Poglavje 2

Osnove teorije množic

2.1 Množice

Množica je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.
Množica je določena, če:
- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$ ali $A, B, C \dots$).

Univerzalna množica ali **univerzum** ($\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

Element množice je objekt v množici.
Označujemo jih z malimi črkami ($a, b, c \dots$).
Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr. $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$).
Element je lahko vsebovan v množici (npr. $a \in \mathcal{A}$) ali pa v množici ni vsebovan (npr. $d \notin \mathcal{A}$).

Prazna množica ($\varnothing, \{\}$) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka: $\mathbf{m}(\mathcal{A})$ ali $|\mathcal{A}|$.
Množica je lahko:
- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$.

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.
Njeno moč pišemo kot: $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$.
Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

Naloga 2.1. *Naštejte elemente množice in zapišite njeno moč, če je $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.*
- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leqslant 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leqslant 8)\}$

Naloga 2.2. *Naj bo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Zapišite množico tako, da naštejete njene elemente. Določite še njeno moč.*
- *Množica vseh deliteljev števila 18.*
- *Množica praštevil, ki so manjša od 20.*

- *Množica večkratnikov števila* 5*, ki so večji od* 50 *in manjši ali enaki* 70*.*

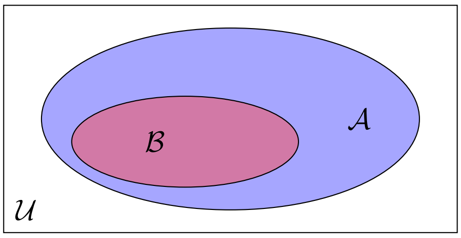
Naloga 2.3. *Zapišite množico s simboli.*
- *Množica vseh sodih naravnih števil.*
- *Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s* 7 *ostanek* 5*.*

Naloga 2.4. *Podane so množice tako, da so našteti njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.*
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

2.3 Podmnožice

Množica $\mathcal{B}$ je **podmnožica** množice $\mathcal{A}$, če za vsak element iz $\mathcal{B}$ velja, da je tudi element množice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \varnothing \subseteq \mathcal{A}$ – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$ je manjša ali enaka moči množice $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leqslant m(\mathcal{A})$$

Množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$, ki ni enaka množici $\mathcal{A}$, je **prava podmnožica** množice $\mathcal{A}$.

Potenčna množica množice $\mathcal{A}$ je množica vseh podmnožic množice $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{PA}$ / $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{PA} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{PA}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

Naloga 2.5. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$*. Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

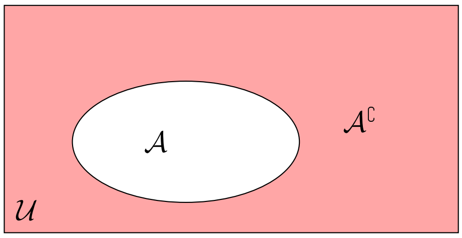
Naloga 2.6. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$*. Zapiište njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

2.4 Operacije z množicami

2.4.1 Komplement množice

Komplement množice $\mathcal{A}$ (glede na izbrani univerzum $\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki so v množici $\mathcal{U}$ in niso v množici $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{A}^\complement$ / $\mathcal{A}'$.

$$\mathcal{A}^\complement = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$\left(\mathcal{A}^\complement\right)^\complement = \mathcal{A}$$

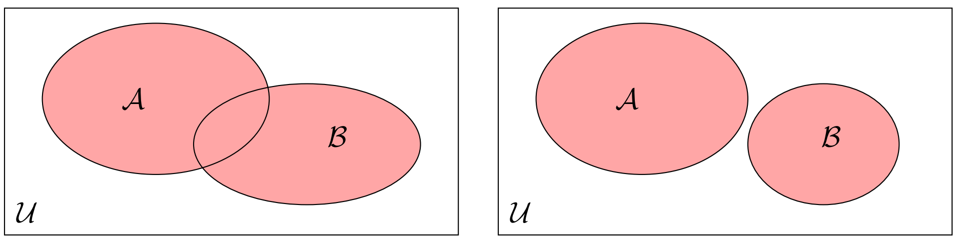
Naloga 2.7. *Naj bo univerzalna množica $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 20\}$. Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena mmoč?*

- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.2 Unija množic

Unija množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ ali množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^\complement = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \varnothing = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

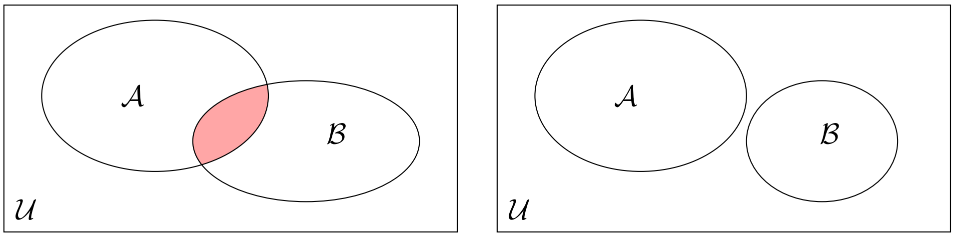
Naloga 2.8. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \ldots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

2.4.3 Presek množic

Presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici $\mathcal{A}$ in množici $\mathcal{B}$. Oznaka: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\complement} = \varnothing$$

$$\mathcal{A} \cap \varnothing = \varnothing$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

Naloga 2.9. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

Komutativnost unije in preseka

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

Asociativnost unije in preseka

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

Distributivnostna zakona za unijo in presek

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

De Morganova zakona

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cup \mathcal{B}^{\complement}.$$

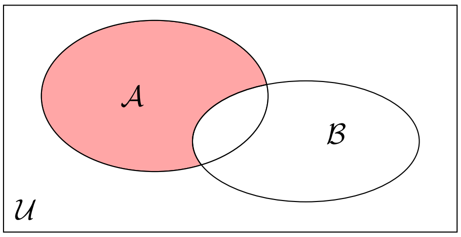
Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

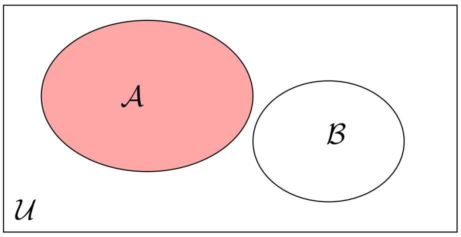
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cap \mathcal{B}^{\complement}.$$

2.4.5 Razlika množic

Razlika množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica tistih elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ in hkrati ne pripadajo množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}$ / $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\complement}$$

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\backslash\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{A} = \varnothing$$

Naloga 2.10. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njuno razliko $\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}$.*
- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.6 Kartezični produkt množic

Kartezični produkt (nepraznih) množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica urejenih parov (x, y), pri čemer je $x \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

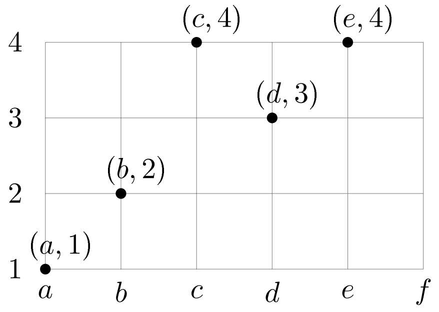
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ za množici $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$:



Naloga 2.11. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njun kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leqslant k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$