Poglavje 1

Osnove logike

1.1 Izjave

Matematična izjava je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.
Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R**/**P**/**1**/$\top$;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N**/**0**/$\bot$.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami (A, B, C ...).

Naloga 1.1. *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število* 12 *deli število* 3*.*
- *Število* 3 *deli število* 10*.*
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je* 10 *dl isto kot* 1 *l?*
- *Število* 41 *je praštevilo.*

Naloga 1.2. *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- A*: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- B*: Število je deljivo s* 4 *natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s* 4*.*
- C*: Ostanek pri deljenju s* 4 *je lahko* 1, 2 *ali* 3*.*
- D*: Mesec februar ima vedno vsaj 28 dni.*
- E*: Vsa praštevila so liha števila.*
- F*: Število* 1 *je naravno število.*
- G*: Praštevil je neskončno mnogo.*

1.1.1 Enostavne in sestavjene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.
Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

1.2 Logične operacije

1.2.1 Negacija

Negacija izjave A je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava A. Oznaka: $\neg\mathbf{A}$.

$\neg\mathbf{A}$ **Ni res**, da velja izjava A.

Če je izjava A pravilna, je $\neg A$ nepravilna in obratno: če je $\neg A$ pravilna, je A nepravilna. Negacija negacije izjave je potrditev izjave. $\neg(\neg A) = A$

A	$\neg A$
P	N
N	P

Naloga 1.3. *Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.*

- *A:* $5 \cdot 8 = 30$
- *B: Število* 3 *je praštevilo.*
- *C: Največje dvomestno število je* 99*.*
- *D: Število* 62 *je večratnik števila* 4*.*
- *E: Praštevil je neskončno mnogo.*
- *F:* $7 \leqslant 5$
- *G: Naša pisava je cirilica.*

1.2.2 Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B nastane tako, da povežemo izjavi A in B z **in hkrati**.

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ Velja izjava A **in (hkrati)** izjava B.

Če sta izjavi A in B pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

Naloga 1.4. *Določite logično vrednost konjunkcijam.*

- *Število* 28 *je večratnik števila* 3 *in večkratnik števila* 8*.*
- *Število* 7 *je praštevilo in je deljivo s številom* 1*.*
- *Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno število.*
- *Ostanki pri deljenju števila s* 3 *so lahko* 0*,* 1 *ali* 2*, pri deljenju s* 5 *pa* 0*,* 1*,* 2*,* 3 *ali* 4*.*
- *Število je deljivo s* 3*, če je vosta števk deljiva s* 3*, in je deljivo z* 9*, če je vsota števk deljiva z* 9*.*

1.2.3 Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B nastane s povezavo **ali**.

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ Velja izjava A **ali** izjava B (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

Naloga 1.5. *Določite logično vrednost disjunkcijam.*

- *Število* 24 *je večratnik števila* 3 *ali* 8.
- *Število* 35 *ni večratnik števila* 7 *ali* 6.
- *Število* 5 *deli število* 16 *ali* 18.
- *Ploščina kvadrata s stranico a je* a^2 *ali obseg kvadrata je* $4a$.
- *Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika* $160°$, *ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.*

1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (b \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Naloga 1.6. *Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?*

- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^15) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

1.2.8 Implikacija

Implikacija izjav A in B je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

A ⇒ B **Če** velja izjava A, **potem** velja izjava B. / **Iz** A **sledi** B.

Izjava A je **pogoj** ali **privzetek**, izjava B pa **(logična) posledica** izjave A.
Implikacija je nepravilna, ko je izjava A pravilna, izjava B pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \Rightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Naloga 1.7. *Določite, ali so izjave pravilne.*

- *Če je število deljivo s* 100*, je deljivo tudi s* 4.
- *Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.*
- *Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Če sta števili* 2 *in* 3 *lihi števili, potem je produk teh dveh števil sodo število.*
- *Če je število* 18 *deljivo z* 9*, potem je deljivo s* 3.
- *Če je* 7 *večkratnik števila* 7*, potem* 7 *deli število* 43.
- *Če je število deljivo s* 4*, potem je deljivo z* 2.

1.2.9 Ekvivalenca

Ekvivalenca izjavi A in B poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

A ⇔ B Izjava A velja, **če in samo če** velja izjava B./
Izjava A velja **natanko tedaj, ko** velja izjava B.

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.
Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Naloga 1.8. *Določite, ali so naslednje izjave pravilne.*

- *Število je deljivo z* 12 *natanko takrat, ko je deljivo s* 3 *in* 4 *hkrati.*
- *Število je deljivo s* 24 *natanko takrat, ko je deljivo s* 4 *in* 6 *hkrati.*
- *Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.*
- *Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z* 2.

1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

Naloga 1.9. *V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.*

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

1.2.11 Tavtologija in protislovje

Tavtologija ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavjena, pravilna.
Protislovje je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$ (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$ (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

1.3 Pomen izjav v matematiki

Aksiomi so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.
Izreki ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.
Definicije so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.