\mathcal{A}$ (glede na izbrani univerzum $\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki so v množici $\mathcal{U}$ in niso v množici $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{A}^\complement$ / $\mathcal{A}'$.

$$\mathcal{A}^\complement = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$\left(\mathcal{A}^\complement\right)^\complement = \mathcal{A}$$

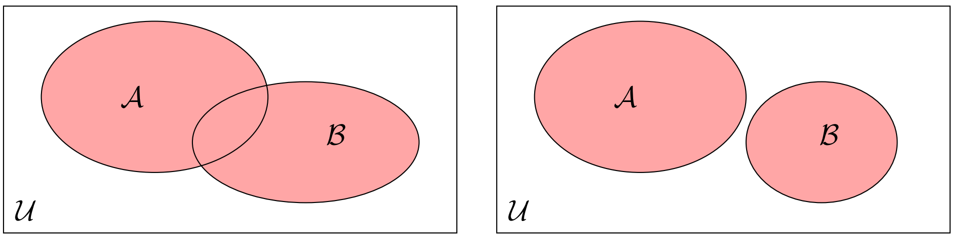
Naloga 2.7. *Naj bo univerzalna množica $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 20\}$. Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena mmoč?*

- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.2 Unija množic

Unija množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ ali množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^\complement = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \varnothing = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

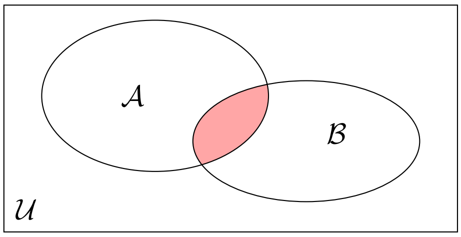
Naloga 2.8. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

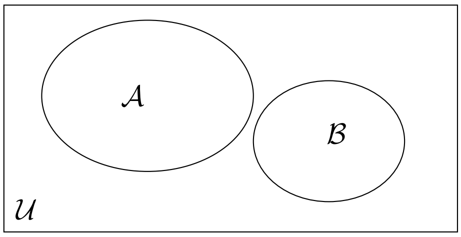
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

2.4.3 Presek množic

Presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici $\mathcal{A}$ in množici $\mathcal{B}$. Oznaka: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\complement} = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

Naloga 2.9. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

Komutativnost unije in preseka

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

Asociativnost unije in preseka

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

Distributivnostna zakona za unijo in presek

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

De Morganova zakona

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cup \mathcal{B}^{\complement}.$$

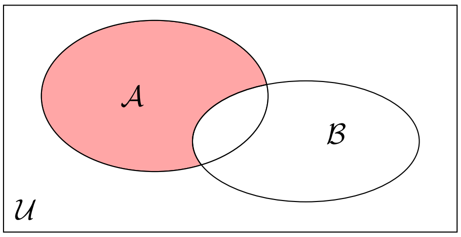
Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

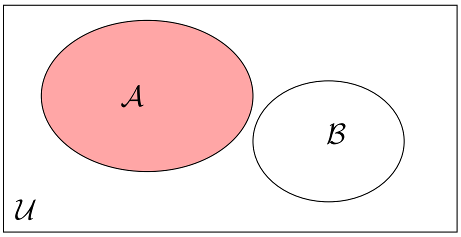
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cap \mathcal{B}^{\complement}.$$

2.4.5 Razlika množic

Razlika množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica tistih elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ in hkrati ne pripadajo množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ / $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \land x \notin \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\complement}$$

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{A} = \varnothing$$

Naloga 2.10. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njuno razliko $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$.*
- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \land x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \land k \in \mathbb{N} \land k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \land k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \land k \in \mathbb{N} \land k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \land k \in \mathbb{N}\}$

2.4.6 Kartezični produkt množic

Kartezični produkt (nepraznih) množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica urejenih parov (x, y), pri čemer je $x \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

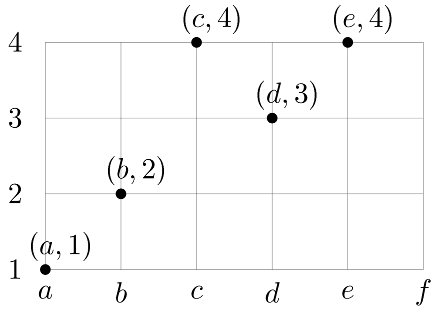
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \land y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ za množici $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$:



Naloga 2.11. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njun kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leqslant k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$

Poglavje 3

Naravna in cela števila

3.1 Naravna števila

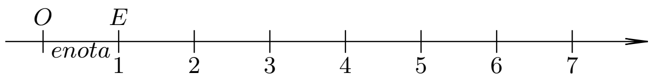
Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število n ima svojega **naslednika** $n+1$.
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika: $n+1 \neq m+1; n \neq m$.
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števk označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

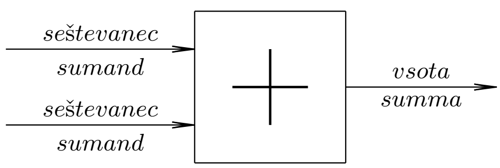
$$\overline{xy} = 10x + y \qquad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

3.2 Operacije v množici $\mathbb{N}$

3.2.1 Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma x in y priredimo **vsoto** $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Število x oziroma y imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**. Število $x+y$ pa imenujemo **vsota** ali **summa**.

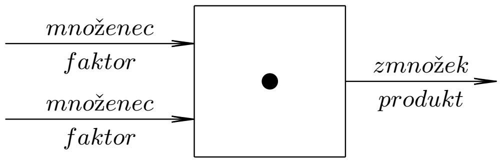


Vsota naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Množenje

Poljubnima naravnima številoma x in y priredimo **produkt** $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Število x oziroma y imenujemo **množenec** ali **faktor**. Število $x \cdot y$ pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



Produkt naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$.

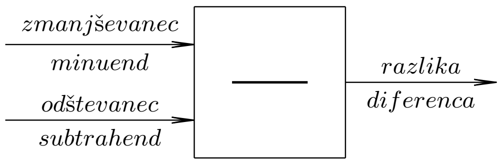
Število **1** je **nevtralni element** za mmnoženje: $1 \cdot x = x$.

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

3.2.3 Odštevanje

Številoma x in y, pri čemer je y večje od x $(x > y)$, priredimo **razliko** $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Število x imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število y pa imenujemo **odštevanec** ali **subtrahend**. Številu $x - y$ rečemo **razlika** ali **diferenca**.



Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu y, da dobimo število y.

$$(x - y) + y = x$$

Odštevanje ni notranja operacija v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

3.2.4 Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.
Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

3.3 Osnovni računski zakoni

Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x + y = y + x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$\mathbf{(x + y) + z = x + (y + z)}$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x \cdot y = y \cdot x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$\mathbf{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)}$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja.*

Naloga 3.1. *Izračunajte.*

- $(1 + 2 \cdot 7) + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 7)$
- $3 \cdot (2 + 3 \cdot 5) \cdot (2 + 1)$
- $7 + (2 + 6 \cdot 3) + (8 + 4 \cdot 5)$
- $11 \cdot 4 + (12 - 6) \cdot 5$
- $8 + 2 \cdot (3 + 7) - 15$
- $37 - 5 \cdot (10 - 3)$

Naloga 3.2. *Hitro izračunajte.*

- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

Naloga 3.3. *Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.*

- *Produktu števil* 12 *in* 27 *odštejte razliko števil* 19 *in* 11.
- *Vsoti produkta* 4 *in* 12 *ter produkta* 5 *in* 16 *odštejte* 8.
- *Vsoto števil* 42 *in* 23 *pomnožite z razliko števil* 58 *in* 29.
- *Produkt števil* 14 *in* 17 *pomnožite z vsoto števil* 5 *in* 16.

Naloga 3.4. *Rešite besedilno nalogo.*

- *V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka* 95 *centov, čokoladni puding v prahu pa* 24 *centov, koliko moramo plačati?*
- *Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča* 45 *g riža, za odraslo pa* 75 *g. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?*

3.4 Cela Števila

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je definirana kot unija treh množic:
- množica **pozitivnih celih števil** ($\mathbb{Z}^+$) – naravna števila $\mathbb{N}$;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ($\mathbb{Z}^-$) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Nasprotna vrednost števila n je število $-n$.

3.5 Operacije v množici $\mathbb{Z}$

3.5.1 Seštevanje

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 0 je **nevtralni element** pri seštevanju.

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Vsota celega števila in njemu nasprotnega števila je enaka 0.

$$-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Nasprotna vrednost nasprotne vrednosti je enaka prvotni vrednosti.

Vsota dveh pozitivnih števil je pozitivno število, vsota dveh negativnih števil pa je negativno število.

$$-\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = -(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Vsota nasprotnih vrednosti je enaka nasprotni vrednosti vsote.

Naj bosta x in y naravni števili. Vsota pozitivnega števila x in negativnega števila $-y$ je:
- pozitivno število, če je $x > y$ in
- negativno število, če je $x < y$.

3.5.2 Odštevanje

Razlika $x - y$ dveh pozitivnih števil x in y je:
- pozitivno število, če je $x > y$ in
- negativno število, če je $x < y$.

Razlika dveh negativnih števil $(-x) - (-y)$ je:
- pozitvno število, če je $x < y$ in
- negativno število, če je $x > y$.

Razlika pozitivnega števila x in negativnega števila $-y$ je pozitvno število.

Odštevanje v množici $\mathbb{Z}$ je prištevanje nasprotne vrednosti.

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

3.5.3 Množenje

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 1 je **nevtralni element** za množenje.

$$(-\mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Pri množenju celega števila x z -1 dobimo nasprotno število $-x$.

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Rezultat množenja števila s številom 0 je enak 0.

$$(-\mathbf{x})(-\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

Produkt sodo mnogo negativnih števil je pozitivno število.

$$-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -(\mathbf{xy})$$

$$\mathbf{x}(-\mathbf{y}) = -(\mathbf{xy})$$

Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

$$(-\mathbf{x})(-\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

Produkt liho mnogo negativnih faktorjev je negativno število.

Seštevanje, odštevanje in množenje so v množici $\mathbb{Z}$ dvočlene notranje operacije.

3.6 Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$

Komutativnost seštevanja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Asociativnost seštevanja

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

Komutativnost množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

Asociativnost množenja

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

Distributivnost seštevanja in množenja ter odštevanja in množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja.*

Naloga 3.5. *Izračunajte.*

- $17 - 13 - 2 + 10$
- $50 + 11 - 32 - 14$
- $3 + ((5 + 2(7 - 9)) \cdot 2 - 1)$
- $(2 - 5(6 - 10)) \cdot (5 - 2(7 - 5))$
- $9(11 - 3) + 7(10 - 15)$
- $8 + 9(11 - 18) - 2 \cdot 5$

Naloga 3.6. *Spretno izračunajte.*

- $7 \cdot 8 - 12 \cdot 8$
- $5 \cdot 18 + 9 \cdot 5 - 5 \cdot 2$
- $8 \cdot (4 - 9) \cdot 2$
- $5 \cdot 3 \cdot (12 - 8)$
- $(15 - 6)(12 - 3 \cdot 4)$

Naloga 3.7. *Rešite besedilne naloge.*

- *V hotelu imajo na voljo osemnajst enoposteljnih, štiriintrideset dvoposteljnih in petindevetdeset triposteljnih sob. Koliko ljudi lahko še prespi v hotelu, če je v njem že sto triinštirideset gostov?*
- *Pohod na bližnji hrib traja tri ure. Koliko minut moramo še hoditi, če smo na poti že* 145 *minut?*
- *S Ptuja in iz Postojne (razdalja med njima je približno* 190 *km) sočasno odpeljeta dva motorista drug proti drugemu. En vozi povprečno* 40 *km/h, drugi pa* 5 *km/h manj. Kolikšna bo razdalja med njima po dveh urah vožnje?*

Naloga 3.8. *Zapišite enačbe in jih poenostavite.*

- *Razlika petkratnka a in b je enaka trikratniku vsote štirikratnika a in petkratnika b.*
- *Vsota x in dvakratnika y je enaka razliki petkratnika x in dvanajstkratnika y.*

3.7 Urejenost naravnih in celih števil

Številska množica je **urejena**, kadar lahko po velikosti primerjamo njena poljubna elementa. Pri urejanju števil uporabljamo naslednje znake:

$<$	manjše / manj
$>$	večje / več
$\leqslant$	manjše ali enako / največ
$\geqslant$	večje ali enako / vsaj, najmanj
$=$	enako

Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{Z}$ velja natanko ena izmed naslednjih možnosti: $x > y$, $x < y$ ali $x = y$.

Slika števila x leži na številski premici desno od slike števila y:

$$\mathbf{x > y \Leftrightarrow x - y > 0}$$

Slika števila x leži na številski premici levo od slike števila y:

$$\mathbf{x < y \Leftrightarrow x - y < 0}$$

Slika števila x sovpada s sliko števila y:

$$\mathbf{x = y \Leftrightarrow x - y = 0}$$

Velja pa tudi:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x - y \leqslant 0$$

$$x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \geqslant 0$$

Pozitivna in negativna števila

V množici $\mathbb{Z}$ so pozitivna tista števila, ki so večja od števila 0 in njihove slike ležijo desno od izhodišča, negativna pa tista števila, ki so manjša od števila 0 in njihove slike ležijo levo od izhodišča.
Vsako pozitivno celo število (vsako naravno število) je večje od katerega koli negativnega celega števila.

3.7.1 Linearna urejenost

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica $\mathbb{Z}$ **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo naslednje lastnosti: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost, stroga sovisnost.

Refleksivnost

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leqslant x$$

Antisimetričnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

Tranzitivnost

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

Stroga sovisnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

3.7.2 Lastnosti relacij $\leqslant$ in $<$

Monotonost vsote

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \qquad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$$

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z \qquad x \leqslant y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z \qquad x \leqslant y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geqslant y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Obravnavane lastnosti veljajo tudi za relaciji $\geqslant$ in $>$.

Naloga 3.9. *Uredite števila* $3, -2, 5, -1, 0, -7, 6, -6$ *po velikosti in jih predstavite na številski premici.*

Naloga 3.10. *Uredite števila* $104, -27, 35, -107, 36, -26, 25, -28, 81$ *po velikosti.*

Naloga 3.11. *Gladina Mrtvega morja leži v depresiji na* -423 *m nadmorske višine, njegova največja globina pa je* 378 *m. Kolikšna je najmanjša nadmorska višina dna Mrtvega morja?*

Naloga 3.12. *Za katera cela števila* x *ima izraz* $3x - 5(x + 2)$ *večjo ali enako vrednost od izraza* $4 - (12 + x)$*?*

Poglavje 4

Potence in izrazi

4.1 Potence z naravnim eksponentom

Potenca $\mathbf{x^n}$ z **osnovo/bazo** x in **eksponentom/stopnjo** $n \in \mathbb{N}$, je produkt n faktorjev enakih x.

$$\mathbf{x^n} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n faktorjev}}$$

4.2 Pravila za računanje s potencami

Dve potenci z isto osnovo zmnožimo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa seštejemo.

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{m faktorjev}} = x^{n+m}$$

Potenco potenciramo tako, da osnovo ohranimo, ekponenta pa zmnožimo.

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}}}_{\text{m faktorjev}} = x^{n \cdot m}$$

Produkt dveh ali več števil potenciramo tako, da potenciramo posamezne faktorje in jih potem zmnožimo.

$$(xy)^n = \underbrace{(xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy)}_{\text{n faktorjev}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \ldots \cdot y)}_{\text{n faktorjev}} = x^n y^n$$

Za naravne eksponente velja še:

$$(-x)^{2n} = x^{2n}$$

$$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1; & n = 2k \\ -1; & n = 2k-1 \end{cases}; k \in \mathbb{N}$$

Naloga 4.1. *Števila* -3^2, $(-4)^2$, -2^4, $(-1)^{2024}$, $(-2)^3$ *in* $(-3)^2$ *uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.*

Naloga 4.2. *Poiščite podatke in jih zapišite na dva načina: s potenco in številom brez potence.*
- *Razdalja med Zemljo in Soncem*
- *Zemljina masa*
- *Masa Sonca*
- *Število zvezd v naši Galaksiji*

Naloga 4.3. *Izračunajte.*
- $(-3)^2 + 2^4$
- $(5-3)^3 + (-3)^2$
- $(2^2+1)^2 + (-3)^3 + (-2)^4$
- $(-1)^{2024} + ((-2)^5 + 5^2 - (7-3^2)^3)^2$
- $-1^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$

Naloga 4.4. *Poenostavite izraz.*
- $2^7 \cdot 2^3$
- $a^3 \cdot a^{12} \cdot a^5$
- $(2z)^3$
- $(m^2 \cdot m^4)^3$
- $a^3 + 2a^3 - 6a^3$
- $x^2 \cdot x^4 + (-2x^3)^2 - 2(-x)^6$

Naloga 4.5. *Izračunajte, rezultat zapišite s potenco.*
- $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^6$
- $(10^3)^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3$
- $(-2)^3 \cdot 2^7$
- $-2^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^3$
- $2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 6^4 \cdot 3$
- $(-3)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 21^7 \cdot 7$

Naloga 4.6. *Poenostavite.*
- $2^3 \cdot 3^4 \cdot (2^4 \cdot 3^2)^5$
- $(5^2 \cdot 7)^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- $(-2^3 \cdot 3^5)^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5$
- $(-4)^2 \cdot (-7)^{13} \cdot (-28)^5 \cdot (-7^2)^3$
- $-6^2 \cdot (-3)^2 \cdot 8^5 \cdot (-3^2)^3$

Naloga 4.7. *Poenostavite.*
- $a^3 \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^3 \cdot b^5$
- $4x^4 \cdot (2x^3)^2$
- $(k^3 \cdot 2h^5)^2$
- $(x^2y^4)^2 \cdot (x^3y)^3$
- $(a^2b^5)^3(ab^3)^2$
- $x^2y^3(x^3y^6)^2$

Naloga 4.8. *Poenostavite.*
- $2^3 \cdot x^2 \cdot 3^2 \cdot (-x)^6$
- $(-a^3b)^4(-a^2b^5a^3)^3$
- $(2s^2 \cdot (-s^2)^5)^5$
- $(-2(z^4)^2(-2z)^3z^5)^3$
- $(-3ab^2)^3(-a^4b^2(a^3)^5)^2(ab^3)^2$
- $(xy^2z)^3(x^3(-y^2)^5(-z))^3(x^2y^3(-z^2)^3)$

Naloga 4.9. *Odpravite oklepaje in poenostavite, če je mogoče.*
- $a^n \cdot a^{n+2} \cdot (-a)^3$
- $(-x^n)^4 \cdot x^2$
- $a^n \cdot (a^2 - a^3 + 2)$
- $(x^2 + 3x^n - 5) \cdot x^{n+1}$

Naloga 4.10. *Poenostavite.*
- $(2s(g^2)^2)^2 - 3(s^4g)g^7$
- $(-4x^2xy^3)^2 + (xy)^5(-2^3xy)$
- $a^2(a^3 - b^2) - a^5 + (-a)^2b^2$
- $(p^2(q^3)^2)^2 - 2p^4q^{12} + 7(-p^3p)(q^4)^3 - (-2)^3(pq^3)^4$

Naloga 4.11. *Poenostavite.*
- $5a^{n+1} + 4a^{n+1} - 6a^{n+1}$
- $3x^{n+2} + 5x^n \cdot x^2 + 2x \cdot x^{n+1}$
- $3^{5x} \cdot 9^x - 3^{7x} + 27^x \cdot 9^{2x}$
- $4^{2y} + 3 \cdot (2^y)^4 - 5 \cdot 8^y \cdot 2^y$
- $5^p \cdot 125^p \cdot 25^p + 2(5^p)^6 - 4 \cdot 25^{3p}$

4.3 Večkratniki

Večkratnik ali tudi k-**kratnik** števila x je vsota k enakih sumandov x:

$$k \cdot x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{k \text{ sumandov}}.$$

Vse večkratnike števila x dobimo tako, da število x zapored pomnožimo z vsemi celimi števili:

$$\{\ldots, -5x, -4x, -3x, -2x, -x, 0, x, 2x, 3x, 4x, 5x, \ldots\} = \{kx;\ k, x \in \mathbb{Z}\} = x\mathbb{Z}.$$

Število **k** je **koeficient** števila oziroma spremenljivke x.

4.4 Algebrski izrazi

Algebrski izraz ali **izraz** je smiseln zapis sestavljen iz:

- števil,
- spremenljivk/parametrov, ki predstavljajo števila in jih označujemo s črkami,
- oznak računskih operacij in funkcij, ki jih povezujejo,
- oklepajev, ki določajo vrstni red računanja.

Če v izraz namesto spremenljivk vstavimo konkretna števila in izračunamo rezultat, dobimo **vrednost izraza** (pri dani izbiri spremenljivk).

Dva matematična izraza sta **enakovredna**, če imata pri katerikoli izbiri spremenljivk vedno enako vrednost.

4.5 Računanje z algebrskimi izrazi

Pri poenostavljanju izrazov veljajo vsi računski zakoni, ki veljajo za računanje s števili.

Komutativnost seštevanja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Komutativnost množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Asociativnost seštevanja

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Asociativnost množenja

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Distributivnost seštevanja in množenja

$$(x + y) \cdot z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

Če v distributivnostnem zakonu zamenjamo levo in desno stran, dobimo pravilo o **izpostavljanju skupnega faktorja**: $xz + yz = (x + y)z$.

4.5.1 Seštevanje in izpostavljanje izrazov

Med seboj lahko seštevamo samo člene, ki se razlikujejo kvečjemu v koeficientu. To naredimo tako, da seštejemo koeficienta.

$$mx^2 + ny + kx^2 + ly = mx^2 + kx^2 + ny + ly = (m + k)x^2 + (n + l)y$$

4.5.2 Množenje izrazov

Dva izraza zmnožimo tako, da vsak člen prvega izraza zmnožimo z vsakim členom drugega izraza. Potem pa seštejemo podobne člene.

$$(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$$

Naloga 4.12. *Poenostavite.*

- $3a + 2b - a + 7b$
- $2a^2b - ab^2 + 3a^2b$
- $5a^4 - (2a)^4 + (-3a^2)^2 - 3(a^2)^2$
- $3(a - 2(a + b)) - 2(b - a(-2)^2)$

Naloga 4.13. *Zapišite izraz.*

- *Kvadrat razlike števil x in y.*
- *Razlika kvadratov števil x in y.*
- *Razlika petkratnika m in kvadrata števila* 3.
- *Kub razlike sedemkratnika števila x in trikratnika števila y.*

Naloga 4.14. *Izpostavite skupni faktor.*

- $3x + 12y^2$
- $m^3 + 8mp$
- $22a^3 - 33ab$
- $kr^2 - rk^2$
- $4u^2v^3 - 6uv^2$
- $12a^2b - 8(ab)^2 - (2ab)^4$

Naloga 4.15. *Izpostavite skupni faktor.*

- $3x(x + 1) + 5(x + 1)$
- $(a - 1)(a + 1) + (a - 1)$
- $4(m - 1) - (1 - m)(a + b)$
- $3(c - 2) + 5c(2 - x)$
- $(-y + x)3a - (y - x)b$

Naloga 4.16. *Izpostavite skupni faktor.*

- $5^{11} - 5^{10} + 5^9$
- $2 \cdot 3^8 + 5 \cdot 3^6$
- $4 \cdot 5^{10} - 10 \cdot 5^8 - 8 \cdot 5^9$
- $7^5 - 7^6 + 7 \cdot 7^4$

Naloga 4.17. *Izpostavite skupni faktor in izračunajte.*

- $2^{2n} + 4^n + (2^n)^2$
- $5^{2n+1} - 25^n + 3 \cdot 5^{2n-1}$
- $5 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 8^{n-1}$
- $49^n - 2 \cdot 7^{2n-1}$

Naloga 4.18. *Izpostavite skupni faktor.*

- $3^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+2}$
- $2^{k+2} - 2^k$
- $5 \cdot 3^m + 2 \cdot 3^{m+1}$
- $2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1}$
- $3 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+2} + 4 \cdot 5^{n+3}$
- $7^n + 2 \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 7^{n+1}$

Naloga 4.19. *Izpostavite skupni faktor.*

- $4a^n + 6a^{n+1}$
- $b^n + b^{n+1} - 2b^{n-1}$
- $a^{n-3} + 5a^n$
- $3x^{n+1} - 15x^n + 18x^{n-1}$

Naloga 4.20. *Zmnožite.*

- $(x - 3)(x + 2)$
- $(2m + 3)(5m - 1)$
- $(1 - a)(1 + a)$
- $(x - 3y)(2x + y)$
- $(m - 2k)(3m - k)$

Naloga 4.21. *Zmnožite.*

- $(a + b - 1)(a - b)$
- $(2x + y)(3x - 4y + 5)$
- $(m + 2n - k)(m + 2n + k)$

Naloga 4.22. *Zmnožite.*

- $(x^2 - 3)(x^3 + 2)$
- $(3x^2 - y)(5y^4 - 7x^3)$
- $(u^3 - 1)(u^3 + 1)$
- $(a^5b^2 - 4b)(3a^7 + 2a^2b)$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(z + w)(z^2 - zw + w^2)$

Naloga 4.23. *Poenostavite.*

- $(2x - y)(3 + y) + (y - 4)(y + 4) - 2xy + 3(y - 2x + 5)$
- $(x - y)(x + y) - (x^2 + xy + y^2)(x - y) - (1 - x)x^2 + (-y)y^2$
- $2ab + (a - 3b^2)(a + 3b^2) + 2^3(-b^2)^2 - (a - b)(b - a) - 2a^3$

4.6 Potenciranje izrazov

Kvadrat vsote in razlike binoma

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Kub vsote in razlike binoma

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Kvadrat trinoma

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Naloga 4.24. *Kvadrirajte.*
- $(x+3)^2$
- $(y+2x)^2$
- $(2a+3b)^2$
- $(x-3y)^2$
- $(1-a^2)^2$
- $(2x^2y^3 - z^5)^2$

Naloga 4.25. *Kvadrirajte.*
- $(-a-b)^2$
- $(-2x^5+y)^2$
- $(a^{n+1}+b^n)^2$
- $(a+b-3)^2$
- $(z+2x^3-1)^2$
- $(2x^5-3m^6+2m^n)^2$

Naloga 4.26. *Kubirajte.*
- $(x+1)^3$
- $(a-2)^3$
- $(2m+3)^3$
- $(-a+2b)^3$
- $(-z-2g)^3$
- $(a^4-2b^2)^3$

Naloga 4.27. *Dopolnite do popolnega kvadrata in ga zapišite.*
- $x^2 + 8x + \_ = (x + \_)^2$
- $x^2 + 12x + \_ = (x + \_)^2$
- $a^2 - 10a + \_ = (a - \_)^2$
- $m^2 - 2m + \_ = (m - \_)^2$

Naloga 4.28. *Poenostavite.*
- $(2a+5)^2 - (a-3)(a+5) - a(a+7) - 2a^2 - a$
- $(x-2y)(x+2y) + 4(y^2-3) - (x-4)^2 + 7(x+4)$
- $(2m+1)(2m-1) - (3m^2-4m) - 2^4 - (m-2)^3 + (2m-3)^2 + m^2m$

4.7 Razstavljanje izrazov

Razstavljanje/razcepljanje/faktorizacija izraza je zapis izraza kot dveh ali več faktorjev.

Izpostavljanje skupnega faktorja

$$xy + xz = x(y + z)$$

$$xy - xz = x(y - z)$$

Pri razstavljanju smo vedno pozorni na to, da razstavimo vse, kar je mogoče.

Razlika kvadratov

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Razlika kubov

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Razlika četrtih potenc

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

Razlika n-tih potenc

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Vsota kvadratov

Vsote kvadratov $x^2 + y^2$ ne moremo razstaviti v množici $\mathbb{Z}$ (oziroma $\mathbb{R}$).

Vsota kubov

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Vsota četrtih potenc

Vsote četrtih potenc $x^4 + y^4$ ne moremo razstaviti v množici $\mathbb{Z}$ (oziroma $\mathbb{R}$).

Vsota n-tih potenc

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Trinome, ki sledijo naslednjim oblikam lahko razstavimo.
Za nekatere trinome pa se lahko zgodi, da jih ne moremo razstaviti v množici $\mathbb{Z}$ (oziroma $\mathbb{R}$).

Tričlenik, ki je kvadrat

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

Viétovo pravilo

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Ugibanje

$$ax^2 + bx + c = (dx + e)(fx + g)$$

Razstavljanje štiričlenika – združitev 2 člena + 2 člena

$$xa + xb + ya + yb = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Razstavljanje štiričlenika – združitev 3 člени + 1 člen

$$a + 2ax + x^2 - b^2 = (a + x)^2 - b^2 = (a + x - b)(a + x + b)$$

Naloga 4.29. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $x^2 - 25$
- $64 - y^2$
- $16m^2 - 81$
- $25a^2 - 49b^2$
- $121u^2 - 36v^2$

Naloga 4.30. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $2z^2 - 8$
- $3b^2 - 12$
- $48 - 27h^2$
- $200t^2 - 8z^2$
- $a^2b - 49b$
- $80x^2 - 45y^2$

Naloga 4.31. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $162s^3 - 32sc^2$
- $f^4 - 9g^2$
- $16u^4 - 81v^4$
- $a^4 - 16$
- $-18a^2 + 2b^4$

Naloga 4.32. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $(f + 3)^2 - 25$
- $(2 - r)(2 + r)$
- $81x^4 - (y - 2)^2$
- $(x - y)^2 - (2x + 3y)^2$
- $5(4 - k)(4 + k)$

Naloga 4.33. *Razstavite in izračunajte.*
- $102^2 - 2^2$
- $23^2 - 22^2$
- $999^2 - 1$

Naloga 4.34. *Razstavite vsoto ali razliko kubov.*
- $a^2 - 8b^3$
- $1 + x^3$
- $27m^2 + 8$
- $27 + 64b^3$
- $125x^3 - 64y^3$
- $64a^6 - b^3$

Naloga 4.35. *Razstavite vsoto ali razliko kubov.*
- $a^3b^3 - 1$
- $8a^3 - b^6c^9$
- $m^5 + 27g^3m^2$
- $(a + 2)^3 - b^3$
- $10^3 - (a + b)^3$

Naloga 4.36. *Razstavite.*
- $m^2 + 14m + 45$
- $a^2 + 9a + 18$
- $x^2 - 9x + 20$
- $y^2 - 11y + 24$
- $z^2 - 13z + 22$
- $x^2 + 5x - 24$

Naloga 4.37. *Razstavite.*
- $m^2 + m - 110$
- $u^2 + 9u - 22$
- $x^2 - 5x - 24$
- $z^2 - 3z - 28$
- $p^2 - 4p - 45$
- $x^2 - 18x + 81$

Naloga 4.38. *Razstavite.*
- $3x^2 + 87x + 300$
- $2y^2 + 18y + 28$
- $2x^2 - 30x + 108$
- $7a^2 - 84a + 245$
- $6p^5 - 72p^4 + 216p^3$
- $2x^2 + 4x - 70$

Naloga 4.39. *Razstavite.*
- $72y - 81 + 9y^2$
- $3k^3 + 9k^2 - 12k$
- $16t - 4t^2 + 84$
- $p^3 + 13p^2 + 22p$
- $50b + 125 + 5b^2$
- $-7x^2 + 7x + 42$

Naloga 4.40. *Razstavite.*
- $x^2 + 16xy + 63y^2$
- $a^2 - 2aab - 35b^2$
- $p^2 + 3pk - 10k^2$
- $2z^2 - 2zu - 24u^2$
- $60c^3d^4 + 3c^5 - 27c^4d^2$

Naloga 4.41. *Zapišite izraze kot popolne kvadrate.*
- $x^2 + 18x + 81$
- $a^4 + 14a^2 + 29$
- $m^2 - 10m + 25$
- $100 - 20b + b^2$
- $u^2 - 12uv + 36v^2$
- $4y^2 - 12yz + 9z^2$

Naloga 4.42. *Razstavite.*
- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $b^4 - 26b^2 + 25$
- $a^4 - 8a^2 - 9$
- $n^4 - 17n^2 + 16$
- $2y^6 + 10y^4 + 8y^2$

Naloga 4.43. *Razstavite.*
- $2a^2 + 7a - 4$
- $2x^2 + 5x + 3$
- $4m^2 + 10m - 24$
- $4p^2 + 29p - 24$
- $2f^2 + 9f - 5$
- $7b^2 + 23b + 6$

Naloga 4.44. *Razstavite.*
- $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125$
- $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 27$
- $16^x - 5 \cdot 4^x + 6$
- $4^x - 18 \cdot 2^x + 32$

Naloga 4.45. *Razstavite.*
- $a^3 + 3a^2 - 4a - 12$
- $c^3 - 4c^2 - c + 4$
- $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
- $a^2 + ab - 2a - 2b$
- $a^2 + 3ab + 2a + 6b$
- $2xy + x - 4y - 2$

Naloga 4.46. *Razstavite.*
- $a^2 + 2a + 1 - b^2$
- $m^2 - 6m + 9 - k^2$
- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$
- $u^2 - z^2 - 8z - 16$
- $x^2 - y^2 + 14y - 49$
- $25 - y^2 + 2xy - x^2$

Naloga 4.47. *Razstavite.*
- $a^5 - b^5$
- $a^4 - 16$
- $x^4y^4 - 625$
- $a^5 + 32$
- $x^5 - 32$
- $81 - x^4y^8$

Naloga 4.48. *Razstavite.*
- $a^4 - 5a^3 - 24a^2$
- $3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$
- $108m^4 - 3m^2$
- $x^2 - 29xy + 100y^2$
- $u^4 - 125uv^3$
- $81 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$

Poglavje 5

Deljivost

5.1 Relacija deljivosti

Naravno število m je **delitelj** naravnega števila n (**deljenec**), če obstaja naravno število k (**kvocient**), da velja:

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}.$$

Naravno število m deli naravno število n, ko je število n večkratnik števila m.

$$m \mid n \Leftrightarrow n = k \cdot m; \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

Število m je delitelj samega sebe in vseh svojih večkratnikov.
1 je delitelj vsakega naravnega števila.

Če d deli naravni števili m in n, $n > m$, potem d deli tudi vsoto in razliko števil m in n.

Pri deljenju poljubnega naravnega števila n z naravnim številom m imamo dve možnosti: n je deljivo z m ali n ni deljivo z m.

Relacija deljivosti je:

1. **refleksivna**:
$$a \mid a;$$
2. **antisimetrična**:
$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b;$$
3. **tranzitivna**:
$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c.$$

Relacija s temi lastnostmi je relacija **delne urejenosti**, zato relacija deljivosti delno ureja množico $\mathbb{N}$.

Naloga 5.1. *Zapišite vse delitelje števil.*

- 6
- 16
- 37
- 48
- 120

Naloga 5.2. *Pokažite, da trditev velja.*

- *Izraz* $x-3$ *deli izraz* x^2-2x-3.
- *Izraz* $x+2$ *deli izraz* x^3+x^2-4x-4.
- *Izraz* $x-2$ *deli izraz* x^3-8.

Naloga 5.3. *Pokažite, da trditev velja.*

- $19 \mid \left(3^{21}-3^{20}+3^{18}\right)$
- $7 \mid \left(3\cdot 4^{11}+4^{12}+7\cdot 4^{10}\right)$
- $14 \mid \left(5\cdot 3^{6}+2\cdot 3^{8}-3\cdot 3^{7}\right)$
- $25 \mid \left(7\cdot 2^{23}-3\cdot 2^{24}+3\cdot 2^{25}-2^{22}\right)$
- $11 \mid \left(2\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{7}+10^{8}\right)$
- $35 \mid \left(6^{32}-36^{15}\right)$

Naloga 5.4. *Pokažite, da trditev velja.*

- $3 \mid \left(2^{2n+1}-5\cdot 2^{2n}+9\cdot 2^{2n-1}\right)$
- $29 \mid \left(5^{n+3}-2\cdot 5^{n+1}+7\cdot 5^{n+2}\right)$
- $10 \mid \left(3\cdot 7^{4n-1}-4\cdot 7^{4n-2}+7^{4n+1}\right)$
- $10 \mid \left(9^{3n-1}+9\cdot 9^{3n+1}+9^{3n}-9^{3n+2}\right)$
- $5 \mid \left(7\cdot 2^{4n-2}+3\cdot 4^{2n}-16^{n}\right)$

Naloga 5.5. *Pokažite, da je za poljubno naravno število u vrednost izraza*

$$(u+7)(7-u)-3(3-u)(u+5)$$

večkratnik števila 4.

5.2 Kriteriji deljivosti

Deljivost z 2

Število je deljivo z 2 natanko takrat, ko so enice števila deljive z 2.

Deljivost s 3

Število je deljivo s 3 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva s 3.

Deljivost s 4 oziroma 25

Število je deljivo s 4 oziroma 25 natanko takrat, ko je dvomestni konec števila deljiv s 4 oziroma 25.

Deljivost s 5

Število je deljivo s 5 natanko takrat, ko so enice števila enake 0 ali 5.

Deljivost s 6

Število je deljivo s 6 natanko takrat, ko je deljivo z 2 in s 3 hkrati.

Deljivost z 8 oziroma s 125

Število je deljivo z 8 oziroma s 125 natanko takrat, ko je trimestni konec števila deljiv z 8 oziroma s 125.

Deljivost z 9

Število je deljivo z 9 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva z 9.

Deljivost z 10 oziroma 10^n

Število je deljivo z 10 natanko takrat, ko so enice števila enake 0.
Število je deljivo z 10^n natanko takrat, ko ima število na zadnjih n mestih števko 0.

Deljivost z 11

Število je deljivo z 11 natanko takrat, ko je alternirajoča vsota števk tega števila deljiva z 11.

Deljivost s 7

Algoritem za preverjanje deljivosti s 7:
1. vzamemo enice danega števila in jih pomnožimo s 5,
2. prvotnemu številu brez enic prištejemo dobljeni produkt,
3. vzamemo enice dobljene vsote in jih pomnožimo s 5,
4. produkt prištejemo prej novo dobljenemu številu ...

Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo dvomestnega števila – če je to deljivo s 7, je prvotno število deljivo s 7.

Naloga 5.6. *S katerimi od števil* 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 *so deljiva naslednja števila?*
- 84742
- 393948
- 12390

- 19401

Naloga 5.7. *Določite vse možnosti za števko a, da je število $\overline{65833a}$:*
- *deljivo s* 3,
- *deljivo s* 4,
- *deljivo s* 5,
- *deljivo s* 6.

Naloga 5.8. *Določite vse možnosti za števko b, da je število $\overline{65b90b}$:*
- *deljivo z* 2,
- *deljivo s* 3,
- *deljivo s* 6,
- *deljivo z* 9,
- *deljivo z* 10.

Naloga 5.9. *Določite vse možnosti za števki c in d, da je število $\overline{115c1d}$ deljivo s* 6.

Naloga 5.10. *Določite vse možnosti za števki e in f, da je število $\overline{115e1f}$ deljivo z* 8.

Naloga 5.11. *Pokažite, da za vsako naravno število n 12 deli $n^4 - n^2$.*

Naloga 5.12. *Preverite, ali je število* 8641969 *deljivo s* 7.

5.3 Osnovni izrek o deljenju

Osnovni izrek o deljenju

Za poljubni naravni števili **m** (**deljenec**) in **n** (**delitelj**), $m \geqslant n$, obstajata natanko določeni nenegativni števili **k** (**količnik/kvocient**) in **r** (**ostanek**), da velja:

$$m = k \cdot n + r; \quad 0 \leqslant r < n; \quad m, n \in \mathbb{N}; k, r \in \mathbb{N}_0.$$

Če je ostanek pri deljenju enak 0, je število m **večkratnik** števila n. Tedaj je število m deljivo s številom n. Pravimo, da n deli število m: $n \mid m$.

Naloga 5.13. *Določite, katera števila so lahko ostanki pri deljenju naravnega števila n s:*
- *številom* 3*;*
- *številom* 7*;*
- *številom* 365.

Naloga 5.14. *Zapišite prvih nekaj naravnih števil, ki dajo:*
- *pri deljenju s* 4 *ostanek* 3*;*
- *pri deljenju s* 7 *ostanek* 4*;*
- *pri deljenju z* 9 *ostanek* 4.

Naloga 5.15. *Zapišite naravno število, ki da:*
- *pri deljenju s* 7 *količnik* 5 *in ostanek* 3*;*
- *pri deljenju z* 10 *količnik* 9 *in ostanek* 1*;*
- *pri deljenju s* 23 *količnik* 2 *in ostanek* 22.

Naloga 5.16. *Zapišite množico vseh naravnih števil n, ki dajo:*
- *pri deljenju z* 2 *ostanek* 1*;*
- *pri deljenju z* 2 *ostanek* 0*;*
- *pri deljenju s* 5 *ostanek* 2.

Naloga 5.17. *Katero število smo delili s* 7*, če smo dobili kvocient* 3 *in ostanek* 5*?*

Naloga 5.18. *S katerim številom smo delili število* 73*, če smo dobili kvocient* 12 *in ostanek* 1*?*

Naloga 5.19. *Marjeta ima čebulice tulipana, ki jih želi posaditi v več vrst. V vsaki od* 3 *vrst je izkopala po* 8 *jamic, potem pa ugotovila, da ji bosta* 2 *čebulici ostali. Koliko čebulic ima Marjeta?*

Naloga 5.20. *Če neko število delimo z* 8*, dobimo ostanek* 7*. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s* 4*?*

Naloga 5.21. *Če neko število delimo s* 24 *dobimo ostanek* 21*. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s* 3*?*

5.4 Praštevila in sestavljena števila

Glede na število deliteljev, lahko naravna števila razdelimo na tri skupine:

- **število** 1 – število, ki ima samo enega delitelja (samega sebe);
- **praštevila** – števila, ki imajo natanko dva delitelja (1 in samega sebe);
- **sestavljena števila** – števila, ki imajo več kot dva delitelja.

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \mathbb{P} \cup \{sestavljena\ \check{s}tevila\}$$

Praštevil je neskončno mnogo.

Število n je praštevilo, če ni deljivo z nobenim praštevilom, manjšim ali enakim $\sqrt{n}$.

Eratostenovo sito:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Naloga 5.22. *Preverite, ali so števila* $103, 163, 137, 197, 147, 559$ *praštevila.*

5.5 Osnovni izrek aritmetike

Vsako naravno število lahko enolično/na en sam način (do vrstnega reda faktorjev natančno) zapišemo kot produkt potenc s praštevilskimi osnovami:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}; p_i \in \mathbb{P} \wedge n, k_i \in \mathbb{N}.$$

Zapis naravnega števila kot produkt potenc s praštevilskimi osnovami imenujemo tudi **praštevilski razcep**.

Naloga 5.23. *Zapišite število* 8755 *kot produkt samih praštevil in njihovih potenc.*

Naloga 5.24. *Razcepite število* 3520 *na prafaktorje.*

Naloga 5.25. *Zapišite praštevilski razcep števila* 38250.

Naloga 5.26. *Zapišite praštevilski razcep števila* 3150.

Naloga 5.27. *Razcepite število* 66 *na prafaktorje in zapišite vse njegove delitelje.*

Naloga 5.28. *Razcepite število* 204 *na prafaktorje in zapišite vse njegove delitelje.*

Naloga 5.29. *Zapišite vse izraze, ki delijo dani izraz.*

- $x^2 + x - 1$
- $x^3 - x^2 - 4x + 4$
- $x^3 - 27$

5.6 Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

Največji skupni delitelj števil m in n je največje število od tistih, ki delijo števili m in n. Oznaka: $D(m,n)$.

Najmanjši skupni večkratnik števil m in n je najmanjše število od tistih, ki so deljiva s številoma m in n. Oznaka: $v(m,n)$.

Števili m in n, katerih največji skupni delitelj je 1, sta **tuji števili**.

Računanje D in v s prafaktorizacijo števil
- Števili m in n prafaktoriziramo.
- Za $D(m,n)$ vzamemo potence, ki so skupne obema številom v prafaktorizaciji.
- Za $v(m,n)$ vzamemo vse potence, ki se pojavijo v prafaktorizaciji števil, z največjim eksponentom.

Za poljubni naravni števili m in n velja zveza $\mathbf{D(m,n)\cdot v(m,n) = m\cdot n}$.

Evklidov algoritem
V tem algoritmu zapored uporabljamo osnovni izrek o deljenju.
Najprej ga uporabimo na danih dveh številih.
V naslednjem koraku deljenec postane prejšnji delitelj, delitelj pa prejšnji ostanek.
V vsakem koraku imamo manjša števila, zato se algoritem konča v končno mnogo korakih.

Največji skupni delitelj danih števil m in n je zadnji od 0 različen ostanek pri deljenju v Evklidovem algoritmu.

Naloga 5.30. *Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik danih parov števil.*
- 6 *in* 8
- 36 *in* 48
- 550 *in* 286
- 6120 *in* 4158

Naloga 5.31. *Preverite, ali sta števili* 522 *in* 4025 *tuji števili.*

Naloga 5.32. *Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik treh števil.*
- 1320*,* 6732 *in* 297
- 372*,* 190 *in* 11264

Naloga 5.33. *Z Evklidovim algoritmom izračunajte največji skupni delitelj parov števil.*
- 754 *in* 3146
- 4446 *in* 6325

Naloga 5.34. *Izračuanjte število b, če velja:* $D(78166,b) = 418$ *in* $v(78166,b) = 1485154$.

Naloga 5.35. *Določite največji skupni delitelj izrazov.*
- $x^3 - 5x^2 - 24x$ *in* $x^2 - 64$
- $x^2 + 3x + 10$*,* $x^3 - 4x$ *in* $x^3 - 8$
- $x^2 - 25$ *in* $x^3 - 27$

Naloga 5.36. *Določite najmanjši skupni večkratnik izrazov.*

- $x^2 - 64$ *in* $x + 8$
- x, $8 - x$ *in* $x^2 - 64$
- $x^2 + 3x - 10$, $2x$ *in* $x^2 + 5x$

Naloga 5.37. *Velika Janezova terasa je dolga* 1035 *cm in široka* 330 *cm. Janez bi jo rad sam tlakoval s kvadratnimi vinilnimi ploščami. Ker ni najbolj vešč tega dela, bo kupil tako velike plošče, da mu jih ne bo treba rezati. Koliko so največ lahko velik kvadratne plošče? Koliko plošč bo potreboval za tlakovanje?*

Naloga 5.38. *Neca gre v knjižnico vsake* 14 *dni, Nace pa vsakih* 10 *dni. V knjižnici se srečata v ponedeljek 1. marca. Čez koliko dni se bosta naslednjič srečala? Na kateri dan in datum?*

Poglavje 6

Racionalna števila

6.1 Ulomki in racionalna števila

Ulomek $\frac{x}{y}$ je zapis, ki predstavlja zapis deljenja

$$x : y = \frac{x}{y}; \quad y \neq 0 \wedge x, y \in \mathbb{Z}.$$

Število/izraz x imenujemo **števec**, y pa **imenovalec**, med njima je **ulomkova črta**.

Ulomek $\frac{x}{0}$ ni definiran (nima pomena), saj z 0 ne moremo deliti.

Algebrski ulomek je ulomek, v katerem v števcu in/ali imenovalcu nastopajo algebrski izrazi.

Vsako celo število $x \in \mathbb{Z}$ lahko zapišemo z ulomkom: $x = \frac{x}{1}$.

Ničelni ulomek je ulomek oblike $\frac{0}{y} = 0; y \neq 0$.

V ulomku, kjer v števcu ali imenovalcu nastopa negativno število, upoštevamo enakost

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}.$$

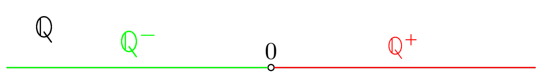
Vsakemu neničelnemu ulomku $\frac{x}{y}$ lahko priredimo njegovo **obratno vrednost**:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}; \quad x, y \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Racionalna števila

Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ je sestavljena iz vseh ulomkov (kar pomeni, da vsebuje tudi vsa naravna in cela števila).

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y};\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^-$,
- množico z elementom nič: $\{\mathbf{0}\}$ in
- množico pozitivnih racionalnih števil: $\mathbb{Q}^+$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

Ulomka $\frac{x}{y}$ in $\frac{w}{z}$ sta enaka/enakovredna natanko takrat, ko je $xz = wy$; $y, z \neq 0$.

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow xz = wy; \quad y, z \neq 0$$

Enaka/enakovredna ulomka sta različna zapisa za isto racionalno število.

Naloga 6.1. *Za katere vrednosti x ulomek ni definiran?*
- $\frac{x-2}{x+1}$
- $\frac{2}{x-5}$
- $\frac{x+2}{3}$
- $\frac{13}{2x-5}$

Naloga 6.2. *Za katere vrednosti x ima ulomek vrednost enako 0?*
- $\frac{x-2}{x+1}$
- $\frac{2}{x-5}$
- $\frac{x+2}{3}$
- $\frac{13}{2x-5}$

Naloga 6.3. *Ali imata ulomka isto vrednost?*
- $\frac{2}{3}$ *in* $\frac{10}{15}$
- $\frac{-1}{2}$ *in* $\frac{1}{-2}$
- $\frac{4}{5}$ *in* $\frac{-8}{-10}$
- $\frac{5}{8}$ *in* $\frac{8}{5}$

Naloga 6.4. *Za kateri x imata ulomka isto vrednost?*
- $\frac{x+1}{2}$ *in* $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{2x-1}$ *in* $\frac{1}{3}$
- $\frac{x+1}{2}$ *in* $\frac{x-1}{-3}$
- $\frac{x+1}{x-2}$ *in* $\frac{2}{5}$

Naloga 6.5. *Ali ulomka predstavljata isto vrednost?*
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ *in* $-\frac{1}{2}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ *in* $\frac{3}{2}$
- $1\frac{3}{7}$ *in* $\left(\frac{7}{10}\right)^{-1}$

Naloga 6.6. *Ali ulomka predstavljata isto vrednost?*
- $2 \cdot \frac{3}{4}$ *in* $\frac{3}{2}$
- $2\frac{3}{4}$ *in* $\frac{3}{2}$
- $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$ *in* $1\frac{5}{2}$
- $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$ *in* $\frac{5}{7}$

Naloga 6.7. *Zapišite s celim delom oziroma z ulomkom.*
- $\frac{14}{5}$
- $-\frac{5}{2}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{110}{17}$
- $3\frac{5}{8}$
- $2\frac{9}{2}$

6.2 Razširjanje in krajšanje ulomkov

Razširjanje ulomka

Ulomek ohrani svojo vrednost, če števec in imenovalec pomnožimo z istim neničelnim številom oziroma izrazom. Temu postopku pravimo **razširjanje ulomka**.

$$\frac{x}{y} = \frac{x \cdot z}{y \cdot z}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Ko ulomke seštevamo ali odštevamo, jih razširimo na **najmanjši skupni imenovalec**, ki je najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev.

Krajšanje ulomka

Vrednost ulomka se ne spremeni, če števec in imenovalec delimo z istim neničelnim številom oziroma izrazom. Temu postopku rečemo **krajšanje ulomka**.

$$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Ulomek $\dfrac{x}{y}$ je **okrajšan**, če je $(x, y) = 1$, torej če sta števec in imenovalec tuji števili.

Naloga 6.8. *Razširite ulomke na najmanjši skupni imenovalec.*

- $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ *in* $\frac{5}{6}$
- $\frac{2}{7}, 1$ *in* $\dfrac{1}{2}$
- $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}$ *in* $-\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$ *in* $\frac{-1}{3}$
- $\frac{2}{-1}, \frac{3}{2}$ *in* $\frac{1}{-3}$
- $\frac{3}{-4}, \frac{-1}{2}$ *in* $-\frac{2}{5}$

Naloga 6.9. *Razširite ulomke na najmanjši skupni imenovalec.*

- $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x+1}$ *in* 1
- $\frac{2}{x}, \frac{1}{x-3}$ *in* $\frac{1}{(x-3)^2}$
- $\frac{3}{x^2-4x}, \frac{1}{x}$ *in* $\frac{2}{x-4}$
- $\frac{4}{x-4}, \frac{2}{x-2}$ *in* $\frac{1}{x^2-6x+8}$
- $\frac{2}{x-1}$ *in* $\frac{3}{1-x}$
- $\frac{1}{2-x}, \frac{2}{x+2}$ *in* $\frac{3}{x^2-4}$

Naloga 6.10. *Okrajšajte ulomek.*

- $\frac{100}{225}$
- $\frac{34}{51}$
- $\frac{121}{3}$
- $\frac{45}{75}$

Naloga 6.11. *Okrajšajte ulomek.*

- $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$
- $\frac{x^3+8}{2x+4}$
- $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$
- $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$
- $\frac{x^2-9}{3-x}$
- $\frac{x-4}{16-x^2}$

6.3 Seštevanje in odštevanje ulomkov

Seštevanje ulomkov

Ulomke **seštevamo** tako, da jih razširimo na skupni imenovalec, nato seštejemo števce, imenovalce pa prepišemo.

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw}{yw} + \frac{yz}{yw} = \frac{xw + yz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Odštevanje ulomkov

Ulomke **odštevamo** tako, da prištejemo nasprotni ulomek.

$$\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{x}{y} + \left(-\frac{z}{w}\right) = \frac{xw}{yw} + \frac{-yz}{yw} = \frac{xw - yz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Naloga 6.12. *Izračunajte.*
- $\frac{5}{7} + \frac{1}{14}$
- $\frac{2}{9} - \frac{1}{3}$
- $\frac{3}{8} + 1\frac{1}{2}$
- $1 - \frac{5}{6}$

Naloga 6.13. *Izračunajte.*
- $\left(\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12}$
- $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - 2\right)$
- $\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} - 3\right) + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}$
- $1 - \left(2 - \left(3 - 4 - \left(5 - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}\right)$

Naloga 6.14. *Poenostavite.*
- $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}$
- $\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x}$
- $\frac{3}{x^2-4x} - \left(\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x^2-5x+4}\right)$
- $\frac{2}{xy} + \frac{3}{x} - \frac{2}{y}$

Naloga 6.15. *Poenostavite.*
- $\frac{(x-3)^2+(x+3)^2}{x^2+9} - \frac{3x^2}{2x^2-x^2}$
- $\frac{(a-3)^3-(a-1)^3+26}{6a} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$
- $\frac{x^3-2x^2-x+2}{-x(1-x)-2} - \left(\frac{x-1}{x} - 1\right)^{-1}$
- $\left(\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right)\right)\right) - \left(\frac{60}{x}\right)^{-1}$

6.4 Množenje ulomkov

Ulomka **množimo** tako, da števce množimo s števci, imenovalce pa množimo z imenovalci.

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Produkt danega in njemu obratnega ulomka je enak 1.

$$\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$$

Naloga 6.16. *Izračunajte.*
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$
- $\frac{-2}{13} \cdot \left(-\frac{39}{4}\right)$
- $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9}$
- $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$
- $\frac{-2}{5} \cdot 4\frac{2}{7}$
- $3 \cdot \frac{2}{3}$

Naloga 6.17. *Poenostavite.*
- $\frac{x^2-9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x^2+5x}{-x+2} \cdot \frac{2x^2-8}{x^2+7x+10}$
- $\frac{x^3-4x^2-4x+16}{2x+4} \cdot \frac{6x}{3x-6}$
- $2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+x}$

Naloga 6.18. *Poenostavite.*
- $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+x^2+x} \cdot \frac{x^2+x}{2-x}$

- $\left(\frac{6-x}{x^2+6x} - \frac{x}{36-x^2}\right) \cdot \left(\frac{2x-6}{x^2+6x}\right)^{-1} + \frac{x}{6-x}$
- $\left(\left(x - y + \left(\frac{x+y}{2xy}\right)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+y}\right)^{-1} - 2xy\right) \cdot (x-y)^{-1}$
- $\left(xy + y^2 - \frac{xy+y^2}{3xy-3x^2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{3x}\right)^{-1} - \left(-\frac{y-x}{y}\right)^{-1}$

6.5 Deljenje ulomkov

Ulomek **delimo** z neničelnim ulomkom tako, da prvi ulomek množimo z obratno vrednostjo drugega ulomka.

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Deljenje ulomkov lahko zapišemo kot **dvojni ulomek**.

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Naloga 6.19. *Izračunajte.*

- $2 : \frac{4}{5}$
- $1\frac{2}{3} : 2\frac{5}{6}$
- $\frac{7}{12} : 14$
- $\frac{3}{8} : \frac{9}{32}$

Naloga 6.20. *Izračunajte.*

- $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{8}}$
- $\frac{\frac{1}{2}}{2}$
- $\frac{3}{\frac{5}{6}}$
- $\frac{\frac{2}{-5}}{\frac{-1}{5}}$
- $\frac{\frac{3}{5}}{-2}$
- $\frac{-\frac{1}{2}}{2^{-1}}$

Naloga 6.21. *Poenostavite.*

- $\frac{x^2+x-6}{x+2} : (x-2)$
- $\frac{x-1}{2x^2-4x} : \frac{x^2}{x-2}$
- $x : \frac{x^2+x}{x^3+1}$

Naloga 6.22. *Poenostavite.*

- $\frac{x-1}{x^2-4} : \frac{1-x^2}{x-2}$
- $\frac{x-2}{(x+2)^{-1}} : \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{-1}$
- $\frac{3-x}{2-x} : \frac{x-3}{x-2}$

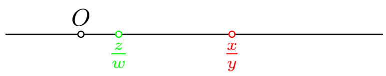
6.6 Urejenost racionalnih števil

Za ulomka $\frac{x}{y}$ in $\frac{z}{w}$ $(y, w \notin \{0\})$ velja natanko ena izmed treh možnosti:

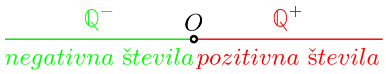
1. prvi ulomek je večji od drugega $\frac{x}{y} \geqslant \frac{z}{w}$ natanko tedaj, ko je $xw \geqslant yz$;
2. drugi ulomek je večji od prvega $\frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w}$ natanko tedaj, ko je $xw \leqslant yz$;
3. ulomka sta enaka $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ natanko tedaj, ko je $xw = yz$ oziroma $\frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \wedge \frac{x}{y} \geqslant \frac{z}{w}$.

Enaka ulomka predstavljata isto racionalno število.

Slika večjega racionalnega števila $\frac{x}{y}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{z}{w}$.



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



V množici ulomkov velja, da je vsak negativen ulomek manjši od vsakega pozitivnega ulomka.

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leqslant$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geqslant$).
Za to relacijo linearne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

- **refleksivnost**: $\forall \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{x}{y}$;
- **antisimetričnost**: $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \wedge \frac{z}{w} \leqslant \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$;
- **tranzitivnost**: $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w}, \frac{r}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \wedge \frac{z}{w} \leqslant \frac{r}{q} \Rightarrow \frac{x}{y} \leqslant \frac{r}{q}$ in
- **stroga sovisnost**: $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \vee \frac{z}{w} \leqslant \frac{x}{y}$.

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši* ($<$) oziroma *biti večji* ($>$).
Tedaj veljajo le lastnosti: **refleksivnost**, **antisimetričnost** in **tranzitivnost**.

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \wedge \quad \frac{r}{q} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{q} < \frac{z}{w} \cdot \frac{r}{q}$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \wedge \quad \frac{r}{q} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{q} > \frac{z}{w} \cdot \frac{r}{q}$$

Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{r}{q} < \frac{z}{w} + \frac{r}{q}$$

Naloga 6.23. *Kateri od ulomkov je večji?*

- $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$
- $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$
- $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$
- $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$

Naloga 6.24. *Katero število je za* $\frac{3}{5}$ *večje od* $\frac{2}{3}$*?*

Naloga 6.25. *Katero število je za* $\frac{1}{3}$ *manjše od* $\frac{7}{9}$*?*

Naloga 6.26. *Ulomke uredite po velikosti od večjega k manjšemu.*

- $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{9}$ *in* $\frac{7}{8}$
- $-\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{-3}{4}$ *in* $\frac{2}{-5}$

Naloga 6.27. *Ali obstajajo ulomki z imenovalcem* 25*, ki so med* $\frac{4}{9}$ *in* $\frac{5}{9}$*? Če obstajajo, jih zapišite.*

Naloga 6.28. *Ali obstajajo ulomki z imenovalcem* 100*, ki so med* $\frac{13}{53}$ *in* $\frac{14}{53}$*? Če obstajajo, jih zapišite.*

6.7 Potence s celimi eksponenti

Naravna števila so enaka pozitivnim celim številom, torej so potence s pozitivnimi celimi eksponenti enake potencam z naravnimi eksponenti.

Potenca z eksponentom enakim 0 je definirana kot:

$$x^0 = \begin{cases} 1 & x \neq 0; \\ 1 \; ali \; ND & x = 0. \end{cases}$$

Potenca z negativnim celim eksponentom pa je definirana kot:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad x \notin \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti

V spodaj zapisanih pravilih upoštevamo realni osnovi $x, y \in \mathbb{R}$ in cele eksponente $m, n \in \mathbb{Z}$.

- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
- $x^n \cdot y^n = (xy)^n$
- $(x^n)^m = x^{nm}$
- $x^n : x^m = \dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $x^n : y^n = \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n; \quad y \neq 0$

Naloga 6.29. *Poenostavite.*
- $x^{10} : x^5$
- $b^4 : b^{-11}$
- $y^{-3} : y^2$

Naloga 6.30. *Poenostavite.*
- $\frac{x^3y^{-2}}{x^{-2}y^3}$
- $\frac{2^{10}a^4b^{-4}}{2^{-2}a^{-2}b}$
- $\frac{3^{10}x^{-12}y^{-20}}{6^{10}x^2y^{-3}}$

Naloga 6.31. *Poenostavite.*
- $\left(\frac{-2^5a^{-4}b^3}{2^{-2}ab^{-2}}\right)^2 : \left(-\frac{a^2b^4}{2^3a^{-2}}\right)^3$
- $\left(\frac{-3^4x^{-2}y^3}{x^3z^2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3^5x^2z^{-2}}{y^{-3}}\right)^3$
- $-\frac{5^5a^4b^{-3}}{a^{-3}b^2} : \left(-\frac{5^2a^{-2}b}{a^2}\right)^2$

Naloga 6.32. *Poenostavite.*
- $\frac{x^{-2}+x^{-1}}{x^{-3}+x^{-2}}$
- $\frac{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{x^{-4}-x^{-1}}$
- $\frac{1+x^{-2}}{x^{-4}-1}$
- $\frac{x^{-2}+x^{-3}}{x^{-3}-x^{-2}}$

Naloga 6.33. *Poenostavite.*
- $\frac{3^{n+2}-2\cdot 3^{n-1}}{3^{n-2}+3^n}$
- $\frac{5^{2n}+5^{2n-1}-2\cdot 5^{2n+1}}{25^n}$
- $\frac{7^{3n-3}+3\cdot 7^{3n-2}-7^{3n-4}}{7^{3n-2}-7^{3n-1}}$
- $\frac{2^{n-1}+3\cdot 2^n}{4^n+5\cdot 2^{2n-1}}$

Naloga 6.34. *Napišite brez negativnih eksponentov.*
- $x^{-1} + 2x^{-2}$
- $1 - x^{-1} - x^{-2}$
- $\frac{1}{x^{-1}} + x^{-1}$
- $\left(\frac{\frac{2}{x^{-2}}}{(x^{-2})^{-1}}\right)^{-1}$

Naloga 6.35. *Poenostavite.*
- $\left(x - x^{-1}\right) \cdot \left(x^2 - 1\right)^{-1}$
- $\frac{x^{-2}+x^{-1}}{x^{-2}-x^{-1}} - (1-x)^{-1}$
- $\left(\frac{x^{-3}-x^{-1}}{1-x^{-2}}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$
- $\left(x^{-2} - 2x^{-1} + 1\right)^{-1} - (x-1)^{-2}$

6.8 Decimalni zapis

Vsako racionalno število lahko zapišemo na dva načina:
- z **ulomkom** in
- z **decimalnim zapisom**.

Decimalni zapis sestavljajo tri komponente:
- **celi del**,
- **decimalna pika** oziroma **decimalna vejica** in
- **ulomljeni del**.

Decimalni zapis racionalnega števila (zapisanega z ulomkom) dobimo tako, da števec ulomka delimo z njegovim imenovalcem.

Končen decimalni zapis

Končen decimalni zapis dobimo pri **desetiških/decimalnih ulomkih**.
To so ulomki, katerih imenovalec se lahko razširi na potenco števila 10, takšni imenovalci so oblike $2^n \cdot 5^m$.

Neskončen periodičen decimalni zapis

Neskončen periodičen decimalni zapis dobimo pri **nedesetiških/nedecimalnih ulomkih**.
To so ulomki, katerih imenovalca ne moremo razširiti na potenco števila 10.

Najmanjšo skupino števk, ki se pri neskončnem periodičnem decimalnem zapisu ponavlja, imenujemo **perioda**. Označujemo jo s črtico nad to skupino števk.
Glede na število števk, ki v njej nastopajo, določimo njen **red**.

Naloga 6.36. *Zapišite z decimalnim zapisom.*
- $\frac{3}{8}$
- $\frac{5}{6}$
- $\frac{1}{7}$
- $\frac{2}{125}$
- $\frac{4}{9}$
- $\frac{11}{13}$
- $\frac{6}{25}$
- $\frac{4}{15}$

Naloga 6.37. *Periodično decimalno število zapišite z okrajšanim ulomkom.*
- $0.\overline{24}$
- $0.\overline{9}$
- $1.\overline{2}$
- $1.0\overline{3}$
- $1.00\overline{12}$

Naloga 6.38. *Izračunajte.*
- $2.3 + 4.8$
- $11.3 + 2.35$
- $0.94 + 0.24$
- $5.6 - 2.9$
- $0.2 - 1.25$
- $12.5 - 20.61$

Naloga 6.39. *Izračunajte.*
- $0.1 \cdot 2.44$
- $1.2 \cdot 0.4$
- $11 \cdot 0.002$
- $0.5 \cdot 0.04$
- $0.3 : 5$
- $12.5 : 0.05$
- $2 : 0.02$
- $0.15 : 0.3$

Naloga 6.40. *Izračunajte.*
- $(0.24 + 0.06) : 5 - 1.2$
- $12 : (1.2 - 0.2 \cdot 3) + 1.2$
- $(2 - 0.3 : (0.025 + 0.035)) \cdot 0.11$
- $(1 - 0.2 : (0.03 + 0.02)) \cdot 1.5$
- $0.3 \cdot (1.2 - 0.6 \cdot (0.04 + 0.06))$

Poglavje 7

Realna števila

7.1 Realna števila

Med poljubnima dvema racionalnima številoma $\frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q}$ je vsaj še eno racionalno število – aritmetična sredina teh dveh števil $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{w}\right)$.
Med poljubnima racionalnima številoma je neskončno mnogo racionalnih števil in pravimo, da je množica $\mathbb{Q}$ **povsod gosta**.

Množici $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Z}$ imata enako moč – sta števno neskončni ($m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{Z}) = \aleph_0$).

Iracionalna števila $\mathbb{I}$ so vsi kvadratni koreni števil, ki niso popolni kvadrati, tretji koreni, ki niso popolni kubi, ..., število π, Eulerjevo število e ...

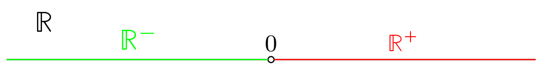
Množici racionalnih in iracionalnih števil sta disjunktni: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Realna števila so množica števil, ki jo dobimo kot unijo racionalnih in iracionalnih števil: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
Množica realnih števil je močnejša od množice racionalnih števil. Pravimo, da je (neštevno) neskončna.

Množico realnih števil lahko, glede na predznak števil, razdelimo na tri množice:

- množico negativnih realnih števil $\mathbb{R}^-$,
- množico z elementom nič: $\{\mathbf{0}\}$ in
- množico pozitivnih realnih števil: $\mathbb{R}^+$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$



Vsaki točki na številski premici ustreza natanko eno realno število in obratno, vsakemu realnemu številu ustreza natanko ena točka na številski premici.
Številsko premico, ki upodablja realna števila, imenujemo tudi **realna os**.

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica $\mathbb{R}$ **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo:

- **refleksivnost**: $\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x$;
- **antisimetričnost**: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$;
- **tranzitivnost**: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;
- **stroga sovisnost**: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \vee y \leqslant x$.

Za realcijo urejenosti na množici $\mathbb{R}$ veljajo še naslednje lastnosti:

- **monotonost vsote**: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ oziroma $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$;
- $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$ in $x \leqslant y \wedge z > 0 \Rightarrow xz \leqslant yz$;
- $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$ in $x \leqslant y \wedge z < 0 \Rightarrow xz \geqslant yz$.

7.2 Kvadratni koren

Kvadratni koren $\sqrt{a}$ realnega števila $a \geqslant 0$ je tisto nenegativno realno število x, katerega kvadrat je enak a.

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow a = x^2; \quad a, x \in \mathbb{R}^+$$

Število a imenujemo **korenjenec**, simbol $\sqrt{\ }$ pa **korenski znak**.

Pravila za računanje s kvadratnimi koreni

- $(\sqrt{a})^2 = a;\ a \geqslant 0$
- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};\ a, b \geqslant 0$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};\ a \geqslant 0, b > 0$

Delno korenjenje poteka tako, da korenjenec zapišemo kot produkt dveh ali več faktorjev, od katerih je vsaj en popoln kvadrat (ga lahko korenimo).
Nato koren zapišemo kot produkt korenov in korenimo kar lahko.

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

Racionalizacija imenovalca pomeni, da ulomek zapišemo z enakovrednim ulomkom, ki v imenovalcu nima korena. To naredimo z razširjanjem ulomka.

Izraze s kvadratnimi koreni poenostavimo tako, da uporabimo že znane obrazce, delno korenimo in racionaliziramo imenovalce.

Naloga 7.1. *Izračunajte.*
- $\sqrt{49 \cdot 64}$
- $\sqrt{4 \cdot 324}$
- $\sqrt{361 \cdot 16}$
- $\sqrt{-16 \cdot 25}$
- $\sqrt{3 \cdot 12}$
- $\sqrt{\frac{225}{289}}$
- $\sqrt{\frac{169}{256}}$
- $\sqrt{\frac{49}{121}}$
- $\sqrt{\frac{18}{32}}$

Naloga 7.2. *Izračunajte.*
- $\sqrt{\sqrt{16}}$
- $\sqrt{\sqrt{81}}$
- $\sqrt{\sqrt{256}}$
- $\sqrt{\sqrt{1}}$
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

Naloga 7.3. *Izračunajte.*
- $\sqrt{x^4 y^8}$
- $\sqrt{e^{10} f^{26}}$
- $\sqrt{a^{20} b^4}$
- $\sqrt{(-x)^{20} y^4}$
- $\sqrt{3a^6 + a^6}$

Naloga 7.4. *Izračunajte.*
- $\sqrt{16 + 36 + 12}$
- $\sqrt{121} + \sqrt{81}$
- $\sqrt{10 + 21 + 69}$
- $\sqrt{10 + 11 - 21}$
- $\sqrt{9 + 4 - 4}$
- $\sqrt{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2}$
- $\sqrt{5 \cdot 7 + 1}$
- $\sqrt{8 \cdot 7 - 5 \cdot 4}$
- $\sqrt{10 \cdot 8 - 4 \cdot 4}$
- $\sqrt{11 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4}$

Naloga 7.5. *Izračunajte.*

- $\sqrt{20}$
- $\sqrt{98}$
- $\sqrt{300}$
- $\sqrt{125}$
- $\sqrt{x^3}$
- $\sqrt{x^4y^5z^6}$
- $\sqrt{128a^{13}b^9}$
- $\sqrt{100x^2y^5 + 62x^2y^5}; \quad x, y \geqslant 0$
- $\sqrt{8a^6b^5 - 12a^4b^6}; \quad a, b \geqslant 0$

Naloga 7.6. *Izračunajte.*

- $\sqrt{44} + \sqrt{99}$
- $\sqrt{192} + \sqrt{147}$
- $\sqrt{180} - \sqrt{245} + 2\sqrt{500}$
- $\sqrt{243a^3b} + 2a\sqrt{48ab} - \sqrt{363a^2} \cdot \sqrt{ab}; \quad a, b \geqslant 0$
- $\sqrt{3a^6 + a^6}$

Naloga 7.7. *Racionalizirajte imenovalec.*

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
- $\dfrac{2}{5\sqrt{3}}$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$
- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$
- $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}$

Naloga 7.8. *Izračunajte.*

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
- $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
- $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$
- $\left(3-\sqrt{2}\right)^2$
- $\left(2-\sqrt{3}\right)^3$

Naloga 7.9. *Izračunajte.*

- $\left(2-\sqrt{5}\right)^3 - \left(1+2\sqrt{5}\right)^2$
- $\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^3$
- $\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
- $\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{14+6\sqrt{5}}$
- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

7.3 Kubični koren

Kubični koren $\sqrt[3]{a}$ realnega števila a je tisto realno število x, katerega kub je enak a.

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow a = x^3; \quad a, x \in \mathbb{R}$$

Število a imenujemo **korenjenec**, simbol $\sqrt{\ }$ **korenski znak**, število 3 pa **korenski eksponent**.

Pravila za računanje s kubičnimi koreni

- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$
- $\sqrt[3]{a^3} = a$
- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}};\ b \neq 0$

Naloga 7.10. *Izračunajte.*

- $\sqrt[3]{-1}$
- $\sqrt[3]{216}$
- $\sqrt[3]{8}$
- $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$
- $\sqrt[3]{-\frac{27}{343}}$
- $\sqrt[3]{1\frac{488}{512}}$

Naloga 7.11. *Izračunajte.*

- $\sqrt{\sqrt{256}} - \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt[3]{-8} + \left(2-\sqrt{2}\right)^2$
- $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{0.16} + \sqrt{0.64} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{48} - \sqrt{27}$
- $\left(1-\sqrt{5}\right)^2 - \left(1+\sqrt{5}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{125} + \sqrt{245}$

7.4 Interval

Interval je množica vseh realnih števil, ki ležijo med dvema danima številoma a in b, kjer je $a < b$.
Števili a in b imenujemo **krajišči intervala**.

Vključenost krajišč

- Simbola "[" in "]" označujeta krajišče, ki spada k intervalu.
- Simbola "(" in ")" označujeta krajišče, ki ne spada k intervalu.

Pri zapisu intervalov moramo biti pozorni na zapis vrstnega reda števil, ki določata krajišči.

$$[a, b] \neq [b, a]$$

7.4.1 Vrste intervalov

Zaprti interval

Vsebuje vsa realna števila med a in b, vključno s krajiščema a in b.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\}$$

Odprti interval

Vsebuje vsa realna števila med a in b, vendar ne vsebuje krajišč a in b.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$$

Polodprti/polzaprti interval

- Vsebuje vsa realna števila med a in b, vključno s krajiščem a, vendar ne vsebuje krajišča b.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$$

- Vsebuje vsa realna števila med a in b, vključno s krajiščem b, vendar ne vsebuje krajišča a.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{a} < \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\}$$

Neomejeni/neskončni intervali

- $[\mathbf{a}, \infty) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \geqslant \mathbf{a}\}$

- $(\mathbf{a}, \infty) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{x} > \mathbf{a}\}$

- $(-\infty, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\}$

- $(-\infty, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$

- $(-\infty, \infty) = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Naloga 7.12. *Zapišite kot interval.*
- $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R}; 4 \leqslant x \leqslant 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R}; -14 < x \leqslant -9\}$

Naloga 7.13. *Zapišite presek intervalov.*
- $[0, 2) \cap (-1, 1]$
- $[-3, 5] \cap (-3, 5)$
- $[2, 5) \cap [5, 7)$
- $[-1, 3) \cap (-4, -1]$
- $[4, 6] \cap [-1, 4]$
- $(-1, 3) \cap [1, 2)$

Naloga 7.14. *Zapišite unijo intervalov.*
- $[0, 2) \cup (-1, 1]$
- $[-3, 5] \cup (-3, 5)$
- $[2, 5) \cup [5, 7)$
- $[-1, 3) \cup (-4, 1]$

Naloga 7.15. *Zapišite razliko intervalov.*
- $[2, 3] \backslash [3, 4)$
- $(1, 3) \backslash (3, 4)$
- $[2, 5) \backslash (-1, 2]$
- $(2, 8) \backslash [5, 6)$

Naloga 7.16. *Izračunajte.*
- $([1, 3) \backslash (1, 4]) \cup (1, 2)$
- $[-2, 4] \backslash ((-1, 2] \cap [0, 3))$
- $((-2, 3] \backslash [-3, 2)) \cap [3, 5)$

7.5 Reševanje enačb

Enačba je enakost dveh izrazov, pri čemer vsaj v enem nastopa **neznanka**, ki je ponavadi označena s črko x.
Rešitev enačbe je vsaka vrednost neznanke, za katero sta vrednosti leve in desne strani enačbe enaki.

Enačbo rešujemo tako, da jo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo, iz katere preberemo rešitve. Ekvivalentno enačbo dobimo, če:
- na obeh straneh enačbe prištejemo isto število ali izraz;
- obe strani enačbe množimo z istim neničelnim številom ali izrazom.

Linearna enačba je enačba oblike $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$.
Rešujemo jo tako, da jo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo, ki ima na eni strani samo neznanko.

Razcepna enačba je enačba, v kateri nastopajo potence neznanke (na primer x^2, x^3) in jo je mogoče zapisati kot produkt (linearnih) faktorjev.
Preoblikujemo jo v ekvivalentno enačbo, ki ima vse člene na eni strani neenačaja, na drugi pa 0. Izraz (neničelna stran) razstavimo, kolikor je mogoče, in preberemo rešitve.

Racionalna enačba je enačba, v kateri nastopajo neznake (tudi) v imenovalcu, pri tem smo pozorni na obstoj ulomkov. Nato enačbo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo.

Naloga 7.17. *Rešite enačbe.*
- $3(2a - 1) - 5(a - 2) = 9$
- $2(y - 2) + 3(1 - y) = 7$
- $3(3 - 2(t - 1)) = 3(5 - t)$
- $-(2 - x) + 3(x + 1) = x - 5$

Naloga 7.18. *Rešite enačbe.*
- $\frac{1}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{7}{10}$
- $\frac{a-1}{3} + \frac{a+2}{6} = \frac{1}{2}$
- $2\frac{2}{3} - \frac{3t+1}{6} = 0$
- $\left(\frac{2}{b+1}\right)^{-1} + \frac{b-1}{4} = b + 3$

Naloga 7.19. *Rešite razcepne enačbe.*
- $x^2 - 3x = -2$
- $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = 8x^2 + x + 2$
- $x^4 = 16x^2$
- $(x^2 - 4x + 5)^2 - (x^2 + 4x + 1)^2 - 78 = 2x^2(x + 30) - 18(x + 1)^3$
- $x^3 - 4x^2 + 4 = x$
- $x^5 = 3x^4 - 2x^3$

Naloga 7.20. *Rešite enačbe.*

- $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x+1}{x-3}$
- $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{3}{a} = \dfrac{2}{a-1}$
- $\dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{2x^2}{x^2-x-2}$
- $\dfrac{1}{3a-1} + \dfrac{1}{3a+1} = \dfrac{a-1}{9a^2-1}$

Naloga 7.21. *Neznano število smo delili s* 4 *in dobljenemu količniku prišteli* 1*. Dobili smo enako, kot če bi istemu številu prišteli* 10*. Izračunajte neznano število.*

Naloga 7.22. *Kvadrat neznanega števila je za* 4 *manjši od njegovega štirikratnika. Izračunajte neznano število.*

Naloga 7.23. *Avtomobil vozi s povprečno hitrostjo* 50 $\frac{km}{h}$*, kolesar s povprečno hitrostjo* 20 $\frac{km}{h}$*. Avtomobil gre iz Lendave v Ormož (približno* 50 *km), kolesar vozi v obratno smer. Koliko časa pred avtomobilom mora na pot kolesar, da se bosta srečala na polovici poti?*

Naloga 7.24. *Vsota števk dvomestnega števila je* 3*. Če zamenjamo njegovi števki, dobimo za* 9 *manjše število. Katero število je to?*

Naloga 7.25. *Andreja je bila ob rojstvu hčere Eve stara* 38 *let. Čez koliko let bo Andreja stara trikrat toliko kot Eva?*

Naloga 7.26. *Prvi delavec sam pozida steno v* 10 *urah, drugi v* 12 *urah, tretji v* 8 *urah. Delavci skupaj začnejo zidati steno. Po dveh urah tretji delavec odide, pridruži pa se četrti delavec. Skupaj s prvim in drugim delavcem nato končajo steno v eni uri. V kolikšnem času četrti delavec pozida steno?*

7.6 Reševanje neenačb

Neenačba je neenakost dveh izrazov, pri čemer vsaj v enem nastopa neznanka. Med levo in desno stranjo je postavljen eden od neenačajev: $<$, $>$, $\leqslant$ ali $\geqslant$.

Neenačbo rešujemo tako, da jo preoblikujemo v ekvivalentno neenačbo. To dobimo, če:
- prištejemo isto število ali izraz na obeh straneh neenačbe;
- množimo obe strani neenačbe z istim pozitivnim številom ali izrazom;
- množimo obe strani neenačbe z istim negativnim številom ali izrazom in se pri tem neenačaj obrne.

Linearna neenačba je oblike $ax + b < 0$, ali pa nastopa drug neenačaj: $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.

Naloga 7.27. *Poiščite vsa realna števila, ki ustrezajo pogoju.*
- $3a + 2 < 2a - 1$
- $7t + 8 \geqslant 8(t - 2)$
- $5x - 2 > 2(x + 1) - 3$
- $x - 1 \leqslant 2(x - 3) - x$

Naloga 7.28. *Rešite neenačbe.*
- $\frac{x}{2} + \frac{2}{3} < \frac{8}{3}$
- $\frac{4 + 5a}{34} - \frac{4}{51} \geqslant 2 + \frac{2 - a}{51}$
- $x + \frac{x - 2}{3} < \frac{x - 3}{4} + \frac{x - 1}{2}$
- $\frac{2x - 2}{15} + \frac{x}{3} < \frac{4x - 2}{5} + \frac{3x + 9}{10}$

Naloga 7.29. *Rešite sisteme neenačb.*
- $-2 < y - 2 < 1$
- $-4 \leqslant 5a - 9 \leqslant 1$
- $(x + 1 > 3) \wedge (2x \leqslant 3(x - 1))$
- $(3x - 5 < x + 3) \vee (2x \geqslant x + 6)$

7.7 Reševanje sistemov enačb

7.7.1 Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama

Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama ali **sistem 2 × 2** je v splošnem oblike:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

x in y sta **neznanki**, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ so **koeficienti**.

Rešitev sistema je **urejen par** števil (x, y), ki zadoščajo obema enačbama.
Sistem 2×2 ima lahko eno rešitev, nima rešitve ali ima neskončno rešitev.
Sistem lahko rešujemo s primerjalnim načinom, zamenjalnim načinom ali z metodo nasprotnih koeficientov.

Primerjalni način

Iz obeh enačb izrazimo isto neznanko, nato njuni vrednosti enačimo.

Zamenjalni način

Iz ene enačbe izrazimo eno izmed neznank (preverimo, če je kateri od koeficientov pri neznankah enak 1 – takšno neznanko hitro izrazimo) in izraženo vrednost vstavimo v drugo enačbo.

Metoda nasprotnih koeficientov

Eno ali obe enačbi pomnožimo s takimi števili, da bosta pri eni izmed neznank koeficienta nasprotni števili, nato enačbi seštejemo. Ostane ena enačba z eno neznanko.

Naloga 7.30. *Rešite sisteme enačb.*

- $\begin{aligned} 2x + y &= 9 \\ x - 3y &= 8 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} x - y &= 5 \\ y - x &= 3 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -4x + 6y &= -10 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ 6x - 10 &= 2y \end{aligned}$

Naloga 7.31. *Z zamenjalnim načinom rešite sisteme enačb.*

- $\begin{aligned} 2x + 5y &= -2 \\ x - 3y &= -1 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} \frac{x}{2} - y &= 3 \\ y + x &= -2 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + y &= \frac{7}{6} \end{aligned}$
- $\begin{aligned} 0.5x + 0.2y &= 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y &= 1 \end{aligned}$

Naloga 7.32. *Z metodo nasprotnih koeficientov rešite sisteme enačb.*

- $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ -4x + 3y &= 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 4x - 3y &= -2 \\ -8x + y &= -1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 3x - 2y &= 2 \\ 2x - 3y &= -2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ 0.6x + 0.4y &= 7 \end{aligned}$$

Naloga 7.33. *V bloku je* 26 *stanovanj. Vsako stanovanje ima* 2 *ali* 3 *sobe. Koliko je posameznih vrst stanovanj, če je v bloku* 61 *sob?*

Naloga 7.34. *Kmet ima v ogradi* 20 *živali. Če so v ogradi le race in koze, koliko je posameznih živali, če smo našteli* 50 *nog?*

Naloga 7.35. *Razredničarka na sladoled pelje svojih* 30 *dijakov. Naročili so lahko* 2 *ali* 3 *kepice sladoleda. Koliko dijakov je naročilo dve in koliko tri kepice sladoleda, če razredničarka ni jedla sladoleda, plačala pa je* 79 *kepic sladoleda?*

Naloga 7.36. *Babica ima dvakrat toliko vnukinj kot vnukov. Vnukinjam je podarila po tri bombone, vnukom pa po štiri bombone. Koliko vnukinj in vnukov ima, če je podarila* 70 *bombonov?*

7.7.2 Sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

Sistem treh linearnih enačb z tremi neznankami ali **sistem 3 × 3** je v splošnem oblike:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

x, y in z so **neznanke**, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ so **koeficienti**.

Rešitev sistema je **urejena trojka** števil (x, y, z), ki zadoščajo vsem trem enačbam.
Sistem 3×3 rečujemo z istimi postopki kot sisteme 2×2, le da postopek ponovimo večkrat.

Naloga 7.37. *Z metodo nasprotnih koeficientov rešite sisteme enačb.*

- $$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ -x + y + z &= -4 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x - 2y + 6z &= 5 \\ -x + 3z &= -1 \\ 4y - 3z &= -3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y - 3z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= 1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 3 \\ 4x - y + 2z &= 4 \\ -8x + 2y - 4z &= 7 \end{aligned}$$

7.8 Obravnava enačb in neenačb

Kadar v enačbi poleg neznake x nastopajo tudi druge črke, na primer a, b, c, k, l..., le-te označujejo števila, ki imajo poljubno realno vrednost. Imenujemo jih **parametri**.

Vrednost parametrov vpliva na rešitev enačbe, zato moramo enačbo reševati glede na vrednosti parametrov. Temu postopku rečemo **obravnava enačbe**.

Naloga 7.38. *Obravnavajte enačbe.*

- $2(ax - 3) + 3 = ax$
- $-4x - b(x - 2)^2 = 3 - bx^2 - 7b$
- $3(a - 2)(x - 2) = a^2(x - 1) - 4x + 7$
- $(b - 3)^2x - 3 = 4x - 3b$

Naloga 7.39. *Obravnavajte neenačbe.*

- $a(x - 2) \leqslant 4$
- $mx + 4 > m^2 - 2x$
- $a(a - 3x + 1) \geqslant a(x - 4) + a^2x$
- $(k - 1)^2x \leqslant kx + 2(k + 1) + 5x$

7.9 Sklepni račun

Pri sklepnem računu obravnavamo situacije, v katerih nastopata dve količini, ki sta premo sorazmerni ali obratno sorazmerni.

Premo sorazmerje

Količini x in y sta **premo sorazmerni**, če obstaja takšno neničelno število $k \in \mathbb{R}^*$, da je $x = k \cdot y$.

Obratno sorazmerje

Količini x in y sta **obratno sorazmerni**, če obstaja takšno neničelno število $k \in \mathbb{R}^*$, da je $x = \frac{k}{y}$.

Naloga 7.40. *Delavec v štirih urah zasluži* 10 €. *Koliko zasluži v dvanajstih urah?*

Naloga 7.41. *Tiskalnik v sedmih minutah natisne* 42 *strani. Koliko časa potrebuje za* 108 *strani?*

Naloga 7.42. *Tri čebele v treh dneh oprašijo devetsto cvetov. Koliko cvetov v šestih dneh opraši šest čebel?*

Naloga 7.43. *Kolesar od Ljubljane do Geometrijskega središča Slovenije potuje dve uri s hitrostjo* 20 *km/h. Kako hitro bi moral peljati, da bi pot prevozil v eni uri in petnajstih minutah?*

Naloga 7.44. *En računalnik za pripravo posebnih efektov filma potrebuje* 14 *ur. Koliko časa bi potrebovali trije taki računalniki, za pripravo posebnih efektov za šest filmov?*

Naloga 7.45. *Sedem pleskarjev pleska hišo* 15 *dni. Po petih dneh dva delavca premestijo na drugo delovišče. Koliko časa bodo preostali delavci pleskali hišo?*

7.10 Odstotni račun

Količine pri odstotnem računu so povezane s sklepnim računim, in sicer so v premem sorazmerju.

Odstotek (ali procent) % celote definiramo kot stotino celote, **odtisoček** (ali promil) ‰ kot tisočino celote.

$$1\ \% = \frac{1}{100} \qquad 1\ ‰ = \frac{1}{1000}$$

Relativni delež je kvocient med deležem in osnovo: $r = \frac{d}{o}$.

Naloga 7.46. *Zapišite z okrajšanim ulomkom oziroma odstotkom.*
- 12 %
- 20 % a
- 250 %
- 0.5 % b
- 12 ‰
- $\frac{3}{4}a$
- $\frac{7}{20}x$
- $\frac{31}{10}y$
- $0.8z$
- $\frac{25}{8}m$

Naloga 7.47. *Izračunajte.*
- *Koliko je* 20 % *od* 10 *kg?*
- *Koliko je* 25 % *od* 20 *€?*
- *Koliko je* 10 % *od* 1 *l?*
- *Koliko je* 250 % *od* 12 *g?*
- *Koliko je* 1 ‰ *od* 2350 *kg?*
- *Koliko je* 17 ‰ *od* 100 *m?*

Naloga 7.48. *Pri ekološki pridelavi kmet pridela* 3 *tone pšenice na hektar. Zaradi toče je bil letošnji pridelek le* 2450 *kg pšenice. Za koliko odstotkov se je zmanjšala količina pridelka zaradi toče?*

Naloga 7.49. *V* 5 *kg raztopine je* 120 *g soli. Koliko odstotna je ta raztopina?*

Naloga 7.50. *V tovarni čevljev so povečali proizvodnjo s* 1250 *parov tedensko na* 1700 *parov. Koliko odstotno je to povečanje?*

Naloga 7.51. *Kokoši nesnice znesejo* 270 *jajc letno. Koliko odstotna je njihova nesnost?*

Naloga 7.52. *V trgovini stane izdelek* 120 *€. Koliko stane po:*
- 5 % *podražitvi,*
- 20 % *pocenitvi?*

Naloga 7.53. *Jošt je natipkal besedilo na list A4 formata v pisava Arial, velikosti* 12*, in ugotovil, da je bilo na strani* 3150 *znakov s presledki. Če bi pisavo zmanjšal na velikost* 10*, bi na stran prišlo* 28 % *več znakov. Koliko?*

Naloga 7.54. *Dizelsko gorivo je stalo v Sloveniji* 1.421 *€, v Italijo* 1.748 *€, v Avstriji pa* 1.751 *€. Za koliko odstotkov je bilo gorivo v Italiji dražje od goriva v naši državi in za koliko odstotkov je bilo naše gorivo cenejše od goriva v Avstriji?*

Naloga 7.55. *Prenočitvene zmogljivosti na Bledu so* 8880 *ležišč. Pred prvomajskimi prazniki so se turistični delavci pohvalili, da je zasedenost kapacitet* 90 %. *Koliko turistov še lahko sprejmejo na nočitev?*

Naloga 7.56. *Maksov avto porabi* 5.6 *l goriva na prevoženih* 100 *km. Z varčno vožnjo lahko zniža porabo za* 15 %. *Koliko kilometrov bo tako prevozil s polnim rezervoarjem, ki drži* 55 *l.*

Naloga 7.57. *Kavču, ki je stal* 652 €*, so ceno znižali za* 10 %*, na sejmu pa so ponudili na to ceno še* 12 % *sejemskega popusta. Koliko bomo odšteli za kavč na sejmu? Za koliko odstotkov je cena na sejmu nižja od prvotne cene kavča?*

Naloga 7.58. *Servis so najprej podražili za* 10 %*, potem pa se je ena skodelica okrušila in so ga pocenili za* 30 %. *Koliko je servis stal na začetku, če ga danes lahko kupimo za* 115.5 €*?*

Naloga 7.59. *Izdelek je imel napako, zato so ga pocenili za* 20 %. *Ko so napako skoraj v celoti odpravili, so ga podražili za* 20 %. *Kolikšna je bila začetna cena izdelka, če po popravilu stane* 192 €*?*

Naloga 7.60. *Koliko vode moramo priliti* 3 *kg* 45 % *raztopine, da bomo koncentracijo znižali na* 20 %*?*

Naloga 7.61. *Kolikšno koncentracijo raztopine dobimo, če zmešamo* 2 *kg* 60 % *raztopine in* 3 *kg* 40 % *raztopine?*

Naloga 7.62. *Koliko kg* 12 % *raztopine moramo priliti k* 30 *kg* 24 % *raztopine, da bomo dobili raztopino z* 20 % *koncentracijo?*

7.11 Absolutna vrednost

Absolutna vrednost $|x|$ števila x geometrijsko predstavlja oddaljenost točke, ki predstavlja število x, od izhodišča na številski premici.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0; \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Lastnosti absolutne vrednosti

- $|x| \geqslant 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ – **trikotniška neenakost**

Z absolutno vrednostjo izračunamo tudi razdaljo med x in y kot $|x - y|$ ali $|y - x|$.

Naloga 7.63. *Izračunajte.*
- $|13|$
- $|-5|$
- $|-2| \cdot |4|$
- $|-3| - |5|$
- $|-1| \cdot |-6|$
- $-|3| + |-9|$

Naloga 7.64. *Izračunajte.*
- $\left|\frac{1}{5} - 5\right|$
- $\left|-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right|$
- $\left|\sqrt{5} - 3\right|$
- $\left|-1 + \sqrt{2}\right|$
- $\left|1 - |\sqrt{6} - 3|\right|$
- $\left||\sqrt{2} - 2| - |1 - \sqrt{2}|\right|$

Naloga 7.65. *Odpravite absolutno vrednost.*
- $|a - 2|$
- $|x + 1|$
- $|4 - b|$
- $|2 + e|$
- $-|1 - y|$
- $-|3 + 6y|$

Naloga 7.66. *Poenostavite izraze.*
- $x - 2 + |x|$
- $3 \cdot |x - 2| + x - 1$
- $|a - 2| + |a|$
- $3 \cdot |b - 2| + |b - 1|$
- $||x - 2| + x|$
- $3 \cdot ||y - 2| + |y - 1||$

Naloga 7.67. *Rešite enačbe.*
- $|x - 2| = 3$
- $|3 - x| = 5$
- $1 + |x - 7| = -6$
- $|a + 3| = 7 - |a + 2|$
- $|b - 1| = 2 + |b + 3|$
- $|x - 1| + |x + 2| = 3$

Naloga 7.68. *Rešite neenačbe.*
- $|x - 2| \geqslant 3$
- $|3 - x| < 5$
- $1 + |x - 7| \leqslant -6$
- $|a + 3| < 7 - |a + 2|$
- $|b - 1| \geqslant 2 + |b + 3|$
- $||x - 3| + 2| < 1$
- $|x - |x - 3|| \geqslant 1$
- $|x - |2x - 1|| \geqslant 2$

7.12 Zaokroževanje, približki, napake

Pravila zaokroževanja

- Zadnjo števko pustimo enako, če je prva izbrisana števka manjša od 5;
- zadnjo števko povečamo za 1, če je prva izbrisana števka 5 ali več.

Zaokroževanje na n **decimalnih mest** pomeni: opustiti vse decimalke od n-tega mesta dalje in zaokrožiti. Primer: $\sqrt{2} \doteq 1.41$ (na 2 decimalni mesti).

Zaokroževanje na n **mest** pomeni, da ima število v svojem zapisu n števk, pri pogoju, da ne štejemo ničel na začetku in na koncu. Primer: $\sqrt{2} \doteq 1.41$ (na 3 mesta).

Pri zapisu uporabimo $\doteq$, kar označuje, da smo rezultat zapisali približno in ne natančno.

Absolutna in relativna napaka

Naj bo x točna vrednost in X njen **približek**.
Absolutna napaka približka je $|X - x|$; **relativna napaka** je $\frac{|X-x|}{x}$.

Absolutno napako zapišemo tudi $X = x \pm \epsilon$, kar pomeni, da se absolutna napaka približka X razlikuje od točne vrednosti x kvečjemu za ϵ.

Naloga 7.69. *Na kartonski škatli je oznaka velikosti* 50 ± 3 *cm. Koliko je največja in koliko najmanjša velikost škatle, ki ustreza tej oznaki? Ali je lahko relativna napaka velikosti* 8 %*?*

Naloga 7.70. *Pri* 200 *m vrvi smemo narediti* 7 % *napako. Ali je lahko takšna vrv dolga* 230 *m? Kako dolgi bosta najkrajša in najdaljša vrv, ki še ustrezata?*

Naloga 7.71. *V EU morajo biti banane za prodajo dolge najmanj* 14 *cm. V trgovino dobijo novo pošiljko banan, ki jih izmerijo, da so dolžine* 13.7 *cm. Njihov meter ima* 5 % *odstopanje. Ali lahko prodajajo takšne banane?*

Poglavje 8

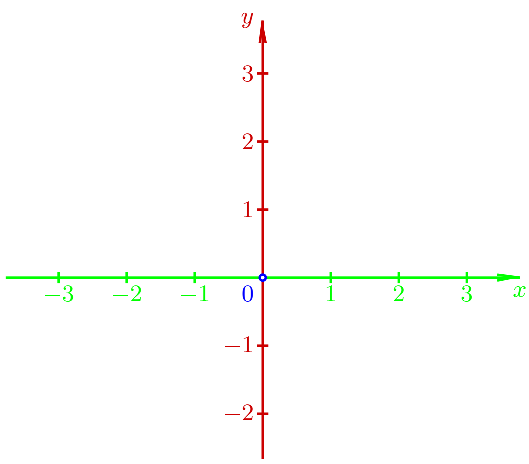
Pravokotni koordinatni sistem

8.1 Pravokotni koordinatni sistem

Pravokotni koordinatni sistem v ravnini oziroma **kartezični ravninski koordinatni sistem** določa par pravokotnih številskih premic (koordinatni osi), ki se sekata v koordinatnem izhodišču (O).

Koordinatni osi imenujemo:

- os x ali abscisna os in
- os y ali ordinatna os.



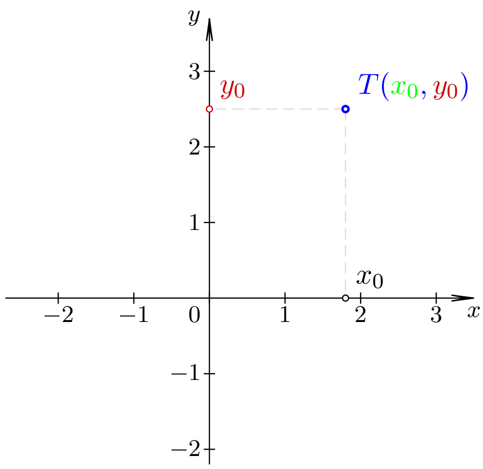
Lega točke v ravnini

Poljubni točki T v ravnini s pravokotnim koordinatnim sistemom lahko enolično določimo **koordinate točke**: $T(x_0, y_0)$.
To so števila, ki nam povedo, kje ležijo projekcije točke T na koordinatnih oseh.

Koordinate točke imenujemo:

- prva koordinata x_0 je abscisa točke T in
- druga koordinata y_0 je ordinata točke T.

Vsakemu urejenemu paru števil (x_0, y_0) ustreza natanko ena točka $T(x_0, y_0)$ v ravnini, opremljeni s koordinatnim sistemom.



Množice v pravokotnem koordinatnem sistemu

Vsaka premica v ravnini razdeli ravnino na dve **polravnini**.

Koordinatni osi ravnino $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ razdelita na štiri **kvadrante**.

- I. kvadrant:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \land y > 0\} = (0,\infty) \times (0,\infty)$$

- II. kvadrant:

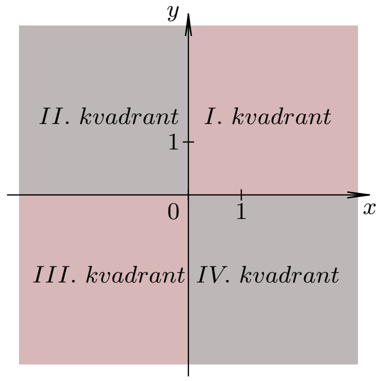
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \land y > 0\} = (-\infty,0) \times (0,\infty)$$

- III. kvadrant:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \land y < 0\} = (-\infty,0) \times (-\infty,0)$$

- IV. kvadrant:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \land y < 0\} = (0,\infty) \times (-\infty,0)$$



Na abscisni osi ležijo točke, ki imajo ordinato enako nič – so oblike $T(x,0)$; $x \in \mathbb{R}$.

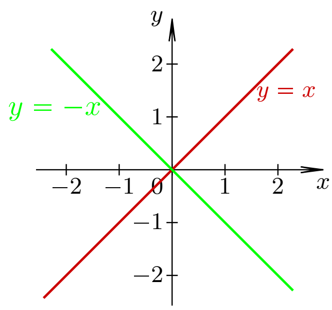
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}$$

Na ordinatni osi ležijo točke, ki imajo absciso enako nič – so oblike $T(0,y)$; $y \in \mathbb{R}$.

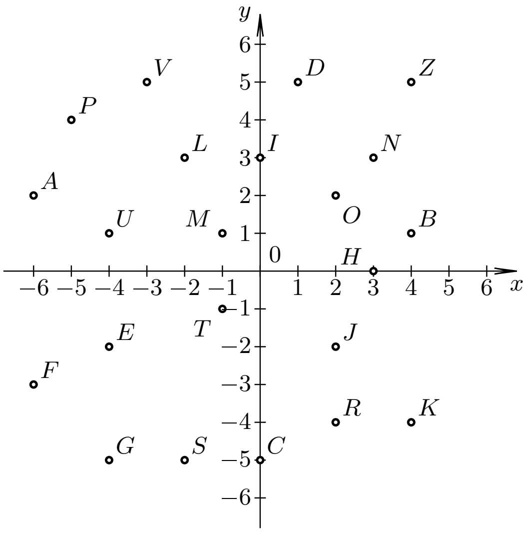
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Množico točk $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$ imenujemo **simetrala lihih kvadrantov**.

Množico točk $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\}$ imenujemo **simetrala sodih kvadrantov**.



Naloga 8.1. *V koordinatnem sistemu je narisanih 22 točk.*

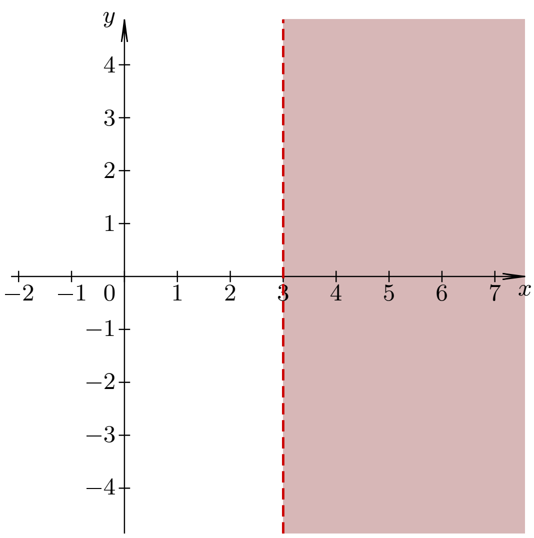


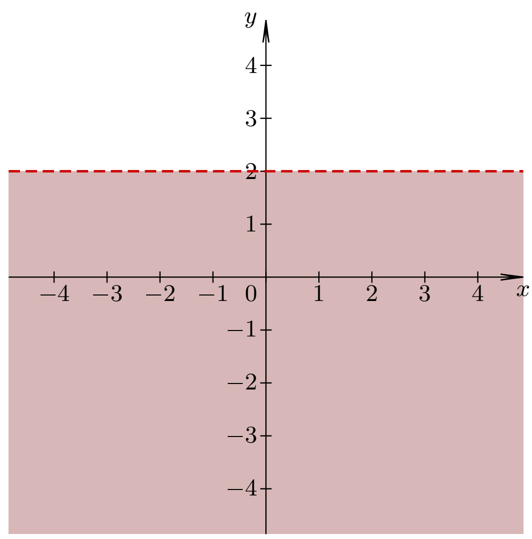
- *Zapišite koordinate vseh točk, ki ležijo v II. kvadrantu.*
- *Zapišite koordinate vseh točk, ki ležijo v III. kvadrantu.*
- *V koordinatni sistem narišite še točke* $X(2,-1)$, $Y(-3,-4)$, $W(5,-3)$.
- *Poimenujte točke.* $\_(2,-4)$, $\_(-6,2)$, $\_(1,5)$, $\_(-2,-5)$, $\_(-4,-2)$, $\_(0,3)$

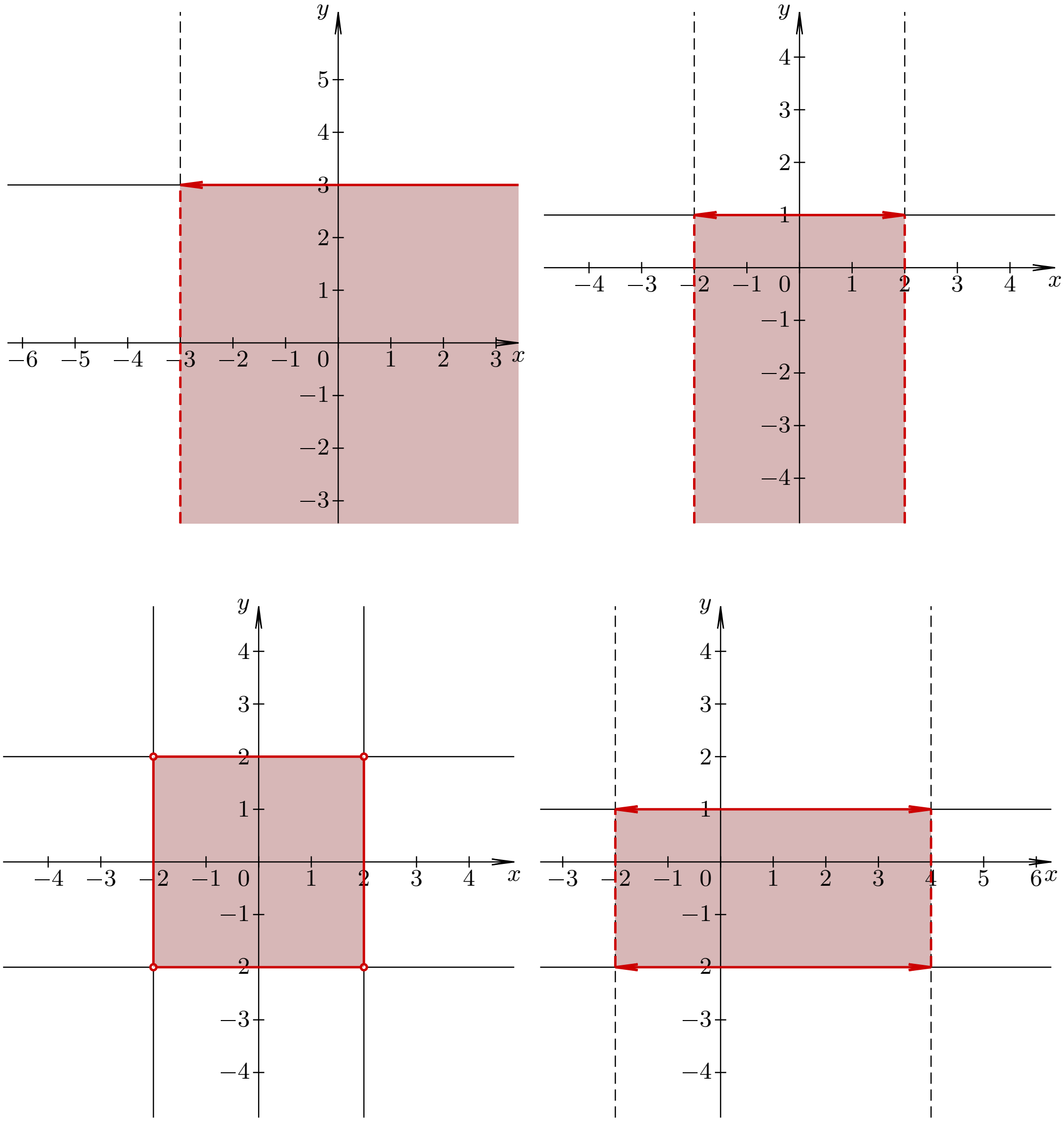
Naloga 8.2. *Narišite množico točk.*

- $\{T(x,y);\ x \geqslant -1\}$
- $\{T(x,y);\ y \leqslant 3\}$
- $\{T(x,y);\ x \leqslant 4 \wedge y < -1\}$
- $\{T(x,y);\ x \geqslant -2 \wedge y < 1\}$
- $\{T(x,y);\ -2 < x \leqslant 4 \wedge -3 < y < 1\}$
- $\{T(x,y);\ 0 \leqslant x < 4 \wedge -3 \leqslant y < 3\}$
- $\{T(x,y);\ x < 4 \wedge y < -1\}$
- $\{T(x,y);\ |x| < 3\}$
- $\{T(x,y);\ x \geqslant 1 \wedge |y| < 1\}$
- $\{T(x,y);\ |x-3| < 1 \wedge y \geqslant 1\}$
- $\{T(x,y);\ |x| < 2 \wedge |y+3| \leqslant 1\}$
- $\{T(x,y);\ x = y\}$
- $\{T(x,y);\ x \geqslant y\}$
- $\{T(x,y);\ xy \geqslant 0\}$

Naloga 8.3. *Zapišite množico točk, ki je upodobljena v koordinatnem sistemu.*







Naloga 8.4. *V koordinatnem sistemu narišite točke* $A(-2,3)$, $B(0,4)$, $C(0.5,-1)$ *in* $D(-3,-1)$.

- *Točke* A, B, C *in* D *prezrcalite čez abscisno os in zapišite koordinate točk* A_1, B_1, C_1 *in* D_1.
- *Točke* A, B, C *in* D *prezrcalite čez ordinatno os in zapišite koordinate točk* A_2, B_2, C_2 *in* D_2.
- *Točke* A, B, C *in* D *prezrcalite čez koordinatno izhodišče in zapišite koordinate točk* A_3, B_3, C_3 *in* D_3.

Naloga 8.5. *V koordinatni sistem narišite točke* (x,y) *kartezičnega produkta.*

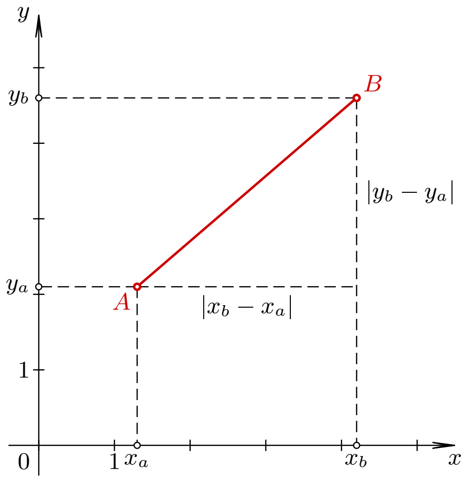
- $[-2,3) \times [-5,-1]$
- $(-1,2) \times [2,3]$
- $\{2\} \times (3,5]$
- $[-2,3] \times \{3,4\}$
- $\{1,2,3\} \times \{-1,1\}$
- $(0,\infty) \times (1,2)$
- $[-1,3] \times (-\infty,3]$
- $(-1,3] \times \{2\}$

8.2 Razdalja med točkama in razpolovišče daljice

Razdalja med točkama

Razdalja $d(A,B)$ med dvema točkama $A(x_a, y_a)$ in $B(x_b, y_b)$ v ravnini je

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$



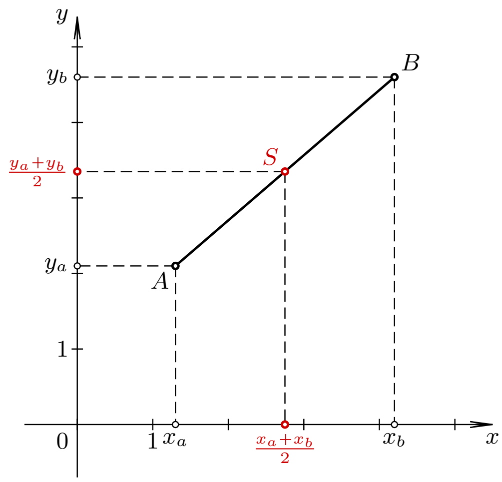
Lastnosti razdalje

- $d(A,B) \geqslant 0$
- $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A,B) = d(B,A)$
- $d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$

Razpolovišče daljice

Razpolovišče S daljice AB s krajiščema $A(x_a, y_a)$ in $B(x_b, y_b)$ v ravnini je

$$S\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$



Naloga 8.6. *Izračunajte razdaljo med točkama.*

- $A(2,-1)$ *in* $B(4,2)$
- $C(-3,-4)$ *in* $D(3,-3)$
- $E(\sqrt{3},-7)$ *in* $F(0,-3)$
- $G(-\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ *in* $H(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$

Naloga 8.7. *Izračunajte koordinati razpolovišča S daljice XY.*

- $X(3,-2)$ *in* $Y(5,4)$
- $X(-3,4)$ *in* $Y(-2,-6)$
- $X(\frac{2}{3},-\frac{1}{2})$ *in* $Y(-\frac{8}{3},1)$
- $X(2\sqrt{3},-8)$ *in* $Y(8\sqrt{3},2)$
- $X(5+\sqrt{7},-4)$ *in* $Y(3-\sqrt{7},0)$

Naloga 8.8. *Ali je trikotnik $\triangle ABC$, kjer je $A(-2,-3)$, $B(8,1)$ in $C(1,4)$, enakostraničen? Izračunajte njegov obseg.*

Naloga 8.9. *Izračunajte obseg kvadrata $\square ABCD$, kjer je $A(4,-4)$ in $C(10,-2)$.*

Naloga 8.10. *Izračunajte višino na osnovnico c v enakokrakem trikotnik $\triangle ABC$, kjer je $A(-2,-7)$, $B(4,-3)$ in $C(3,-8)$.*

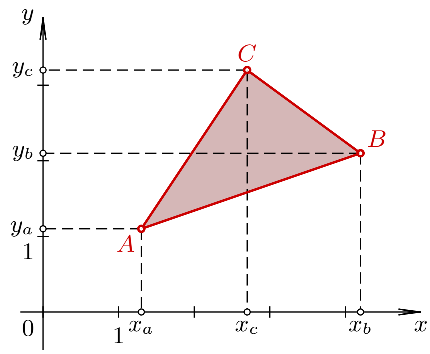
Naloga 8.11. *Dani sta točki* $M(-6,2)$ *in* $N(x,11)$*. Izračunajte absciso* x *točke tako, da bo dolžina daljice* MN *enaka* $9\sqrt{2}$*.*

Naloga 8.12. *Izračunajte koordinati točke* X *in* Y *na abscisni in ordinatni osi, ki sta enako oddaljeni od točk* $G(-3,-6)$ *in* $H(9,6)$*.*

Naloga 8.13. *Določite točko* U*, ki leži na simetrali lihih kvadrantov in je enako oddaljena od točk* $P(-3,-5)$ *in* $R(3,-7)$*.*

8.3 Ploščina trikotnika

Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ z oglišči $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ in $C(x_c, y_c)$ je



$$S = \frac{1}{2} \cdot orient \cdot \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix}$$
$$= \frac{orient}{2} \left[(x_b - x_a)(y_c - y_a) - (y_b - y_a)(x_c - x_a) \right],$$

kjer je $orient = \begin{cases} 1; & \triangle ABC \text{ pozitivno orientiran} \\ -1; & \triangle ABC \text{ negativno orientiran} \end{cases}.$

Naloga 8.14. *Narišite trikotnik $\triangle ABC$ in izračunajte njegovo ploščino.*

- $A(-4, -2)$, $B(5, 1)$ *in* $C(-2, 5)$
- $A(2, 1)$, $B(-5, 1)$ *in* $C(2, 6)$

Naloga 8.15. *Ali so točke kolinearne?*

- $P(-4, -5)$, $Q(4, -1)$ *in* $R(10, 2)$
- $X(1, -7)$, $Y(-2, 2)$ *in* $Z(3, 2)$

Naloga 8.16. *Določite x tako, da bo trikotnik $\triangle ABC$, z oglišči v $A(-2, -3)$, $B(5, 3)$ in $C(x, -1)$, negativno orientiran in bo imel ploščino* 17.

Naloga 8.17. *Določite p tako, da bo imel trikotnik $\triangle ABC$, z oglišči v $A(2, 3)$, $B(p, -3)$ in $C(-1, 6)$, ploščino* 18.

Naloga 8.18. *Dani sta točki $A(2, -4)$ in $B(8, 3)$. Določite koordinati točke C, ki leži na simetrali lihih kvadrantov, da bo trikotnik $\triangle ABC$ pozitivno orientiran in bo imel ploščino* 17.

Poglavje 9

Funkcija

9.1 Preslikava in funkcija

Preslikava

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ neprazni množici.
Preslikava f sestoji iz:

- množice $\mathcal{X}$, ki ji pravimo **domena**,
- množice $\mathcal{Y}$, ki ji pravimo **kodomena** in
- **prirejanja**, ki vsakemu elementu x domene priredi natanko en element y kodomene.

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$
$$f : x \mapsto y$$

Elemente x kodomene $\mathcal{X}$ imenujemo **originali** preslikave.
Če elementu x priredimo element y iz kodomene, potem imenujemo y **slika** elemeta x.

Preslikavo lahko podamo s predpisom, puščičnim diagramom, besednim opisom ...

Funkcija

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ neprazni številski množici.
Funkcija f je preslikava med številskima množicama $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$:

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}.$$

Število y je **funkcijska vrednost** števila x, če se število x preslika v število y.

$$f(x) = y$$

x je neodvisna spremenjlivka, $f(x)$ je od x odvisna spremenljivka.

V nekaterih primerih za opis funkcije uporabimo poseben izraz:

- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ – realna funkcija realne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ – realna funkcija naravne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ – naravna funkcija realne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ – naravna funkcija naravne spremenljivke.

9.2 Definicijsko območje in zaloga vrednosti

Definicijsko območje

Definicijsko območje preslikave ali funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica vseh originalov, ki jih v danem primeru opazujemo. Oznaka: D_f.

Za definicijsko območje navadno vzamemo največjo možno množico, za katero je predpis funkcije veljaven/definiran.

Zaloga vrednosti

Zaloga vrednosti preslikave ali funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica vseh slik oziroma funkcijskih vrednosti. Oznaka: Z_f.

Zaloga vrednosti Z_f je podmnožica kodomene $\mathcal{Y}$: $Z_f \subseteq \mathcal{Y}$.

Naloga 9.1. *Funkcijo $f : A \to B$ predstavite s tabelo. Izračunajte, kam posamezna funkcija preslika $x = 1$.*

- $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(x) = |x| + 1$
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x + 1$
- $A = B = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Naloga 9.2. *Tabelirajte funkcijo $g(x) = 2x + |x|$ od -3 do 3 s korakom 1.*

Naloga 9.3. *Zapišite definicijska območja funkcij.*

- $f(x) = \dfrac{-7}{x+1}$
- $g(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x+6)}$
- $h(x) = \dfrac{3x^2+1}{5}$
- $i(x) = \sqrt{x-2}$
- $j(x) = x^3 - \frac{2}{3}$
- $k(x) = \sqrt{x^2+7}$
- $l(x) = \dfrac{3}{x}$
- $m(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5x-6}$

9.3 Ničla in začetna vrednost funkcije

Ničla funkcije

Ničla funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je tista vrednost $x_0 \in \mathcal{X}$ neodvisne spremenljivke, pri kateri je vrednost funkcije f enaka 0: $f(x_0) = 0$.

Ničle funkcije f poiščemo tako, da rešimo enačbo $f(x) = 0$.
Ničle so le tiste izmed vrednosti, ki ležijo v definicijskem območju D_f funkcije f.

Začetna vrednost

Začetna vrednost funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je funkcijska vrednost pri $x = 0$, to je $f(0)$.

Začetna vrednost obstaja le, če je 0 v definicijskem območju funkcije f: $0 \in D_f$.

Naloga 9.4. *Izračunajte ničle funkcij.*

- $f(x) = \frac{4}{5} - 6x$
- $g(x) = x^2 - 7x + 12$
- $h(x) = \dfrac{3x + 6}{5}$
- $i(x) = x^2 - 9$
- $j(x) = x^2 + 1$
- $k(x) = x^2 - 3x^2 - 4x + 12$
- $l(x) = \sqrt{x + 7}$
- $m(x) = \dfrac{3}{x}$

Naloga 9.5. *Izračunajte začetne vrednosti funkcij.*

- $f(x) = \frac{4}{5} - 6x$
- $g(x) = x^2 - 7x + 12$
- $h(x) = \dfrac{3x + 6}{5}$
- $i(x) = x^2 - 9$
- $j(x) = x^2 - 3x^2 - 4x + 12$
- $k(x) = \sqrt{x + 7}$
- $l(x) = \dfrac{3}{x}$
- $m(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^4 + 2x^3 + 3}$

9.4 Graf funkcije

Graf Γ_f funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica urejenih parov $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kjer element x preteče celotno definicijsko območje D_f funkcije, element y pa je slika pripadajočega x, torej $y = f(x)$.

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}; x \in D_f \wedge y = f(x)\}$$

Urejene pare iz množice Γ_f lahko upodobimo v koordinatnem sistemu.

Vsakemu elementu $(x, f(x))$ iz zgornje množice pripada natanko ena točka v koordinatnem sistemu, katere abscisa je enaka x, ordinata pa je njegova slika $f(x)$.

V ničli graf funkcije seka abscisno os, v začetni vrednosti pa ordinatno os.

9.5 Naraščanje in padanje

Naraščajoča funkcija

Funkcija f je na intervalu (a, b) **naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Funkcija f je na intervalu (a, b) **strogo naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) < f(x_2)$.

Padajoča funkcija

Funkcija f je na intervalu (a, b) **padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Funkcija f je na intervalu (a, b) **strogo padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) > f(x_2)$.

9.6 Injektivnost in surjektivnost

Surjektivnost

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **surjektivna**, če je zaloga vrednosti Z_f funkcije enaka njeni kodomeni $\mathcal{Y}$ – vsak element kodomene $\mathcal{Y}$ je slika vsaj enega elementa iz domene $\mathcal{X}$.

$$\forall y \in \mathcal{Y}. \exists x \in \mathcal{X} \ni: f(x) = y$$

Injektivnost

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **injektivna**, če se dva poljubna različna originala iz domene $\mathcal{X}$ preslikata v različni sliki v kodomeni $\mathcal{Y}$ – vsak element kodomene $\mathcal{Y}$ je slika kvečjemu enega elementa iz domene $\mathcal{X}$.

$$\forall x, y \in \mathcal{X} : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna hkrati – vsak element iz kodomene $\mathcal{Y}$ je slika natanko enega elementa domene $\mathcal{X}$.

Naloga 9.6. *Zapišite in narišite grafe funkcij ter zapišite začetne vrednosti in ničle funkcije. Določite, kje je funkcija naraščajoča oziroma padajoča, ter preverite surjektivnost in injektivnost.*

- $f(x) = x \qquad D_f = \mathbb{R}$
- $g(x) = -2x + 1 \qquad D_g = \mathbb{R}$
- $h(x) = x^2 - 1 \qquad D_h = \mathbb{R}$
- $i(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad D_i = \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$
- $j(x) = \dfrac{x+2}{x-3} \qquad D_j = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

9.7 Predpis linearne funkcije

Linearna funkcija je realna funkcija realne spremenljivke, podana s predpisom

$$f(x) = kx + n; \quad k, n \in \mathbb{R},$$

kjer je k **diferenčni kvocient/smerni koeficient**, n pa **začetna vrednost** $f(0) = n$.

Glede na predznak smernega koeficienta k je linearna funkcija:
- naraščajoča, če je $k > 0$;
- konstanta, če je $k = 0$ ali
- padajoča, če je $k < 0$.

Naloga 9.7. *Ugotovite, ali je dana funkcija linearna. Linearnim funkcijam določite smerni koeficient in začetno vrednost.*
- $f(x) = \frac{1}{7x} - \frac{3}{4}$
- $g(x) = \frac{2}{3} - \pi x$
- $h(x) = \frac{8+6x}{24}$
- $i(x) = 0.\overline{3}x + 1$
- $j(x) = \frac{x^2-3}{5}$
- $k(x) = -\sqrt{2}x + \frac{2}{3}$
- $l(x) = 2$

Naloga 9.8. *Zapišite predpis linearne funkcije f, ki ima začetno vrednost 5 in diferenčni količnik -3.*

Naloga 9.9. *Dana je linearna funkcija $p(x) = 3x - 4$. Izračunajte $p(-2)$, $p(0)$; $p(5)$ in $p(\sqrt{2})$.*

Naloga 9.10. *Zapišite predpis linearne funkcije, za katero je $u(-2) = 10$ in $u(0) = 2$.*

Naloga 9.11. *Ali je funkcija naraščajoča ali padajoča?*
- $f(x) = 3x + 5$
- $g(x) = -2x + 7$
- $h(x) = 10 - \frac{1}{2}x$
- $i(x) = \frac{x-1}{2}$
- $j(x) = \frac{5-2x}{3}$
- $k(x) = \frac{-\sqrt{3}x+1}{3}$
- $l(x) = -\frac{2-4x}{17}$

Naloga 9.12. *Izračunajte ničlo linearne funkcije.*
- $f(x) = 6x + 12$
- $g(x) = 5x + 2$
- $h(x) = 3x - 12$
- $i(x) = -4x + 8$
- $j(x) = -3x + 2$
- $k(x) = -x - 7$
- $l(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$
- $m(x) = -\frac{2x+3}{6}$
- $n(x) = \frac{1-4x}{2}$
- $o(x) = \frac{\pi x+4}{3}$
- $p(x) = \sqrt{2}x + 1$
- $r(x) = 4$

Naloga 9.13. *Dana je linearna funkcija f. Zapišite predpis funkcije g v obliki $g(x) = kx + n$.*
- $f(x) = 2x - 6,\ g(x) = 3f(x)$
- $f(x) = 5x - 3;\ g(x) = f(x+1)$
- $f(x) = \frac{2x-5}{3};\ g(x) = f(1-x)$
- $f(x) = \frac{10-4x}{7};\ g(x) = f(3x)$

Naloga 9.14. *Dana je družina linearnih funkcij $f(x) = (2m-1)x + (3-m)$; $m \in \mathbb{R}$.*
- *Za katero vrednost parametra m ima funkcija diferenčni količnik enak -5?*

- *Za katero vrednost parametra m je funkcija padajoča?*
- *Za katero vrednost parametra m je funkcija konstantna?*
- *Za katero vrednost parametra m je funkcija naraščajoča?*
- *Za katero vrednost parametra m je začetna vrednost enaka 2?*
- *Za katero vrednost parametra m ima funkcija ničlo $x = -4$?*

Naloga 9.15. *Taksist meri razdaljo, ki jo je prevozil. Vsak kilometer stane* 2.5 €*, startnina pa* 7 €*. Zapišite funkcijo, po kateri taksist izračuna znesek za plačilo, ko prebere število prevoženih kilometrov x. Izračunajte, koliko bi plačali, če bi se peljali* 12 *km.*

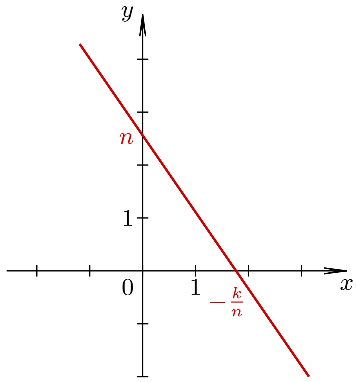
Naloga 9.16. *V bezenu je* 12 *l vode. V bazen po cevi vsako minuto pritečejo še* 4 *l vode. Zapišite funkcijo, s katero bomo lahko izračunali, koliko je vode v bazenu po pretečenih x minutah. Izračunajte, koliko vode je v bazenu po* 9 *minutah.*

9.8 Graf linearne funkcije

Graf linearne funkcije $f(x) = kx + n$ je predstavljen kot množica točk

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = kx + n\right\},$$

kar upodobimo kot **premico**.



Premice z enako začetno vrednostjo se sekajo v skupni točki $(0, n)$ na ordinatni osi – **šop premic**.
Premice, ki imajo enak smerni koeficient so vzporedne – **snop premic**.

Naloga 9.17. *Katere od točk* $A(1,1)$, $B(4,0)$, $C(7,-2)$, $D(-4,\frac{5}{2})$, $E(0,\frac{3}{2})$, $F(2,2)$ *in* $G(3,0)$ *ležijo na grafu funkcije* $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$?

Naloga 9.18. *Dana je funkcija* $g(x) = 3x - 2$. *Za koliko se spremeni vrednost funkcije* g, *če se vrednost* x

- *poveča za* 1?
- *poveča za* 2?
- *zmanjša za* 5?
- *zmanjša za* -10?

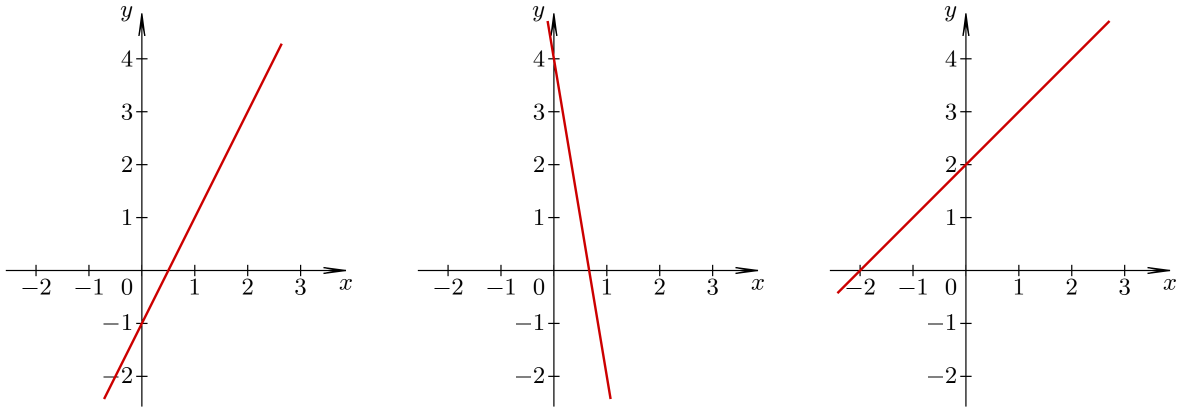
Naloga 9.19. *Narišite graf linearne funkcije. Zapišite začetno vrednost in izračunajte ničlo funkcije. Določite, kje je funkcija pozitivna oziroma negativna, ter ali je naraščajoča ali padajoča?*

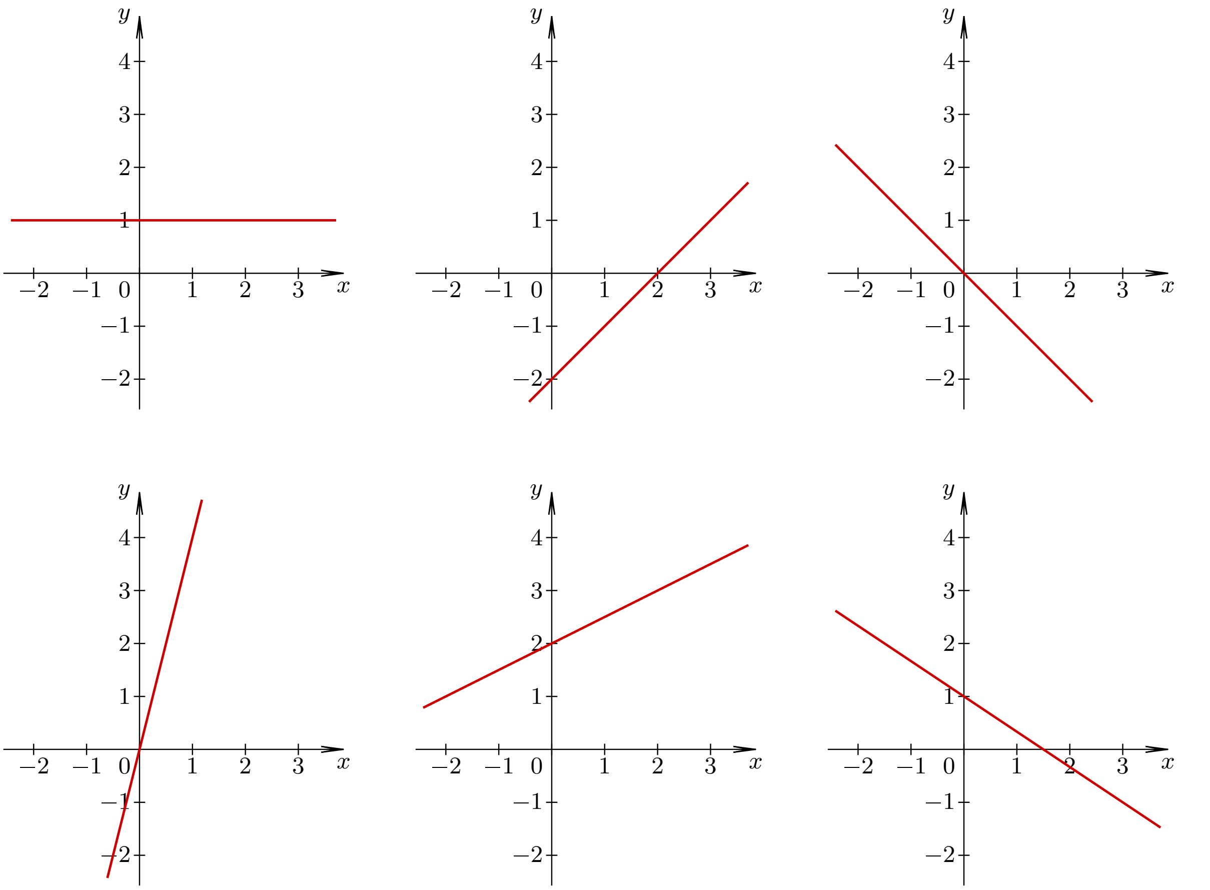
- $f(x) = -x + \frac{1}{2}$
- $g(x) = 2x + 2$
- $h(x) = 3 - 2x$
- $i(x) = -x$
- $j(x) = -3$
- $k(x) = \dfrac{6x - 1}{3}$
- $l(x) = -\dfrac{2 - 3x}{4}$
- $m(x) = 3 - \frac{3}{5}x$

Naloga 9.20. *V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij* $f(x) = 2x - 2$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 2x + 2$ *in* $i(x) = 2x$. *Kaj opazite?*

Naloga 9.21. *V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij* $f(x) = 2x - 2$, $g(x) = 3x - 2$, $h(x) = x - 2$ *in* $i(x) = \frac{1}{2}x - 2$. *Kaj opazite?*

Naloga 9.22. *Zapišite predpis linearne funkcije, ki jo prikazuje graf.*





Naloga 9.23. *Narišite graf sestavljene funkcije in zapišite njeno zalogo vrednosti.*

- $f(x) = \begin{cases} 2x; & x \leqslant 2 \\ 4; & x > 2 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} x+3; & x \leqslant -2 \\ -x-1; & x > -2 \end{cases}$
- $h(x) = \begin{cases} x; & x \leqslant 1 \\ -1; & x > 1 \end{cases}$
- $k(x) = \begin{cases} -x+1; & x \leqslant 2 \\ -1; & 2 < x < 4 \\ x-5; & x \geqslant 4 \end{cases}$
- $l(x) = \begin{cases} 0.5x; & x \leqslant 2 \\ 2x-3; & 2 < x < 4 \\ 0.5x+3; & x \geqslant 4 \end{cases}$

Naloga 9.24. *Narišite graf funkcije.*

- $f(x) = |3x-3|$
- $g(x) = |2x+1| + 1$
- $h(x) = 1 - |x+1|$
- $i(x) = 3 - |2x-1|$
- $j(x) = x + |x-2|$
- $k(x) = |x+1| - 2$
- $l(x) = -|0.5x+3|$
- $m(x) = 3 - |x-2|$

Poglavje 10

Premica

10.1 Enačba premice

Eksplicitna oblika enačbe premice

$$\mathbf{y} = \mathbf{kx} + \mathbf{n};\ \ k, n \in \mathbb{R},$$

kjer je k je **smerni koeficient**, ki ga izračunamo kot

$$k = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

n pa je **začetna vrednost**.

Z eksplicitno obliko enačbe premice lahko zapišemo vse premice, razen tistih, ki so vzporedne ordinatni osi.

Dana je premica, ki poteka skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2).
Smerni koeficient izračunamo po formuli

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Iz $y_1 = kx_1 + n$ izrazimo

$$n = y_1 - kx_1$$

in vstavimo v prvotno enačbo

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

ter preuredimo do oblike

$$\mathbf{y} - \mathbf{y_1} = \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x_1}).$$

Odsekovna/segmentna oblika enačbe premice

Denimo, da premica seka koordinatni osi v točkah $M(m, 0)$ in $N(0, n)$.
Uporabimo eksplicitno obliko enačbe premice, v katero vstavimo znani točki

$$y - 0 = \frac{n - 0}{0 - m}(x - m)$$

$$y = -\frac{n}{m}x + n,$$

in jo preoblikujemo do **odsekovne oblike enačbe premice**:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{m}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{n}} = \mathbf{1};\ \ m, n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Vrednosti m in n določata **odseka/segmenta** na koordinatnih oseh.

Z odsekovno obliko enačbe premice lahko zapišemo vse premice, razen tistih, ki potekajo skozi koordinatno izhodišče $(0,0)$ ali pa so vzporedne eni od koordinatnih osi.

Implicitna oblika enačbe premice

Vsako premico lahko zapišemo z **implicitno obliko enačbe premice**:

$$\mathbf{ax + by + c = 0};\ (a, b, c \in \mathbb{R}) \wedge (a \textit{ in } b \textit{ ne hkrati } 0).$$

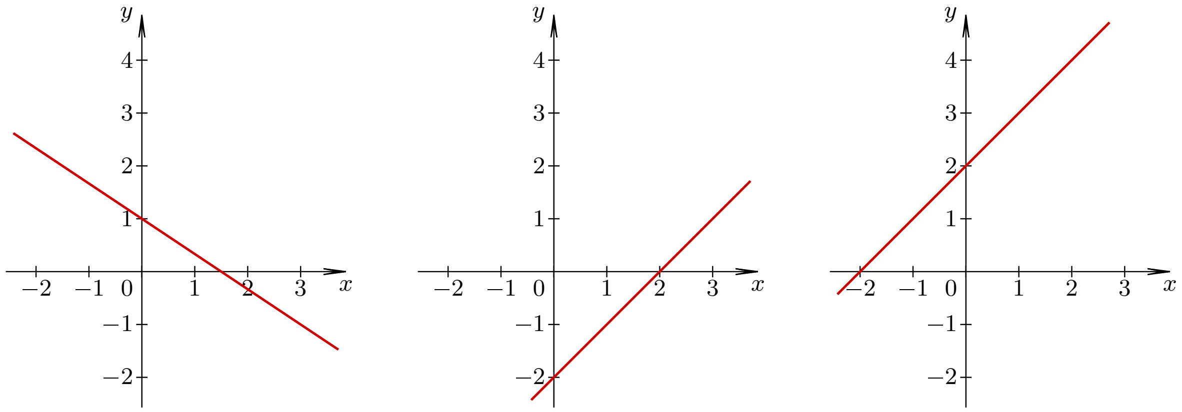
Naloga 10.1. *Narišite premico z dano eksplicitno obliko enačbe.*

- $y = -2x + 1$
- $y = \frac{1}{2}x + 2$
- $y = 2x + \frac{3}{4}$

Naloga 10.2. *Narišite premico z dano odsekovno obliko enačbe.*

- $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$
- $\frac{x}{2} + \frac{2y}{5} = 1$
- $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$
- $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1$

Naloga 10.3. *Z grafa razberite ničlo in začetno vrednost ter zapišite odsekovno obliko enačbe premice.*



Naloga 10.4. *Dano enačbo premice zapišite v eksplicitni in odsekovni obliki ter premico narišite.*

- $x + 4y - 8 = 0$
- $3x - 2y + 6 = 0$
- $2x + 5y + 5 = 0$
- $\frac{1}{2}x + 3y - 6 = 0$
- $x + 1 = 0$
- $y - 2 = 0$

Naloga 10.5. *Izračunajte ploščino trikotnika, ki jo premica oklepa s koordinatnima osema.*

- $y = -2x + 4$
- $\frac{x}{2} + \frac{x}{-3} = 1$
- $2x + 4y - 3 = 0$
- $x - y + 1 = 0$

Naloga 10.6. *Zapišite enačbo premice, ki gre skozi dani točki.*

- $A(2,3)$ *in* $B(4,5)$
- $C(1,-2)$ *in* $D(-3,-4)$

- $E(7,2)$ *in* $F(-7,-5)$

Naloga 10.7. *Določite neznano koordinato tako, da bodo dane točke kolinearne.*
- $A(3,y)$, $B(-4,1)$ *in* $C(2,2)$
- $D(-1,7)$, $E(x,5)$ *in* $F(3,-4)$

Naloga 10.8. *Ugotovite, ali sta dani premici vzporedni.*
- $y = \frac{3}{4}x - 1$ *in* $y = -\frac{3}{4}x + 1$
- $x - 2y + 1 = 0$ *in* $2x + y + 1 = 0$
- $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$ *in* $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$
- $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ *in* $4x + 2y + 1 = 0$

Naloga 10.9. *Dani sta premici z enačbama* $y = 4x + 9$ *in* $ax - 3y + 3 = 0$. *Določite parameter* a *tako, da bosta premici vzporedni.*

Naloga 10.10. *Dani sta premici z enačbama* $\frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 1$ *in* $-6x + by + 1 = 0$. *Določite parameter* b *tako, da bosta premici vzporedni.*

Naloga 10.11. *Dani sta premici z enačbama* $3x - 2y + 4 = 0$ *in* $(c-2)x + 4y + 3 = 0$. *Določite parameter* c *tako, da bosta premici vzporedni.*

Naloga 10.12. *Zapišite enačbo premice, ki je vzporedna dani premici in poteka skozi dano točko.*
- $y = 2x - 1$, $T(1,-3)$
- $2x - 4y + 3 = 0$, $U(-4,5)$
- $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$, $V(8,-8)$

Naloga 10.13. *Iz snopa premic z enačbo* $y = -3x + n$ *določite enačbo tiste premice, ki poteka skozi točko* $(1,4)$.

Naloga 10.14. *Iz šopa premic z enačbo* $y = kx + 2$ *določite enačbo tiste premice, ki gre skozi točko* $(3,-4)$.

Naloga 10.15. *Zapišite enačbo pravokotnice na dano premico, ki poteka skozi dano točko.*
- $y = x + 2$, $T(3,-4)$
- $y = 2x + 3$, $U(4,5)$
- $y = \frac{1}{3}x + 5$, $V(-1,4)$
- $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$, $Z(-6,3)$

10.2 Presečišče premic

Dve premici v ravnini se lahko **sekata** ali sta **vzporedni**.
Glede na to dobimo različne rešitve sistemov dveh linearnih enačb z dvema neznankama.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

- Če se premici sekata, dobimo kot rešitev sistema urejen par (x, y) oziroma točko $T(x, y)$, v kateri se sekata.
- Če sta premici vzporedni imamo dve možnosti:
  - sistem ima neskončno mnogo (premico) rešitev, če premici sovpadata (sta identični),
  - sistem nima rešitve, če sta premici različni.

Naloga 10.16. *Izračunajte presečišče premic, rezultat preverite s sliko.*

- $\begin{aligned} 2x - 3x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} y &= 3x + 3 \\ y &= \frac{x}{2} + 3 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} x + 3y - 9 &= 0 \\ x - 3y - 3 &= 0 \end{aligned}$
- $\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{6} &= 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} &= 1 \end{aligned}$

Naloga 10.17. *Zapišite enačbo premice, ki gre skozi presečišče premic* $y = 2x+1$ *in* $y = -\frac{1}{2}x+6$ *ter seka ordinatno os pri* $y = 4$.

Naloga 10.18. *Zapišite enačbo premice, ki gre skozi presečišče premic* $y = 3x+1$ *in* $y = -x+5$ *ter ima smerni koeficient* $k = 2$.

Naloga 10.19. *Zapišite implicitno enačbo premice, ki gre skozi presečišče premic* $2x-y-13 = 0$ *in* $2x + 3y - 1 = 0$ *ter seka abscisno os pri* $x = \frac{7}{2}$.

Naloga 10.20. *Zapišite enačbo premice, ki gre skozi presečišče premic* $3x + 4y - 11 = 0$ *in* $2x - 7y + 41 = 0$ *ter je vzporedna ordinatni osi.*

Naloga 10.21. *Zapišite eksplicitno enačbo premice, ki gre skozi presečišče premic* $5x-7y+3 = 0$ *in* $2x + y - 14 = 0$ *ter je vzporedna premici z enačbo* $3x - 2y + 1 = 0$.

Naloga 10.22. *Izračunajte smerni koeficient k tako, da se premici z enačbama* $y = 2x + 6$ *in* $y = kx + \frac{5}{2}$ *sekata na simetrali sodih kvadrantov.*

Naloga 10.23. *Stranice trikotnika ležijo na premicah z enačbami* $x + y = 0$, $3x - 2y = 0$ *in* $x - 4y + 10 = 0$. *Izračunajte oglišča trikotnika ter njegov obseg in ploščino. Premice in trikotnik narišite v pravokotnem koordinatnem sistemu.*

Naloga 10.24. *Dani sta dve oglišči A in B trikotnika* $\triangle ABC$, *orientacija in ploščina. Izračunajte kooridnati tretjega oglišča C, če leži na dani premici.*

- $A(-6, 1)$, $B(2, -1)$;
  pozitivna orientacija, $S = 25$;
  C *leži na* $y = -2x + 4$
- $A(-4, 0)$, $B(4, 2)$;
  pozitivna orientacija, $S = 7$;
  C *leži na* $y = 5 - 2x$

Poglavje 11

Statistika

11.1 Osnovni pojmi statistike

Populacija je množica, ki jo statistično proučujemo. Element populacije imenujemo **statistična enota**.

Vzorec je podmnožica populacije, katere elementi predstavljajo največjo možno mero značilnosti celotne množice. Vzorec izberemo, kadar je celotna populacija prevelika množica, da bi analizirali vse njene elemente.

- **Reprezentativen vzorec** je vzorec, ki je izbran tako, da predstavlja značilnosti celotne populacije.
- **Slučajni vzorec** je vzorec, ki je izbran naključno – vsi elementi populacije imajo enako možnost, da bodo izbrani.

Numerus je število elementov vzorca. Oznaka N.

Statistična spremenljivka/podatek/znak je vrednost ali lastnost, ki jo proučujemo.
Vrste statističnih spremenljivk:

- **opisne/kvalitativne** statistične spremenljivke
- **vrstne/ordinalne** statistične spremenljivke
- **številske/kvantitivne** statistične spremenljivke

Številske statistične spremenljivke:

- **diskretne** številske spremenljivke – zavzamejo lahko posamezne vrednosti
- **zvezne** številske spremenljivke – zavzamejo lahko vsako vrednost z nekega intervala

Naloga 11.1. *Zapišite, kaj je v danem primeru populacija, vzorec, statistična enota, spremenljivka in ugotovite ali je spremenljivka opisna ali numerična in, če je numerična, ugotovite, ali je zvezna ali diskretna.*

- *Na spletni strani je anketa z vprašanjem "Ali imate doma pomivalni stroj?". Nanjo je odgovorilo* 254 *ljudi.*
- *V televizijski oddaji gledalci glasujejo za dva kandidata.*
- *Razrednik svojih* 28 *dijakov vpraša, kolikšna je oddaljenost njihovega doma do šole.*
- *Maturant piše seminarsko nalogo z naslovom "Uporaba TikTok-a med srednješolci". Pridobil je odgovore* 369 *srednješolcev, ki so odgovarjali na vprašanje "Ali uporabljaš TikTok?"*
- *Znanstveniki pri raziskavi spremljajo, koliko jajc znesejo kokoši na slovenskih farmah na mesec.*

Naloga 11.2. *Slovenija ima več kot* 6000 *naselij. Statistični urad Republike Slovenije je januarja 2024 naredil analizo naselij glede na število prebivalcev. Rezultati so prikazani v tabeli.*

velikostni razred naselja	število naselij
0	57
1 − 24	719
25 − 49	851
50 − 99	1256
100 − 199	1444
200 − 499	1109
500 − 999	359
1000 − 4999	199
5000 − 9999	23
10000 − 49999	16
50000+	2

Zapišite, kaj je v danem primeru populacija, statistična enota, spremenljivka in ugotovite ali je spremenljivka opisna ali numerična in, če je numerična, ugotovite ali je zvezna ali diskretna.

11.2 Urejanje in grupiranje podatkov

Podatke, pridobljene v posamezni raziskavi, moramo najprej urediti.
Če podatkov ni veliko, jih uredimo po velikosti v **ranžirno vrsto**, sicer jih združujemo v skupine, **frekvenčne razrede**.
Podatek z največjo vrednostjo označimo z x_{max}, podatek z najnižjo vrednostjo pa x_{min}.

Frekvenca f statističnega znaka je posamezno število diskretnih statističnih enot iste vrednosti.

Frekvenčni razred je skupina podatkov iz vzorca. Frekvenčni razredi so navadno enako široki, in skupaj zajamejo celoten razpon podatkov. Za zvezen nabor podatkov za frekvenčne razrede izberemo intervale (navadno oblike $[a, b)$).
Širina frekvenčnega razreda d_k je razlika med zgornjo (z_k) in spodnjo (s_k) mejo frekvenčnega razreda:

$$d_k = z_k - s_k.$$

Če so razredi enako široki, določimo njihovo širino kot kvocient med celotnim razponom podatkov $x_{max} - x_{min}$ in številom razredov.
Sredina frekvenčnega razred x_k je aritmetična sredina zogrnje in spodnje meje razreda:

$$x_k = \frac{z_k + s_k}{2}.$$

Grupirane podatke predstavimo s **frekvenčno preglednico/porazdelitvijo**.
Za podatke v frekvenčnih preglednicah računamo:

- **(absolutno) frekvenco** f_k – število podatkov z vrednostmi v danem frekvenčnem razredu;
- **relativno frekvenco** f'_k – delež celote, ki ga predstavlja število podatkov v danem frekvenčnem razredu;
- **(absolutno) kumulativno frekvenco** F_k – število podatkov, katerih vrednosti zavzemajo manjšo vrednost od zgornje meje danega frekvenčnega razreda;
- **relativno kumulativno frekvenco** F'_k – delež celote, ki ga predstavlja število podatkov v danem in vseh manjših frekvenčnih razredih.

Naloga 11.3. *Na šoli analizirajo količino prevzetih obrokov v jedilnici. Rezultati so zbrani v tabeli.*

Oddelek	Število prevzetih obrokov
1.a	12
1.b	14
1.c	20
2.a	17
2.b	16
2.c	9
3.a	13
3.b	16
3.c	14
4.a	21
4.b	8
4.c	12

Analizirajte podatke s frekvenčno preglednico. Podatke razdelite v razrede $5-9$, $10-14$, $15-19$, 20 *in več.*

Naloga 11.4. *Dijaki 3. a oddelka so zapisovali svoje pribljubljene barve.*
Zapisali so jih: modra, rdeča, rdeča, zelena, rumena, rdeča, modra, zelena, modra, modra, rumena, rdeča, zelena, modra, rumena, rumena, zelena, rdeča.
Analizirajte rezultate s frekvenčno preglednico.

Naloga 11.5. *Lokostrelec si beleži rezultate treningov.*
Vrednosti so bile: 10.3, 10.4, 9.9, 9.7, 10.2, 8.9, 9.4, 10.1, 9.0, 10.3, 9.5, 10.6.
Analizirajte rezultate s frekvenčno preglednico.

Naloga 11.6. *V frekvenčni preglednici so zbrani podatki o številu sorojencev dijakov 2. b oddelka. Dopolnite preglednico.*

Število sorojencev	f_k	f'_k	F_k	F'_k
0	5			
1		25 %		
2				
3		10 %		
skupaj	20	100 %	/	/

11.3 Mere osredinjenosti

Aritmetična sredina

Aritmetična sredina ali **povprečje** je količnik vsote vseh vrednosti statistične spremenljivke in števila teh vrednosti.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Če se vrednosti statistične spremenljivke ponavljajo (k_i vrednosti x_i), je formula sledeča:

$$\overline{x} = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m}{k_1 + k_2 + \cdots + k_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} k_ix_i}{\sum_{i=1}^{m} k_i}; \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = N$$

Pri grupiranih podatkih za vrednosti vzamemo sredine frekvenčnih razredov.

Modus

Modus ali **gostiščnica** Mo je vrednost statistične spremenljivke, ki se v množici vseh vrednosti najpogosteje ponavlja.

Če se v neki množici dve vrednosti pojavita enako mnogokrat najpogosteje, rečemo, da je porazdelitev vrednosti **bimodalna**.
Za grupirane podatke določamo **modalni razred**, to je tisti razred, ki ima največjo frekvenčno gostoto.

Mediana

Mediana ali **središčnica** Me je tista vrednost statistične spremenljivke, pri kateri je polovica vrednosti večjih ali enakih, druga polovica vrednosti pa manjših ali enakih od te vrednosti.

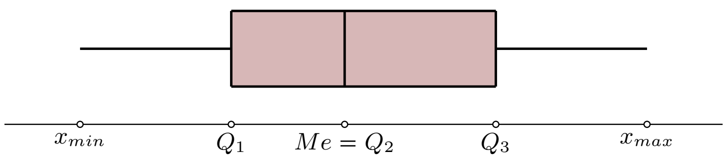
Če imamo liho število vrednosti statistične spremenljivke, za mediano vzamemo vrednost, ki stoji na mestu $\frac{n+1}{2}$ po velikosti urejenih podatkov.
Če je število vrednosti sodo, za vrednost mediane vzamemo aritmetično sredino srednjih dveh podatkov.

Kvartili

Mediana razdeli podatke na dve polovici. Ti dve polovici lahko spet razdelimo na dve polovici in dobimo štiri enako močne množice podatkov. Meje teh skupin imenujemo **kvartili**.

Prvi kvartil Q_1 je mediana prve (spodnje) polovice podatkov, **drugi kvartil** Q_2 je mediana Me vseh podatkov, **tretji kvartil** Q_3 pa je mediana druge (zgornje) polovice podatkov.

Vrednosti kvartilov, minimalno vrednost in maksimalno vrednost množice podatkov grafično predstavimo z **diagramom kvartilov** oziroma **šktalo z brki**.



Naloga 11.7. *Izračunajte aritmetično sredino količin.*

- 1.5 *s*, 3.5 *s*, 1 *s*
- 4 *km*, 2000 *m*, 3 *km*
- 4 €, 2 €, 3 €, 1 €, 5 €

Naloga 11.8. *Izračunajte aritmetično sredino danim podatkom.*

- $2, 3, 1, 8, 19, 2, 7$
- $13, 39, 12$
- $0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.6$

Naloga 11.9. *Določite modus danim številskim podatkom.*

- $1, 4, 2, 4, 1, 6, 3, 4, 1, 4, 6, 4, 4, 8$
- $3, 25, 10, 3, 5, 7, 5, 7, 9, 4, 49$
- $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{8}, \frac{2}{9}$
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{10}, \frac{8}{9}$

Naloga 11.10. *V porodnišnici so izmerili dolžine dojenčkov, ki so se rodili v enem dnevu.*
$50, 51, 51, 44, 47, 48, 53, 49, 52, 55, 46, 50, 50, 49, 47, 47$
Določite mediano podatkov.

Naloga 11.11. *Otroci v vrtcu so metali žogo na koš in si zapisovali dosežke. Podatki so prikazani v preglednici.*

Otrok	Jaka	Jure	Miha	Polona	Valerija	Tina	Mojca	Cene	Darja
Št. košev	5	7	10	8	5	6	9	9	4

Izračunajte, koliko košev je otrok zadel v povprečju. Podatke uredite po vrsti in določite Mo, Me ter narišite škatlo z brki.

11.4 Mere razpršenosti

Informacijo o **porazdelitvi** oziroma **razpršenosti** podatkov lahko izračunamo s pomočjo: variacijskega razmika, interkvartilnega ranga, variance in standarnega odklona.

Variacijski razmik

Variacijski razmik R je razlika med maksimalno in minimalno vrednostjo statistične spremenljivke:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Variacijski razmik je zelo odvisen od ekstremnih vrednosti, posebno osamelcev, zato ga uporabljamo le v kombinaciji z drugimi merami razpršenosti.

Interkvartilni rang

Interkvartilni rang oziroma **medčetrtinski razmik** IR je razlika med vrednostjo prvega in tretjega kvartila:

$$IR = Q_3 - Q_1.$$

Osamelec je podatek, katerega vrednost je za več kot 3-kratnik interkvartilnega ranga IR nad tretjim kvartilom Q_3 ali pod prvim kvartilom Q_1.
Podatek je "pogojno osamelec", če je njegova vrednosz za več kot 1.5-kratnik interkvartilnega ranga IR nad tretjim kvartilom Q_3 ali pod prvim kvartilom Q_1.

Interkvartilni rang je mera razpršenosti, ki ni občutljiva na osamelce.

Varianca

Varianca σ^2 predstavlja aritmetično sredino kvadratov odmikov vrednosti statistične spremenljivke od aritmetične sredine:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

Standardni odklon

Standardni odklon σ izračunamo kot koren variance:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

Predstavlja povprečje odmikov vrednosti statistične spremenljivke od aritmetične sredine.

Naloga 11.12. *V preglednici so predstavljene cene treh izdelkov v trgovini po posameznih mesecih leta 2019.*

Izdelek	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Avg	Sep	Okt	Nov
Kruh	3.35	3.29	3.34	3.38	3.38	3.37	3.38	3.55	3.53	3.54	3.49
Jagode	8.73	7.18	5.52	4.48	5.72	5.64	6.49	6.58	7.15	7.58	8.34
Cvetača	2.04	2.17	1.58	1.75	2.13	1.85	1.93	1.87	1.81	1.99	1.80

Izračunajte povprečno ceno in standardni odklon cene vsakega izdelka.

Naloga 11.13. *V preglednici je prikazano število rojstev v Sloveniji po letih.*

Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Število	21111	21165	20641	20345	20241	19585	19328	18767	18989

Izračunajte povprečno število rojstev in standardni odklon.

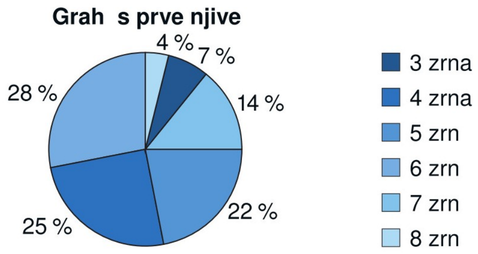
Naloga 11.14. *Pridobili smo podatke (urejene po velikosti):* $1, 13, 14, 15, 15, 15, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20$ *in* 40.

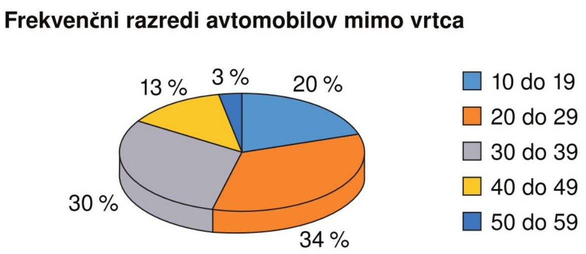
- *Opišite razpršenost podatkov* R, IR, Q_1, Q_3, σ, $\overline{x}$.
- *Največjo in najmanjšo vrednost (v tem primeru sta to osamelca) odstranimo. Kako se spremeni razpršenost podatkov?*

11.5 Grafično prikazovanje podatkov

Strukturni krog

Strukturni krog ali **krožni diagram** uporabljamo, kadar so podatki razvrščeni v malo frekvenčnih razredov ali ne dosežejo veliko različnih diskretnih vrednosti.



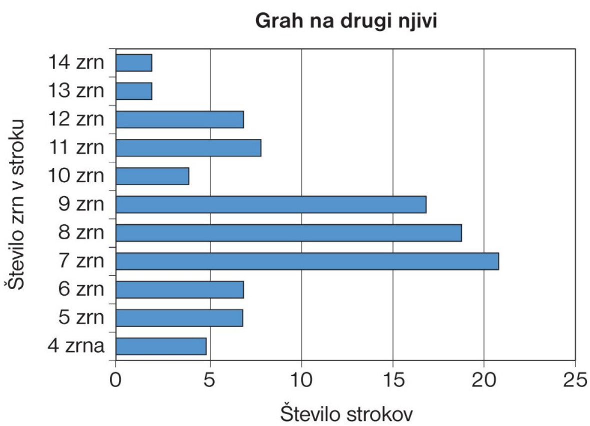


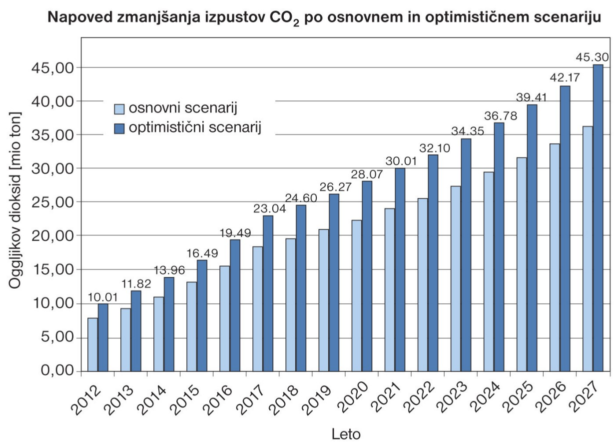
Celoto predstavlja 360°, za ostale deleže središčne kote izračunamo s sklepnim računom.

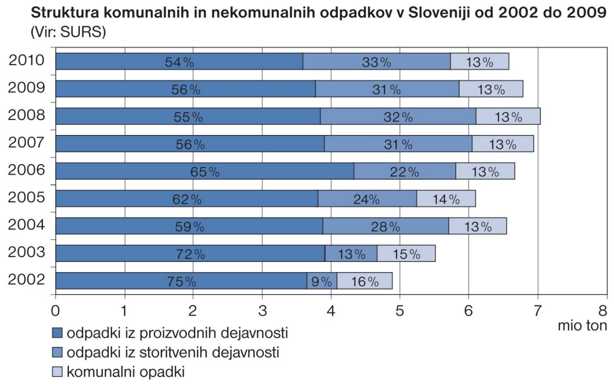
Stolpčni diagram

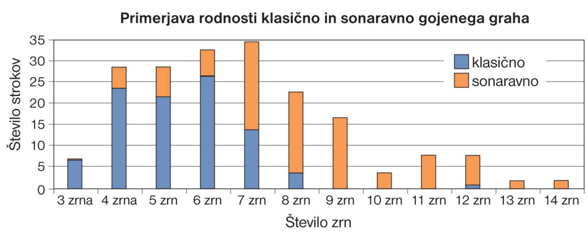
Stolpčni diagram uporabljamo, ko so podatki razvrščeni v veliko frekvenčnih razredov ali lahko dosežejo veliko diskretnih vrednosti.

Stolpčni diagrami so lahko **pokončni** ali **ležeči**. Če želimo prikazati več podatkov naenkrat, uporabimo **sestavljeni** ali **strukturni** stolpčni diagram.



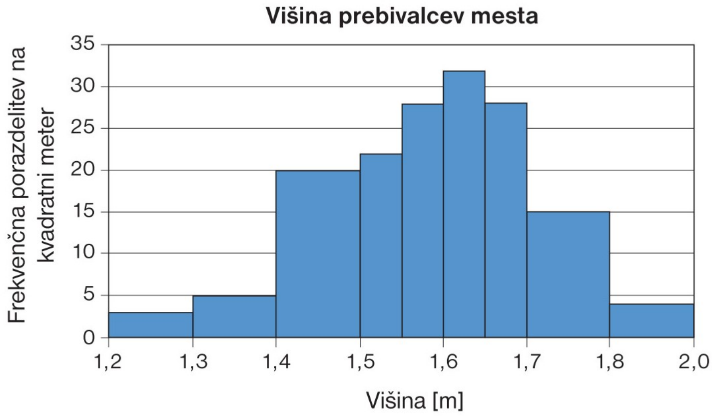






Histogram

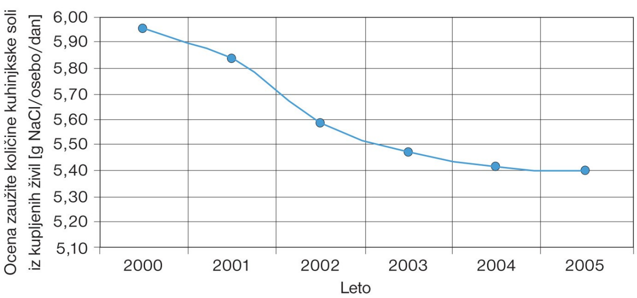
Histogram uporabljamo za prikaz grupiranih podatkov.

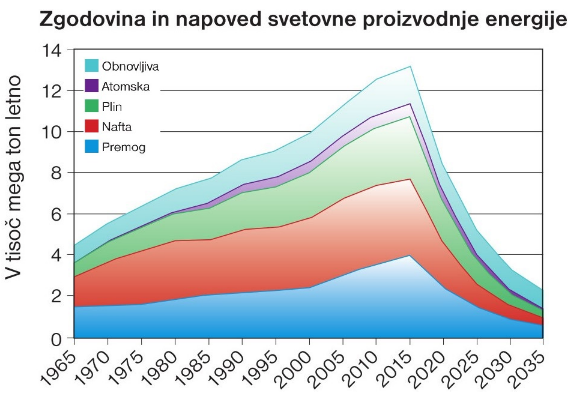


Širine frekvenčnih razredov niso nujno enake. Meje razredov narišemo na vodoravni osi, frekvence posameznih razredov pa na navpični osi.

Linijski diagram

Linijski diagram/poligon uporabljamo, ko želimo prikazati postopno spreminjanje vrednosti nekega podatka skozi daljše časovno obdobje. Frekvenčne porazdelitve ponazorimo s **frekvenčnim poligonom**, podatki so lahko zvezni ali grupirani.





Naloga 11.15. *Na matematičnem testu je bilo mogoče doseči* 50 *točk. Dosežki so bili:* 35, 22, 41, 47, 36, 30, 27, 19, 31, 43, 48, 44, 23, 26, 36, 10, 33, 14, 9.
Razdelite jih v pet enako velikih razredov ter predstavite s histogramom.

Naloga 11.16. *Otroci v vrtcu so metali žogo na koš in si zapisovali dosežke. Podatki so prikazani v preglednici.*

Otrok	Jaka	Jure	Miha	Polona	Valerija	Tina	Mojca	Cene	Darja
Št. košev	5	7	10	8	5	6	9	9	4

Izračunajte, koliko košev je otrok zadel v povprečju. Podatke uredite po vrsti in določite Mo, Me *ter narišite škatlo z brki.*

Naloga 11.17. *Bojana beleži, koliko časa potrebuje za pot do šole. Podatke je zapisala v preglednico.*

Dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Čas [min]	9	11	10	8	11	10	9	12	9	11

S stolpčnim diagramom predstavite, kako pogosto v šolo potuje 8 *minut,* 9 *minut ...*

Naloga 11.18. *V domu ostarelih občanov je* 500 *oskrbovancev. Od* 50 *do* 60 *let jih je* 15 %, *med* 60 *in* 70 *leti je* 160 *oskrbovancev, med* 70 *in* 80 *leti pa* 200 *starostnikov. Drugi so stari med* 80 *in* 90 *let.*

- *Iz grupiranih podatkov izračunajte povprečno starost oskrbovancev tega doma.*
- *Grafično ponazorite starost oskrbovancev.*

Poglavje 12

Geometrija v ravnini

12.1 Osnovni geometrijski pojmi

Evklid je v prvi knjigi *Elementov* postavil 23 'opredelitev' temeljnih geometrijskih pojmov. Med njimi so:

- **Točka** je tisto, kar nima delov – nima razsežnosti.
- **Črta** je dolžina brez širine – ena razsežnost.
- **Ploskev** je tisto, kar ima samo dolžino in širino – dve razsežnosti.

Tem trditvam sledijo **aksiomi** (temeljne resnice) – privzamemo jih kot veljavne hipoteze, **izreki** – dokazujemo jih z aksiomi in prej dokazanimi izreki, in **definicije** – opisi novih pojmov in lastnosti.

Incidenčni aksiomi

Definicija 12.1. *Incidenca je relacija, ki povezuje točko in premico – premica in točka sta v relaciji, če točka leži na premici;* $A\ R\ p$, *če* $A \in p$.

Aksiom 12.2. *Za dve različni točki* A *in* B *obstaja natanko določena premica* p, *tako da točki* A *in* B *ležita na njej.*

Aksiom 12.3. *Za vsako premico* p *obstajata vsaj dve različni točki* P *in* Q, *ki ležita na njej.*

Aksiom 12.4. *Obstajajo tri različne točke, ki ne ležijo hkrati na isti premici.*

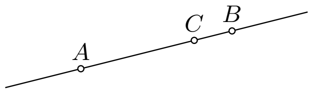
Definicija 12.5. *Točke* $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ *ki ležijo na isti premici, so* ***kolinearne****, če ne ležijo na isti premici, pa so* ***nekolinearne****.*

Izrek 12.6. *Dve različni premici imata lahko največ eno skupno točko.*

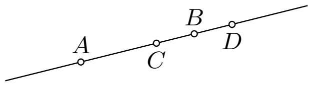
Definicija 12.7. *Premici, ki imata natanko eno skupno točko, se* ***sekata****, imenujemo ju* ***sečnici****, njuno skupno točko pa* ***presečišče*** *premic.*

Definicija 12.8. *Premici, ki ležita na isti ravnini in nimata nobene skupne točke ali imata vse točke skupne – sovpadata, sta* ***vzporedni****, imenujemo ju* ***vzporednici****.*

Aksiom 12.9. *Če so tri različne točke kolinearne, ena vedno leži med drugima dvema.*



Aksiom 12.10. *Če sta A in B različni točki premice p, potem na premici p ležita vsaj še točki C in D, in sicer C leži med A in B, D pa tako, da je C med A in D.*



Izrek 12.11. *Med dvema različnima točkama premice je neskončno mnogo točk.*

Definicija 12.12. *Množica točk premice, ki ležijo med različnima točkama A in B, vključno z A in B, je* ***daljica*** *AB. Točki A in B sta njeni* ***krajišči****.*

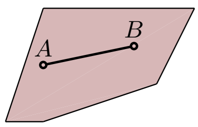
Definicija 12.13. *Poljubna točka premice razdeli premico na dva* ***poltraka****. To točko imenujemo* ***izhodišče****, ponavadi jo označimo z O.*

Definicija 12.14. *Premica, na kateri leži daljica oziroma poltrak, je* ***nosilka*** *daljice oziroma poltraka.*

Definicija 12.15. ***Enostavni lik*** *je množica točk v ravnini, ki jo omejuje sklenjena krivulja, ki sama sebe ne seka.*

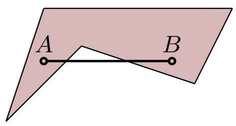
Definicija 12.16. *Množica točk v ravnini je* ***konveksna****, če za poljubni točki A in B iz te množice velja, da je daljica AB njena podmnožica.*

$$\mathcal{M} \text{ konveksna} \Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB \subseteq \mathcal{M}$$

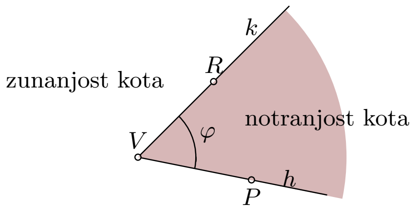


Množica točk, ki ni konveksna, je ***nekonveksna*** *oziroma* ***konkavna****.*

$$\mathcal{M} \text{ nekonveksna} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB \not\subseteq \mathcal{M}$$



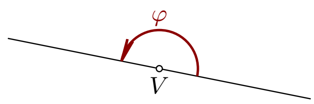
Definicija 12.17. *Dva poltraka s skupnim izhodiščem določata dva* ***kota****. Izhodišče poltrakov imenujemo* ***vrh*** *kota, poltraka pa imenujemo* ***kraka*** *kota.*



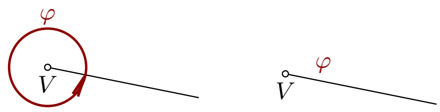
Če poltraka ne ležita na isti premici, je eden od kotov konveksen, drugi pa je nekonveksen.
Kot lahko označimo na več načinov:

- $\angle(h, k)$, kjer sta h in k poltraka, ki kot določata;
- $\angle PVR$, kjer je P točka na enem poltraku, V vrh kota in R točka na drugem poltraku;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – z grškimi črkami.

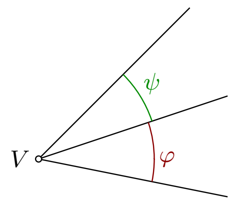
Definicija 12.18. *Če poltraka s skupnim izhodiščem ležita na isti premici, vendar na različnih straneh izhodišča, določata dva enaka konveksna kota –* ***iztegnjena kota****.*



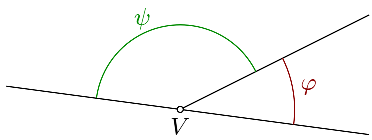
Definicija 12.19. *Če se poltraka na isti premici prekrivata, določata* ***polni kot*** *ali* ***ničelni kot****.*



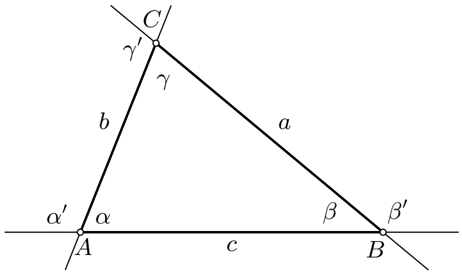
Definicija 12.20. *Kota s skupnim vrhom, ki imata en skupen krak, presek njunih notranjosti pa je prazen, sta* ***sosedna kota****.*



Definicija 12.21. *Sosedna kota, katerih kraka, ki nista skupna, ležita na isti premici, sta* ***sokota****.*



Definicija 12.22. *Tri nekolinearne točke A, B in C določajo* ***trikotnik*** *$\triangle ABC$. Točke A, B in C so* ***oglišča*** *trikotnika, daljice AB, BC in AC so njegove* ***stranice****.*



*Koti α, β in γ so **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti** trikotnika.*

Trikotnik je **pozitivno orientiran**, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca; če si sledijo v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **negativno orientiran**.

Definicija 12.23. *Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ v ravnini, od katerih nobene zaporedne tri niso kolinearne, določajo n-**kotnik**. Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ so **oglišča** n-kotnika; daljice, ki povezujejo sosedni oglišči, $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ so **stranice** n-kotnika; daljice, ki povezujejo po dve nesosedni oglišči, pa so **diagonale** n-kotnika.*

Poljuben n-kotnika ima

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonal – iz vsakega od n oglišč gre $n-3$ diagonal, vsaka pa je šteta dvakrat.

Če za vsako nosilko stranice n-kotnika velja, da preostala oglišča ležijo na isti strani te nosilke, je n-kotnik **konveksen**.

Naloga 12.24. *Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.*

Naloga 12.25. *Ugotovite, ali obstaja n-kotnik, ki ima desetino toliko diagonal kot 28-kotnik. Če obstaja, izračunajte, koliko stranic ima.*

Naloga 12.26. *Kateri n-kotnik ima štirikrat toliko diagonal kot stranic?*

Naloga 12.27. *Izračunajte, kateri n-kotnik ima: 104 diagonale, 230 diagonal, $2n-5$ diagonal.*

Naloga 12.28. *Pokažite, da ne obstaja n-kotnik, ki ima 13 diagonal.*

Naloga 12.29. *Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.*
- *Tri različne točke, so vedno nekolinearne.*
- *Petkotnik ima enako število diagonal in stranic.*
- *Štiri različne premice se sekajo v največ 4 različnih točkah.*
- *Skozi štiri kolinearne točke gredo tri različne premice.*
- *Vzporedni premici imata lahko neskončno mnogo skupnih točk.*

Naloga 12.30. *Pokažite, da je število diagonal 25-kotnika večkratnik števila njegovih stranic.*

Naloga 12.31. *Vsota števila stranic in diagonal n-kotnika je 105? Kateri n-kotnik je to?*

Naloga 12.32. *Izračunajte, kateri n-kotnik ima toliko diagonal kot stranic.*

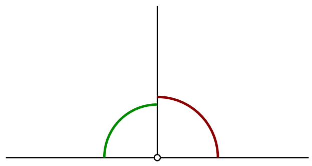
Naloga 12.33. *Člani filatelističnega društva so se domenili, da si bodo za praznike spet pošiljali voščilnice po klasični pošti. Ko so se dobili po novem letu, so prinesli vse voščilnice in jih našteli 132. Izračunajte, koliko članov društva, si je medseboj poslalo voščilnice.*

12.2 Skladnost in merjenje

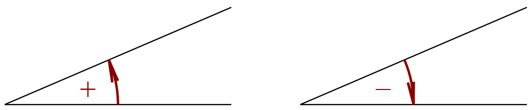
Definicija 12.34. *Dva lika L in L' sta* ***skladna****, če lahko lik L prenesemo na lik L' tako, da se popolnoma prekrijeta.*
Znak za skladnost je $\cong$.

Skladnost je v množici ravninskih likov *ekvivalenčna relacija*, saj je:
- *refleksivna*: $L \cong L$ – vsaka množica je skladna sama s seboj;
- *simetrična*: $L \cong L' \Rightarrow L' \cong L$ – če je prva množica skladna z drugo, je tudi druga skladna s prvo;
- *tranzitivna*: $L \cong L' \wedge L' \cong L'' \rightarrow L \cong L''$ – če je prva množica skladna z drugo in druga skladna s tretjo, je tudi prva množica skladna s tretjo množico.

Definicija 12.35. *Kot, ki je skladen s svojim sokotom, je* ***pravi kot****.*



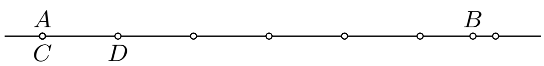
Če si kraka sledita v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca, je **orientacija kota pozitivna**, če pa si sledita v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **orientacija kota negativna**.



Daljici AB in CD, ki nista skladni, lahko premaknemo na poljubni premici tako, da levi krajišči sovpadata in da eno od desnih krajišč, npr. D leži med A in B. V tem primeru je daljica AB **daljša** od daljice CD oziroma je daljica CD **krajša** od daljice AB.

Aksiom 12.36 (Arhimedov aksiom)**.** *Obstaja tako naravno število n, pri katerem je vsota n krajših daljic CD daljša od daljice AB, vsota $n-1$ krajših daljic CD pa je kvečjemu skladna z daljico AB.*

$$n \cdot |CD| > |AB| \qquad (n-1) \cdot |CD| \leqslant |AB|$$



Daljico CD, s katero smo izmerili daljico AB, imenujemo **enotska daljica**. Tako smo daljici AB priredili natančno določeno število – **dolžino** daljice AB oziroma **razdaljo** točk A in B.

$$|AB| = d(A, B)$$

Aksiom 12.37. *Če je AB poljubna daljica, A' pa točka na poljubnem poltraku, obstaja na tem poltraku natančno določena točka B', da je daljica $A'B'$ skladna z daljico AB.*

$$A'B' \cong AB$$

Izrek 12.38. *Skladni daljici imata enako dolžino.*

Aksiom 12.39. *Naj daljici AB in BC ležita na isti premici in naj imata skupno le točko B. Daljici $A'B'$ in $B'C'$ naj ležita na tej ali neki drugi premici in naj imata skupno točko B'. Če velja $AB \cong A'B'$ in $BC \cong B'C'$, potem velja tudi $AC \cong A'C'$.*

Izrek 12.40. *Dolžina vsote daljic je enaka vsoti dolžin posameznih daljic.*

Enote

Osnovna enota za merjenje dolžine je **meter**.
Iz nje izpeljane enote pa so *decimeter*, *centimeter*, *milimeter*, *kilometer* itd.

$$1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm$$

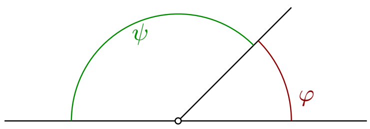
$$1\ km = 1000\ m$$

Enota za merjenje kotov je **kotna stopinja** – velikost $\frac{1}{360}$ polnega kota.
Izpeljani enoti sta *(kotna) minuta* in *(kotna) sekunda.*

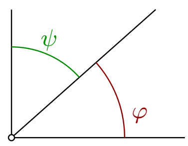
$$1^\circ = 60' = 3600''$$

Velikost kota nič je 0°, pravega kota je 90°, iztegnjenega kota je 180°, polnega kota pa je 360°.

Definicija 12.41. *Kota φ in ψ, katerih vsota meri 180°, sta* ***suplementarna kota****.*



Definicija 12.42. *Kota φ in ψ, katerih vsota meri 90°, sta* ***komplementarna kota****.*



Sokota sta vedno suplementarna kota.

Skladnost trikotnikov

Definicija 12.43. *Dva trikotnika sta* ***skladna****, če imata paroma skladne vse stranice in tem stranicam nasprotne kote.*

Aksiom 12.44. *Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata v dveh stranicah in v vmesnem kotu.*

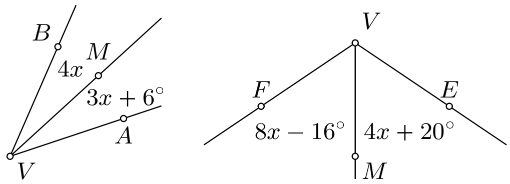
Izrek 12.45. *Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta skladna, če se ujemata:*

1. *v vseh treh stranicah;*
2. *v eni stranici in obeh priležnih kotih;*
3. *v dveh stranicah in kotu, ki leži nasproti daljši od obeh stranic.*

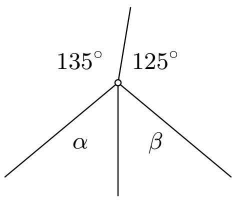
Naloga 12.46. *Izračunajte dolžino daljice, če ena polovica meri $2x - 7$ enot, druga polovica pa $x + 8$ enot.*

Naloga 12.47. *Izračunaj dolžino x daljice AB, če je točka S njeno razpolovišče, točka R pa razpolovišče daljice SB in je $|SR| = \frac{x}{3} - 1$.*

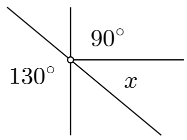
Naloga 12.48. *Izračunajte velikosti kotov $\angle AVM$ in $\angle FVE$, če poltrak VM obakrat razpolavlja kot.*



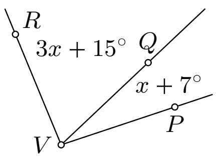
Naloga 12.49. *Izračunajte velikosti kotov α in β, če je $\alpha = \beta$. Podatke razberite s skice.*



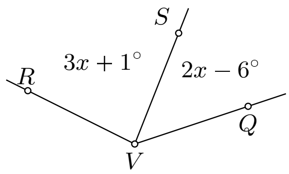
Naloga 12.50. *Iz podatkov na skici izračunajte neznano velikost kota x.*



Naloga 12.51. *Izračunajte velikost kota $\angle PVQ$, če je $\angle PVR = 94°$.*



Naloga 12.52. *Izračunajte velikost kota $\angle SVR$, če je $\angle QVS = 50°$.*



Naloga 12.53. *Kot $\varphi = 76°36'53''$ zapišite v stopinjah na štiri mesta natančno, kot $\psi = 34.78°$ pa zapišite v stopinjah, minutah in sekundah.*

Naloga 12.54. *Kotu $\varphi = 37°16'43''$ izračunajte suplementarni in komplementarni kot.*

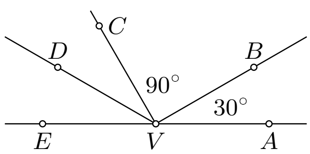
Naloga 12.55. *Razika dveh komplementarnih kotov je $37°16'$. Izračunajte velikosti kotov.*

Naloga 12.56. *Izračunajte velikost kota φ, ki je petkratnik svojega komplementarnega kota.*

Naloga 12.57. *Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.*

- *Sokota sta suplementarna.*
- *Kot z velikostjo 45° je komplementaren samemu sebi.*
- *Dve premici, ki se sekata, lahko določata kota z velikostjo 43° in 137°.*
- *Vsota velikosti dveh komplementarnih kotov je pravi kot.*
- *Suplementarna kota sta vedno tudi sokota.*

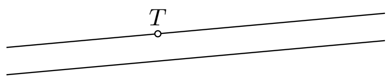
Naloga 12.58. *Poltrak VD razpolavlja $\angle CVE$, $\angle BVC$ je pravi kot. Določite velikosti kotov $\angle AVD$ in $\angle BVE$.*



12.3 Vzporednost in pravokotnost

Vzporednost

Aksiom 12.59 (Aksiom o vzporednici)**.** *Skozi izbrano točko, ki ne leži na premici, lahko tej premici načrtamo natanko eno vzporednico.*

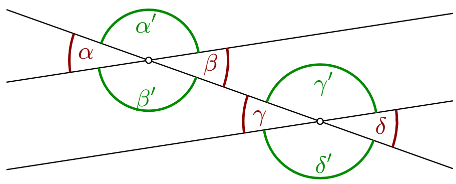


Vzporednost je v množici premic na ravnini *ekvivalenčna relacija*, saj je:

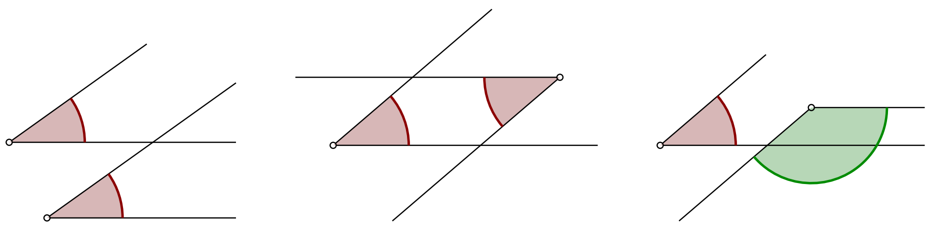
- *refleksivna*: $p \parallel p$ – vsaka premica je vzporedna sama sebi;
- *simetrična*: $p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$ – če je premica p vzporedna premici q, je tudi premica q vzporedna premici p;
- *tranzitivna*: $p \parallel q \wedge q \parallel r \rightarrow p \parallel r$ – če je premica p vzporedna premici q, premica q pa vzporedna premici r, je tudi premica p vzporedna premici r.

Če vzporednici sekamo s premico, dobimo dve presečišči, ob njiju pa pare **kotov z vzporednimi kraki**:

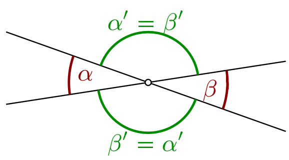
- pari kotov (α, γ), (β, δ), (α', γ'), (β', δ') imajo oba kraka vzporedna v isto smer;
- pari kotov z istim vrhom (α, β); (γ, δ), (α', β'); (γ', δ') imajo oba kraka vzporedna v nasprotno smer – **sovršni koti**;
- pari kotov (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ') imajo en krak vzporeden v isto smer, drugi krak pa vzporeden v nasprotno smer.



Izrek 12.60. *Para konveksnih kotov z vzporednimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.*



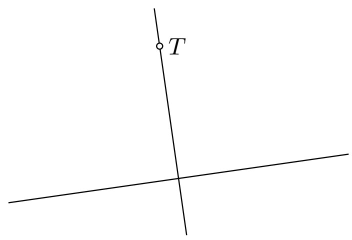
Sovršna kota sta skladna – imata isti sokot.



Pravokotnost

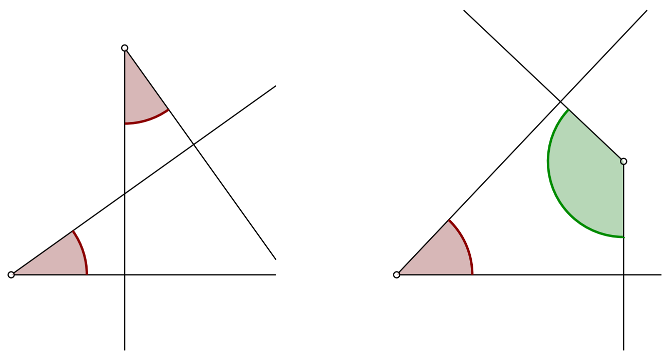
Definicija 12.61. ***Pravokotnica*** *je premica, ki dano premico seka pod pravim kotom.*

Izrek 12.62. *Skozi izbrano točko lahko na dano premico načrtamo natanko eno pravokotnico.*

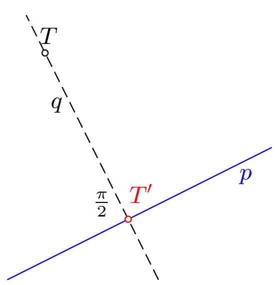


Kota s pravokotnimi kraki sta konveksna kota, katerih nosilki krakov enega kota sta pravokotni na nosilki krakov drugega kota.

Izrek 12.63. *Para konveksnih kotov s pravokotnimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.*



Definicija 12.64. ***Pravokotna projekcija*** *točke T na premico p je točka T', ki leži na presečišču premice p in pravokotnice q skozi točko T na premico p.*
Točka T' je točki T najbližja točka premice p.



Pravokotna projekcija daljice AB na premico je daljica $A'B'$, katere krajišči sta pravokotni projekciji točk A in B.

Razdalja točke T od premice p je:

$$d(T, p) = d(T, T') = |TT'| .$$

Toge preslikave

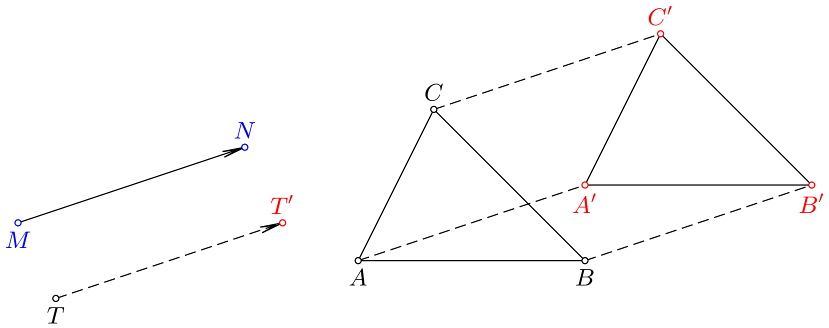
Definicija 12.65. ***Toga preslikava*** *(izometrija) je preslikava v ravnini, ki ohranja razdalje.*

$$\tau : A \mapsto A'$$
$$\tau : B \mapsto B'$$
$$d(A,B) = d(A',B')$$

Med toge preslikave spadajo:
- **vzporedni premiki**;
- **zrcaljenje preko premice/premice**;
- **rotacija okoli točke**.

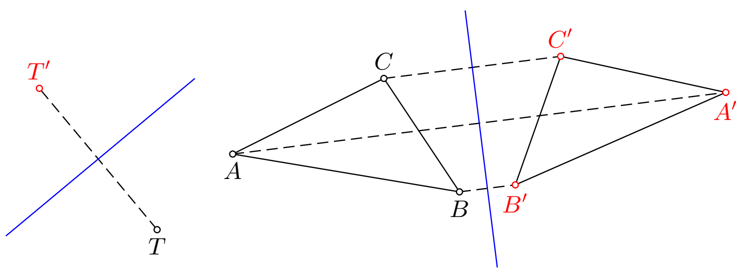
Če kombiniramo več togih preslikav, je dobljena preslikava spet toga preslikava.

Vzporedni premik ali **translacija** za dano usmerjeno daljico $\overrightarrow{MN}$ preslika točko T v tako točko T', da sta daljici TT' in MN enako dolgi, vzporedni in enako usmerjeni.



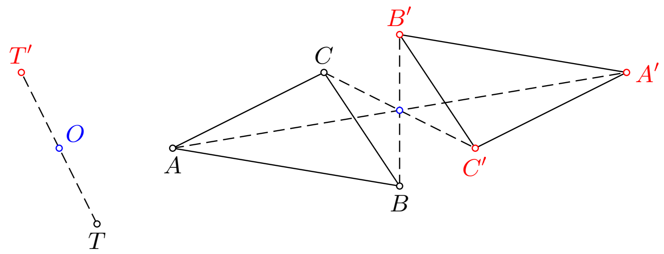
Vzporedni premik ohranja orientacijo likov, daljice preslika v enako dolge vzporedne daljice, ohranja velikost kotov, like preslika v skladne like, nima negibnih točk za $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$.

Zrcaljenje čez premico p preslika točko T v tako točko T', da premica p pod pravim kotom razpolavlja daljico TT'.



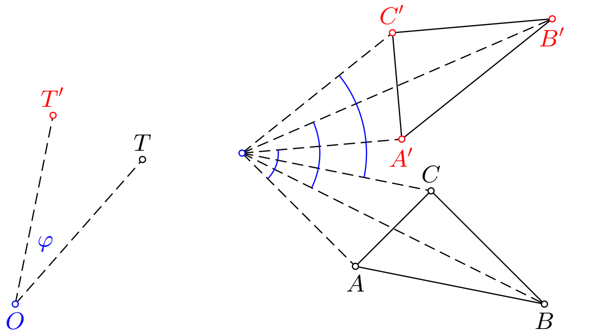
Zrcaljenje čez premico daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikost kotov, ne ohranja orientacije likov, like preslika v skladne like, premic ne preslika v vzporedne premice.

Zrcaljenje čez točko O preslika točko T v tako točko T', da je O razpolovišče daljice TT'. Ta preslikava je enaka vrtenju okrog točke za 180°.



Zrcaljenje čez točko daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice preslika v vzporedne premice.

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



Vrtenje okoli točke preslika daljice v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premic pa ne preslika v vzporedne premice.

Simetrija

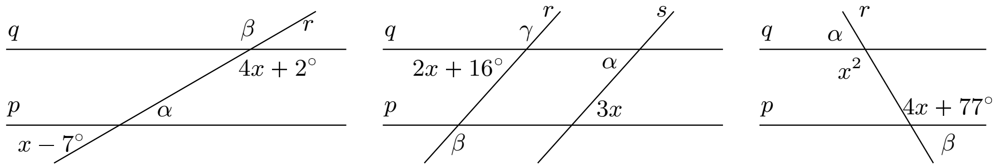
Množica točk $\mathcal{M}$ je **simetrična/somerna glede na premico** p, če se pri zrcaljenju čez premico p preslika sama vase. Premico p imenujemo **simetrala/somernica/simetrijska os** množice $\mathcal{M}$.

Množica točk $\mathcal{M}$ je **središčno simetrična/somerna glede na točko** T, če se pri zrcaljenju čez točko T preslika sama vase. Točko T imenujemo **center simetrije** množice $\mathcal{M}$.

Naloga 12.66. *Narišite kvadrat s stranico dolžine* 1 *in ga:*

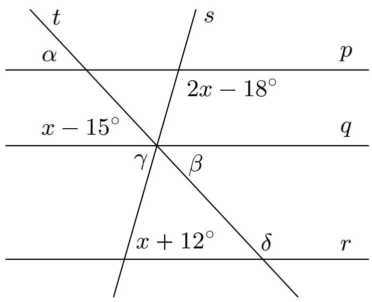
- *vzporedno premaknite vzdolž ordinatne osi za* 3 *enota;*
- *zavrtite okrog oglišča B za kot 45° v negativni smeri;*
- *zrcalite preko nosilke stranice CD.*

Naloga 12.67. *Izračunajte velikosti kotov α, β in γ. Podatke razberite iz skic. Velja $p \parallel q$ in $r \parallel s$.*



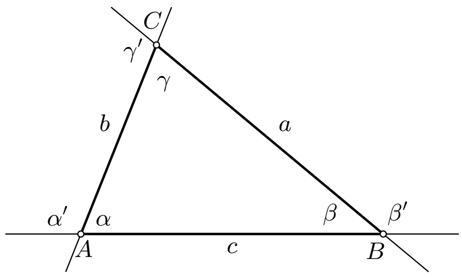
Naloga 12.68. *Izračunajte velikosti vseh notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je vsota velikosti dveh zunanjih kotov $\alpha' + \gamma' = 230^\circ$, vsota velikosti dveh notranjih kotov pa $\alpha + \beta = 70^\circ$.*

Naloga 12.69. *S skice preberite ustrezne podatke ter izračunajte velikosti kotov α, β, γ in δ. Pri tem velja, da so premice p, q in r vzporedne.*



12.4 Trikotnik

Definicija 12.70. ***Trikotnik*** *je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami –* ***stranicami*** *(a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo* ***oglišča*** *trikotnika.*



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Izrek 12.71. *Vsota notranjih kotov trikotnika je* $180°$*:*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Izrek 12.72. *Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:*

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Izrek 12.73. *Vsota zunanjih kotov trikotnika je* $360°$*:*

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°.$$

Izrek 12.74. *Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.*

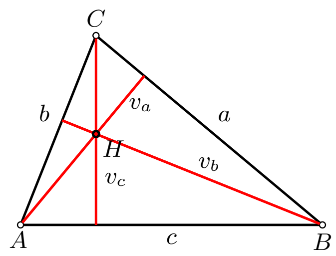
$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Izrek 12.75 (Trikotniška neenakost)**.** *Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin drugih dveh stranic.*

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

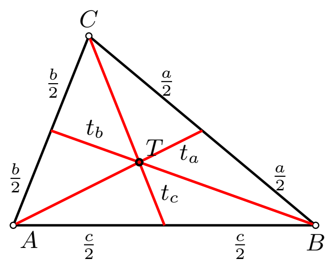
Izrek 12.76. *Vsaka stranica trikotnika je daljša od absolutne vrednosti razlike dolžin drugih dveh stranic.*

Definicija 12.77. ***Višina*** *na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.*



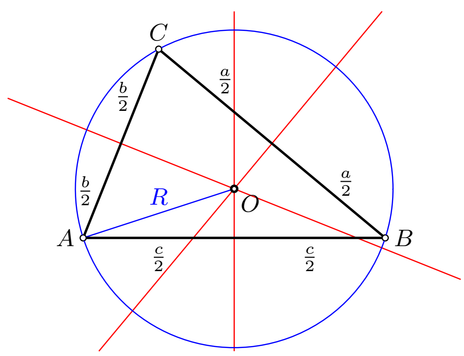
Izrek 12.78. *Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo* ***višinska točka*** *ali* ***ortocenter****.*

Definicija 12.79. ***Težiščnica*** *na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.*



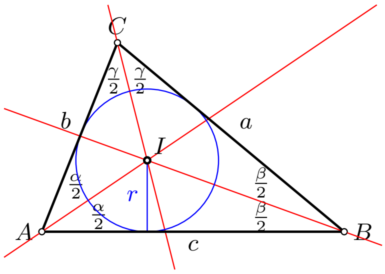
Izrek 12.80. *Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki –* ***težišču*** *ali* ***baricentru*** *trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju* $1 : 2$*.*

Izrek 12.81. *Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki –* ***središču trikotniku očrtane krožnice****.*



Očrtana krožnica poteka skozi vsa oglišča trikotnika. Vse stranice trikotnika so tetive krožnice.

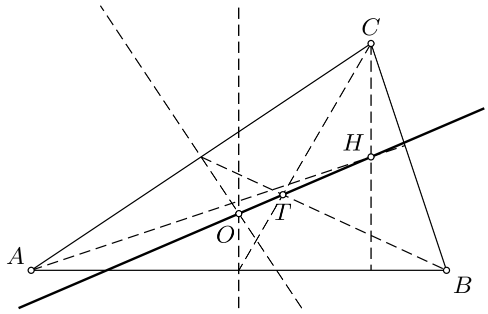
Izrek 12.82. *Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je* ***središče trikotniku včrtane krožnice****.*



Včrtana krožnica ima vse tri stranice trikotnika za tangente.

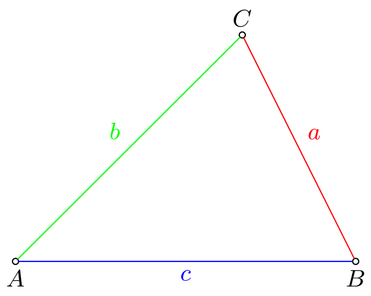
Težišče, središče trikotniku očrtane kroznice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Izrek 12.83. *Višinska točka, središče očrtane krožnice in težišče so vedno kolinearne. Premico, ki jih povezuje, imenujemo* ***Eulerjeva premica****.*

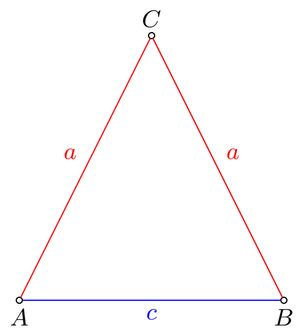


Vrste trikotnikov glede na stranice

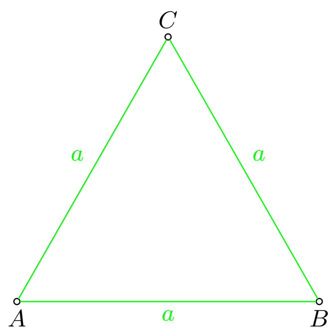
- raznostranični trikotnik – vse tri stranice različno dolge, vsi trije koti so različni



- enakokraki trikotnik – dve stranici enako dolgi ⇒ kota ob osnovnici sta skladna

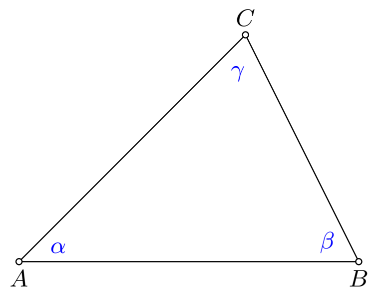


- enakostranični ali pravilni trikotnik – vse tri stranice enako dolge ⇒ vsi trije koti so skladni

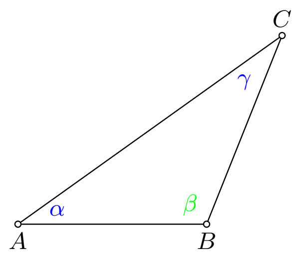


Vrste trikotnikov glede na kote

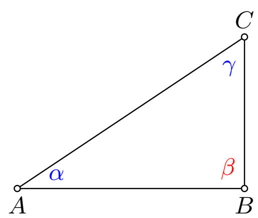
- ostrokotni trikotnik – ima tri ostre notranje kote



- topokotni trikotnik – ima en topi notranji kot, ostala dva kota ostra



- pravokotni trikotnik – ima en pravi notranji kot, ostala dva kot ostra



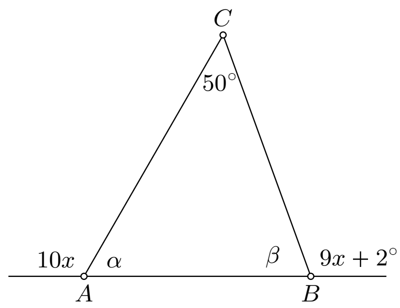
Naloga 12.84. *Dve stranici trikotnika merita* 2 *in* 7 *enot. Zapišite interval vrednosti za dolžino tretje stranice tega trikotnika.*

Naloga 12.85. *Ali obstaja trikotnik, katerega dolžine stranic so rešitve sistema enačb:*

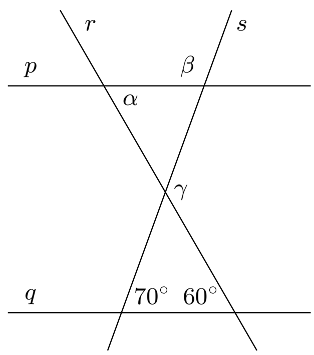
$$\begin{aligned} a+b+c &= 16 \\ a-c &= 2 \\ a+b &= 13. \end{aligned}$$

Naloga 12.86. *Za katere vrednosti števila x obstaja trikotnik s stranicami dolžin $x+7$, $2x+2$ in $3x-1$?*

Naloga 12.87. *Izračunajte velikosti kotov α in β.*



Naloga 12.88. *Premici p in q sta vzporedni. Izračunajte velikosti kotov α, β in γ.*



Naloga 12.89. *Izračunajte velikosti vseh notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je vsota velikosti dveh zunanjih kotov $\alpha' + \gamma' = 230°$, vsota velikosti dveh notranjih kotov pa $\alpha + \beta = 70°$.*

Naloga 12.90. *Izračunajte velikosti vseh notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je vsota velikosti dveh zunanjih kotov $\alpha' + \beta' = 234°$, razlika velikosti dveh notranjih kotov pa $\alpha - \beta = 28°$.*

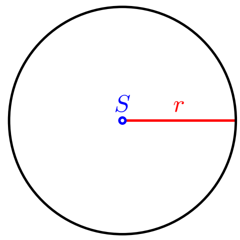
Naloga 12.91. *Narišite trikotnik s podatki:*

- $a = 4$ *cm*, $b = 5$ *cm in* $c = 7$ *cm*,
- $a = 4$ *cm*, $b = 6$ *cm in* $\beta = 60°$,
- $a = 4$ *cm*, $b = 4.5$ *cm in* $t_a = 4$ *cm*,
- $b = 4$ *cm*, $t_b = 5$ *cm in* $\gamma = 105°$,
- $v_a = 4$ *cm*, $t_c = 2.5$ *cm in* $\beta = 30°$,
- $b = 5$ *cm*, $v_a = 2$ *cm in* $\beta = 30°$,
- $a + b + c = 13$ *cm*, $v_c = 3$ *cm in* $\alpha = 60°$,
- $a + b = 7$ *cm*, $\alpha = 45°$ *in* $v_b = 4$ *cm*.

12.5 Krožnica, krog, lok

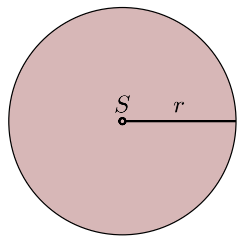
Definicija 12.92. ***Krožnica*** *je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke S – **središče** krožnice. Razdalja r med središčem in poljubno točko na krožnici je **polmer** ali **radij** krožnice.*

$$\mathcal{K} = \{T; d(T, S) = r\}$$



Definicija 12.93. ***Krog*** *s središčem S in polmerom r je množica ravninskih točk, katerih oddaljenost od središča je manjša ali enaka r.*

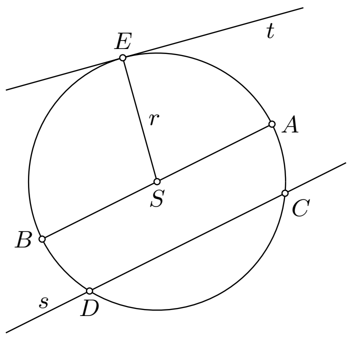
$$\mathcal{K} = \{T; d(T, S) \leqslant r\}$$



Definicija 12.94. *Premico s, ki seka krožnico, imenujemo **sekanta** krožnice. Zveznica CD njenih presečišč s krožnico je **tetiva**. Presečišči C in D razdelita krožnico na dva **krožna loka** $\widehat{CD}$ in $\widehat{DC}$.*

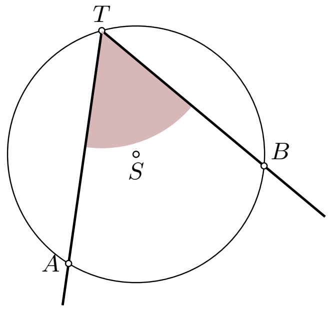
Definicija 12.95. *Premico t, ki se dotika krožnice v točki E, imenujemo **dotikalnica** ali **tangenta** krožnice. Polmer SE, ki povezuje dotikališče s središčem S, je pravokoten na tangento.*

Definicija 12.96. *Točki A in B imenujemo **diametralni točki**, njuna zveznica je **premer** ali **diameter**.*

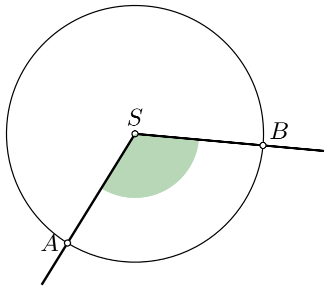


Obodni in središčni kot

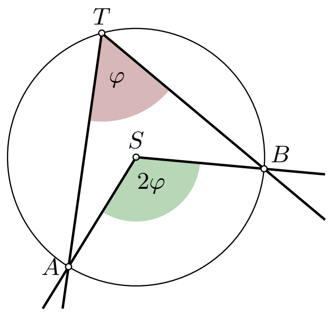
Definicija 12.97. ***Obodni kot*** *nad lokom* $\widehat{AB}$ *je kot, ki ima vrh na krožnici, kraka pa gresta skozi točki* A *in* B*, ki določata lok.*



Definicija 12.98. ***Središčni kot*** *nad lokom* $\widehat{AB}$ *je kot, ki ima vrh v središču krožnice, kraka pa gresta skozi točki* A *in* B*, ki določata lok.*

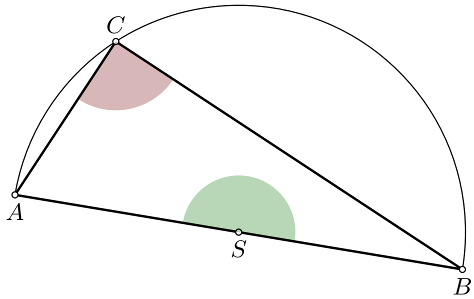


Izrek 12.99. *Nad istim lokom meri obodni kot polovico središčnega kota.*



Izrek 12.100. *Vsi obodni koti nad istim lokom so enaki/skladni.*

Izrek 12.101 (Talesov izrek o kotu v polkrogu)**.** *Če je osnovnica trikotnika premer kroga in tretje oglišče trikotnika leži na krožnici, je trikotnik pravokoten.*



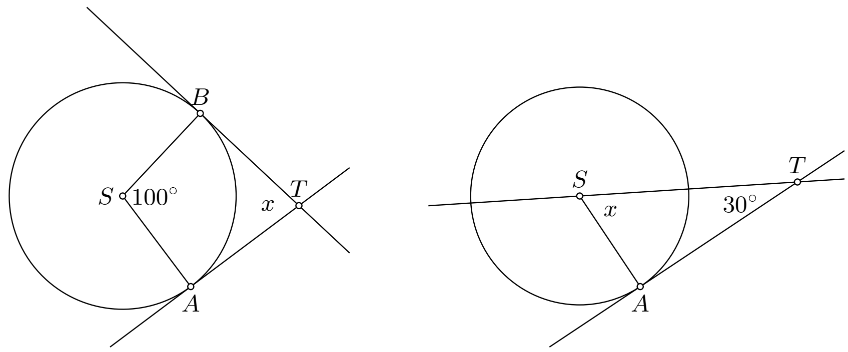
Kotu v polkrogu pravimo tudi obodni kot nad premerom kroga.

Naloga 12.102. *Vsota velikosti središčnega in obodnega kota nad istim lokom je* 174°*. Koliko merita središčni in obodni kot?*

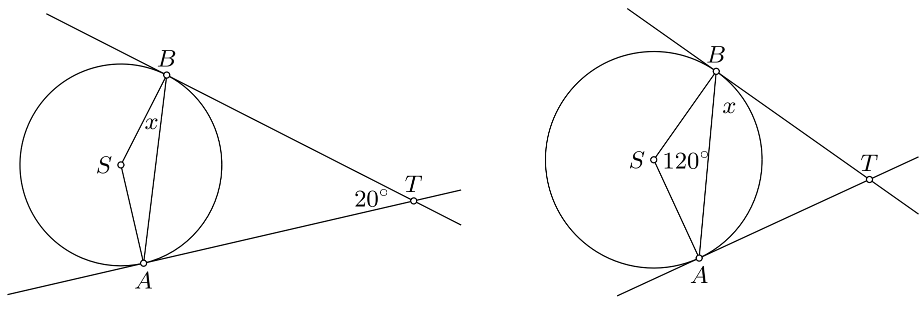
Naloga 12.103. *Središčni kot je za* 64° *večji od obodnega kota nad istim lokom. Izračunajte velikosti obeh kotov.*

Naloga 12.104. *Krožnica je razdeljena s tremi točkami* A*,* B *in* C *na tri loke* AB*,* BC *in* CA*, ki so po dolžini v razmerju* $2:7:9$*. Izračunajte velikosti središčnih kotov, ki pripadajo tem lokom, ter notranjih kotov trikotnika* $\triangle ABC$*. Pomagajte si s skico.*

Naloga 12.105. *Izračunajte vrednost neznanke* x*, če sta premici skozi točki* A *in* T *ter* B *in* T *tangenti na krožnico.*



Naloga 12.106. *Izračunajte vrednost neznanke* x*, če sta premici skozi točki* A *in* T *ter* B *in* T *tangenti na krožnico.*



12.6 Štirikotnik in pravilni n-kotnik

Štirikotnike delimo glede na število parov vzporednih stranic v tri skupine:

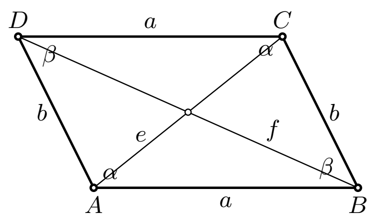
- **paralelograme**, ki imajo dva para vzporednih stranic;
- **trapeze**, ki imajo en par vzporednih stranic;
- **trapezoide**, ki nimajo nobenega para vzporednih stranic.

Vsak štirikotnik ima dve diagonali.
Diagonala e povezuje oglišči A in C, diagonala f pa oglišči B in D.

Izrek 12.107. *Vsota notranjih kotov štirikotnika je* $360°$.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Paralelogram



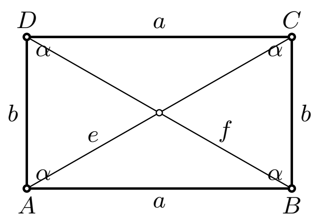
Izrek 12.108. *Naslednje trditve so enakovredne in karakterizirajo paralelogram:*

1. *Poljubni nasprotni stranici sta skladni* ($|AB| = |CD| = a$ *in* $|AD| = |BC| = b$).
2. *Diagionali se razpolavljata.*
3. *Poljubna sosednja kota sta suplementarna* ($\alpha + \beta = 180°$).
4. *Poljubna nasprotna kota sta skladna.*

Višina paralelograma je razdalja med vzporednima stranicama.

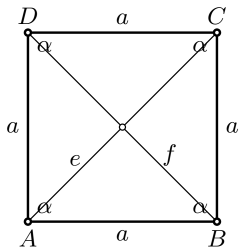
Paralelograme delimo na *pravokotne* in *poševnokotne* oziroma na *enakostranične* in *raznostranične.*

Definicija 12.109. ***Pravokotnik*** *je pravokotni raznostranični paralelogram.*



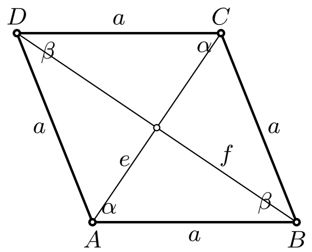
Diagonali v pravokotniku sta skladni ($e = f$) in se razpolavljata; vsi notranji koti so pravi ($\alpha = 90°$); višine so stranice same.

Definicija 12.110. ***Kvadrat*** *je pravokotni enakostranični paralelogram.*



Diagonali v kvadratu sta skladni ($e = f$) in se razpolavljata in razpolavljata notranje kote, sekata se pod pravim kotom; vsi notranji koti so pravi ($\alpha = 90°$); višina je stranica sama.

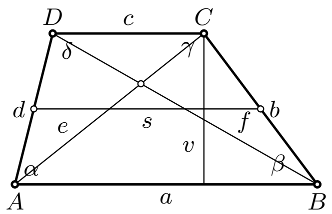
Definicija 12.111. ***Romb*** *je poševnokotni enakostranični paralelogram.*



Diagonali v rombu se razpolavljata in razpolavljata notranje kote, sekata se pod pravim kotom.

Trapez

Definicija 12.112. ***Trapez*** *je štirikotnik, ki ima en par vzporednih stranic.*
Vzporedni stranici imenujemo ***osnovnici*** *trapeza, preostali dve stranici pa* ***kraka*** *trapeza.*



Višina trapeza je razdalja med osnovnicama.

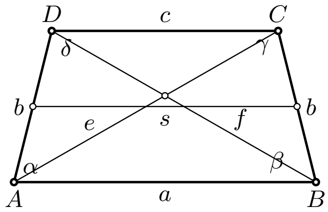
Definicija 12.113. ***Srednica*** *trapeza je daljica, ki povezuje razpolovišči krakov trapeza.*

Izrek 12.114. *Srednica je vzporedna je osnovnicama, njena dolžina je enaka aritmetični sredini dolžin obeh osnovnic:*

$$s = \frac{a+c}{2}.$$

Trditev 12.115. *Kota ob istem kraku sta suplementarna ($\alpha + \delta = 180°$ in $\beta + \gamma = 180°$).*

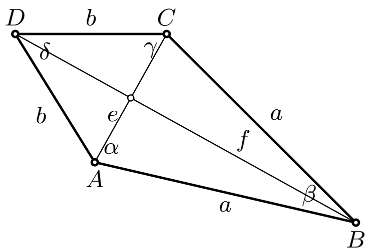
Definicija 12.116. ***Enakokraki trapez*** *je trapez, katerega kraka sta skladna.*



Enakokraki trapez ima skladni diagonali ($e = f$) in skladna para kotov ob isti osnovnici ($\alpha = \beta$ in $\gamma = \delta$).

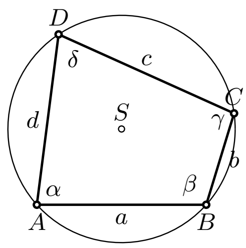
Trapezoid

Definicija 12.117. ***Deltoid*** *je štirikotnik, ki ima dva para sosednjih skladnih nevzporednih stranic.*



Diagonali deltoida se sekata pod pravim kotom. Daljša diagonala razpolavlja krajšo in oba notranja kota. Preostala kota sta skladna.

Definicija 12.118. ***Tetivni štirikotnik*** *je štirikotnik, katerega stranice so tetive neke krožnice.*

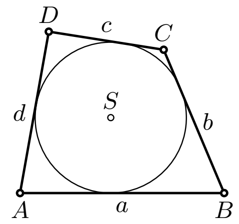


Izrek 12.119. *Nasprotna kota tetivnega štirikotnika sta suplementarna:*

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

Trditev 12.120. *Če sta v štirikotniku nasprotna kota suplementarna, mu lahko očrtamo krožnico.*

Definicija 12.121. ***Tangentni štirikotnik*** *je štirikotnik, katerega stranice so odseki na tangentah neke krožnice.*

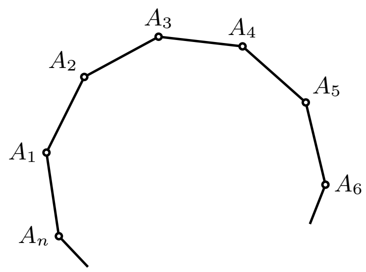


Izrek 12.122. *Vsota dolžin nasprotnih stranic tangentnega štirikotnika je enaka vsoti dolžin drugih dveh nasprotnih stranic:*

$$a + c = b + d.$$

Pravilni n-kotnik

Definicija 12.123. ***Pravlni n-kotnik*** *ima vse stranice enako dolge in vse kote enako velike.*



Izrek 12.124. *Vsota notranjih kotov trikotnika je $(n-2) \cdot 180°$.*

Notranji kot pravilnega n-kotnika meri $\frac{n-2}{n}180°$.

Naloga 12.125. *Konstruirajte paralelogram $ABCD$ s podatki:*

- $a = 4\ cm,\ b = 3\ cm,\ e = 6\ cm;$
- $\alpha = 60°,\ a = 5\ cm,\ b = 3\ cm;$
- $e = f = 4\ cm,\ a = 3\ cm.$

Naloga 12.126. *Konstruirajte trapez $ABCD$ s podatki:*

- $a = 5\ cm,\ b = 4\ cm,\ d = 3.5\ cm,\ \beta = 60°;$
- $a = 4\ cm,\ v = 3\ cm,\ e = 5\ cm,\ f = 4\ cm;$
- $\alpha = 60°,\ a = 5\ cm,\ e = f = 4.5\ cm;$
- $\alpha = 60°,\ b = 5\ cm,\ c = 2\ cm,\ v = 4\ cm.$

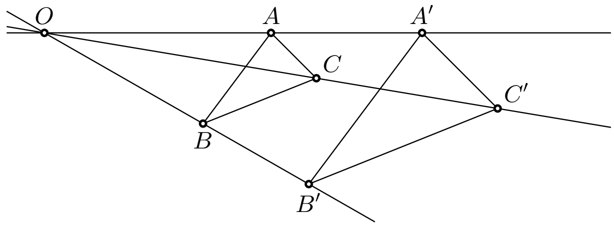
Naloga 12.127. *Konstruirajte deltoid $ABCD$ s podatki:*

- $b = 3.5\ cm,\ e = 4\ cm,\ f = 5\ cm;$
- $a = 4\ cm,\ b = 3\ cm,\ \delta = 90°.$

12.7 Podobnost

Središčni razteg

Definicija 12.128. ***Središčni razteg*** *ali* ***homotetija*** *s središčem v neki točki O in faktorjem $k \neq 0$ je podobnostna preslikava, ki daljico OA preslika v daljico OA', pri čemer velja $|OA'| = |k| \cdot |OA|$.*



$$|OA'| : |OA| = k \qquad |OB'| : |OB| = k \qquad |OC'| : |OC| = k$$

$$|A'B'| : |AB| = k \qquad |B'C'| : |BC| = k \qquad |A'C'| : |AC| = k$$

Središčni razteg s središčem v točki O in faktorjem $k \neq 0$:
- ohranja velikosti kotov;
- vse razdalje pomnoži s $|k|$, pri čemer:
  - $|k| > 1$ pomeni razteg,
  - $k = 1$ pomeni identiteto,
  - $|k| < 1$ pomeni skrčitev,
  - $k = -1$ pomeni zrcaljenje čez točko O;
- premico preslika v vzporedno premico;
- daljico AB preslika na vzporedno daljico $A'B'$;
- ohranja premice, ki gredo skozi točko O.

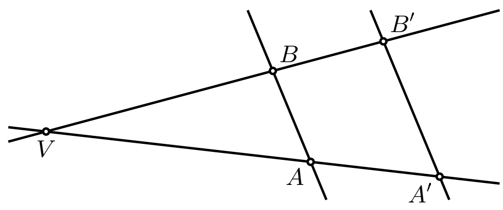
Podobnost

Definicija 12.129. ***Podobnostna preslikava*** *je preslikava, sestavljena iz togega premika in središčnega raztega.*

Definicija 12.130. *Dva lika sta* **podobna***, če med njima obstaja podobnostna preslikava.*

Podobnost je v množici ravninskih likov *ekvivalenčna relacija*, saj je:
- *refleksivna*: $L \sim L$ – vsaka množica je podobna sami sebi (koeficient podobnosti $k = 1$);
- *simetrična*: $L \sim L' \Rightarrow L' \sim L$ – če je prva množica podobna drugi, je tudi druga podobna prvi (koeficienta podobnosti k in $\frac{1}{k}$);
- *tranzitivna*: $L \sim L' \wedge L' \sim L'' \rightarrow L \sim L''$ – če je prva množica podobna drugi in druga podobna tretji, je tudi prva množica podobna tretji množici (koeficienti podobnosti k_1, k_2 in $k_1 k_2$).

Izrek 12.131 (Talesov izrek o sorazmerjih)**.** *Če premici, ki se sekata v eni točki, sekamo z množico vzporednic, je razmerje odsekov na eni premici šopa enako razmerju enakoležnih odsekov na drugi premici istega šopa.*



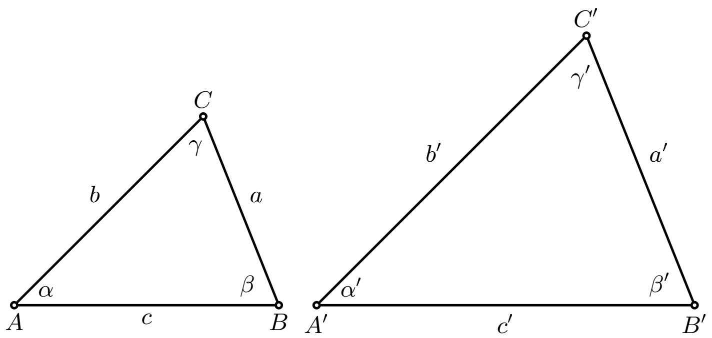
$$|VA| : |VA'| = |VB| : |VB'|$$

$$|VA| : |AB| = |VA'| : |A'B'|$$

$$|VA| : |AA'| = |VB| : |BB'|$$

Podobnost trikotnikov

Definicija 12.132. *Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta podobna, če imata enaka razmerja vseh istoležnih stranic in enake vse notranje kote.*



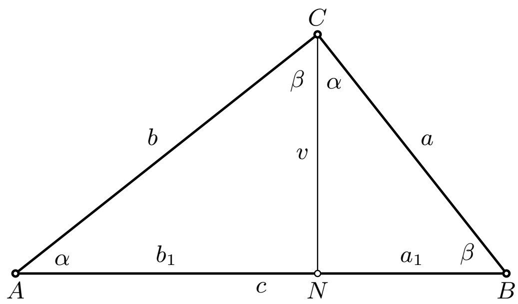
$$a : b : c = a' : b' : c' \quad \wedge \quad \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Izrek 12.133 (o podobnosti trikotnikov)**.** *Dva trikotnika sta si podobna, če se ujemata:*

1. *v razmerjih po dveh enakoležnih stranic ($a : a' = b : b' = c : c' = k$);*
2. *v dveh notranjih kotih (npr. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$);*
3. *v razmerju dveh stranic in v vmesnem kotu (npr. $b : c = b' : c'$, $\alpha = \alpha'$);*
4. *v razmerju dveh stranic in v kotu nasproti daljše.*

Izrek 12.134. *Podobna trikotnika imata sorazmerna obsega, koeficient podobnosti je k, isti kot za dolžine stranic. Sorazmerni sta tudi višini trikotnikov.*
Ploščini podobnih trikotnikov sta sorazmerni s koeficientom podobnosti k^2.

Izreki v pravokotnem trikotniku



Izrek 12.135 (višinski izrek)**.** *Kvadrat višine v pravokotnem trikotniku je enak produktu pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo.*

$$v^2 = a_1 b_1$$

Izrek 12.136 (Evklidov izrek)**.** *Kvadrat katete v pravokotnem trikotniku je enak produktu hipotenuze in pravokotne projekcije te katete na hipotenuzo.*

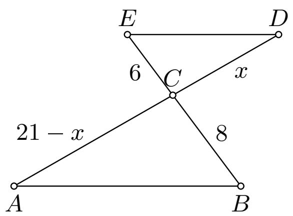
$$a^2 = a_1 c \quad \textit{in} \quad b^2 = b_1 c$$

Izrek 12.137 (Pitagorov izrek)**.** *Kvadrat hipotenuze v pravokotnem trikotniku je enak vsoti kvadratov obeh katet.*

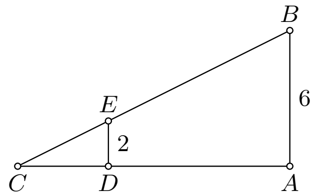
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Naloga 12.138. *Pomanjšajte trikotnik* $\triangle ABC$ *z dolžinami stranic* $a = 4$ *cm*, $b = 8$ *cm in* $c = 6$ *cm v razmerju* $5 : 3$.

Naloga 12.139. *Izračunajte vrednost števila* x, *če sta stranici* AB *in* ED *vzporedni.*



Naloga 12.140. *Dolžina daljice* AC *je* 12. *Izračunajte dolžino daljice* AD.



Naloga 12.141. *Trikotnika* $\triangle ABC$ *in* $\triangle DEF$ *imata po dva skladna kota. Stranice trikotnika* $\triangle DEF$ *merijo* 14 *cm*, 18 *cm in* 12 *cm. Koliko merita preostali dve stranici trikotnika* $\triangle ABC$, *če njegova najdaljša stranica meri* 42 *cm?*

Naloga 12.142. *V trapezu* $ABCD$ *z osnovnico* $|AB| = 5$ *in krakom* $|AD| = 4$ *se nosilki krakov sekata v točki* E *ter je* $|DE| = 2$. *Izračunajte dolžino stranice* CD.

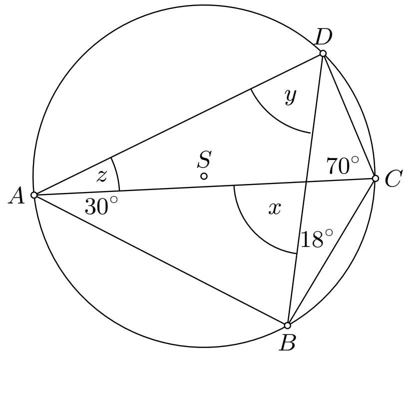
Naloga 12.143. *Ivan stoji ponoči* 5 *m od vznožja* 9 *m visokega svetilnika. Ivanova senca je dolga* 1 *m. Določite Ivanovo višino.*

Naloga 12.144. *V pravokotnem trikotniku* $\triangle ABC$ *so dani nekateri podatki za dolžine določenih stranic ali višine. Izračunajte vrednosti neznanih dolžin stranic oziroma višine tako, da bodo določene vse izmed* c, a, b, a_1, b_1 *in* v.

- $a = 30$, $b = 40$
- $a = \sqrt{10}$, $v = \sqrt{6}$
- $b = \sqrt{35}$, $b_1 = 5$
- $c = 12$, $a = 6$
- $a_1 = 6$, $b_1 = 8$

Naloga 12.145. *Izračunajte dolžine stranic pravokotnega trikotnika* $\triangle ABC$, *kjer sta* a *in* b *kateti,* c *pa hipotenuza:* $a = 3x - 1$, $b = 5x$, $c = 6x - 1$.

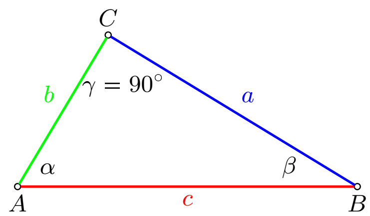
Naloga 12.146. *Izračunajte velikosti kotov* x, y *in* z.



Poglavje 13

Kotne funkcije

13.1 Definicija kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku



Sinus kota α je razmerje med dolžinama kotu α nasprotne katete in hipotenuze:

$$\sin\alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{a}{c}.$$

Kosinus kota α je razmerje med dolžinama kotu α priležne katete in hipotenuze:

$$\cos\alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{b}{c}.$$

Tangens kota α je razmerje med dolžinama kotu α nasprotne katete in priležne katete:

$$\tan\alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} = \frac{a}{b}.$$

Kotangens kota α je razmerje med dolžinama kotu α priležne katete in nasprotne katete:

$$\cot\alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}} = \frac{b}{a}.$$

Naloga 13.1. *V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 12$ cm in $b = 5$ cm. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β.*

Naloga 13.2. *V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 6$ cm in $b = 5$ cm. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β.*

Naloga 13.3. *V pravokotnem trikotniku je dolžina hipotenuze $c = 10$ in dolžina katete $a = 6$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot α.*

Naloga 13.4. *Načrtajte pravokotni trikotnik $\triangle ABC$, v katerem velja:*

- $\sin\alpha = \frac{2}{5}$
- $\cos\alpha = \frac{5}{6}$
- $\tan\alpha = \frac{3}{7}$
- $\cos\beta = \frac{4}{7}$
- $\tan\beta = \frac{0.3}{0.2}$

13.2 Računanje vrednosti kotnih funkcij

Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
0	0°	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0

Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan(90^\circ - \varphi) = \cot\varphi$$

$$\cot(90^\circ - \varphi) = \tan\varphi$$

Naloga 13.5. *Na štiri decimalna mesta natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot x.*
- $x = 55^\circ$
- $x = 39^\circ$
- $x = 12^\circ$

Naloga 13.6. *Na minuto natančno izračunaj velikost kota, če je:*
- $\sin x = 0.25$
- $\cos x = 0.6$
- $\tan x = 3$
- $\sin x = 2$
- $\cos x = \frac{2}{5}$

Naloga 13.7. *Natančno izračunajte vrednost izraza.*
- $\sin 90^\circ + \cos 0^\circ + \tan 45^\circ$
- $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 60^\circ} - \frac{\tan 60^\circ}{\cos 60^\circ}$
- $\tan 30^\circ \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$
- $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$
- $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$
- $\frac{1 - \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$
- $\frac{\sin 90^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$
- $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ - 3\tan 30^\circ$

Naloga 13.8. *V pravokotniku meri stranica $a = 10$ cm, diagonala pa 14 cm. Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico a in diagonalo na dve decimalki stopinje natančno.*

Naloga 13.9. *V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico* 24 *cm, osnovnica pa* 14 *cm. Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.*

Naloga 13.10. *Enakokraki trapez ima osnovnici dolgi* 45 *cm in* 23 *cm, višina pa je* 60 *cm. Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na minuto natančno.*

Naloga 13.11. *Vrh stolpa vidimo pod kotom* $19.17°$*, če pa se mu približamo za* 50 *m, ga vidimo pod kotom* $34.23°$*. Izračunajte višino stolpa, če je točka gledišča na višini* 1.7 *m.*

Naloga 13.12. *Koliko meri središčni kot nad lokom* AB *v krogu s polmerom* 8 *cm, če je* $|AB| = 6$ *cm? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.*

Naloga 13.13. *V enakokrakem trapezu z osnovnicama* 12 *cm in* 6 *cm kot ob osnovnici meri* $\alpha = 73°$*. Izračunajte dolžino kraka.*

Naloga 13.14. *Pravokotnik ima stranici dolgi* 5 *cm in* 6 *cm. Na minuto natančno izračunajte kot, ki ga oklepata diagonali v pravokotniku.*

Naloga 13.15. *V rombu je dolžina diagonale* e *dvakrat tolikšna kot dolžina diagonale* f*. Na minuto natančno izračunajte velikost kota* α*.*

13.3 Zveze med kotnimi funkcijami

$$\tan\varphi = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad \tan\varphi\cdot\cot\varphi = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$$

$$\cot\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \qquad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Naloga 13.16. *Natančno izračunajte vrednosti preostalih kotnih funnkcj v pravokotnem trikotniku, če je kot α oster in velja:*

- $\cos\alpha = 0{,}1$
- $\sin\alpha = \frac{8}{17}$
- $\tan\alpha = 2$

Naloga 13.17. *Poenostavite izraze s pomočjo zvez med kotnimi funkcijami.*

- $1 - \sqrt{\left(1-\sin^2 x\right)\cos^2 x}$
- $\frac{\sin x}{\tan x}\cdot\cos x - 1$
- $\frac{1}{\tan x} + \frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}$
- $\tan^2 x - \frac{1}{1-\sin^2 x}$
- $\cos x\left(1+\tan^2 x\right)$
- $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}$
- $\sin x + \cos^2 x\cdot\sin^{-1} x$
- $\frac{(\sin x+\cos x)^2 - 1}{\tan x}$
- $\frac{1}{\left(\frac{\tan^{-1} x\cdot\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\right)}$
- $\left((\tan x\cos x)^{-2} + \cos^{-2} x\right)\sin^2 x$
- $\left(\frac{1}{\cot x}\sin^{-1} x\right)^{-2} + \sin x\tan x\cos x$

Naloga 13.18. *Natančno izračunajte brez uporabe računala.*

- $\frac{\cos 15^\circ}{\sin 75^\circ} - 2\cdot\frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ}$
- $\sin^2 55^\circ + \cos^2 45^\circ - \frac{\frac{\tan 33^\circ}{\sin 33^\circ}}{\sin 57^\circ}$
- $\sin^2 86^\circ\cdot\left(\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ + \tan^2 4^\circ\right)$
- $\frac{1-\sin^2 15^\circ}{\sin^2 75^\circ}$

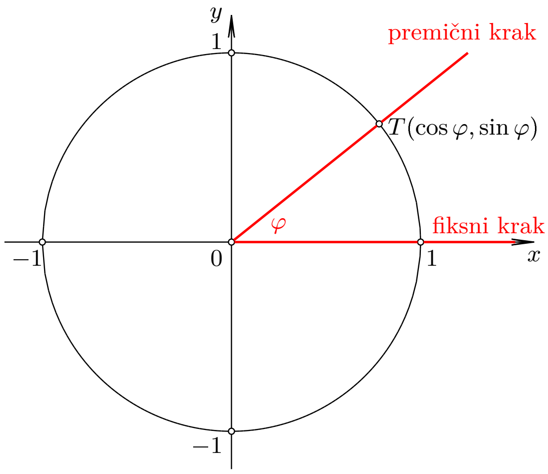
13.4 Razširitev pojma kotne funkcije do polnega kota

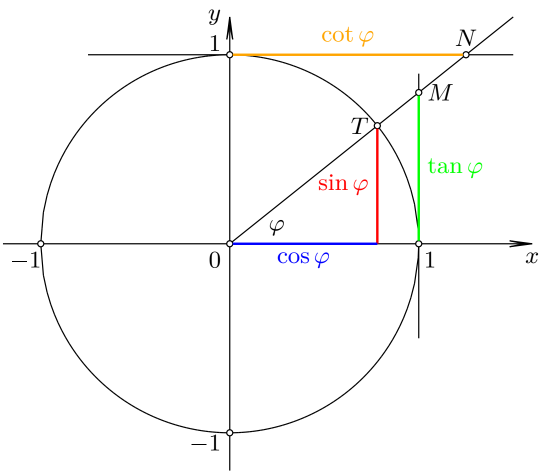
Kotne funkcije v enotskem krogu

Enotska krožnica je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot φ z vrhom v koordinatnem izhodišču določata:

- **fiksni/nepremični krak** kota leži na pozitivnem delu abscisne osi in
- **premični krak** določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov ter seka enotsko krožnico v točki $(\cos x, \sin x)$.





Sinus kota φ je enak oridnati presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Kosinus kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Tangens kota φ je enak ordinati presečišča nosilke premičnega kraka z navpično tangento enotskega kroga v točki $(1, 0)$.

Kotangens kota φ je enak abscisi presečišča nosilke premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega kroga v točki $(0, 1)$.

Stopinje in radiani

Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik 1 radian.

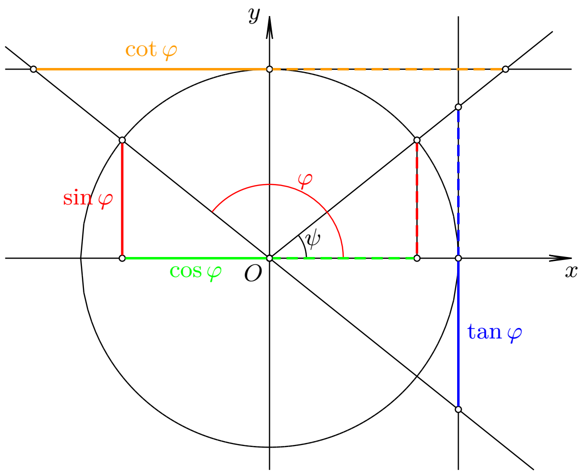
$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57,3^\circ$$

Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo kot φ podan v radianih, ϕ pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ}\phi \qquad \text{in} \qquad \phi = \frac{180^\circ}{\pi}\varphi.$$

Kot φ **med** 90° **in** 180°



Sinusa suplementarnih kotov sta enaka; kosinusa suplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\sin(180^\circ - \psi) = \sin\psi$$

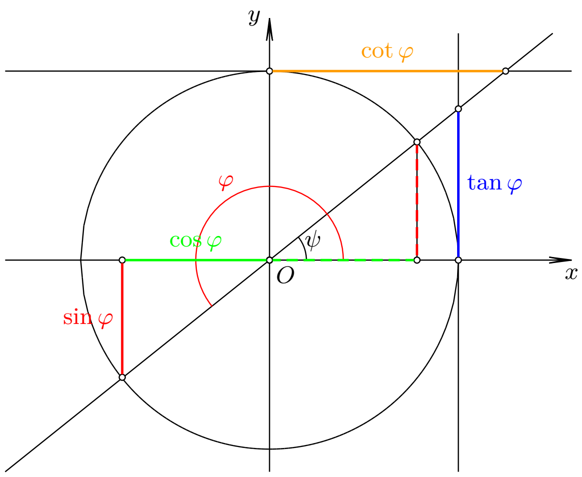
$$\cos(180^\circ - \psi) = -\cos\psi$$

Tangensa in kotangensa suplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\tan(180^\circ - \psi) = -\tan\psi$$

$$\cot(180^\circ - \psi) = -\cot\psi$$

Kot φ **med** 180° **in** 270°



Sinusa in kosinusa kotov, ki se razlikujeta za π, sta nasprotno enaka.

$$\sin(180^\circ + \psi) = -\sin\psi$$

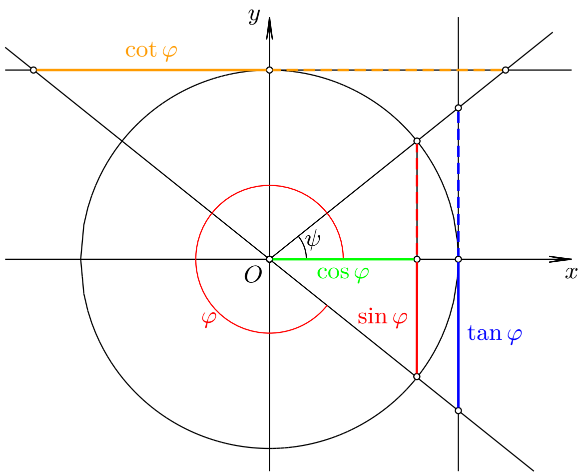
$$\cos(180^\circ + \psi) = -\cos\psi$$

Tangensa in kotangensa kotov, ki se razlikujeta za π, sta enaka.

$$\tan(180^\circ + \psi) = \tan\psi$$

$$\cot(180^\circ + \psi) = \cot\psi$$

Kot φ **med** 270° **in** 360°



$$\sin(360^\circ - \psi) = -\sin\psi$$

$$\cos(360^\circ - \psi) = \cos\psi$$

$$\tan(360^\circ - \psi) = -\tan\psi$$

$$\cot(360^\circ - \psi) = -\cot\psi$$

$$\sin(-\psi) = -\sin\psi$$

$$\cos(-\psi) = \cos\psi$$

$$\tan(-\psi) = -\tan\psi$$

$$\cot(-\psi) = -\cot\psi$$

Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	/	0
π	$180°$	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	-1	0	/	0

Naloga 13.19. *Izrazite s kotno funkcijo kota, manjšega od* $45°$.

- $\sin 200°$
- $\cos 115°$
- $\tan 170°$
- $\sin 299°$
- $\cos 355°$
- $\cot 335°$
- $\tan 163°$
- $\cos 255°$
- $\sin 190°$
- $\cot 203°$
- $\cos 154°$
- $\sin 245°$
- $\tan 140°$
- $\cos 218°$
- $\tan 179°$

Naloga 13.20. *Najprej izrazite vrednost dane kotne funkcije s kotno funkcijo ostrega kota in nato izračunajte njeno natančno vrednost.*

- $\sin 300°$
- $\cos 330°$
- $\tan 315°$
- $\cos 225°$
- $\sin 240°$
- $\tan 150°$
- $\cos 120°$
- $\sin 180°$

Naloga 13.21. *Natančno izračunajte.*

- $\dfrac{\cos 300° - \sin 210° - \sin 0°}{\tan 300° + \tan 135°}$
- $(\sin 150° - \cos 210°)^2 + \tan^2 315°$
- $\sin 120° - \cos 150° + \tan 225°$
- $\dfrac{\cos 135° + \sin 225°}{\tan 300° - \tan 120° - \sin 270°}$
- $\dfrac{\cos 240° + \tan 135° - \sin^2 315°}{\tan 300°}$

Naloga 13.22. *Za kot x je podana vrednost ene kotne funkcije in območje velikost kota. Izračunajte natančne vrednosti drugih kotnih funkcij za kot x.*

- $x \in [180°, 270°]$; $\sin x = -0.6$
- $x \in [90°, 180°]$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$
- *IV. kvadrant;* $\tan x = -\sqrt{3}$
- *II. kvadrant;* $\tan x = -2$
- *III. kvadrant;* $\tan x = 3$
- *II. kvadrant;* $\sin x = \dfrac{3}{4}$
- $x \in [270°, 360°]$; $\cos x = \dfrac{1}{3}$
- $x \in [180°, 270°]$; $\cos x = -\dfrac{4}{5}$
- *IV. kvadrant;* $\sin x = -\dfrac{15}{17}$

Naloga 13.23. *Podana je vrednost ene kotne funkcije za kot x. Izračunajte velikost kota x glede na pogoj o njegovi velikosti.*

- $x \in [270°, 360°]$; $\cos x = 0.5$
- $x \in [0°, 360°]$; $\tan x = -1$
- $x \in [180°, 360°]$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x \in [0°, 360°]$; $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x \in [180°, 360°]$; $\cos x = -1$
- $x \in [0°, 180°]$; $\tan x = 1$
- $x \in [180°, 270°]$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x \in [0°, 360°]$; $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x \in [0°, 270°]$; $\tan x = -\sqrt{3}$

Naloga 13.24. *V enotski krožnici narišite vse kote, za ketere velja dani podatek. Izračunajte velikosti kotov na štiri decimalna mesta natančno.*

- $\sin x = 0.6$
- $\cos x = 0.3$
- $\tan x = 0.8$
- $\sin x = -\frac{2}{3}$
- $\cos x = -\frac{3}{5}$
- $\tan x = -\frac{3}{2}$
- $\tan x = 2$

Naloga 13.25. *Natančno izračunajte.*

$$\frac{\sin 315° + \cos 135° - \tan^2 120°}{\sin^2 150° - \cos^2 225°}$$

Naloga 13.26. *Poenostavite izraz.*

$$1 + \left(\frac{\sin^2 x + \tan^{-1} x \cdot \sin x \cdot \cos x}{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} \right)^{-1}$$

Naloga 13.27. *Za* $\tan x = -5$ *in* $270° \leqslant x \leqslant 360°$ *izračunajte velikost kota* x*, na minuto natančno, in natančne vrednosti preostalih kotnih funkcij.*

Naloga 13.28. *Zapišite s kotno funkcijo kota, manjšega od* $45°$*.*

- $\sin 355°$
- $\cos 291°$
- $\tan 174°$
- $\sin 247°$

Naloga 13.29. *Voznik podmornice na višini* -200 *m vidi razbitino ladje, ki leži potopljena na višini* -1200 *m, pod kotom* $8.4°$*. Izračunajte razdaljo, ki jo mora prevoziti, da bo točno nad razbitino, če se vozi s hitrostjo* 40 *km/h. Koliko časa potrebuje za to pot?*

Poglavje 14

Vektorji

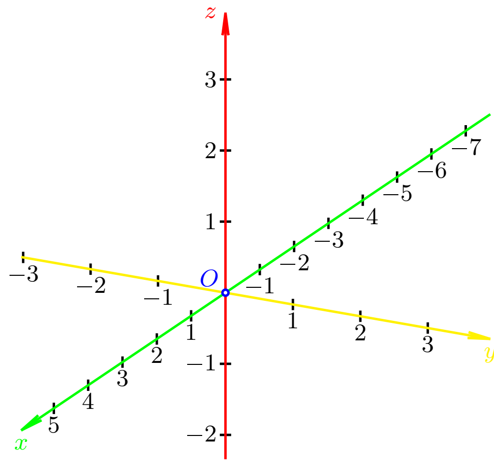
Vektorji v koordinatnem sistemu

Pravokotni koordinatni sistem v prostoru

Pravokotni koordinatni sistem v prostoru oziroma **kartezični prostorski koordinatni sistem** določajo tri paroma pravokotne številske premice (koordinatne osi), ki se sekajo v koordinatnem izhodišču (O).

Koordinatne osi imenujemo:

- os x ali abscisna os,
- os y ali ordinatna os in
- os z ali aplikatna os.

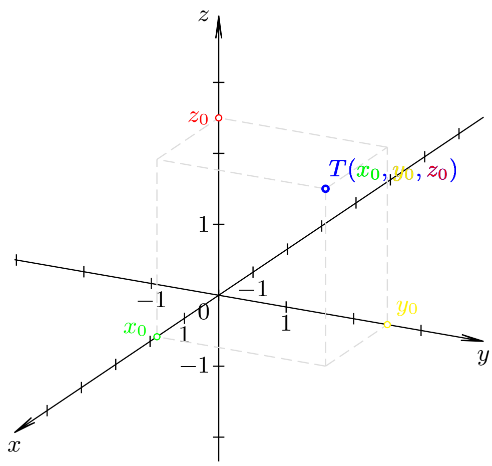


Lega točke v prostoru

Poljubni točki T v prostoru s pravokotnim koordinatnim sistemom lahko določimo **koordinate točke**: $T(x_0, y_0, z_0)$.
To so števila, ki nam povedo, kje ležijo projekcije točke T na koordinatnih oseh.

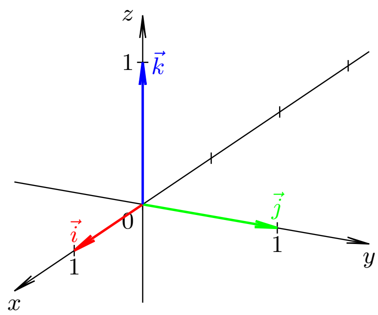
Koordinate točke imenujemo:

- prva koordinata x_0 je abscisa točke T,
- druga koordinata y_0 je ordinata točke T in
- tretja koordinata z_0 je aplikata točke T.



Baza prostora je **ortogonalna**, če je sestavljena iz paroma pravokotnih vektorjev.
Baza prostora je **ortonormirana**, če je ortogonalna in jo sestavljajo sami **enotski vektorji** – vektorji dolžine 1.

Standardna baza prostora je ena izmed ortonormiranih baz prostora. Sestavljajo jo enotski vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$, ki ležijo zapored na pozitivnih poltrakih koordinatnih osi x, y in z.



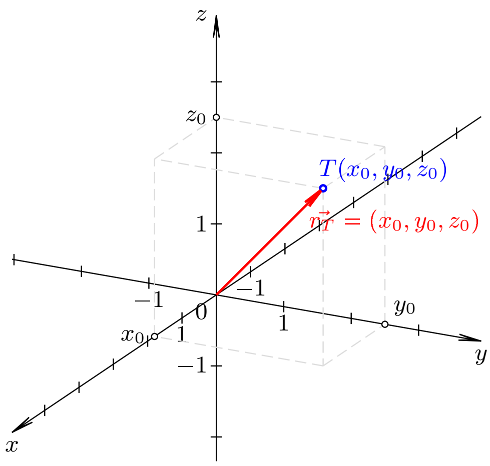
Krajevni vektor točke

Krajevni vektor $\vec{r_T}$ točke T je vektor, ki se začne v koordinatnem izhodišču sistema in konča v točki T.

Komponente krajevnega vektorja $\vec{r_T}$ točke T so enake koordinatam točke T.

$$T(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{r_T} = (x_0, y_0, z_0)$$



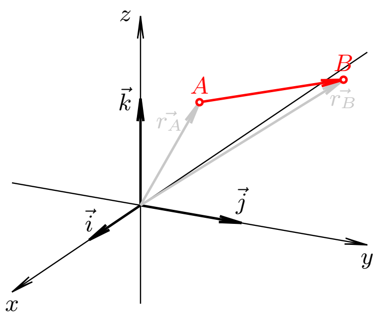
Tudi standardne bazne vektorje $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ lahko zapišemo kot krajevne vektorje: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Poljuben vektor $\vec{v}$ v prostoru lahko zapišemo kot linearno kombinacijo standardnih baznih vektorjev:

$$\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

S krajevnimi vektorji lahko izrazimo poljuben vektor $\vec{AB}$, z začetkom v točki A in koncem v točki B:

$$\vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$$



Računanje s krajevnimi vektorji

Seštevanje in odštevanje

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Množenje s skalarjem

$$n(a_1, a_2, a_3) = (na_1, na_2, na_3)$$

Skalarno množenje

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Enakost vektorjev

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_3 = b_3$$

Poglavje 15

Potence in koreni

15.1 Koreni poljubnih stopenj

Za sodo naravno število n je **n-ti koren** $\sqrt[n]{a}$ realnega števila $a \geqslant 0$ tisto nenegativno realno število x, za katerega velja $a = x^n$.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow a = x^n; \quad a, x \in \mathbb{R}^+$$

Za liho naravno število n je **n-ti koren** $\sqrt[n]{a}$ realnega števila a tisto realno število x, za katerega velja $a = x^n$.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow a = x^n; \quad a, x \in \mathbb{R}$$

Število a imenujemo **korenjenec**, simbol $\sqrt{\ }$ **korenski znak**, število n pa **korenski eksponent**.

Pravila za računanje s koreni poljubnih stopenj

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ a, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a^w} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^w$
- $\sqrt[n]{a^w} = \sqrt[nz]{a^{wz}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^w} \cdot \sqrt[n]{a^z} = \sqrt[n]{a^{w+z}}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a^w}}{\sqrt[n]{a^z}} = \sqrt[n]{a^{w-z}};\ a \neq 0$

Pri tem za sode korenske stopnje n privzamemo $a, b \in [0, \infty)$; za lihe stopnje n pa $a, b \in \mathbb{R}$.

Naloga 15.1. *Poenostavite izraz in ga delno korenite.*

- $\sqrt[3]{xy^2\sqrt{x^5y}}$
- $\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}}$
- $\sqrt[4]{a^3b^2\sqrt{ab^5}}$
- $\sqrt[4]{ab^2\sqrt[3]{ab}}$
- $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}$
- $\sqrt[5]{x^4y\sqrt[4]{x^5y^3}}$
- $\sqrt[6]{a^2b^3\sqrt{a^8\sqrt[3]{b}}}$
- $\sqrt[3]{x\sqrt{y^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{y^6y^{-1}}}}}$

Naloga 15.2. *Izračunajte.*

- $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}$
- $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$
- $\sqrt[3]{-8}$
- $\sqrt[4]{-625}$
- $\sqrt[3]{0.125}$
- $\sqrt[4]{0.0016}$

Naloga 15.3. *Poenostavite.*

- $\sqrt[18]{x^{15}}$
- $\sqrt[9]{a^6}$
- $\sqrt[30]{y^{18}}$
- $\sqrt[20]{b^{30}}$

Naloga 15.4. *Racionalizirajte ulomke.*

- $\dfrac{1}{3-\sqrt{x}}$
- $\dfrac{1}{2-4\sqrt[3]{a}}$
- $\dfrac{2}{a-\sqrt[3]{b}}$
- $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
- $\dfrac{8x}{2\sqrt[3]{x}+1}$
- $\dfrac{1}{2-\sqrt[4]{3}}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}-1}$
- $\dfrac{\sqrt[4]{y}}{2-\sqrt[4]{y}}$
- $\dfrac{3}{1+\sqrt[5]{2}}$

Naloga 15.5. *Poenostavite in delno korenite izraz.*

- $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2\sqrt{8}}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{3}\sqrt{27}}$
- $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1}}}}{\sqrt[17]{1}}$
- $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a^2}}$
- $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[5]{a\sqrt{a^{-5}}}}$
- $\dfrac{\sqrt{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}}{\sqrt[4]{x^{-3}\sqrt[4]{x}}}$
- $\dfrac{\sqrt[7]{b^{13}\sqrt{b^{-2}}}}{\sqrt{\sqrt{b^{-1}}}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^{-1}}}\cdot\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^{-1}}}}}$
- $\dfrac{\sqrt{8ab^{-1}}}{\sqrt{0.5}\sqrt[3]{8ab^2}}$

Naloga 15.6. *Izračunajte natančno vrednost korena.*

- $\sqrt{31-12\sqrt{3}}$
- $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$
- $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
- $\sqrt{17+2\sqrt{2}}$

Naloga 15.7. *Poenostavite izraz in ga delno korenite.*

- $\dfrac{\sqrt[5]{xy^3\sqrt[4]{x^2y^3}}}{\sqrt[10]{\sqrt{x}}}$
- $\dfrac{\sqrt[4]{ab^3\sqrt[3]{a^2b^3}}}{\sqrt{\sqrt[6]{a}}}$
- $\left(\dfrac{1-z}{1-\sqrt[3]{z}}-\sqrt[3]{z}\right)\left(1-\sqrt[6]{z^4}\right)$
- $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}}-\sqrt[5]{32}$
- $\dfrac{\sqrt[6]{ab^3\sqrt{a^3b}}}{\sqrt[4]{b^{-3}\sqrt[3]{a}}}$

15.2 Potence z racionalnimi eksponenti

Potenca z racionalnim eksponentom je definirana kot:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

kjer je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ in $a \in [0, \infty)$.

Pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti

- $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$
- $x^p \cdot y^p = (xy)^p$
- $(x^p)^q = x^{pq}$
- $x^p : x^q = \dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}; \quad x \neq 0$
- $x^p : y^p = \dfrac{x^p}{y^p} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^p; \quad y \neq 0$

V pravilih upoštevamo primerni realni osnovi $x, y \in \mathbb{R}$ in racionalne eksponente $p, q \in \mathbb{Q}$.

Naloga 15.8. *Izračunajte.*

- $8^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{2}{4}}$
- $27^{\frac{2}{3}} - 125^{\frac{1}{3}}$
- $(-8)^{-\frac{1}{3}}$
- $1000^{\frac{2}{3}} - 343^{\frac{2}{3}}$

Naloga 15.9. *Izračunajte.*

- $\sqrt{625^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}}$
- $4 \cdot 0.16^{-\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{5 \cdot 8^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 81^{\frac{3}{4}}}$
- $\left(2 \cdot 9^{\frac{3}{2}} + 5 \cdot 16^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$
- $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} + 169^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$
- $0.25^{-\frac{1}{2}} \cdot 0.001^{-\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{10^2 + 0.2^{-2}}$
- $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3 - \sqrt{5}\right)\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$

Naloga 15.10. *Izračunajte.*

- $2.25^{-0.5} \cdot \sqrt{4^{1.5} + 1}$
- $6.25^{-0.5} \cdot 2.25^{1.5} + \sqrt{16^{0.75} + 1}$
- $\left(3\frac{1}{16}\right)^{-0.5} \sqrt{0.125^{-\frac{2}{3}} + 3}^{4} + 0.002^{-\frac{2}{3}}$
- $\sqrt{10}\left(5^{-0.5} - 2\right)^{-1} - \sqrt{90}$
- $\sqrt{27^{\frac{2}{3}} + 0.25^{-2}} + \left(2 - \sqrt{5}\right)\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \dfrac{1 + \sqrt{12}}{2 + \sqrt{3}}$

Naloga 15.11. *Izraz zapišite s potencami in ga poenostavite.*

- $\left(\dfrac{1 - z}{1 - \sqrt[3]{z}} - \sqrt[3]{z}\right)\left(1 - \sqrt[6]{z^4}\right)$
- $\dfrac{\sqrt[6]{ab^3\sqrt{a^3b}}}{\sqrt[4]{b^{-3}\sqrt[3]{a}}}$
- $\left(y^{\frac{2}{3}}x^{-0.25}\right)^6 : \left(\sqrt{x^{-4}y^2} \cdot \sqrt{y\sqrt[3]{xy^{-3}}}\right)^3$
- $\dfrac{\sqrt[3]{x^{-4}\sqrt{x^2y^{-3}}}}{\sqrt[4]{x^{-3}y^2}} \cdot \left(x^{0.3}y^{0.2}\right)^5$
- $\dfrac{\sqrt[5]{x^{-2}\sqrt[3]{x^{-3}y^4}}}{y^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt[6]{\sqrt{y^{-3}}}\right)^4$
- $\dfrac{\sqrt[4]{x^{-2}y}}{\sqrt[6]{x^3\sqrt{y^{-7}}}}\sqrt[4]{x^2y^{-5}}^{2}$

15.3 Iracionalne enačbe

Iracionalna enačba je enačba, v kateri neznanka nastopa po korenom poljubne stopnje.

Reševanje iracionalne enačbe

Iracionalno enačbo rešujemo tako, da jo s pomočjo potenciranja prevedemo v enačbo, ki nima neznanke pod korenom.
Tako dobimo enačbo, ki ni nujno ekvivalentna prvotni enačba, saj lahko s potenciranjem pridobimo kakšno rešitev, ki ne ustreza prvotni enačbo.
Na koncu reševanja moramo vedno narediti **preizkus**, s katerim izločimo morebitne neustrezne rešitve.

Naloga 15.12. *Rešite enačbo.*

- $\sqrt{x-1}-5=0$
- $\sqrt{x+5}=2$
- $\sqrt{3-x}-5=0$
- $1+\sqrt{x-5}=0$

Naloga 15.13. *Rešite enačbo.*

- $\sqrt{2x-1}+2x=x$
- $2+\sqrt[3]{x-1}=0$
- $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}=0$
- $x-\sqrt{5x-11}=1$
- $2x+3=\sqrt{3x^2+5x-1}$
- $\sqrt{-8x-4}=-2x$
- $\sqrt{x^2-1}-2=0$
- $\sqrt{x+3}=-9$

Naloga 15.14. *Rešite enačbo.*

- $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=3$
- $\sqrt{x-2}-2=\sqrt{x+2}$
- $\sqrt{x+1}=\sqrt{2}-\sqrt{x-1}$
- $\sqrt{x-6}+\sqrt{x+2}=2$
- $\sqrt{x+5}-3=-\sqrt{x}$
- $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{x+4}$
- $\sqrt[3]{x+2-\sqrt{10+x}}=-2$
- $\sqrt{5+x}-1=\sqrt{3x+4}$

Naloga 15.15. *Rešite enačbo.*

- $\sqrt[3]{x^3+7x^2+x+26}-3=x-1$
- $\sqrt{x-2-\sqrt{2x-3}}=2$
- $\sqrt{x^2+3x+x=2}$
- $\sqrt{x+7-\sqrt{2x-1}}=3$
- $\sqrt[3]{5-x+\sqrt{2x+14}}-2=0$
- $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+2}-2=0$
- $\sqrt{x+3+\sqrt{x+2}}=\sqrt{3}$
- $\sqrt[5]{x^2+3x+34}=2$

Poglavje 16

Funkcija

16.1 Funkcija in njene lastnosti

Preslikava

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ neprazni množici. **Preslikava** f sestoji iz:
- množice $\mathcal{X}$, ki ji pravimo **domena**,
- množice $\mathcal{Y}$, ki ji pravimo **kodomena** in
- **prirejanja**, ki vsakemu elementu x domene priredi natanko en element y kodomene.

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$
$$f : x \mapsto y$$

Elemente x kodomene $\mathcal{X}$ imenujemo **originali** preslikave.
Če elementu x priredimo element y iz kodomene, potem y imenujemo **slika** elemeta x.

Preslikavo lahko podamo s predpisom, puščičnim diagramom, besednim opisom ...

Funkcija

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ neprazni številski množici. **Funkcija** f je preslikava med številskima množicama $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$:

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}.$$

Število y je **funkcijska vrednost** števila x, če se število x preslika v število y.

$$f(x) = y$$

x je neodvisna spremenljivka, $f(x)$ je od x odvisna spremenljivka.

V nekaterih primerih za opis funkcije uporabimo poseben izraz:
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ – realna funkcija realne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ – realna funkcija naravne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ – naravna funkcija realne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ – naravna funkcija naravne spremenljivke.

16.1.1 Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

Definicijsko območje D_f preslikave ali funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica vseh originalov, ki jih v danem primeru opazujemo.
Za definicijsko območje navadno vzamemo največjo možno množico, za katero je predpis funkcije veljaven/definiran.

Zaloga vrednosti Z_f preslikave ali funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica vseh slik oziroma funkcijskih vrednosti.
Zaloga vrednosti Z_f je podmnožica kodomene $\mathcal{Y}$: $Z_f \subseteq \mathcal{Y}$.

16.1.2 Ničla in začetna vrednost funkcije

Ničla funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je tista vrednost $x_0 \in \mathcal{X}$ neodvisne spremenljivke, pri kateri je vrednost funkcije f enaka 0: $f(x_0) = 0$.
Ničle funkcije f poiščemo tako, da rešimo enačbo $f(x) = 0$.
Ničle so le tiste izmed vrednosti, ki ležijo v definicijskem območju D_f funkcije f.

Začetna vrednost funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je funkcijska vrednost pri $x = 0$, to je $f(0)$.
Začetna vrednost obstaja le, če je 0 v definicijskem območju funkcije f: $0 \in D_f$.

16.1.3 Graf funkcije

Graf Γ_f funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica urejenih parov $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kjer element x preteče celotno definicijsko območje D_f funkcije, element y pa je slika pripadajočega x, torej $y = f(x)$.

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}; x \in D_f \wedge y = f(x)\}$$

Urejene pare iz množice Γ_f lahko upodobimo v koordinatnem sistemu.
Vsakemu elementu $(x, f(x))$ iz zgornje množice pripada natanko ena točka v koordinatnem sistemu, katere abscisa je enaka x, ordinata pa je njegova slika $f(x)$

V ničli, če obstaja, graf funkcije seka ali se dotika abscisne osi, v začetni vrednosti, če obstaja, pa seka ordinatno os.

16.1.4 Naraščanje in padanje funkcije

Naraščajoča funkcija

Funkcija f je na intervalu (a, b) **naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Funkcija f je na intervalu (a, b) **strogo naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) < f(x_2)$.

Padajoča funkcija

Funkcija f je na intervalu (a, b) **padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Funkcija f je na intervalu (a, b) **strogo padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) > f(x_2)$.

16.1.5 Injektivnost in surjektivnost

Surjektivnost

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **surjektivna**, če je zaloga vrednosti Z_f funkcije enaka njeni kodomeni $\mathcal{Y}$ – vsak element kodomene $\mathcal{Y}$ je slika vsaj enega elementa iz domene $\mathcal{X}$.

$$\forall y \in \mathcal{Y}. \exists x \in \mathcal{X} \ni: f(x) = y$$

Injektivnost

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **injektivna**, če se dva poljubna različna originala iz domene $\mathcal{X}$ preslikata v različni sliki v kodomeni $\mathcal{Y}$ – vsak element kodomene $\mathcal{Y}$ je slika kvečjemu enega elementa iz domene $\mathcal{X}$.

$$\forall x, y \in \mathcal{X} : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna hkrati – vsak element iz kodomene $\mathcal{Y}$ je slika natanko enega elementa domene $\mathcal{X}$.

16.1.6 Omejenost funckije

Omejenost navzgor

Funkcija f je **navzgor omejena**, če obstaja tako realno število M, da je $f(x) \leqslant M$ za vsak $x \in D_f$. Število M imenujemo *zgornja meja*.

$$\exists M \in \mathbb{R}. \forall x \in D_f \ni: f(x) \leqslant M$$

Omejenost navzdol

Funkcija f je **navzdol omejena**, če obstaja tako realno število m, da je $f(x) \geqslant m$ za vsak $x \in D_f$. Število m imenujemo *spodnja meja*.

$$\exists m \in \mathbb{R}. \forall x \in D_f \ni: f(x) \geqslant m$$

Omejenost

Funkcija f je **omejena**, če je navzgor omejena in navzdol omejena.

$$\exists m, M \in \mathbb{R}. \forall x \in D_f \ni: f(x) \in [m, M]$$

Neomejenost navzgor

Funkcija f je **navzgor neomejena**, če za vsako pozitivno realno število M obstaja tak $x \in D_f$, da je $f(x) > M$.

$$\forall M \in \mathbb{R}^+. \exists x \in D_f \ni: f(x) > M$$

Neomejenost navzdol

Funkcija f je **navzdol neomejena**, če za vsako negativno realno število N obstaja tak $x \in D_f$, da je $f(x) < N$.

$$\forall N \in \mathbb{R}^-. \exists x \in D_f \ni: f(x) < N$$

Neomejenost

Funkcija f je **neomejena**, če je navzgor neomejena in navzdol neomejena.

16.1.7 Predznak funkcije

Pozitivnost

Funkcija f je na intervalu (a, b) **pozitivna**, če za vsak $x \in (a, b)$ velja $f(x) > 0$.

$$\forall x \in (a, b) \cap D_f \ni: f(x) > 0$$

Negativnost

Funkcija f je na intervalu (a, b) **negativna**, če za vsak $x \in (a, b)$ velja $f(x) < 0$.

$$\forall x \in (a, b) \cap D_f \ni: f(x) > 0$$

16.1.8 Sodost in lihost funkcije

Sodost

Funkcija f je **soda**, če za vsak $x \in D_f$ velja $f(-x) = f(x)$.

$$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$$

Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

Lihost

Funkcija f je **liha**, če za vsak $x \in D_f$ velja $f(-x) = -f(x)$.

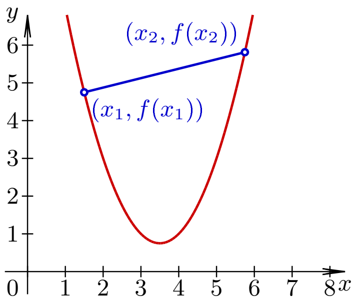
$$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$$

Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

16.1.9 Konveksnost in konkavnost funkcije

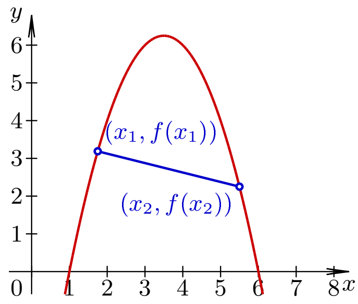
Konveksnost

Funkcija f je na intervalu (a, b) **konveksna**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$ velja, da je graf funkcije pod zveznico točk $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$.



Konkavnost

Funkcija f je na intervalu (a, b) **konkavna**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$ velja, da je graf funkcije nad zveznico točk $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$.



Naloga 16.1. *Za katere x je dana funkcija definirana? Zapišite definicijsko območje.*

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- $g(x) = 2x - 3$
- $h(x) = \dfrac{x}{x-3}$
- $i(x) = x^2 - 2x + 1$
- $j(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $k(x) = \sqrt{x-4}$
- $l(x) = (x-3)^{-2}$
- $m(x) = \sqrt{3x+4}$
- $n(x) = \dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$
- $o(x) = \sqrt{3-6x}$

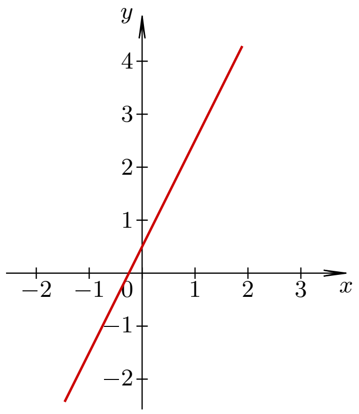
Naloga 16.2. *Izračunajte začetno vrednost in ničle funkcije.*

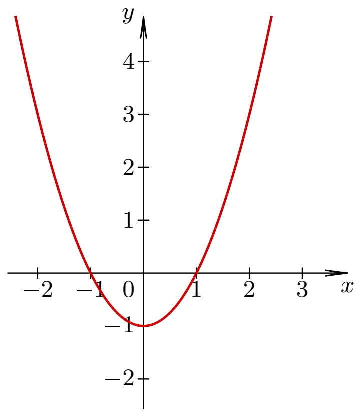
- $f(x) = 2x - 4$
- $g(x) = x^2 - 4$
- $h(x) = 5x + 2$
- $i(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$
- $j(x) = (x-1)^{-2} - 1$
- $k(x) = \dfrac{1}{x}$
- $l(x) = \dfrac{2x+4}{2x^2-1}$
- $m(x) = \sqrt{x+5}$
- $n(x) = \sqrt{2x+6}$

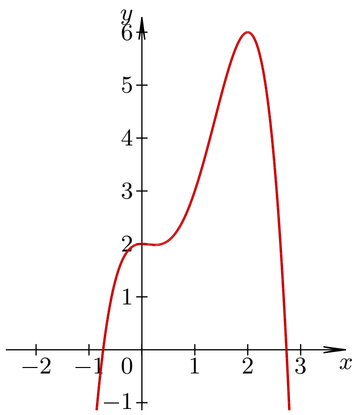
Naloga 16.3. *Narišite graf funkcije. Izračunajte ničle in začetno vrednost ter vrednosti preverite na grafu.*

- $f(x) = x - 3$
- $g(x) = 2x + 1$
- $h(x) = -2x + 1$
- $p(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
- $q(x) = \dfrac{2-x}{4}$
- $r(x) = |2x-4| - 1$

Naloga 16.4. *Z grafa funkcije razberite, kam funkcija preslika originale $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ in $x = 2$.*

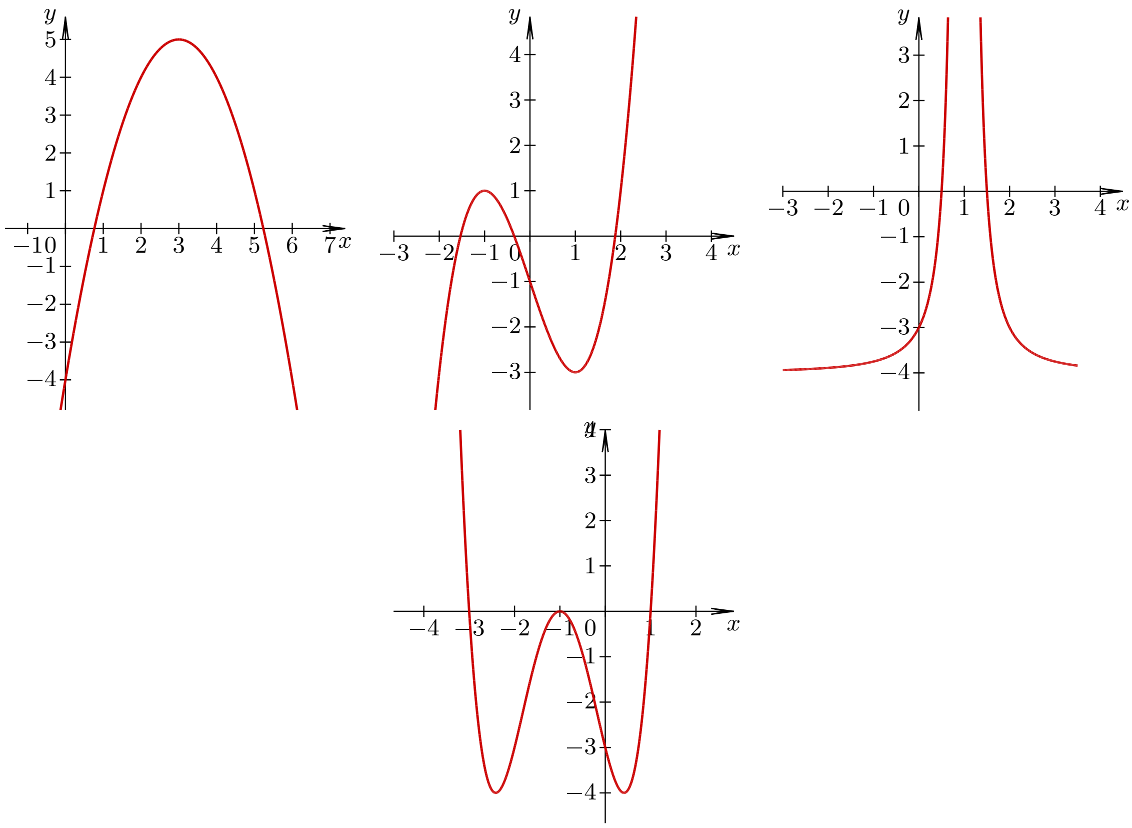






Naloga 16.5. *Narisan je graf funkcije. Zapišite:*

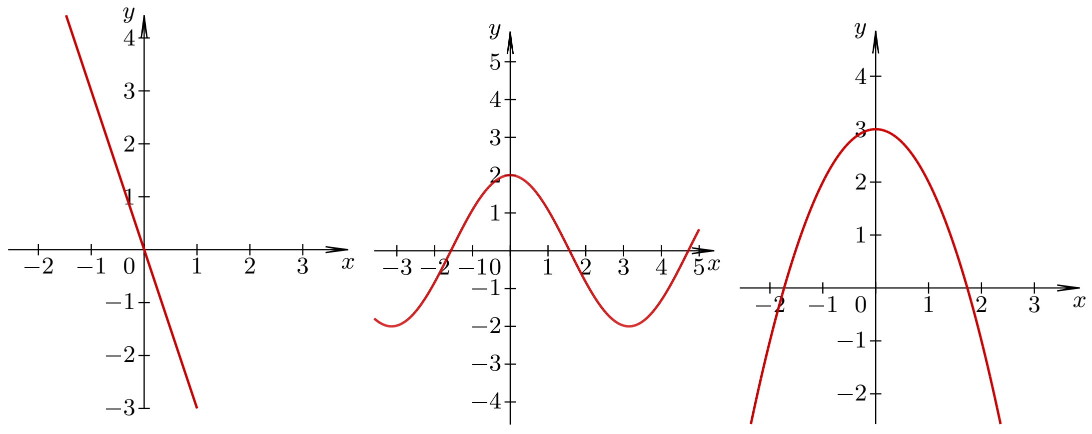
- *začetno vrednost funkcije,*
- *intervale, kjer funkcija narašča oziroma pada,*
- *natančno zgornjo in spodnjo mejo, če je funkcija navzgor ali navzdol omejena.*

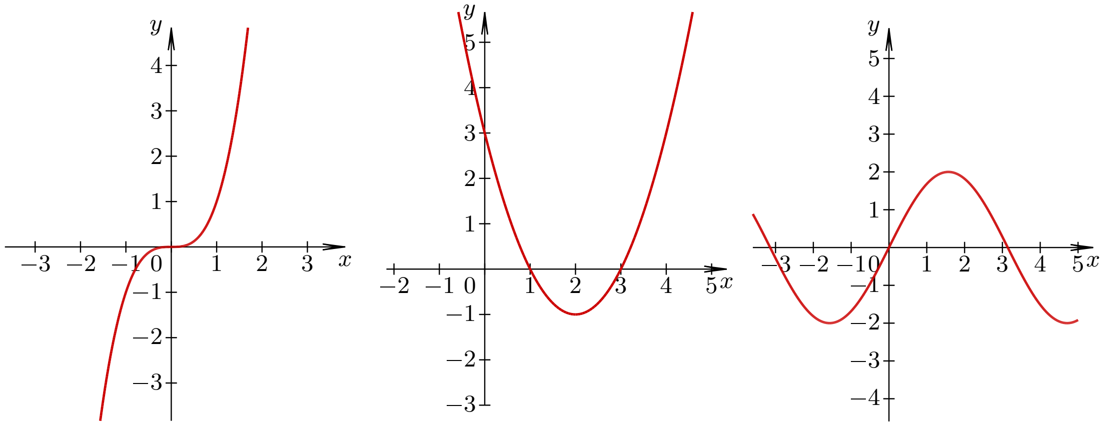


Naloga 16.6. *Računsko preverite, ali je dana funkcija soda ali liha.*

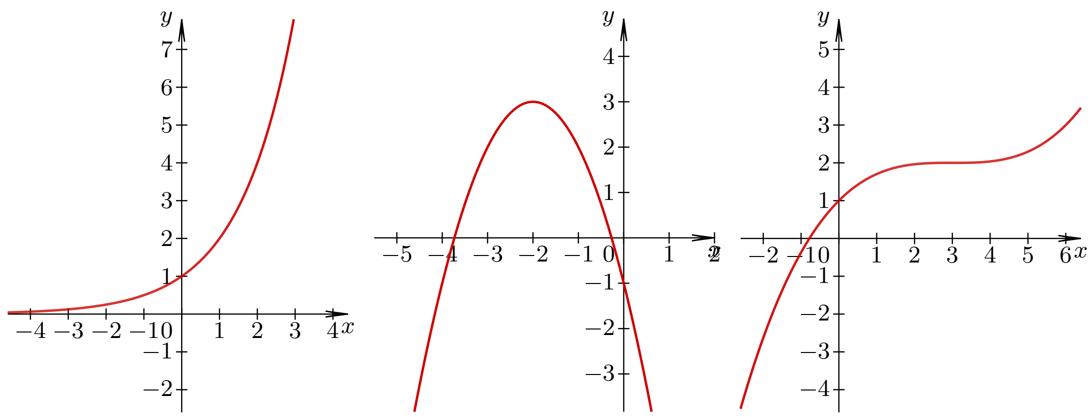
- $f(x) = 3x$
- $g(x) = -3x + 1$
- $h(x) = 2|x| + 4$
- $i(x) = x^2 + 1$
- $j(x) = x^2 + 3x - 1$
- $k(x) = x^3 + 2x$
- $l(x) = 5x^3 - 4x + 1$
- $m(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{7x^3 + x}$

Naloga 16.7. *Z grafa funkcije razberite, ali je funkcija soda ali liha.*

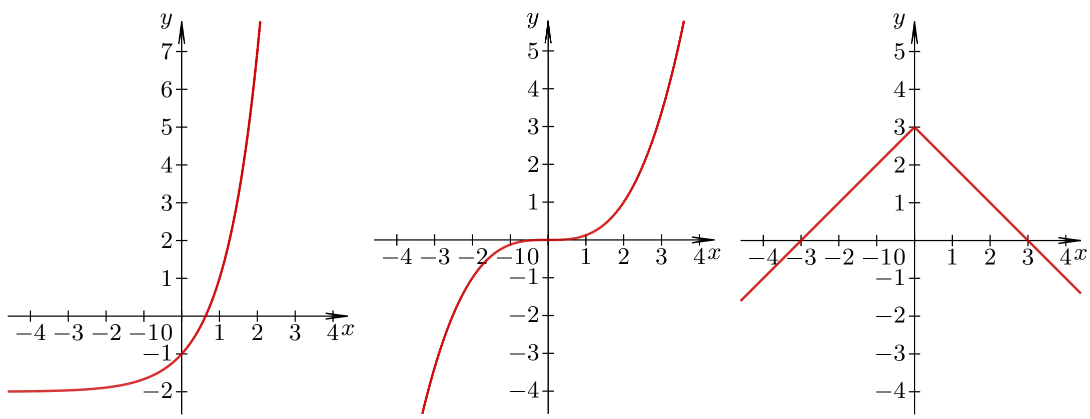




Naloga 16.8. *Z grafa funkcije razberite, na katerih intervalih je funkcija konveksna in na katerih konkavna.*



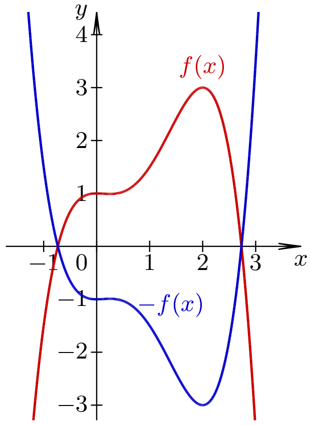
Naloga 16.9. *Z grafa funkcije razberite, ali je realna funkcija realne spremenljivke injektivna, surjektivna, bijektivna.*



16.2 Transformacije funkcij

16.2.1 Zrcaljenja

Zrcaljenje preko abscisne osi



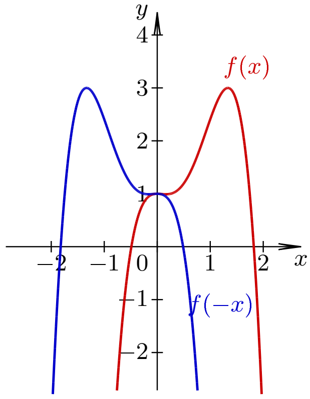
Zrcaljenje preko abscisne osi vsako točko $T(x, y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(x, -y)$.

$$Z_x : (x, y) \mapsto (x, -y)$$

Do prezrcaljene funkcije f preko abscisne osi pridemo tako, da funkcijo f pomnožimo z -1

$$Z_x : f(x) \mapsto -f(x)$$

Zrcaljenje preko ordinatne osi



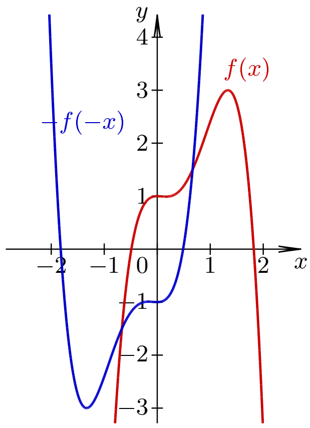
Zrcaljenje preko ordinatne osi vsako točko $T(x, y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(-x, y)$.

$$Z_y : (x, y) \mapsto (-x, y)$$

Do prezrcaljene funkcije f preko ordinatne osi pridemo tako, da neodvisno spremenljivko x funkcije f pomnožimo z -1

$$Z_y : f(x) \mapsto f(-x)$$

Zrcaljenje preko izhodišča



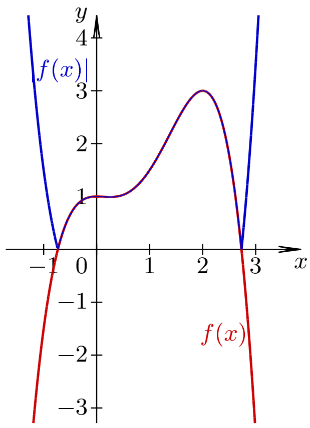
Zrcaljenje preko izhodišča vsako točko $T(x, y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(-x, -y)$.

$$Z_i : (x, y) \mapsto (-x, -y)$$

Do prezrcaljene funkcije f preko izhodišča pridemo tako, da neodvisno spremenljivko x funkcije f in funkcijo f pomnožimo z -1

$$Z_i : f(x) \mapsto -f(-x)$$

Absolutna vrednost funkcije



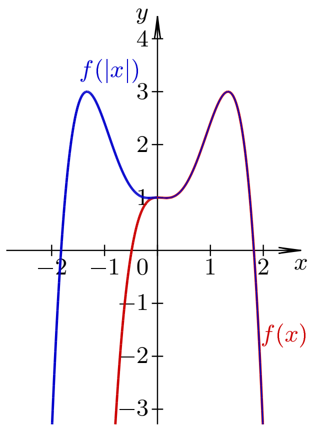
Absolutna vrednost funkcije f vse negativne vrednosti funkcije f pomnoži z -1, pozitivne vrednosti pa ohrani.

$$T_1 : f(x) \mapsto |f(x)|$$

Tisti del grafa funkcije f, ki leži pod abscisno osjo, se preslika preko abscisne osi. Del grafa, ki leži nad abscisno osjo se ohrani.

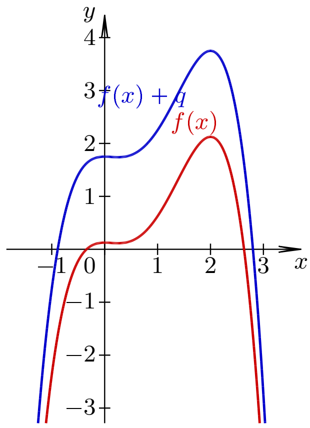
Če v funkciji $f(x)$ neodvisno spremenljivko x nadomestimo z $|x|$, dobimo novo funkcijo, ki je soda.

$$T_2 : f(x) \mapsto f(|x|)$$



16.2.2 Premiki

Vzporedni premik vzdolž ordinatne osi



Vzporedni premik v smeri ordinatne osi za q vsako točko $T(x,y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(x, y+q)$.

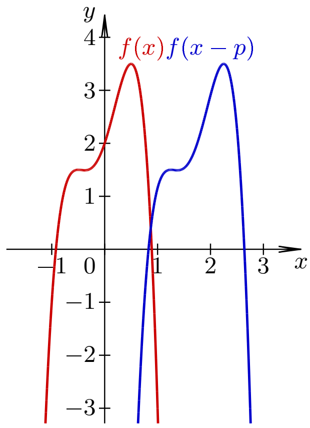
$$P_y : (x,y) \mapsto (x, y+q)$$

Do premaknjene funkcije f vzdolž ordinatne osi pridemo tako, da funkciji f prištejemo q.

$$P_y : f(x) \mapsto f(x) + q$$

Pri $q > 0$ se graf premakne v pozitivni smeri ordinatne osi (navzgor), pri $q < 0$ se graf premakne v negativni smeri ordinatne osi (navzdol).

Vzporedni premik vzdolž abscisne osi



Vzporedni premik v smeri abscisne osi za p vsako točko $T(x,y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(x+p, y)$.

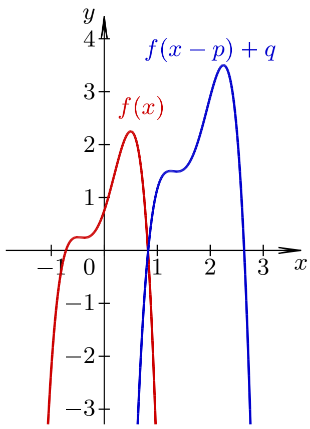
$$P_x : (x,y) \mapsto (x+p, y)$$

Do premaknjene funkcije f vzdolž abscisne osi pridemo tako, da neodvisni spremenljivki x funkcije odštejemo p.

$$P_x : f(x) \mapsto f(x-p)$$

Pri $p > 0$ se graf premakne v pozitivni smeri abscisne osi (v desno), pri $p < 0$ se graf premakne v negativni smeri abscisne osi (v levo).

Premik za vektor



Premik za vektor (p,q) vsako točko $T(x,y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(x+p,y+q)$.

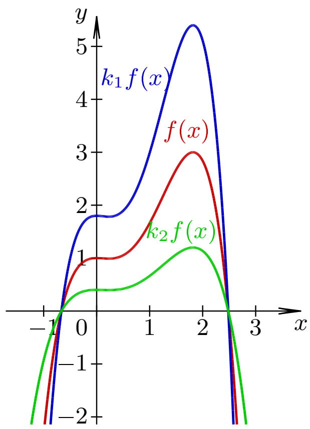
$$P_v : (x,y) \mapsto (x+p, y+q)$$

Do premaknjene funkcije f za vektor (p,q) pridemo tako, da funkciji f prištejemo q, neodvisni spremenljivki x funkcije pa odštejemo p.

$$P_v : f(x) \mapsto f(x-p)+q$$

16.2.3 Raztegi

Razteg vzdolž ordinatne osi



Razteg za faktor $k \in \mathbb{R}^*$ vzdolž ordinatne osi vsako točko $T(x,y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(x,ky)$.

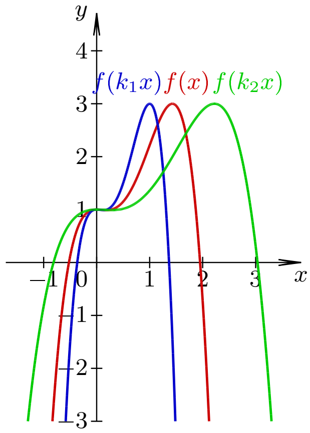
$$R_y : (x,y) \mapsto (x,ky)$$

Do raztegnjene funkcije f za faktor $k \in \mathbb{R}^*$ vzdolž ordinatne osi pridemo tako, da funkcijo pomnožimo s k.

$$R_y : f(x) \mapsto kf(x)$$

Pri $|k| > 1$ se graf funkcije raztegne pri $|k| < 1$ pa skrči vzdolž ordinatne osi. Za $k = 1$ se graf funkcije ohrani – identična preslikava.

Razteg vzdolž abscisne osi



Razteg za faktor $k \in \mathbb{R}^*$ vzdolž abscisne osi vsako točko $T(x,y)$ grafa funkcije preslika v točko $T'(\frac{x}{k},y)$.

$$R_x : (x,y) \mapsto (\frac{x}{k}, y)$$

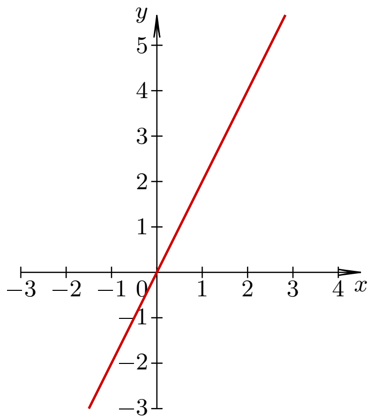
Do raztegnjene funkcije f za faktor $k \in \mathbb{R}^*$ vzdolž abscisne osi pridemo tako, da neodvisno spremenljivko x funkcije f pomnožimo s k.

$$R_x : f(x) \mapsto f(kx)$$

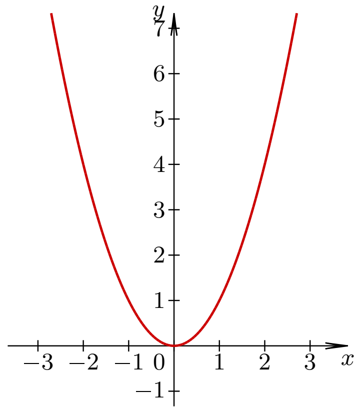
Pri $|k| > 1$ se graf funkcije skrči pri $|k| < 1$ pa raztegne vzdolž abscisne osi. Za $k = 1$ se graf funkcije ohrani – identična preslikava.

Naloga 16.10. *V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $f(x)$. Narišite graf funckije $g(x) = f(x) + k$ in zapišite predpis nove funkcije, ki ji pripada premaknjeni graf.*

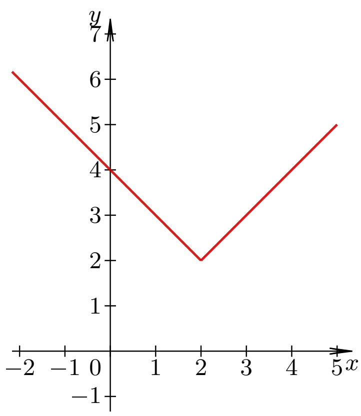
- $f(x) = 2x$, $k = 2$



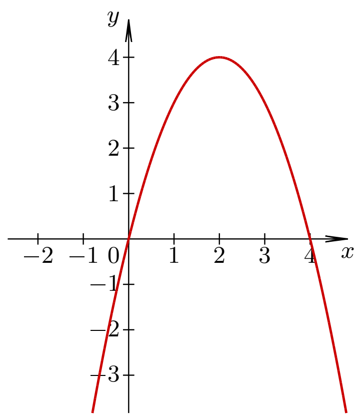
- $f(x) = x^2$, $k = 2$



- $f(x) = |x - 2| + 2$, $k = -3$



- $f(x) = -x^2 + 4x$, $k = -2$



Naloga 16.11. *Graf funkcije f togo premaknemo za k navzgor ali navzdol in dobimo graf funkcije g. Zapišite predpis funkcije g.*

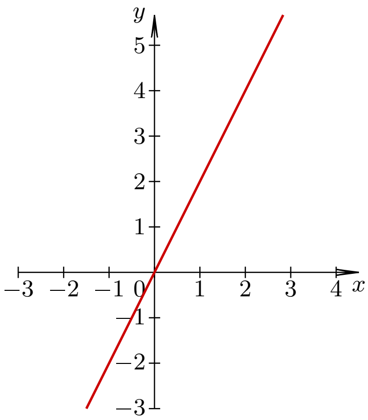
- $f(x) = 4x - 1$, *togi premik za* 3 *navzgor*
- $f(x) = -2x + 3$, *togi premik za* 1 *navzdol*
- $f(x) = \dfrac{5-x}{2}$, *togi premik za* 4 *navzgor*
- $f(x) = \sqrt{x-1}$, *togi premik za* 7 *navzdol*

Naloga 16.12. *Graf funkcije f togo premaknemo za k v levo ali desno in dobimo graf funkcije g. Zapišite predpis funkcije g.*

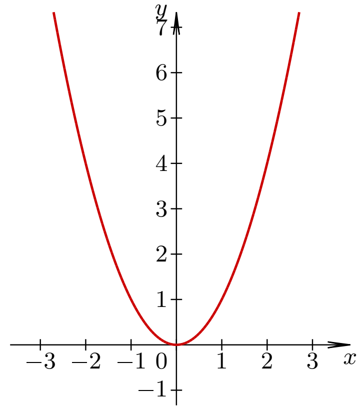
- $f(x) = 4x - 1$, *togi premik za* 3 *v levo*
- $f(x) = -2x + 3$, *togi premik za* 1 *v desno*
- $f(x) = \dfrac{5-x}{2}$, *togi premik za* 4 *v desno*
- $f(x) = \sqrt{x-1}$, *togi premik za* 7 *v levo*

Naloga 16.13. *V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $f(x)$. Narišite graf funckije $g(x) = f(x - k)$ in zapišite predpis nove funkcije, ki ji pripada premaknjeni graf.*

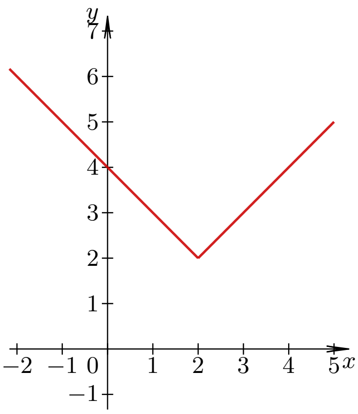
- $f(x) = 2x$, $k = -2$



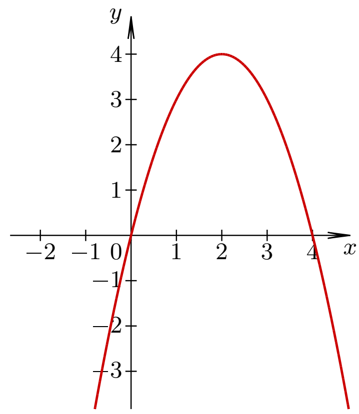
- $f(x) = x^2$, $k = 2$



- $f(x) = |x - 2| + 2$, $k = 2$

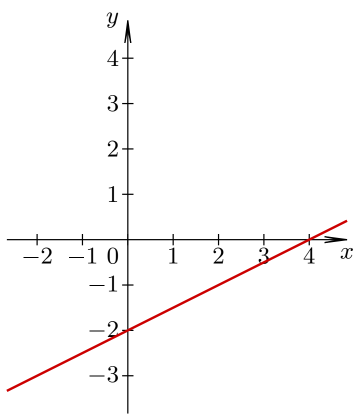


- $f(x) = -x^2 + 4x$, $k = 3$

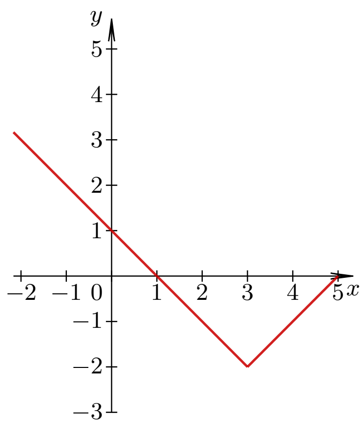


Naloga 16.14. *V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $f(x)$. Narišite graf funckije $g(x) = -f(x)$ in zapišite predpis funkcije $g(x)$.*

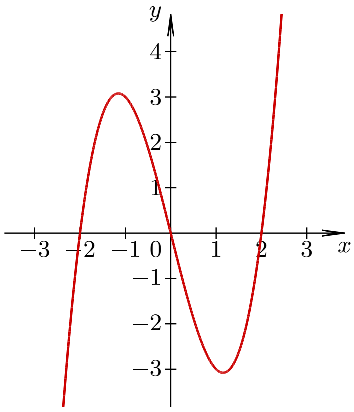
- $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$



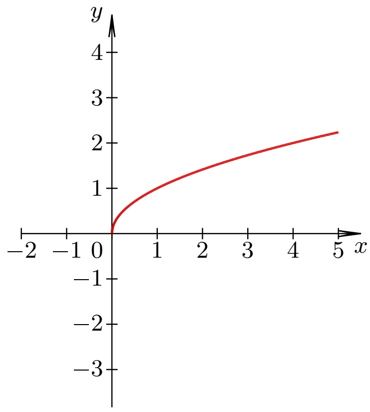
- $f(x) = |x - 3| - 2$



- $f(x) = x^3 - 4x$

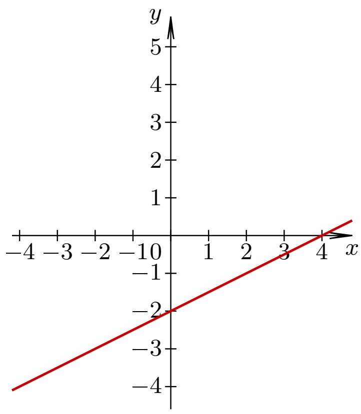


- $f(x) = \sqrt{x}$

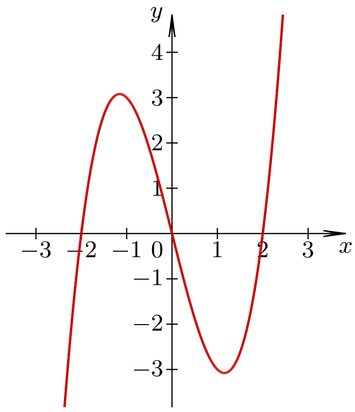


Naloga 16.15. *V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $f(x)$. Narišite graf funckije $g(x) = f(-x)$ in zapišite predpis funkcije $g(x)$.*

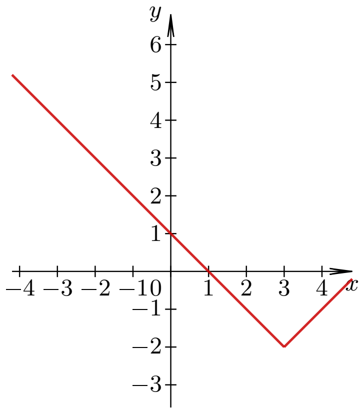
- $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$



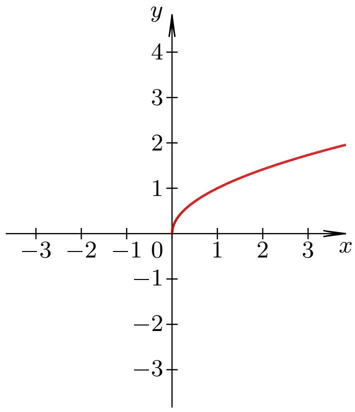
- $f(x) = x^3 - 4x$



- $f(x) = |x - 3| - 2$



- $f(x) = \sqrt{x}$



Naloga 16.16. *Če graf funkcije f prezrcalimo čez abscisno os, dobimo graf funkcije g. Če pa graf funkcije f prezrcalimo čez ordinatno os, dobimo graf funkcije h. Zapišite predpisa funkcije g in funkcije h.*

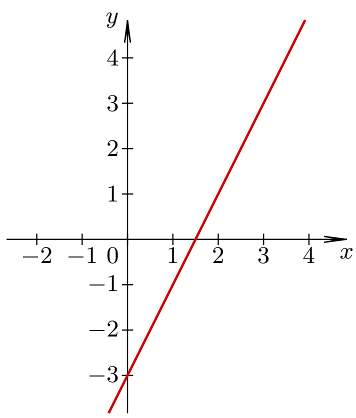
- $f(x) = 4x - 1$
- $f(x) = -2x + 2$
- $f(x) = \dfrac{5-x}{2}$
- $f(x) = \sqrt{x-1}$
- $f(x) = x^2 - 3x$

Naloga 16.17. *Dan je predpis funkcije $f(x)$. Če graf funkcije premaknemo in zrcalimo po navodilu, dobimo graf funkcije g. Zapišite predpis funkcije $g(x)$.*

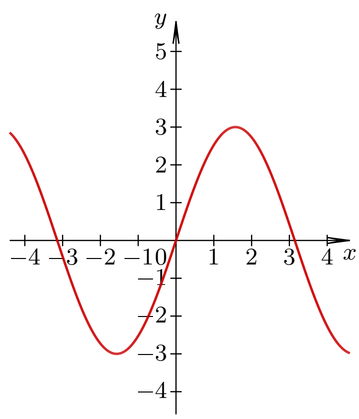
- $f(x) = 2x - 1$, *togi premik za 5 v desno in za 2 navzdol*
- $f(x) = -3x + 5$, *togi premik za 4 v levo in za 3 navzgor*
- $f(x) = |x| + 1$, *togi premik za 3 v desno in za 1 navzdol*
- $f(x) = -2x + 1$, *zrcaljenje čez abscisno os*
- $f(x) = 4x - 1$, *zrcaljenje čez ordinatno os*
- $f(x) = -7x - 6$, *togi premik za 2 v desno in za 3 navzdol, zrcaljenje čez abscisno os*
- $f(x) = x^2 - 1$, *togi premik za 2 v desno in za 1 navzdol*
- $f(x) = -x^3 + 2x - 1$, *togi premik za 1 v levo in za 2 navzgor*
- $f(x) = 3x^2 - 7$, *zrcaljenje čez abscisno os*
- $f(x) = -2x^2 + 3$, *zrcaljenje čez ordinatno os*
- $f(x) = x^{-2}$, *togi premik za 2 v desno in za 1 navzdol*
- $f(x) = (x-1)^{-2} + 1$, *togi premik za 1 v levo in za 1 navzdol*

Naloga 16.18. *V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $f(x)$. Narišite grafa funckij $g(x) = |f(x)|$ in $h(x) = f(|x|)$.*

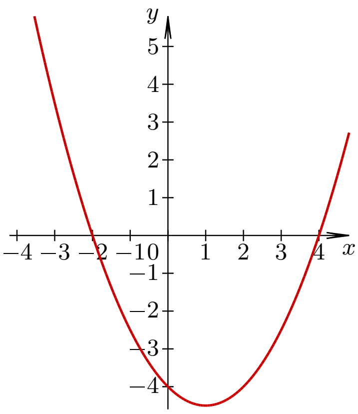
- $f(x) = 2x - 3$



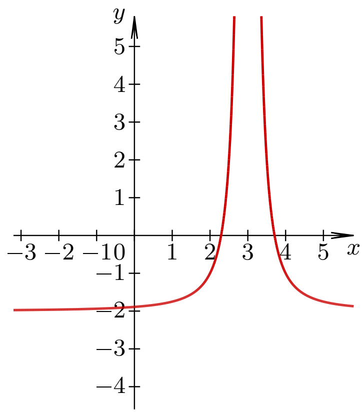
- $f(x) = \sin x$



- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

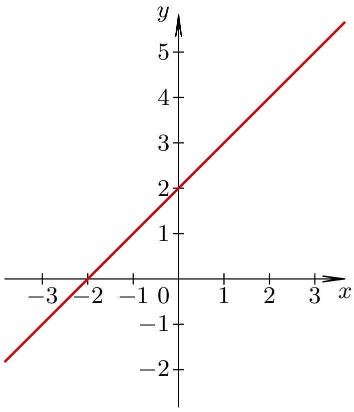


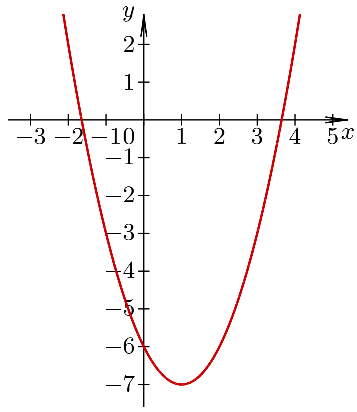
- $f(x) = (x-3)^{-2} - 2$



Naloga 16.19. *V koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $f(x)$. Narišite grafa funckij $g(x) = kf(x)$ in $h(x) = f(kx)$ ter zapišite njuna predpisa.*

- $f(x) = x + 2$, $k = 2$
- $f(x) = x^2 - 2x - 6$, $k = \frac{1}{2}$





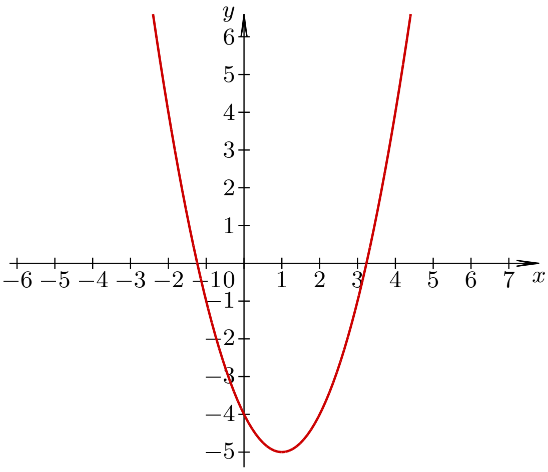
Naloga 16.20. *Graf funkcije f raztegnemo ali skrčimo za faktor k v smeri abscisne ali ordinatne osi. Dobimo graf funkcije g. Zapišite predpis funkcije g.*

- $f(x) = 4x - 1$, *razteg v smeri ordinatne osi za faktor* 2
- $f(x) = -2x + 3$, *skrčitev v smeri abscisne osi za faktor* 2 *in zrcaljenje čez abscisno os*
- $f(X) = \dfrac{5 - x}{2}$, *razteg v smeri ordinatne osi za faktor* 4
- $f(x) = \sqrt{x - 1}$, *skrčitev v smeri abscisne osi za faktor* 2

Naloga 16.21. *Če graf funkcije f transformiramo po navodilu, dobimo graf funkcije g. Zapišite predpis funkcije g.*

- $f(x) = 5x - 1$, *togi premik za* 4 *v desno, zrcaljenje čez abscisno os*
- $f(x) = 6 - 3x$, *razteg za faktor* 2 *v smeri ordinatne osi in togi premik za* 4 *navzgor*
- $f(x) = 7x + 2$, *zrcaljenje čez abscisno in čez ordinatno os*
- $f(X) = -4x + 1$, *skrčitev za faktor* 2 *v smeri abscisne osi in togi premik za* 3 *v levo*
- $f(x) = 2x + 3$, *razteg v smeri abscisne osi za faktor* 2 *in zrcaljenje čez abscisno os*
- $f(x) = x^2$, *togi premik za* 3 *v levo in* 2 *navzgor*
- $f(x) = x^3$, *togi premik za* 2 *v desno, zrcaljenje čez ordinatno os*
- $f(X) = \dfrac{x}{x + 1}$, *togi premik za za* 2 *v levo in za* 5 *navzgor*
- $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, *zracljenje čez abscisno in čez ordinatno os*

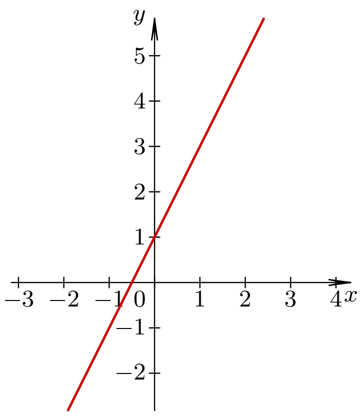
Naloga 16.22. *Narisan je graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 4$.*

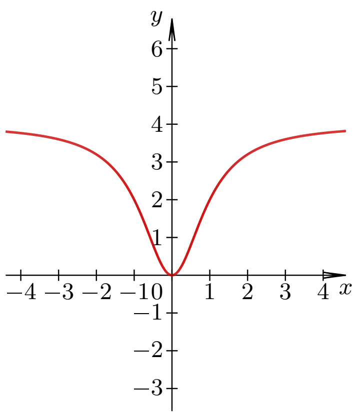


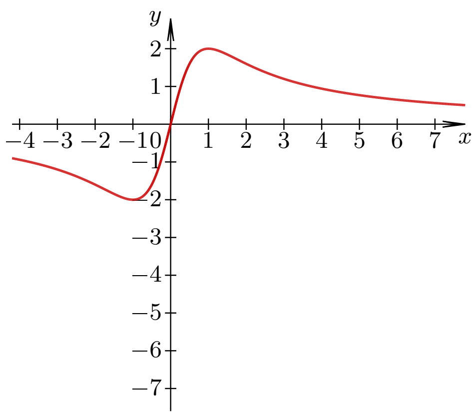
- *Narišite graf funkcije $g(x) = f(x-3) + 2$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $h(x) = |f(x+4)|$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $i(x) = f(|x|) + 2$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $j(x) = f(-x) + 2$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $k(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $l(x) = f(\frac{1}{2}x)$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $m(x) = |f(2x)|$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $n(x) = -f(-x)$ in zapišite predpis funkcije.*

Naloga 16.23. *Narisan je graf funkcije $f(x)$.*

- *Narišite graf funkcije $g(x) = f(-x) + 4$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $h(x) = -f(x) + 4$ in zapišite predpis funkcije.*
- *Narišite graf funkcije $e(x) = f(x-3) - 4$ in zapišite predpis funkcije.*







16.3 Inverzna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bijektivna funkcija, ki vsakemu originalu $x \in \mathcal{X}$ priredi sliko $y = f(x) \in \mathcal{Y}$. **Inverzna funkcija** f^{-1} je funkcija, ki slika iz množice $\mathcal{Y}$ v množico $\mathcal{X}$ in sliki y priredi original x: $f^{-1}(y) = x$.

$$\begin{array}{ll} f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} & f^{-1} : \ \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \\ f : x \mapsto y & f^{-1} : \quad y \mapsto x \end{array}$$

Definicijsko območje funkcije f^{-1} je množica $\mathcal{Y}$, njena zaloga vrednosti pa množica $\mathcal{X}$.

Graf inverzne funkcije f^{-1} je simetričen grafu funkcije f glede na simetralo lihih kvadrantov $y = x$. Če je točka $T(x_0, y_0) \in \Gamma_f$, potem je točka $T'(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$.

Inverzna funkcija $f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ obstaja natanko tedaj, ko je funkcija f bijektivna.

Če je funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ injektivna, ni pa surjektivna, obstaja inverzna funkcija $f^{-1} : Z_f \to \mathcal{X}$ in je $Z_f \subset \mathcal{Y}$.

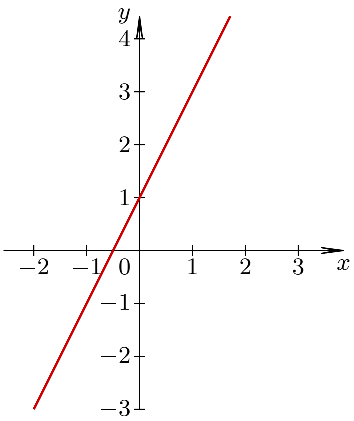
Naloga 16.24. *Linearni funkciji zapišite predpis inverzne funkcije.*

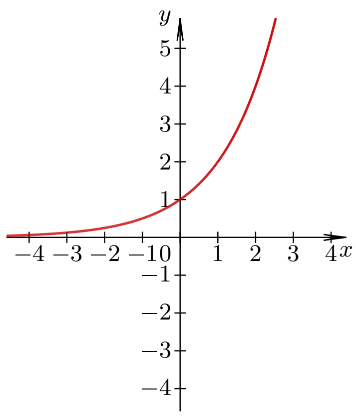
- $f(x) = -4x + 2$
- $g(x) = 2x - 1$
- $h(x) = 3x - \frac{7}{4}$
- $i(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$
- $j(x) = \dfrac{x+5}{3}$

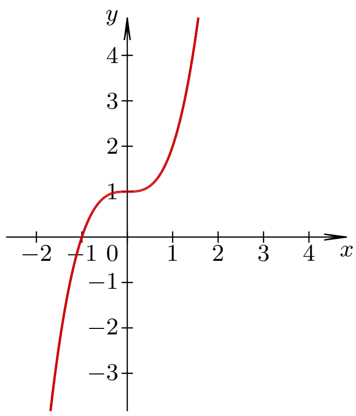
Naloga 16.25. *Bijektivni funkciji zapišite funkcijski predpis inverzne funkcije.*

- $f(x) = x^3$
- $g(x) = x^5 - 2$
- $h(x) = (x-1)^3$
- $i(x) = 5x + 27$
- $j(x) = (x+5)^3$
- $k(x) = x^3 + 5$
- $l(x) = \dfrac{x+1}{x-7}$
- $m(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$
- $n(x) = \dfrac{5x-3}{4x-1}$

Naloga 16.26. *Grafu bijektivne funckije na sliki narišite graf inverzne funkcije.*







Poglavje 17

Potenčna funkcija

17.1 Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

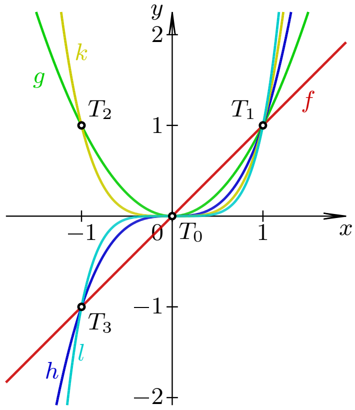
Potenčna funkcija z naravnim eksponentom je realna funkcija realne spremenljivke, podana s predpisom

$$f(x) = x^n; \quad n \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x$

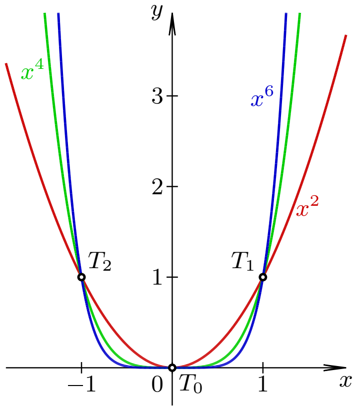
$g(x) = x^2 \quad k(x) = x^4$

$h(x) = x^3 \quad l(x) = x^5$



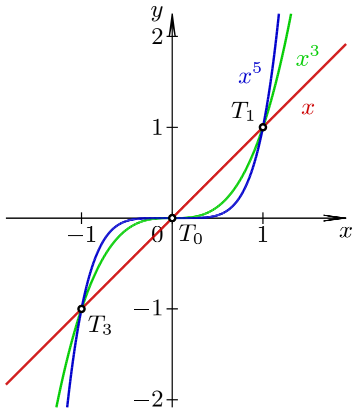
Lastnosti potenčnih funkcij z naravnim sodim eksponentom

- $D_f = \mathbb{R}$ in $Z_f = [0, \infty)$
- Graf je parabola sode stopnje.
- Vse parabole potekajo skozi točke $T_0(0,0)$, $T_1(1,1)$ in $T_2(-1,1)$.
- So padajoče za $x \in (-\infty, 0)$ in naraščajoče za $x \in (0, \infty)$.
- So sode – grafi so simetrični glede na y-os.
- So konveksne.
- Imajo večkratno ničlo sode stopnje $x = 0$.
- Imajo teme v točki $T_0(0,0)$.



Lastnosti potenčnih funkcij z naravnim lihim eksponentom, večjim od 1

- $D_f = \mathbb{R}$ in $Z_f = \mathbb{R}$
- Graf je parabola lihe stopnje.
- Vse parabole potekajo skozi točke $T_0(0,0)$, $T_1(1,1)$ in $T_3(-1,-1)$.
- So naraščajoče za vse $x \in \mathbb{R}$.
- So lihe – grafi simetrični glede na koordinatno izhodišče.
- So konveksne za $x \in (0, \infty)$ in konkavne za $x \in (-\infty, 0)$.
- Imajo večkratno ničlo lihe stopnje $x = 0$.
- So bijektivne.



Naloga 17.1. *Katere izmed točk* $(1, 27)$, $(-1, 9)$, $(10, 157)$ *ležijo na grafu funkcije* $f(x) = 2\,(x-3)^4 - 5$*?*

Naloga 17.2. *Dana je funkcija* $f(x) = x^3$. *Zapišite predpis za funkcijo* g, *katere graf je premaknjen:*

- *za* 2 *v levo in za* 3 *navzgor;*
- *za* 3 *v desno in za* 2 *navzgor;*
- *za* 1 *v levo in za* 5 *navzdol;*
- *za* 4 *v desno in za* 1 *nvazdol.*

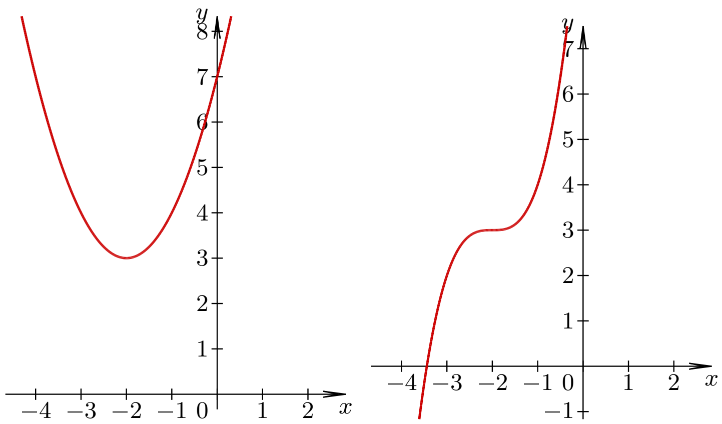
Naloga 17.3. *Dana je funkcija* $f(x) = (x+3)^3 + 1$. *Zapišite predpis za funkcijo* g, *katere graf je premaknjen:*

- *za* 2 *v levo in za* 3 *navzgor;*
- *za* 3 *v desno in za* 2 *navzgor;*
- *za* 1 *v levo in za* 5 *navzdol;*
- *za* 4 *v desno in za* 1 *nvazdol;*
- *za* 1 *v desno in za* 3 *navzdol;*
- *za* 5 *v levo in za* 4 *navzdol.*

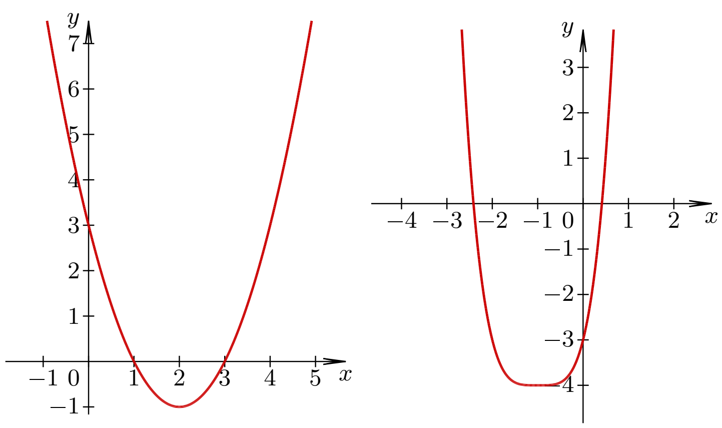
Naloga 17.4. *Graf funkcije* g *smo dobili s togim premikom grafa funkcije* $f(x) = x^2$. *Zapišite vektor premika. Narišite graf. V kateri točki ima funkcija* g *teme?*

- $g(x) = (x-3)^2 + 1$
- $g(x) = (x-2)^2 - 1$
- $g(x) = (x+3)^2 + 4$
- $g(x) = (x+1)^2 - 5$

Naloga 17.5. *Z grafa funkcije* $f(x) = (x+a)^n + b$ *razberite vrednosti parametrov* a, b *in* n.



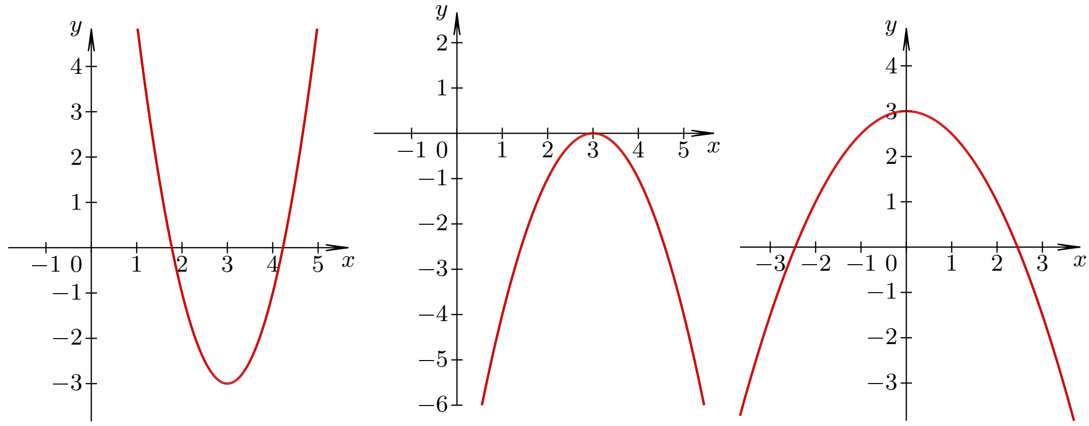
Naloga 17.6. *Z grafa funkcije* $f(x) = (x+a)^n + b$ *razberite vrednosti parametrov* a, b *in* n.



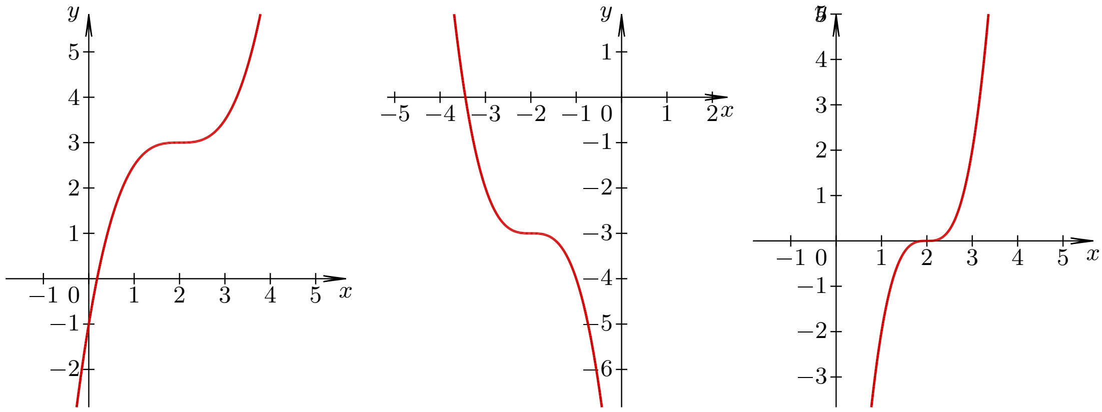
Naloga 17.7. *Narišite graf funkcije f, potem pa v isti koordinatni sistem še graf funkcije g.*

- $f(x)?x^3$, $g(x) = \frac{1}{2}x^3$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x^2$
- $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$
- $f(x) = x^3$, $g(x) = \left|2x^3\right|$

Naloga 17.8. *Z grafa funkcije $f(x) = a\,(x-p)^2 + q$ razberite vrednosti parametrov a, p in q.*



Naloga 17.9. *Z grafa funkcije $f(x) = a\,(x-p)^3 + q$ razberite vrednosti parametrov a, p in q.*



Naloga 17.10. *Izračunajte presečišče grafa dane funkcije f in dane premice.*

- $f(x) = (x-3)^2 - 2$ *in* $y = -2x + 4$
- $f(x) = 2\,(x-1)^2 + 4$ *in* $y = 6$
- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ *in* $y = x - 1$

Naloga 17.11. *Izračunajte presečišče grafov danih funkcij f in g.*

- $f(x) = (x-3)^2$ *in* $g(x) = x^2 + 3$
- $f(x) = (x-3)^2 - 2$ *in* $g(x) = (x-4)^2 + 1$
- $f(x) = -x^2 + 2$ *in* $g(x) = (x-1)^2 + 1$

Naloga 17.12. *Naj bo prvič funkcija f dana s predpisom $f(x) = x^2$, drugič pa s $f(x) = x^3$. Zapišite predpis funkcije g za oba primera in narišite oba grafa.*

- $g(x) = f(x-2)$
- $g(x) = f(x+1)$
- $g(x) = f(x) + 1$
- $g(x) = f(x) - 2$
- $g(x) = f(x+1) - 3$
- $g(x) = -f(x) + 1$
- $g(x) = -f(x-2) + 1$
- $g(x) = |f(x) - 1|$
- $g(x) = 2f(x)$
- $g(x) = f(|x|) + 1$

17.2 Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom

Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom je realna funkcija realne spremenljivke, podana s predpisom

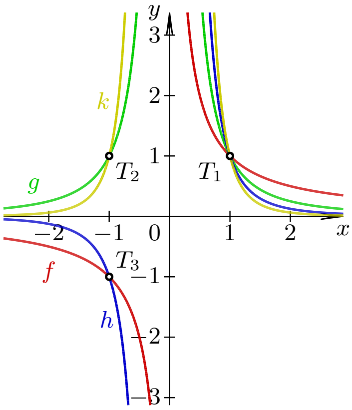
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

$f(x) = x^{-1}$

$g(x) = x^{-2}$

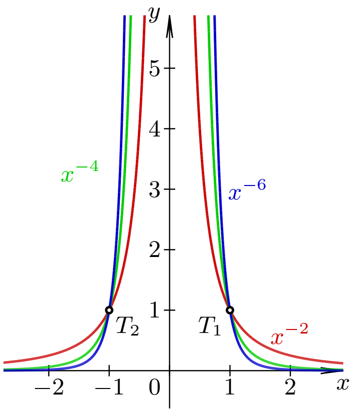
$h(x) = x^{-3}$

$k(x) = x^{-4}$



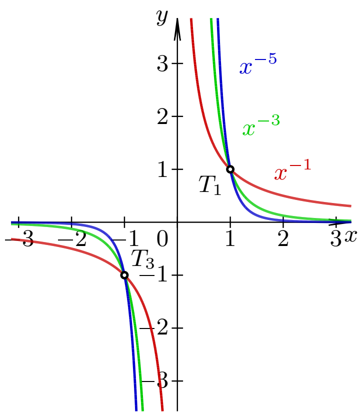
Lastnosti potenčnih funkcij z negativnim sodim eksponentom

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $Z_f = (0, \infty)$
- Grafi potekajo skozi točki $T_1(1, 1)$ in $T_2(-1, 1)$.
- So naraščajoče za $x \in (-\infty, 0)$ in padajoče za $x \in (0, \infty)$.
- So sode – grafi so simetrični glede na ordinatno os.
- So konveksne za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Nimajo ničel.
- $x = 0$ je navpična asimptota, $y = 0$ je vodoravna asimptota.



Lastnosti potenčnih funkcij z negativnim lihim eksponentom

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $Z_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- Grafi potekajo skozi točki $T_1(1, 1)$ in $T_3(-1, -1)$.
- So padajoče za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- So lihe – grafi so simetrični glede na koordinatno izhodišče.
- So konkavne za $x \in (-\infty, 0)$ in konveksne za $x \in (0, \infty)$.
- Nimajo ničel.
- $x = 0$ je navpična asimptota, $y = 0$ je vodoravna asimptota.



Naloga 17.13. *Katere izmed točk* $(0,5)$, $(-1,\frac{11}{4})$, $(2,-5)$ *ležijo na grafu funkcije* $f(x) = 2\,(x-1)^{-3}+3$*?*

Naloga 17.14. *Naj bo* $f(x)=x^{-2}$*. Če graf funkcije* f *premaknemo po navodilu, dobimo graf funkcije* g*. Zapišite predpis funkcije* g*, njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, enačbi navpične in vodoravne asimptote, izračunajte ničle ter začetno vrednost in narišite njen graf.*

- *prmeik za* 2 *v levo in za* 3 *navzdol*
- *premik za* 2 *v desno in za* 1 *navzdol*
- *premik za* 1 *v desno in za* 2 *navzgor*
- *premik za* 2 *v levo in zrcaljenje čez ordinatno os*
- *premik za* 2 *v levo in zrcaljenje čez abscisno os*
- *premik za* 2 *navzgor, razteg za faktor* 0.5 *in zrcaljenje čez abscisno os*

Naloga 17.15. *Naj bo* $f(x)=x^{-3}$*. Če graf funkcije* f *premaknemo po navodilu, dobimo graf funkcije* g*. Zapišite predpis funkcije* g*, njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, enačbi navpične in vodoravne asimptote, izračunajte ničle ter začetno vrednost in narišite njen graf.*

- *za* 2 *v levo in za* 3 *navzdol*
- *za* 2 *v desno in za* 1 *navzdol*
- *za* 1 *v levo in za* 2 *navzgor*
- *za* 2 *v levo in zrcaljenje čez abscisno os*
- *za* 2 *v levo in zrcaljenje čez ordinatno os*
- *za* 3 *navzdol in zrcaljenje čez abscisno os*
- *premik za* 1 *navzgor in zrcaljenje čez koordinatno izhodišče*

Naloga 17.16. *Graf funkcije* g *smo dobili s togim premikom grafa funkcije* $f(x)=x^{-2}$*. Zapišite vektor premika ter enačbi navpične in vodoravne asimptote.*

- $g(x)=(x-3)^{-2}+1$
- $g(x)=(x-2)^{-2}-1$
- $g(x)=(x+3)^{-2}+4$
- $g(x)=(x+1)^{-2}-5$

Naloga 17.17. *Izračunajte presečišče grafa dane funkcije* f *in dane premice.*

- $f(x)=(x-3)^{-1}-2$ *in* $y=-1$
- $f(x)=2\,(x-1)^{-2}+4$ *in* $y=6$
- $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}+3$ *in* $y=1$

Naloga 17.18. *Naj bo* $f(x)=x^{-1}$*. Zapišite predpis funkcije* g *in narišite njen graf.*

- $g(x)=f(x-2)$
- $g(x)=f(x+1)$
- $g(x)=f(x)+1$
- $g(x)=f(x)-2$
- $g(x)=f(x+2)-1$
- $g(x)=-f(x)+1$
- $g(x)=-f(x-2)+1$
- $g(x)=|f(x)-1|$
- $g(x)=2f(x)$
- $g(x)=f(|x|)+1$

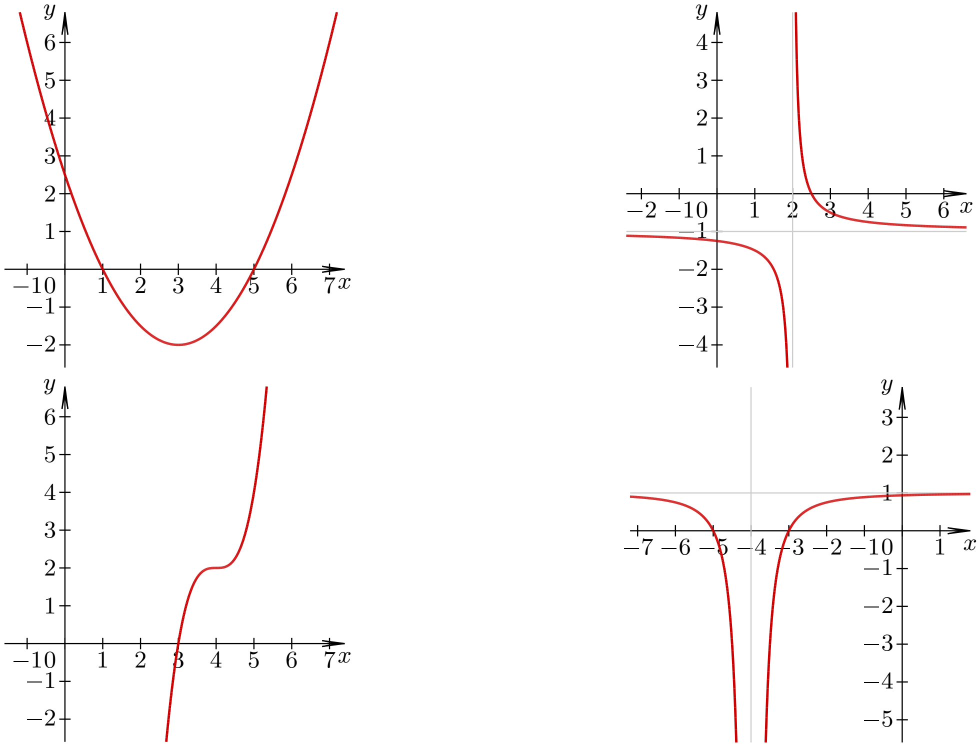
Naloga 17.19. *Naj bo* $f(x)=x^{-2}$*. Zapišite predpis funkcije* g *in narišite njen graf.*

- $g(x)=f(x-2)$
- $g(x)=f(x+1)$
- $g(x)=f(x)+1$
- $g(x)=f(x)-2$
- $g(x)=f(x+2)-3$
- $g(x)=-f(x)+1$
- $g(x)=-f(x-2)+1$
- $g(x)=|f(x)-1|$
- $g(x)=2f(x)$
- $g(x)=f(|x|)+1$

Naloga 17.20. *Dana je funkcija* $f(x)$*. Narišite graf funkcije* $g(x)$*.*

- $f(x)=x^{-1}$, $g(x)=-f(x)$
- $f(x)=x^{-2}$, $g(x)=0.5f(x)$
- $f(x)=x^{2}$ $g(x)=-f(x-1)$
- $f(x)=x^{3}$, $g(x)=-2f(x)$
- $f(x)=x^{-2}$, $g(x)=2f(x+1)$
- $f(x)=x^{-1}$, $g(x)=3f(x-2)-1$
- $f(x)=x^{3}$, $g(x)=2f(x+1)+3$

Naloga 17.21. *Graf ene od potenčnih funkcij (x^2, x^3, x^{-1}, x^{-2}) smo raztegnili v smeri ordinatne osi in ga premaknili v smeri abscisne ter ordinatne osi in tako dobili graf na sliki. Zapišite funkcijo, katere graf je narisan. Z grafa razberite, če je mogoče, definicijsko območje, ničle, začetno vrednost in interval, kjer funkcija narašča. Ali je funkcija injektivna?*



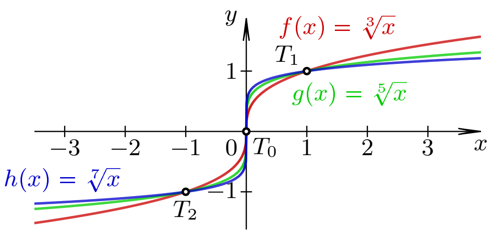
Poglavje 18

Korenska funkcija

18.1 Korenska funkcija z lihim korenskim eksponentom

Vse potenčne funkcije z lihim naravnim eksponentom $f(x) = x^{2k+1}; k \in \mathbb{N}$ so bijektivne, zato jim lahko priredimo inverzne funkcije – to so **korenske funkcije z lihim korenskim eksponentom**, podane s predpisom

$$f^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}; \quad k \in \mathbb{N}.$$



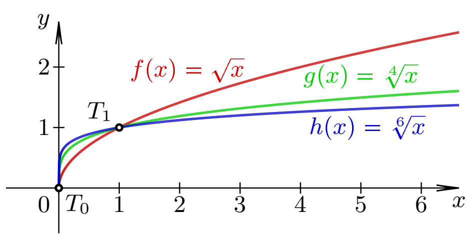
Lastnosti korenskih funkcij z lihim korenskim eksponentom

- $D_f = \mathbb{R}$; $Z_f = \mathbb{R}$
- So naraščajoče za vse $x \in \mathbb{R}$.
- Grafi potekajo skozi točke $T_0(0,0)$, $T_1(1,1)$ in $T_2(-1,-1)$.
- So negativne za $x \in (-\infty, 0)$ in pozitivne za $x \in (0, \infty)$.
- So neomejene.
- So lihe – grafi so simetrični glede na koordinatno izhodišče.
- So konveksne za $x \in (-\infty, 0)$ in konkavne za $x \in (0, \infty)$.
- Imajo ničlo pri $x = 0$.
- Tangenta na krivuljo v ničli je y-os.

18.2 Korenska funkcija s sodim korenskim eksponentom

Potenčne funkcije s sodim naravnim eksponentom $f(x) = x^{2k}; k \in \mathbb{N}$ niso bijektivne. Če jim hočemo prirediti inverzne funkcije, moramo skrčiti definicijsko območje na interval $[0, \infty)$. Tako dobimo **korenske funkcije s sodim korenskim eksponentom**, podane s predpisom

$$f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}; \quad k \in \mathbb{N}.$$



Lastnosti korenskih funkcij s sodim korenskim eksponentom

- $D_f = [0, \infty)$; $Z_f = [0, \infty)$
- So naraščajoče za vse $x \in \mathbb{R}$.
- Grafi potekajo skozi točki $T_0(0,0)$ in $T_1(1,1)$.
- So pozitivne za vse $x \in (0, \infty)$.
- So navzdol omejene z $y = 0$ in navzgor neomejene.
- So konkavne za $x \in (0, \infty)$.
- Imajo ničlo pri $x = 0$.
- Tangenta na krivuljo v ničli je y-os.

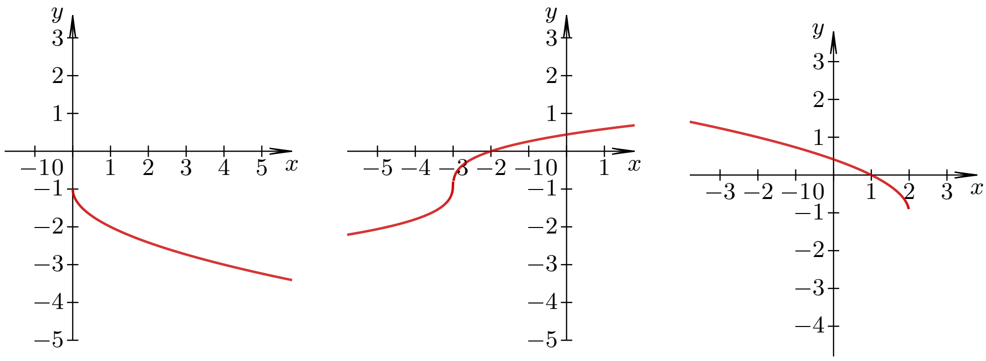
Naloga 18.1. *Zapišite definicijsko območje funkcije, izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije ter narišite njen graf.*

- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $g(x) = \sqrt{x} - 2$
- $h(x) = \sqrt{x-1} - 3$
- $i(x) = \sqrt{-x}$
- $j(x) = \sqrt{2x-1}$
- $k(x) = 2\sqrt{x+4}$
- $l(x) = \sqrt{8-4x}$
- $m(x) = 1 - \sqrt{4-2x}$
- $n(x) = -\sqrt[3]{x}$
- $o(x) = \sqrt[3]{x-2}$
- $p(x) = \sqrt[3]{x} + 1$
- $q(x) = \sqrt[3]{x-1} - 2$
- $r(x) = \sqrt[3]{|x-2|}$
- $s(x) = |\sqrt{x} - 1|$

Naloga 18.2. *Zapišite predpis za funkcijo, katere graf dobimo, če krivuljo* $y = \sqrt{x}$ *premaknemo in raztegnemo ali skrčimo po navodilih.*

- *Togo premaknemo za* 3 *v desno in* 1 *navzdol.*
- *Togo premaknemo za* 2 *v levo in jo skrčimo za faktor* 5 *v smeri ordinatne osi.*
- *Togo premaknemo za* 4 *navzdol in jo zrcalimo čez abscisno os.*
- *Togo premaknemo za* 3 *navzgor in jo zrcalimo čez ordinatno os.*

Naloga 18.3. *Zapišite predpis funkcije, katere graf je na sliki.*



Naloga 18.4. *Zapišite predpis inverzne funkcije dani funkciji.*

- $f : [0, \infty) \to (-\infty, 3]$
  $x \mapsto -x^2 + 3$
- $g : [-9, \infty) \to [-4, \infty)$
  $x \mapsto (x+9)^2 - 4$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto (2x-11)^3 + 5$
- $i : [23, \infty) \to [-31, \infty)$
  $x \mapsto 3\,(x-23)^2 - 31$
- $j : [-1, \infty) \to [-8, \infty)$
  $x \mapsto \sqrt{x+1} - 8$
- $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \sqrt[3]{x-1} - 7$
- $l : [-0.5, \infty) \to [0, \infty)$
  $x \mapsto 3\sqrt{2x+1}$
- $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto 5\sqrt[3]{7x+12} - 1$

Poglavje 19

Kvadratna funkcija

19.1 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija – vaje

Naloga 19.1. *Dana je funkcija* $f(x) = 2x^2 - 3$.

- *Narišite njen graf.*
- *Če graf premaknete za* 2 *v levo, dobite graf funkcije* g. *Zapišite predpis funkcije* g *v splošni obliki.*
- *Zapišite koordinati temena funkcije* f *in funkcije* g.
- *Narišite še grafe funkcij* $|g(x)|$, $g(|x|)$ *in* $-g(x)$.

Naloga 19.2. *Izračunajte teme parabole* $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$.

Naloga 19.3. *Zapišite splošno enačbo parabole, ki ima teme v točki* $T(4, 5)$ *in ordinatno os seka pri* -3.

Naloga 19.4. *Dana je družina parabol* $y = mx^2 - 3x + (m + 1)$. *Za katero vrednost parametra* m *bo:*

- *abscisa temena* $x = 6$*?*
- *parabola sekala ordinatno os pri* 3*?*
- *premica* $x = 3$ *simetrijska os parabole?*
- *teme ležalo na premici* $y = 1$*?*

Naloga 19.5. *Rešite enačbo.*

- $t^2 - 2t = 0$
- $m^2 - 8m = 16$
- $2x + 3 = 2x^2$
- $8a^2 + 14a - 4 = 0$
- $z^2 + z = -1$
- $m^2 + 81 = -18m$

Naloga 19.6. *Izračunajte ničli funkcije in predpis funkcije zapišite v faktorizirani obliki.*

- $f(x) = 25x^2 - 10x + 1$
- $g(x) = x^2 - 6x + 2$
- $h(x) = -5x^2 + 3x$

Naloga 19.7. *V splošni obliki zapišite predpis kvadratne funkcije, ki ima ničlo in teme v točki* $T(4, 0)$ *in katere graf poteka skozi točko* $(5, -3)$.

Naloga 19.8. *V splošni obliki zapišite predpis kvadratne funkcije, ki ima teme v točki* $T(\frac{1}{2}, -6)$ *in ima ničlo* $x = -3$.

Naloga 19.9. *Rešite neenačbo* $-x^2 + 5x + 13 > x^2 - 7 - x$.

Naloga 19.10. *Dana je družina kvadratnih funkcij* $f(x) = mx^2 + 4x + m - 3$. *Za katero vrednost parametra* m *ima funkcija dve različni realni ničli?*

Naloga 19.11. *Dani sta funkciji* f *in* g. *Na katerem intervalu leži graf funkcije* g *nad grafom funkcije* f*?*

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *in* $g(x) = -2x^2 - 4x - 1$
- $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$ *in* $g(x) = x^2 - 6x - 10$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ *in* $g(x) = -x^2 + 6x$
- $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ *in* $g(x) = x^2 + 2$

Naloga 19.12. *Rešite sistem neenačb.*

- $(-x^2 + 22 > 9x) \wedge (2x^2 - x + 5 < 10x)$
- $(\frac{1}{2}x^2 < -2x) \wedge (-x^2 + 4 \geqslant 0)$

Naloga 19.13. *Izračunajte koordinate skupnih točk parabol* $y = -x^2 + 3x - 4$ *in* $y = x^2 + 8x - 2$, *če le-te obstajajo.*

Poglavje 20

Kompleksna števila

Poglavje 21

Eksponentna funkcjia

Poglavje 22

Logaritemska funkcija