

Matematika  
Splošna gimnazija

ZAPISKI

4. oktober 2024



Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite

Jan Kastelic



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Osnove logike</b>	<b>1</b>
1.1	Izjave . . . . .	1
1.1.1	Enostavne in sestavjene izjave . . . . .	1
1.2	Logične operacije . . . . .	2
1.2.1	Negacija . . . . .	2
1.2.2	Konjunkcija . . . . .	2
1.2.3	Disjunkcija . . . . .	2
1.2.4	Komutativnost konjunkcije in disjunkcije . . . . .	3
1.2.5	Asociativnost konjunkcije in disjunkcije . . . . .	3
1.2.6	Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo . . . . .	3
1.2.7	De Morganova zakona . . . . .	3
1.2.8	Implikacija . . . . .	4
1.2.9	Ekvivalenca . . . . .	4
1.2.10	Vrstni red operacij . . . . .	5
1.2.11	Tavtologija in protislovje . . . . .	5
1.2.12	Kvantifikatorja . . . . .	5
1.3	Pomen izjav v matematiki . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Osnove teorije množic</b>	<b>7</b>
2.1	Množice . . . . .	7
2.2	Moč množice . . . . .	7
2.3	Podmnožice . . . . .	8
2.4	Operacije z množicami . . . . .	9
2.4.1	Komplement množice . . . . .	9
2.4.2	Unija množic . . . . .	9
2.4.3	Presek množic . . . . .	10
2.4.4	Lastnosti operacij unije in preseka . . . . .	10
2.4.5	Razlika množic . . . . .	11
2.4.6	Kartezični produkt množic . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Naravna in cela števila</b>	<b>13</b>
3.1	Naravna števila . . . . .	13
3.2	Operacije v množici $\mathbb{N}$ . . . . .	13
3.2.1	Seštevanje . . . . .	13
3.2.2	Množenje . . . . .	14
3.2.3	Odštevanje . . . . .	14
3.2.4	Vrstni red operacij . . . . .	14
3.3	Osnovni računski zakoni . . . . .	15



# Poglavje 1

## Osnove logike

### 1.1 Izjave

**Matematična izjava** je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.

Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R/P/1/⊤**;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N/0/⊥**.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami ( $A, B, C \dots$ ).

**Naloga 1.1.** *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število 12 deli število 3.*
- *Število 3 deli število 10.*
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je 10 dl isto kot 1 l?*
- *Število 41 je praštevilo.*

**Naloga 1.2.** *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- *A: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- *B: Število je deljivo s 4 natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s 4.*
- *C: Ostanek pri deljenju s 4 je lahko 1, 2 ali 3.*
- *D: Mesec februar ima 28 dni.*
- *E: Vsa praštevila so liha števila.*
- *F: Število 1 je naravno število.*
- *G: Praštevil je neskončno mnogo.*

#### 1.1.1 Enostavne in sestavljene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.

Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

## 1.2 Logične operacije

### 1.2.1 Negacija

**Negacija** izjave  $A$  je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava  $A$ . Oznaka:  $\neg A$ .

$\neg A$       **Ni res**, da velja izjava  $A$ .

Če je izjava  $A$  pravilna, je  $\neg A$  nepravilna in obratno: če je  $\neg A$  pravilna, je  $A$  nepravilna.

Negacija negacije izjave je potrditev izjave.  $\neg(\neg A) = A$

$A$	$\neg A$
$P$	$N$
$N$	$P$

**Naloga 1.3.** Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.

- $A$ :  $5 \cdot 8 = 30$
- $B$ : Število 3 je praštevilo.
- $C$ : Največje dvomestno število je 99.
- $D$ : Število 62 je večkratnik števila 4.
- $E$ : Praštevil je neskončno mnogo.
- $F$ :  $7 \leq 5$
- $G$ : Naša pisava je cirilica.

### 1.2.2 Konjunkcija

**Konjunkcija** izjav  $A$  in  $B$  nastane tako, da povežemo izjavi  $A$  in  $B$  z **in hkrati**.

$A \wedge B$       Velja izjava  $A$  **in (hkrati)** izjava  $B$ .

Če sta izjavi  $A$  in  $B$  pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

$A$	$B$	$A \wedge B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$N$
$N$	$N$	$N$

**Naloga 1.4.** Določite logično vrednost konjunkcijam.

- Število 28 je večkratnik števila 3 in večkratnik števila 8.
- Število 7 je praštevilo in je deljivo s številom 1.
- Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.
- Ostanki pri deljenju števila s 3 so lahko 0, 1 ali 2, pri deljenju s 5 pa 0, 1, 2, 3 ali 4.
- Število je deljivo s 3, če je vsota števk deljiva s 3, in je deljivo z 9, če je vsota števk deljiva z 9.

### 1.2.3 Disjunkcija

**Disjunkcija** izjav  $A$  in  $B$  nastane s povezavo **ali**.

$A \vee B$       Velja izjava  $A$  **ali** izjava  $B$  (lahko tudi obe hkrati).



Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

$A$	$B$	$A \vee B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$P$
$N$	$P$	$P$
$N$	$N$	$N$

**Naloga 1.5.** Določite logično vrednost disjunkcijam.

- Število 24 je večkratnik števila 3 ali 8.
- Število 35 ni večkratnik števila 7 ali 6.
- Število 5 deli število 16 ali 18.
- Ploščina kvadrata s stranico  $a$  je  $a^2$  ali obseg kvadrata je  $4a$ .
- Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika  $160^\circ$ , ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.

#### 1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

#### 1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

#### 1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

#### 1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij:  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij:  $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

**Naloga 1.6.** Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?

- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

### 1.2.8 Implikacija

**Implikacija** izjav  $A$  in  $B$  je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

$A \Rightarrow B$     Če velja izjava  $A$ , **potem** velja izjava  $B$ . / **Iz**  $A$  sledi  $B$ .

Izjava  $A$  je **pogoj** ali **privzetek**, izjava  $B$  pa (**logična**) **posledica** izjave  $A$ .

Implikacija je nepravilna, ko je izjava  $A$  pravilna, izjava  $B$  pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$P$
$N$	$N$	$P$

**Naloga 1.7.** Določite, ali so izjave pravilne.

- Če je število deljivo s 100, je deljivo tudi s 4.
- Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.
- Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Če sta števili 2 in 3 lihi števili, potem je produkt teh dveh števil sodo število.
- Če je število 18 deljivo z 9, potem je deljivo s 3.
- Če je 7 večkratnik števila 7, potem 7 deli število 43.
- Če je število deljivo s 4, potem je deljivo z 2.

### 1.2.9 Ekvivalenca

**Ekvivalenca** izjavi  $A$  in  $B$  poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

$A \Leftrightarrow B$     Izjava  $A$  velja, **če in samo če** velja izjava  $B$ ./  
Izjava  $A$  velja **natanko tedaj, ko** velja izjava  $B$ .

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.

Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$N$
$N$	$N$	$P$

**Naloga 1.8.** Določite, ali so naslednje izjave pravilne.

- Število je deljivo z 12 natanko takrat, ko je deljivo s 3 in 4 hkrati.
- Število je deljivo s 24 natanko takrat, ko je deljivo s 4 in 6 hkrati.
- Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.
- Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z 2.

### 1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

**Naloga 1.9.** V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

### 1.2.11 Tautologija in protislovje

**Tautologija** ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavljena, pravilna.

**Protislovje** je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

### 1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$  (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$  (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

## 1.3 Pomen izjav v matematiki

**Aksiomi** so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.

**Izreki** ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.

**Definicije** so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.



## Poglavje 2

# Osnove teorije množic

### 2.1 Množice

**Množica** je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.

Množica je določena, če:

- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$  ali  $A, B, C \dots$ ).

**Univerzalna množica** ali **univerzum** ( $\mathcal{U}$ ) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

**Element množice** je objekt v množici.

Označujemo jih z malimi črkami ( $a, b, c \dots$ ).

Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr.  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ ).

Element je lahko vsebovan v množici (npr.  $a \in \mathcal{A}$ ) ali pa v množici ni vsebovan (npr.  $d \notin \mathcal{A}$ ).

**Prazna množica** ( $\emptyset, \{\}$ ) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

### 2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka:  $\mathbf{m}(\mathcal{A})$  ali  $|\mathcal{A}|$ .

Množica je lahko:

- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov:  $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$ ;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov:  $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$ .

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.

Njeno moč pišemo kot:  $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$ .

Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

**Naloga 2.1.** Naštajte elemente množice in zapišite njeno moč, če je  $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ .

- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leq 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leq 8)\}$

**Naloga 2.2.** Naj bo  $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ . Zapišite množico tako, da naštujete njene elemente. Določite še njeno moč.

- Množica vseh deliteljev števila 18.
- Množica praštevil, ki so manjša od 20.

- Množica večkratnikov števila 5, ki so večji od 50 in manjši ali enaki 70.

**Naloga 2.3.** Zapišite množico s simboli.

- Množica vseh sodih naravnih števil.
- Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 5.

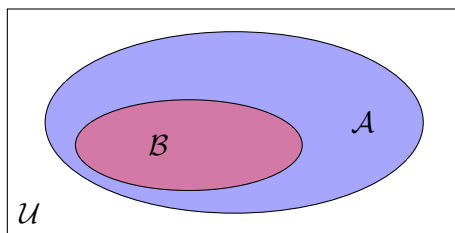
**Naloga 2.4.** Podane so množice tako, da so naštetni njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

## 2.3 Podmnožice

Množica  $\mathcal{B}$  je **podmnožica** množice  $\mathcal{A}$ , če za vsak element iz  $\mathcal{B}$  velja, da je tudi element množice  $\mathcal{A}$ .

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$  – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \emptyset \subseteq \mathcal{A}$  – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice  $\mathcal{B}$  množice  $\mathcal{A}$  je manjša ali enaka moči množice  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leq m(\mathcal{A})$$

Množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica  $\mathcal{B}$  množice  $\mathcal{A}$ , ki ni enaka množici  $\mathcal{A}$ , je **prava podmnožica** množice  $\mathcal{A}$ .

**Potenčna množica** množice  $\mathcal{A}$  je množica vseh podmnožic množice  $\mathcal{A}$ .

Oznaka:  $\mathcal{P}\mathcal{A}$  /  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ .

$$\mathcal{P}\mathcal{A} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{P}\mathcal{A}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

**Naloga 2.5.** Dana je množica  $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?

**Naloga 2.6.** Dana je množica  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ . Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?

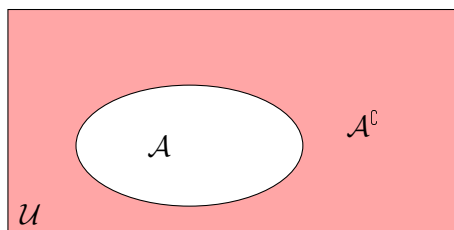
## 2.4 Operacije z množicami

### 2.4.1 Komplement množice

**Komplement** množice  $\mathcal{A}$  (glede na izbrani univerzum  $\mathcal{U}$ ) je množica vseh elementov, ki so v množici  $\mathcal{U}$  in niso v množici  $\mathcal{A}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A}^c$  /  $\mathcal{A}'$ .

$$\mathcal{A}^c = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A}$$

**Naloga 2.7.** Naj bo univerzalna množica  $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$ . Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena moč?

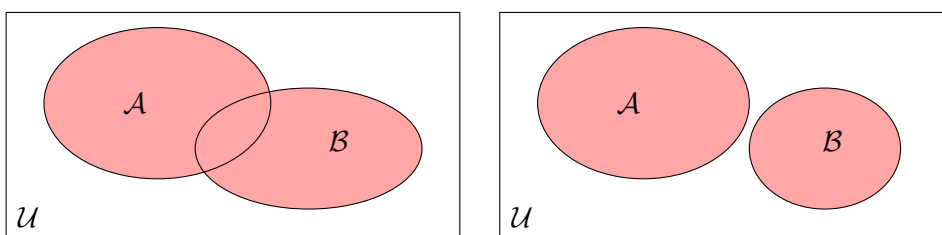
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

### 2.4.2 Unija množic

**Unija** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica vseh elementov, ki pripadajo množici  $\mathcal{A}$  ali množici  $\mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

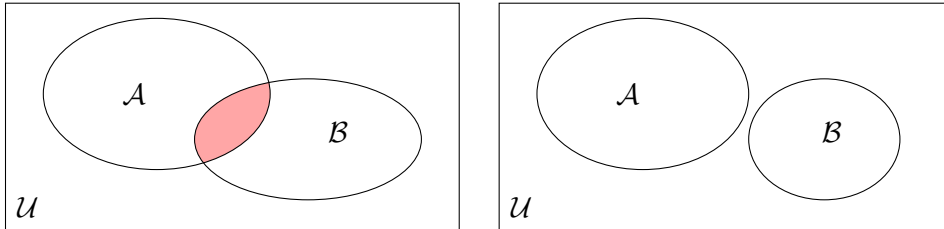
**Naloga 2.8.** Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite množico  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$  in  $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

### 2.4.3 Presek množic

**Presek** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici  $\mathcal{A}$  in množici  $\mathcal{B}$ .  
Oznaka:  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

**Naloga 2.9.** Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite množico  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ . Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$  in  $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

### 2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

**Komutativnost unije in preseka**

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

**Asociativnost unije in preseka**

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

**Distributivnostna zakona za unijo in presek**

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$



**De Morganova zakona**

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c.$$

Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

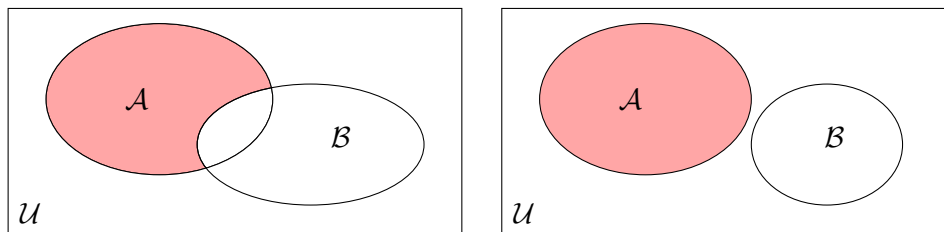
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c.$$

**2.4.5 Razlika množic**

**Razlika** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica tistih elementov, ki pripadajo množici  $\mathcal{A}$  in hkrati ne pripadajo množici  $\mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  /  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{A} = \emptyset$$

**Naloga 2.10.** *Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite njuno razliko  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ .*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

**2.4.6 Kartezični produkt množic**

**Kartezični produkt** (nepraznih) množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica urejenih parov  $(x, y)$ , pri čemer je  $x \in \mathcal{A}$  in  $y \in \mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

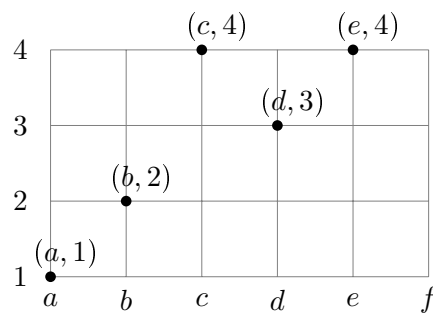
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  za množici  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$  in  $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ :



**Naloga 2.11.** *Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite njun kartezični produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leq k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$

## Poglavje 3

# Naravna in cela števila

### 3.1 Naravna števila

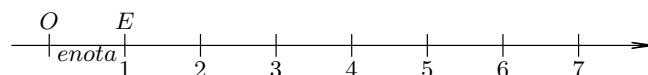
Množica naravnih števil **Naravna števila** so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število  $n$  ima svojega **naslednika**  $n + 1$ .
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika:  $n + 1 \neq m + 1; n \neq m$ .
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števke označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

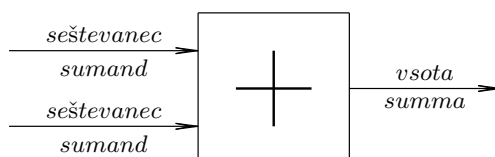
$$\overline{xy} = 10x + y \quad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

### 3.2 Operacije v množici $\mathbb{N}$

#### 3.2.1 Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma  $x$  in  $y$  priredimo **vsoto**  $x + y$ .

Število  $x$  oziroma  $y$  imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**. Število  $x + y$  pa imenujemo **vsota** ali **summa**.

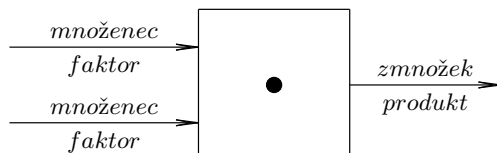


Vsota naravnih števil je naravno število:  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$ .

### 3.2.2 Množenje

Poljubnima naravnima številoma  $x$  in  $y$  priredimo **produkt**  $x \cdot y$ .

Število  $x$  oziroma  $y$  imenujemo **množenec** ali **faktor**. Število  $x \cdot y$  pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



Produkt naravnih števil je naravno število:  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$ .

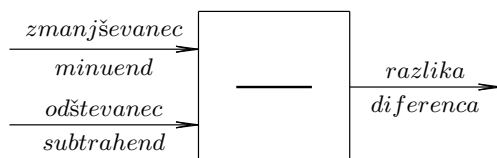
Število **1** je **nevtralni element** za množenje:  $1 \cdot x = x$ .

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil  $\mathbb{N}$ .

### 3.2.3 Odštevanje

Številoma  $x$  in  $y$ , pri čemer je  $y$  večje od  $x$  ( $x > y$ ), priredimo **razliko**  $x - y$ .

Število  $x$  imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število  $y$  pa imenujemo **odštevaneč** ali **subtrahend**. Številu  $x - y$  rečemo **razlika** ali **diferenca**.



Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu  $y$ , da dobimo število  $x$ .

$$(x - y) + y = x$$

Odštevanje ni notranja operacija v množici naravnih števil  $\mathbb{N}$ .

### 3.2.4 Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.

Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

### 3.3 Osnovni računski zakoni

#### Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

#### Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

#### Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

#### Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

#### Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemo tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja*.

#### Naloga 3.1. Izračunajte.

- $(1 + 2 \cdot 7) + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 7)$
- $3 \cdot (2 + 3 \cdot 5) \cdot (2 + 1)$
- $7 + (2 + 6 \cdot 3) + (8 + 4 \cdot 5)$
- $11 \cdot 4 + (12 - 6) \cdot 5$
- $8 + 2 \cdot (3 + 7) - 15$
- $37 - 5 \cdot (10 - 3)$

#### Naloga 3.2. Hitro izračunajte.

- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

#### Naloga 3.3. Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.

- Produktu števil 12 in 27 odštejte razliko števil 19 in 11.
- Vsoti produkta 4 in 12 ter produkta 5 in 16 odštejte 8.
- Vsoto števil 42 in 23 pomnožite z razliko števil 58 in 29.
- Produkt števil 14 in 17 pomnožite z vsoto števil 5 in 16.

**Naloga 3.4.** *Rešite besedilno nalogo.*

- *V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka 95 centov, čokoladni puding v prahu pa 24 centov, koliko moramo plačati?*
- *Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča 45 g riža, za odraslo pa 75 g. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?*