Poglavje 16

Funkcija

16.1 Funkcija in njene lastnosti

Preslikava

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ neprazni množici. **Preslikava** f sestoji iz:
- množice $\mathcal{X}$, ki ji pravimo **domena**,
- množice $\mathcal{Y}$, ki ji pravimo **kodomena** in
- **prirejanja**, ki vsakemu elementu x domene priredi natanko en element y kodomene.

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$
$$f : x \mapsto y$$

Elemente x kodomene $\mathcal{X}$ imenujemo **originali** preslikave.
Če elementu x priredimo element y iz kodomene, potem y imenujemo **slika** elemeta x.

Preslikavo lahko podamo s predpisom, puščičnim diagramom, besednim opisom ...

Funkcija

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ neprazni številski množici. **Funkcija** f je preslikava med številskima množicama $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$:

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}.$$

Število y je **funkcijska vrednost** števila x, če se število x preslika v število y.

$$f(x) = y$$

x je neodvisna spremenljivka, $f(x)$ je od x odvisna spremenljivka.

V nekaterih primerih za opis funkcije uporabimo poseben izraz:
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ – realna funkcija realne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ – realna funkcija naravne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ – naravna funkcija realne spremenljivke;
- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{N}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ – naravna funkcija naravne spremenljivke.

16.1.1 Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

Definicijsko območje D_f preslikave ali funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica vseh originalov, ki jih v danem primeru opazujemo.
Za definicijsko območje navadno vzamemo največjo možno množico, za katero je predpis funkcije veljaven/definiran.

Zaloga vrednosti Z_f preslikave ali funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica vseh slik oziroma funkcijskih vrednosti.
Zaloga vrednosti Z_f je podmnožica kodomene $\mathcal{Y}$: $Z_f \subseteq \mathcal{Y}$.

16.1.2 Ničla in začetna vrednost funkcije

Ničla funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je tista vrednost $x_0 \in \mathcal{X}$ neodvisne spremenljivke, pri kateri je vrednost funkcije f enaka 0: $f(x_0) = 0$.
Ničle funkcije f poiščemo tako, da rešimo enačbo $f(x) = 0$.
Ničle so le tiste izmed vrednosti, ki ležijo v definicijskem območju D_f funkcije f.

Začetna vrednost funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je funkcijska vrednost pri $x = 0$, to je $f(0)$.
Začetna vrednost obstaja le, če je 0 v definicijskem območju funkcije f: $0 \in D_f$.

16.1.3 Graf funkcije

Graf Γ_f funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je množica urejenih parov $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kjer element x preteče celotno definicijsko območje D_f funkcije, element y pa je slika pripadajočega x, torej $y = f(x)$.

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}; x \in D_f \wedge y = f(x)\}$$

Urejene pare iz množice Γ_f lahko upodobimo v koordinatnem sistemu.
Vsakemu elementu $(x, f(x))$ iz zgornje množice pripada natanko ena točka v koordinatnem sistemu, katere abscisa je enaka x, ordinata pa je njegova slika $f(x)$

V ničli, če obstaja, graf funkcije seka ali se dotika abscisne osi, v začetni vrednosti, če obstaja, pa seka ordinatno os.

16.1.4 Naraščanje in padanje funkcije

Naraščajoča funkcija

Funkcija f je na intervalu (a, b) **naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Funkcija f je na intervalu (a, b) **strogo naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) < f(x_2)$.

Padajoča funkcija

Funkcija f je na intervalu (a, b) **padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Funkcija f je na intervalu (a, b) **strogo padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) > f(x_2)$.

16.1.5 Injektivnost in surjektivnost

Surjektivnost

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **surjektivna**, če je zaloga vrednosti Z_f funkcije enaka njeni kodomeni $\mathcal{Y}$ – vsak element kodomene $\mathcal{Y}$ je slika vsaj enega elementa iz domene $\mathcal{X}$.

$$\forall y \in \mathcal{Y}. \exists x \in \mathcal{X} \ni: f(x) = y$$

Injektivnost

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **injektivna**, če se dva poljubna različna originala iz domene $\mathcal{X}$ preslikata v različni sliki v kodomeni $\mathcal{Y}$ – vsak element kodomene $\mathcal{Y}$ je slika kvečjemu enega elementa iz domene $\mathcal{X}$.

$$\forall x, y \in \mathcal{X} : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Funkcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna hkrati – vsak element iz kodomene $\mathcal{Y}$ je slika natanko enega elementa domene $\mathcal{X}$.

16.1.6 Omejenost funckije

Omejenost navzgor

Funkcija f je **navzgor omejena**, če obstaja tako realno število M, da je $f(x) \leqslant M$ za vsak $x \in D_f$. Število M imenujemo *zgornja meja*.

$$\exists M \in \mathbb{R}. \forall x \in D_f \ni: f(x) \leqslant M$$

Omejenost navzdol

Funkcija f je **navzdol omejena**, če obstaja tako realno število m, da je $f(x) \geqslant m$ za vsak $x \in D_f$. Število m imenujemo *spodnja meja*.

$$\exists m \in \mathbb{R}. \forall x \in D_f \ni: f(x) \geqslant m$$

Omejenost

Funkcija f je **omejena**, če je navzgor omejena in navzdol omejena.

$$\exists m, M \in \mathbb{R}. \forall x \in D_f \ni: f(x) \in [m, M]$$

Neomejenost navzgor

Funkcija f je **navzgor neomejena**, če za vsako pozitivno realno število M obstaja tak $x \in D_f$, da je $f(x) > M$.

$$\forall M \in \mathbb{R}^+. \exists x \in D_f \ni: f(x) > M$$

Neomejenost navzdol

Funkcija f je **navzdol neomejena**, če za vsako negativno realno število N obstaja tak $x \in D_f$, da je $f(x) < N$.

$$\forall N \in \mathbb{R}^-. \exists x \in D_f \ni: f(x) < N$$

Neomejenost

Funkcija f je **neomejena**, če je navzgor neomejena in navzdol neomejena.

16.1.7 Predznak funkcije

Pozitivnost

Funkcija f je na intervalu (a,b) **pozitivna**, če za vsak $x \in (a,b)$ velja $f(x) > 0$.

$$\forall x \in (a,b) \cap D_f \ni: f(x) > 0$$

Negativnost

Funkcija f je na intervalu (a,b) **negativna**, če za vsak $x \in (a,b)$ velja $f(x) < 0$.

$$\forall x \in (a,b) \cap D_f \ni: f(x) > 0$$

16.1.8 Sodost in lihost funkcije

Sodost

Funkcija f je **soda**, če za vsak $x \in D_f$ velja $f(-x) = f(x)$.

$$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$$

Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

Lihost

Funkcija f je **liha**, če za vsak $x \in D_f$ velja $f(-x) = -f(x)$.

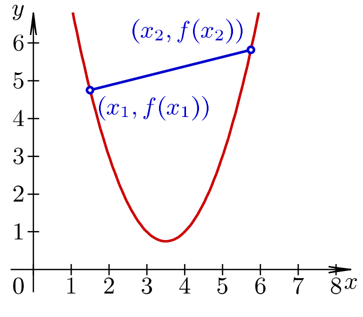
$$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$$

Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

16.1.9 Konveksnost in konkavnost funkcije

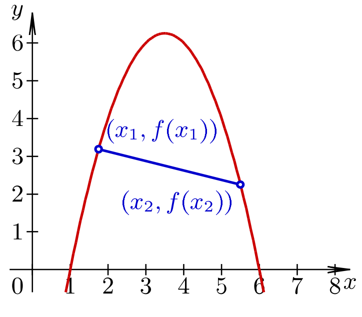
Konveksnost

Funkcija f je na intervalu (a,b) **konveksna**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a,b)$ velja, da je graf funkcije pod zveznico točk $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$.



Konkavnost

Funkcija f je na intervalu (a,b) **konkavna**, če za poljubna $x_1, x_2 \in (a,b)$ velja, da je graf funkcije nad zveznico točk $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$.



Naloga 16.1. *Za katere x je dana funkcija definirana? Zapišite definicijsko območje.*

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- $g(x) = 2x - 3$
- $h(x) = \dfrac{x}{x-3}$
- $i(x) = x^2 - 2x + 1$
- $j(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $k(x) = \sqrt{x-4}$
- $l(x) = (x-3)^{-2}$
- $m(x) = \sqrt{3x+4}$
- $n(x) = \dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$
- $o(x) = \sqrt{3-6x}$

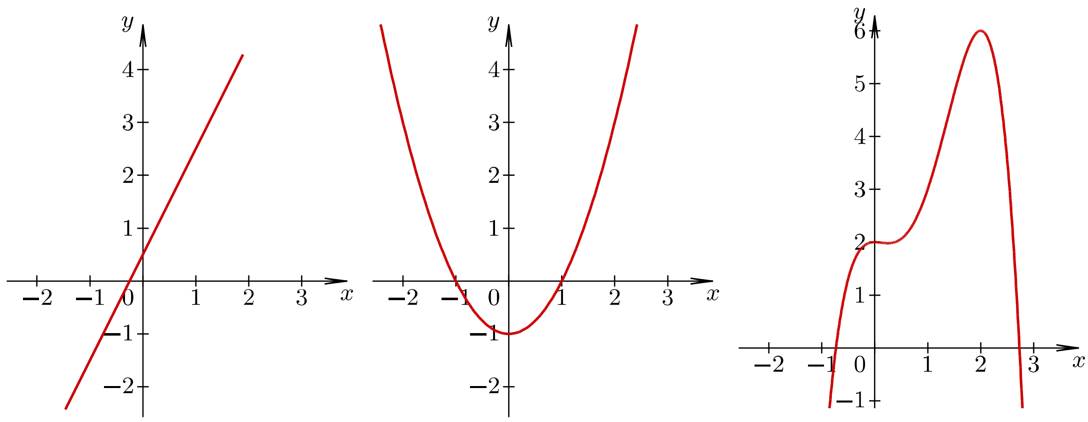
Naloga 16.2. *Izračunajte začetno vrednost in ničle funkcije.*

- $f(x) = 2x - 4$
- $g(x) = x^2 - 4$
- $h(x) = 5x + 2$
- $i(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$
- $j(x) = (x-1)^{-2} - 1$
- $k(x) = \dfrac{1}{x}$
- $l(x) = \dfrac{2x+4}{2x^2-1}$
- $m(x) = \sqrt{x+5}$
- $n(x) = \sqrt{2x+6}$

Naloga 16.3. *Narišite graf funkcije. Izračunajte ničle in začetno vrednost ter vrednosti preverite na grafu.*

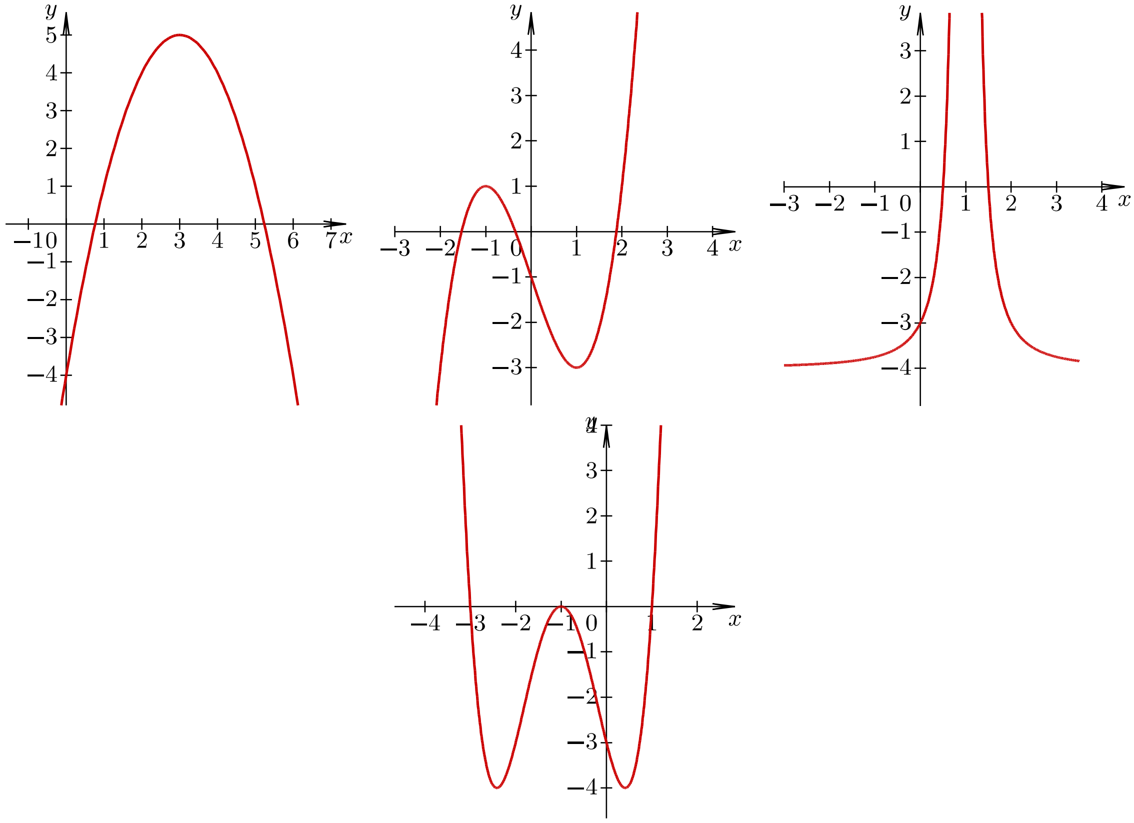
- $f(x) = x - 3$
- $g(x) = 2x + 1$
- $h(x) = -2x + 1$
- $p(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
- $q(x) = \dfrac{2-x}{4}$
- $r(x) = |2x-4| - 1$

Naloga 16.4. *Z grafa funkcije razberite, kam funkcija preslika originale $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ in $x = 2$.*



Naloga 16.5. *Narisan je graf funkcije. Zapišite:*

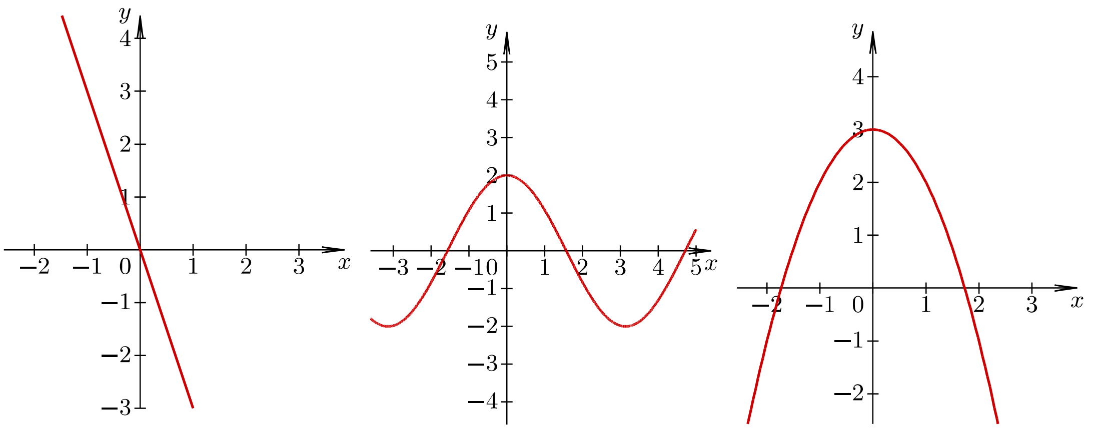
- *začetno vrednost funkcije,*
- *intervale, kjer funkcija narašča oziroma pada,*
- *natančno zgornjo in spodnjo mejo, če je funkcija navzgor ali navzdol omejena.*

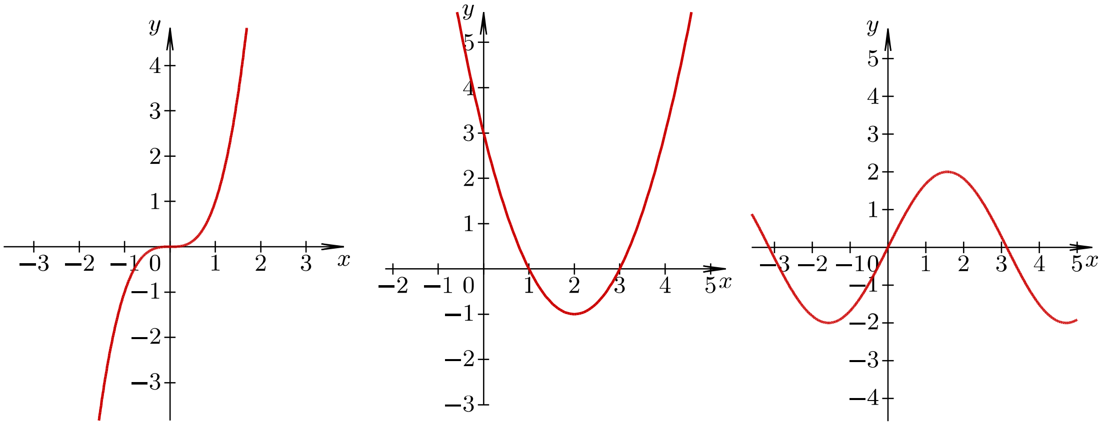


Naloga 16.6. *Računsko preverite, ali je dana funkcija soda ali liha.*

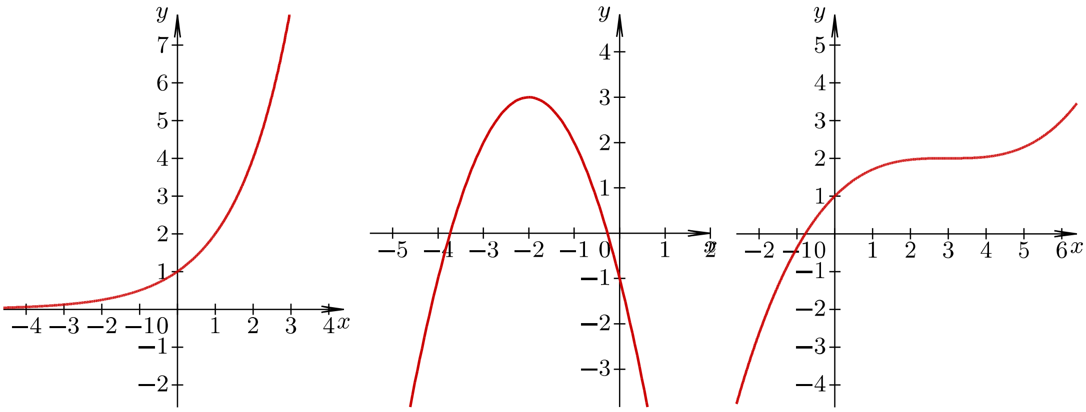
- $f(x) = 3x$
- $g(x) = -3x + 1$
- $h(x) = 2|x| + 4$
- $i(x) = x^2 + 1$
- $j(x) = x^2 + 3x - 1$
- $k(x) = x^3 + 2x$
- $l(x) = 5x^3 - 4x + 1$
- $m(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{7x^3 + x}$

Naloga 16.7. *Z grafa funkcije razberite, ali je funkcija soda ali liha.*





Naloga 16.8. *Z grafa funkcije razberite, na katerih intervalih je funkcija konveksna in na katerih konkavna.*



Naloga 16.9. *Z grafa funkcije razberite, ali je realna funkcija realne spremenljivke injektivna, surjektivna, bijektivna.*