

MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

25. oktober 2023

Vsebina

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
- 5 Eksponentna in logaritemska funkcija

Section 1

Geometrija na ravnini in v prostoru

1 Geometrija na ravnini in v prostoru

- Osnovni geometrijski pojmi
- Kot
- Konstrukcije matematičnih objektov
- Preslikave na ravnini
- Trikotnik
- Krog
- Štirikotnik
- Večkotnik
- Podobnost
- Podobnost v pravokotnem trikotniku
- Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 90°
- Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 160°

2 Vektorji

Osnovni geometrijski pojmi

Kot

Konstrukcije matematičnih objektov

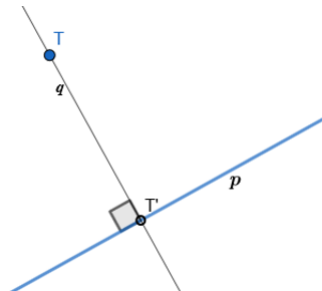
Preslikave na ravlini

Pravokotna projekcija

Dani sta točka T in premica p . Naj bo q tista pravokotnica na premico p , ki poteka skozi točko T . Presečišče T' premice q s premico p imenujemo **pravokotna projekcija** točke T na premico p . Točka T' je točki T najbližja točka premice p .

Razdalja točke T od premice p je:

$$d(T, p) = d(T, T') = |TT'|.$$



Pravokotna projekcija daljice AB na premico je daljica $A'B'$, katere krajišči sta pravokotni projekciji točko A in B .

Toge preslikave

Toga preslikava (izometrija) je preslikava v ravni, ki ohranja razdalje.

$$\tau : A \mapsto A'$$

$$\tau : B \mapsto B'$$

$$d(A, B) = d(A', B')$$

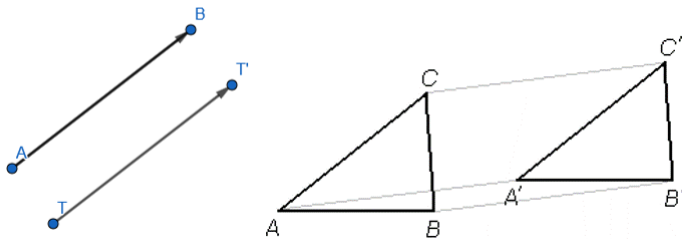
Med toge preslikave spadajo:

- **vzporedni premiki;**
- **zrcaljenje preko premice;**
- **zrcaljenje preko točke;**
- **rotacija okoli točke.**

Če kombiniramo več togih premikov, je dobljena preslikava spet togi premik.

Vzporedni premik/translacija

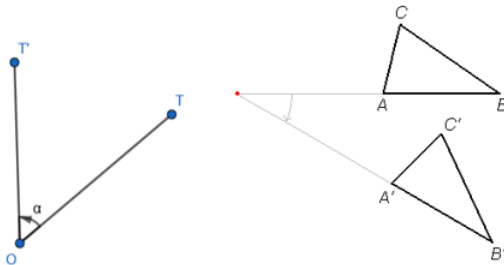
Vzporedni premik ali **translacija** za dano usmerjeno daljico (vektor) \overrightarrow{AB} preslika točko T v tako točko T' , da sta daljici TT' in AB enako dolgi, vzporedni in enako usmerjeni (vektorja $\overrightarrow{TT'}$ in \overrightarrow{AB} sta enaka).



Vzporedni premik ohranja orientacijo likov, daljice preslika v enako dolge vzporedne daljice, ohranja velikost kotov, like preslika v skladne like, nima negibnih točk za $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

Rotacija/vrtenje okoli točke

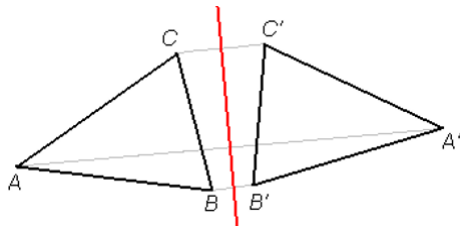
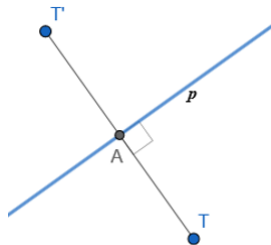
Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot α okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \alpha$.



Vrtenje okoli točke preslika daljice v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice pa ne preslika v vzporedne premice.

Zrcaljenje preko premice

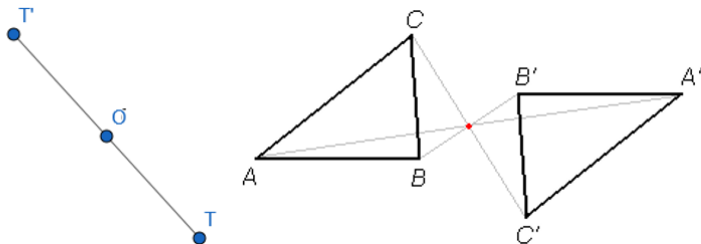
Zrcaljenje čez premico p preslika točko T v tako točko T' , da premica p pod pravim kotom razpolavlja daljico TT' .



Zrcaljenje čez premico daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikost kotov, ne ohranja orientacije likov, like preslika v skladne like, premic ne preslika v vzporedne premice.

Zrcaljenje preko točke

Zrcaljenje čez točko O preslika točko T v tako točko T' , da je O razpolovišče daljice TT' . Ta preslikava je enaka vrtenju okrog točke za 180° .

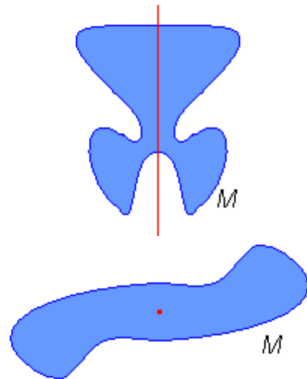


Zrcaljenje čez točko daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice preslika v vzporedne premice.

Simetrija

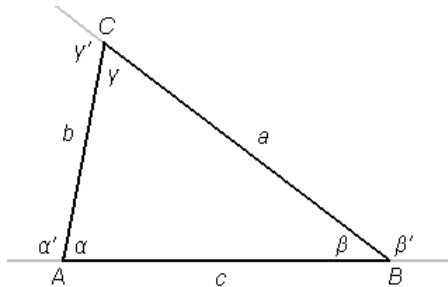
Množica točk \mathcal{M} je **simetrična/somerna glede na premico** p , če se pri zrcaljenju čez premico p preslika sama vase. Premico p imenujemo **simetrala**, **somernica**, **simetrijska os** množice \mathcal{M} .

Množica točk \mathcal{M} je **središčno simetrična/somerna glede na točko** T , če se pri zrcaljenju čez točko T preslika sama vase. Točko T imenujemo **center simetrije** množice \mathcal{M} .



Trikotnik

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota zunanjih kotov trikotnika je 360° :

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Trikotniška neenakost

Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

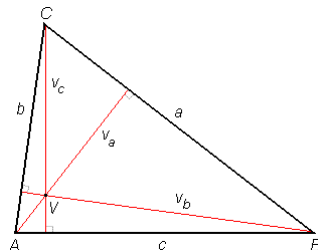
$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

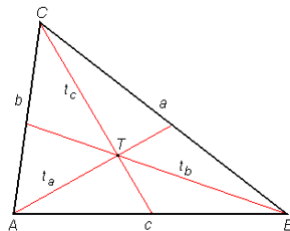
Vsaka stranica trikotnika je daljša od absolutne vrednosti razlike dolžin drugih dveh stranic.

Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.



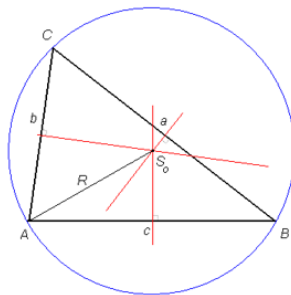
Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**. Standardna oznaka: V ali H .

Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



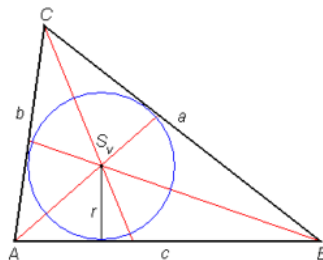
Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju 1 : 2.

Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.



Očrtana krožnica poteka skozi vsa tri oglišča trikotnika. Vse tri stranice trikotnika so tetive te krožnice.

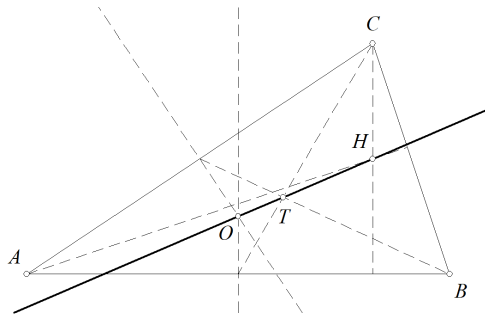
Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Včrtana krožnica ima vse tri stranice trikotnika za tangente.

Težišče, središče trikotniku očrtane krožnice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Višinska točka, središče očrtane krožnice in težišče so vedno kolinearne. Premico, ki jih povezuje, imenujemo **Eulerjeva premica**.



Krog

Štirikotnik

Večkotnik

Podobnost

Podobnost v pravokotnem trikotniku

Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 90°

Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 360°

Section 2

Vektorji

1 Geometrija na ravnini in v prostoru

2 Vektorji

- Vektorske količine
- Računanje z vektorji
- Linearna kombinacija vektorjev, baza
- Skalarni produkt vektorjev
- Vektorji v koordinatnem sistemu
- Skalarni produkt v koordinatnem sistemu
- (i) Vektorski produkt
- (i) Premice v prostoru
- (i) Ravnine v prostoru

3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila

Vektorske količine

Računanje z vektorji

Linearna kombinacija vektorjev, baza

Skalarni produkt vektorjev

Vektorji v koordinatnem sistemu

Skalarni produkt v koordinatnem sistemu

(i) Vektorski produkt

(i) Premice v prostoru

(i) Ravnine v prostoru

Section 3

Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

1 Geometrija na ravnini in v prostoru

2 Vektorji

3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

- Koreni poljubnih stopenj
- Potence z racionalnimi eksponenti
- Lastnosti funkcij
- Transformacije na ravnini
- Inverzna funkcija
- Potenčna funkcija z naravnim eksponentom
- Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom
- Korenska funkcija
- Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila

Koreni poljubnih stopenj

Potence z racionalnimi eksponenti

Lastnosti funkcij

Transformacije na ravnini

Inverzna funkcija

Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom

Korenska funkcija

Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

Section 4

Kvadratna funkcija, kompleksna števila

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
 - Kvadratna enačba
 - Kvadratna funkcija in parabola
 - Presečišča parabol
 - Kvadratna neenačba
 - Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi
 - Množica kompleksnih števil
 - Računanje s kompleksnimi števili

Kvadratna enačba

Kvadratna funkcija in parabola

Presečišča parabol

Kvadratna neenačba

Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi

Množica kompleksnih števil

Računanje s kompleksnimi števili

Section 5

Eksponentna in logaritemska funkcija

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
- 5 EkspONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA**
 - EkspONENTNA ENAČBA
 - LOGARITEM
 - Pravila za računanje z logaritmi
 - Logaritemska enačba
 - EkspONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA
 - Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo
 - Sprememba osnove logaritma

Eksponentna enačba

Logaritem

Pravila za računanje z logaritmi

Logaritemska enačba

Eksponentna in logaritemska funkcija

Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo

Sprememba osnove logaritma

Eksponentna in logaritemska neenačba