

# Matematika

## Splošna gimnazija

ZAPISKI

23. februar 2025



Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite

Jan Kastelic



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Osnove logike</b>	<b>1</b>
1.1	Izjave . . . . .	1
1.1.1	Enostavne in sestavjene izjave . . . . .	1
1.2	Logične operacije . . . . .	2
1.2.1	Negacija . . . . .	2
1.2.2	Konjunkcija . . . . .	2
1.2.3	Disjunkcija . . . . .	2
1.2.4	Komutativnost konjunkcije in disjunkcije . . . . .	3
1.2.5	Asociativnost konjunkcije in disjunkcije . . . . .	3
1.2.6	Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo . . . . .	3
1.2.7	De Morganova zakona . . . . .	3
1.2.8	Implikacija . . . . .	4
1.2.9	Ekvivalenca . . . . .	4
1.2.10	Vrstni red operacij . . . . .	5
1.2.11	Tavtologija in protislovje . . . . .	5
1.2.12	Kvantifikatorja . . . . .	5
1.3	Pomen izjav v matematiki . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Osnove teorije množic</b>	<b>7</b>
2.1	Množice . . . . .	7
2.2	Moč množice . . . . .	7
2.3	Podmnožice . . . . .	8
2.4	Operacije z množicami . . . . .	9
2.4.1	Komplement množice . . . . .	9
2.4.2	Unija množic . . . . .	9
2.4.3	Presek množic . . . . .	10
2.4.4	Lastnosti operacij unije in preseka . . . . .	10
2.4.5	Razlika množic . . . . .	11
2.4.6	Kartezični produkt množic . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Naravna in cela števila</b>	<b>13</b>
3.1	Naravna števila . . . . .	13
3.2	Operacije v množici $\mathbb{N}$ . . . . .	13
3.2.1	Seštevanje . . . . .	13
3.2.2	Množenje . . . . .	14
3.2.3	Odštevanje . . . . .	14
3.2.4	Vrstni red operacij . . . . .	14
3.3	Osnovni računski zakoni . . . . .	15
3.4	Cela števila . . . . .	17
3.5	Operacije v množici $\mathbb{Z}$ . . . . .	17
3.5.1	Seštevanje . . . . .	17

3.5.2	Odštevanje . . . . .	17
3.5.3	Množenje . . . . .	18
3.6	Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$ . . . . .	18
3.7	Urejenost naravnih in celih števil . . . . .	20
3.7.1	Linearna urejenost . . . . .	20
3.7.2	Lastnosti relacij $\leq$ in $<$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Potence in izrazi</b>	<b>23</b>
4.1	Potence z naravnim eksponentom . . . . .	23
4.2	Pravila za računanje s potencami . . . . .	23
4.3	Večkratniki . . . . .	26
4.4	Algebrski izrazi . . . . .	26
4.5	Računanje z algebrskimi izrazi . . . . .	26
4.5.1	Seštevanje in izpostavljanje izrazov . . . . .	27
4.5.2	Množenje izrazov . . . . .	27
4.6	Potenciranje izrazov . . . . .	29
4.7	Razstavljanje izrazov . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Deljivost</b>	<b>35</b>
5.1	Relacija deljivosti . . . . .	35
5.2	Kriteriji deljivosti . . . . .	37
5.3	Osnovni izrek o deljenju . . . . .	39
5.4	Praštevila in sestavljena števila . . . . .	40
5.5	Osnovni izrek aritmetike . . . . .	40
5.6	Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Racionalna števila</b>	<b>43</b>
6.1	Ulomki in racionalna števila . . . . .	43
6.2	Razširjanje in krajšanje ulomkov . . . . .	45
6.3	Seštevanje in odštevanje ulomkov . . . . .	46
6.4	Množenje ulomkov . . . . .	46
6.5	Deljenje ulomkov . . . . .	47
6.6	Urejenost racionalnih števil . . . . .	49
6.7	Potence s celimi eksponenti . . . . .	51
6.8	Decimalni zapis . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Realna števila</b>	<b>55</b>
7.1	Realna števila . . . . .	55
7.2	Kvadratni koren . . . . .	57
7.3	Kubični koren . . . . .	59
7.4	Interval . . . . .	60
7.4.1	Vrste intervalov . . . . .	60
7.5	Reševanje enačb . . . . .	63
7.6	Reševanje neenačb . . . . .	65
7.7	Reševanje sistemov enačb . . . . .	66
7.7.1	Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama . . . . .	66
7.7.2	Sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami . . . . .	67
7.8	Obravnava enačb in neenačb . . . . .	68
7.9	Sklepni račun . . . . .	69
7.10	Odstotni račun . . . . .	70
7.11	Absolutna vrednost . . . . .	71
7.12	Zaokroževanje, približki, napake . . . . .	72

---

<b>8</b>	<b>Statistika</b>	<b>73</b>
8.1	Osnovni pojmi statistike . . . . .	73
8.2	Urejanje in grupiranje podatkov . . . . .	75
8.3	Mere osredinjenosti . . . . .	77
8.4	Mere razpršenosti . . . . .	79
8.5	Grafično prikazovanje podatkov . . . . .	81





# Poglavje 1

## Osnove logike

### 1.1 Izjave

**Matematična izjava** je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.

Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R/P/1/⊤**;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N/0/⊥**.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami ( $A, B, C \dots$ ).

**Naloga 1.1.** *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število 12 deli število 3.*
- *Število 3 deli število 10.*
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je 10 dl isto kot 1 l?*
- *Število 41 je praštevilo.*

**Naloga 1.2.** *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- *A: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- *B: Število je deljivo s 4 natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s 4.*
- *C: Ostanek pri deljenju s 4 je lahko 1, 2 ali 3.*
- *D: Mesec februar ima 28 dni.*
- *E: Vsa praštevila so liha števila.*
- *F: Število 1 je naravno število.*
- *G: Praštevil je neskončno mnogo.*

#### 1.1.1 Enostavne in sestavljene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.

Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

## 1.2 Logične operacije

### 1.2.1 Negacija

**Negacija** izjave  $A$  je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava  $A$ . Oznaka:  $\neg A$ .

$\neg A$       **Ni res**, da velja izjava  $A$ .

Če je izjava  $A$  pravilna, je  $\neg A$  nepravilna in obratno: če je  $\neg A$  pravilna, je  $A$  nepravilna.

Negacija negacije izjave je potrditev izjave.  $\neg(\neg A) = A$

$A$	$\neg A$
$P$	$N$
$N$	$P$

**Naloga 1.3.** Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.

- $A$ :  $5 \cdot 8 = 30$
- $B$ : Število 3 je praštevilo.
- $C$ : Največje dvomestno število je 99.
- $D$ : Število 62 je večkratnik števila 4.
- $E$ : Praštevil je neskončno mnogo.
- $F$ :  $7 \leq 5$
- $G$ : Naša pisava je cirilica.

### 1.2.2 Konjunkcija

**Konjunkcija** izjav  $A$  in  $B$  nastane tako, da povežemo izjavi  $A$  in  $B$  z **in hkrati**.

$A \wedge B$       Velja izjava  $A$  **in (hkrati)** izjava  $B$ .

Če sta izjavi  $A$  in  $B$  pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

$A$	$B$	$A \wedge B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$N$
$N$	$N$	$N$

**Naloga 1.4.** Določite logično vrednost konjunkcijam.

- Število 28 je večkratnik števila 3 in večkratnik števila 8.
- Število 7 je praštevilo in je deljivo s številom 1.
- Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.
- Ostanki pri deljenju števila s 3 so lahko 0, 1 ali 2, pri deljenju s 5 pa 0, 1, 2, 3 ali 4.
- Število je deljivo s 3, če je vsota števk deljiva s 3, in je deljivo z 9, če je vsota števk deljiva z 9.

### 1.2.3 Disjunkcija

**Disjunkcija** izjav  $A$  in  $B$  nastane s povezavo **ali**.

$A \vee B$       Velja izjava  $A$  **ali** izjava  $B$  (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

$A$	$B$	$A \vee B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$P$
$N$	$P$	$P$
$N$	$N$	$N$

**Naloga 1.5.** Določite logično vrednost disjunkcijam.

- Število 24 je večkratnik števila 3 ali 8.
- Število 35 ni večkratnik števila 7 ali 6.
- Število 5 deli število 16 ali 18.
- Ploščina kvadrata s stranico  $a$  je  $a^2$  ali obseg kvadrata je  $4a$ .
- Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika  $160^\circ$ , ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.

#### 1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

#### 1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

#### 1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

#### 1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij:  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij:  $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

**Naloga 1.6.** Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?

- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

### 1.2.8 Implikacija

**Implikacija** izjav  $A$  in  $B$  je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

$A \Rightarrow B$     Če velja izjava  $A$ , **potem** velja izjava  $B$ . / **Iz**  $A$  sledi  $B$ .

Izjava  $A$  je **pogoj** ali **privzetek**, izjava  $B$  pa (**logična**) **posledica** izjave  $A$ .

Implikacija je nepravilna, ko je izjava  $A$  pravilna, izjava  $B$  pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$P$
$N$	$N$	$P$

**Naloga 1.7.** Določite, ali so izjave pravilne.

- Če je število deljivo s 100, je deljivo tudi s 4.
- Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.
- Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Če sta števili 2 in 3 lihi števili, potem je produkt teh dveh števil sodo število.
- Če je število 18 deljivo z 9, potem je deljivo s 3.
- Če je 7 večkratnik števila 7, potem 7 deli število 43.
- Če je število deljivo s 4, potem je deljivo z 2.

### 1.2.9 Ekvivalenca

**Ekvivalenca** izjavi  $A$  in  $B$  poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

$A \Leftrightarrow B$     Izjava  $A$  velja, **če in samo če** velja izjava  $B$ ./  
Izjava  $A$  velja **natanko tedaj, ko** velja izjava  $B$ .

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.

Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$N$
$N$	$N$	$P$

**Naloga 1.8.** Določite, ali so naslednje izjave pravilne.

- Število je deljivo z 12 natanko takrat, ko je deljivo s 3 in 4 hkrati.
- Število je deljivo s 24 natanko takrat, ko je deljivo s 4 in 6 hkrati.
- Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.
- Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z 2.

### 1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

**Naloga 1.9.** V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

### 1.2.11 Tautologija in protislovje

**Tautologija** ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavljena, pravilna.

**Protislovje** je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

### 1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$  (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$  (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

## 1.3 Pomen izjav v matematiki

**Aksiomi** so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.

**Izreki** ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.

**Definicije** so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.



## Poglavje 2

# Osnove teorije množic

### 2.1 Množice

**Množica** je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.

Množica je določena, če:

- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$  ali  $A, B, C \dots$ ).

**Univerzalna množica** ali **univerzum** ( $\mathcal{U}$ ) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

**Element množice** je objekt v množici.

Označujemo jih z malimi črkami ( $a, b, c \dots$ ).

Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr.  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ ).

Element je lahko vsebovan v množici (npr.  $a \in \mathcal{A}$ ) ali pa v množici ni vsebovan (npr.  $d \notin \mathcal{A}$ ).

**Prazna množica** ( $\emptyset, \{\}$ ) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

### 2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka:  $\mathbf{m}(\mathcal{A})$  ali  $|\mathcal{A}|$ .

Množica je lahko:

- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov:  $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$ ;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov:  $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$ .

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.

Njeno moč pišemo kot:  $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$ .

Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

**Naloga 2.1.** *Naštejte elemente množice in zapišite njeno moč, če je  $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ .*

- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leq 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leq 8)\}$

**Naloga 2.2.** *Naj bo  $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ . Zapišite množico tako, da naštejete njene elemente. Določite še njeno moč.*

- Množica vseh deliteljev števila 18.
- Množica praštevil, ki so manjša od 20.

- Množica večkratnikov števila 5, ki so večji od 50 in manjši ali enaki 70.

**Naloga 2.3.** Zapišite množico s simboli.

- Množica vseh sodih naravnih števil.
- Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 5.

**Naloga 2.4.** Podane so množice tako, da so naštetni njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

## 2.3 Podmnožice

Množica  $\mathcal{B}$  je **podmnožica** množice  $\mathcal{A}$ , če za vsak element iz  $\mathcal{B}$  velja, da je tudi element množice  $\mathcal{A}$ .

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$  – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \emptyset \subseteq \mathcal{A}$  – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice  $\mathcal{B}$  množice  $\mathcal{A}$  je manjša ali enaka moči množice  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leq m(\mathcal{A})$$

Množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica  $\mathcal{B}$  množice  $\mathcal{A}$ , ki ni enaka množici  $\mathcal{A}$ , je **prava podmnožica** množice  $\mathcal{A}$ .

**Potenčna množica** množice  $\mathcal{A}$  je množica vseh podmnožic množice  $\mathcal{A}$ .

Oznaka:  $\mathcal{P}\mathcal{A}$  /  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ .

$$\mathcal{P}\mathcal{A} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{P}\mathcal{A}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

**Naloga 2.5.** Dana je množica  $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?

**Naloga 2.6.** Dana je množica  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ . Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?



## 2.4 Operacije z množicami

### 2.4.1 Komplement množice

**Komplement** množice  $\mathcal{A}$  (glede na izbrani univerzum  $\mathcal{U}$ ) je množica vseh elementov, ki so v množici  $\mathcal{U}$  in niso v množici  $\mathcal{A}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A}^c$  /  $\mathcal{A}'$ .

$$\mathcal{A}^c = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A}$$

**Naloga 2.7.** Naj bo univerzalna množica  $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$ . Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena množica?

- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

### 2.4.2 Unija množic

**Unija** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica vseh elementov, ki pripadajo množici  $\mathcal{A}$  ali množici  $\mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

**Naloga 2.8.** Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite množico  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$  in  $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

### 2.4.3 Presek množic

**Presek** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici  $\mathcal{A}$  in množici  $\mathcal{B}$ .  
Oznaka:  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

**Naloga 2.9.** Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite množico  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ . Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$  in  $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

### 2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

**Komutativnost unije in preseka**

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

**Asociativnost unije in preseka**

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

**Distributivnostna zakona za unijo in presek**

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

**De Morganova zakona**

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c.$$

Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c.$$

**2.4.5 Razlika množic**

**Razlika** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica tistih elementov, ki pripadajo množici  $\mathcal{A}$  in hkrati ne pripadajo množici  $\mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  /  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{A} = \emptyset$$

**Naloga 2.10.** *Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite njuno razliko  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ .*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

**2.4.6 Kartezični produkt množic**

**Kartezični produkt** (nepraznih) množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica urejenih parov  $(x, y)$ , pri čemer je  $x \in \mathcal{A}$  in  $y \in \mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  za množici  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$  in  $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ :



**Naloga 2.11.** *Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite njun kartezični produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leq k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$

## Poglavje 3

# Naravna in cela števila

### 3.1 Naravna števila

Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število  $n$  ima svojega **naslednika**  $n + 1$ .
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika:  $n + 1 \neq m + 1; n \neq m$ .
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števk označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

$$\overline{xy} = 10x + y \qquad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

### 3.2 Operacije v množici $\mathbb{N}$

#### 3.2.1 Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma  $x$  in  $y$  priredimo **vsoto**  $x + y$ .

Število  $x$  oziroma  $y$  imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**. Število  $x + y$  pa imenujemo **vsota** ali **summa**.



Vsota naravnih števil je naravno število:  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$ .

### 3.2.2 Množenje

Poljubnima naravnima številoma  $x$  in  $y$  priredimo **produkt**  $x \cdot y$ .

Število  $x$  oziroma  $y$  imenujemo **množenec** ali **faktor**. Število  $x \cdot y$  pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



Produkt naravnih števil je naravno število:  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$ .

Število **1** je **nevtralni element** za množenje:  $1 \cdot x = x$ .

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil  $\mathbb{N}$ .

### 3.2.3 Odštevanje

Številoma  $x$  in  $y$ , pri čemer je  $y$  večje od  $x$  ( $x > y$ ), priredimo **razliko**  $x - y$ .

Število  $x$  imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število  $y$  pa imenujemo **odštevaneč** ali **subtrahend**. Številu  $x - y$  rečemo **razlika** ali **diferenca**.



Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu  $y$ , da dobimo število  $x$ .

$$(x - y) + y = x$$

Odštevanje ni notranja operacija v množici naravnih števil  $\mathbb{N}$ .

### 3.2.4 Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.

Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

### 3.3 Osnovni računski zakoni

#### Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

#### Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

#### Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

#### Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

#### Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemo tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja*.

#### Naloga 3.1. Izračunajte.

- $(1 + 2 \cdot 7) + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 7)$
- $3 \cdot (2 + 3 \cdot 5) \cdot (2 + 1)$
- $7 + (2 + 6 \cdot 3) + (8 + 4 \cdot 5)$
- $11 \cdot 4 + (12 - 6) \cdot 5$
- $8 + 2 \cdot (3 + 7) - 15$
- $37 - 5 \cdot (10 - 3)$

#### Naloga 3.2. Hitro izračunajte.

- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

#### Naloga 3.3. Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.

- Produktu števil 12 in 27 odštejte razliko števil 19 in 11.
- Vsoti produkta 4 in 12 ter produkta 5 in 16 odštejte 8.
- Vsoto števil 42 in 23 pomnožite z razliko števil 58 in 29.
- Produkt števil 14 in 17 pomnožite z vsoto števil 5 in 16.

**Naloga 3.4.** *Rešite besedilno nalogo.*

- *V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka 95 centov, čokoladni puding v prahu pa 24 centov, koliko moramo plačati?*
- *Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča 45 g riža, za odraslo pa 75 g. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?*



## 3.4 Cela Števila

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Množica celih števil  $\mathbb{Z}$  je definirana kot unija treh množic:

- množica **pozitivnih celih števil** ( $\mathbb{Z}^+$ ) – naravna števila  $\mathbb{N}$ ;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ( $\mathbb{Z}^-$ ) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Nasprotna vrednost števila  $n$  je število  $-n$ .

## 3.5 Operacije v množici $\mathbb{Z}$

### 3.5.1 Seštevanje

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 0 je **nevtralni element** pri seštevanju.

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Vsota celega števila in njemu nasprotnega števila je enaka 0.

$$-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Nasprotna vrednost nasprotne vrednosti je enaka prvotni vrednosti.

Vsota dveh pozitivnih števil je pozitivno število, vsota dveh negativnih števil pa je negativno število.

$$-\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = -(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Vsota nasprotnih vrednosti je enaka nasprotni vrednosti vsote.

Naj bosta  $x$  in  $y$  naravni števili. Vsota pozitivnega števila  $x$  in negativnega števila  $-y$  je:

- pozitivno število, če je  $x > y$  in
- negativno število, če je  $x < y$ .

### 3.5.2 Odštevanje

Razlika  $x - y$  dveh pozitivnih števil  $x$  in  $y$  je:

- pozitivno število, če je  $x > y$  in
- negativno število, če je  $x < y$ .

Razlika dveh negativnih števil  $(-x) - (-y)$  je:

- pozitivno število, če je  $x < y$  in
- negativno število, če je  $x > y$ .

Razlika pozitivnega števila  $x$  in negativnega števila  $-y$  je pozitivno število.

*Odštevanje v množici  $\mathbb{Z}$  je prištevanje nasprotne vrednosti.*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

### 3.5.3 Množenje

$$1 \cdot x = x; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 1 je **nevtralni element** za množenje.

$$(-1) \cdot x = -x; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Pri množenju celega števila  $x$  z  $-1$  dobimo nasprotno število  $-x$ .

$$0 \cdot x = 0; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Rezultat množenja števila s številom 0 je enak 0.

$$(-x)(-y) = xy$$

Produkt sodo mnogo negativnih števil je pozitivno število.

$$-x \cdot y = -(xy)$$

$$x(-y) = -(xy)$$

Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

$$(-x)(-y) = xy$$

Produkt liho mnogo negativnih faktorjev je negativno število.

Seštevanje, odštevanje in množenje so v množici  $\mathbb{Z}$  dvočlene notranje operacije.

## 3.6 Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$

### Komutativnost seštevanja

$$x + y = y + x$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

### Asociativnost seštevanja

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

### Komutativnost množenja

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

### Asociativnost množenja

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

**Distributivnost seštevanja in množenja ter odštevanja in množenja**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemo tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja*.

**Naloga 3.5.** *Izračunajte.*

- $17 - 13 - 2 + 10$
- $50 + 11 - 32 - 14$
- $3 + ((5 + 2(7 - 9)) \cdot 2 - 1)$
- $(2 - 5(6 - 10)) \cdot (5 - 2(7 - 5))$
- $9(11 - 3) + 7(10 - 15)$
- $8 + 9(11 - 18) - 2 \cdot 5$

**Naloga 3.6.** *Spretno izračunajte.*

- $7 \cdot 8 - 12 \cdot 8$
- $5 \cdot 18 + 9 \cdot 5 - 5 \cdot 2$
- $8 \cdot (4 - 9) \cdot 2$
- $5 \cdot 3 \cdot (12 - 8)$
- $(15 - 6)(12 - 3 \cdot 4)$

**Naloga 3.7.** *Rešite besedilne naloge.*

- V hotelu imajo na voljo osemnajst enoposteljnih, štiriintrideset dvoposteljnih in petindevetdeset triposteljnih sob. Koliko ljudi lahko še prespi v hotelu, če je v njem že sto triinštirideset gostov?
- Pohod na bližnji hrib traja tri ure. Koliko minut moramo še hoditi, če smo na poti že 145 minut?
- S Ptuja in iz Postojne (razdalja med njima je približno 190 km) sočasno odpeljeta dva motorista drug proti drugemu. En vozi povprečno 40 km/h, drugi pa 5 km/h manj. Kolikšna bo razdalja med njima po dveh urah vožnje?

**Naloga 3.8.** *Zapišite enačbe in jih poenostavite.*

- Razlika petkratnika  $a$  in  $b$  je enaka trikratniku vsote štirikratnika  $a$  in petkratnika  $b$ .
- Vsota  $x$  in dvakratnika  $y$  je enaka razliki petkratnika  $x$  in dvanajstkratnika  $y$ .

### 3.7 Urejenost naravnih in celih števil

Številska množica je **urejena**, kadar lahko po velikosti primerjamo njena poljubna elementa. Pri urejanju števil uporabljamo naslednje znake:

$<$	manjše / manj
$>$	večje / več
$\leq$	manjše ali enako / največ
$\geq$	večje ali enako / vsaj, najmanj
$=$	enako

Za poljubni števili  $x, y \in \mathbb{Z}$  velja natanko ena izmed naslednjih možnosti:  $x > y$ ,  $x < y$  ali  $x = y$ .

Slika števila  $x$  leži na številski premici desno od slike števila  $y$ :

$$x > y \Leftrightarrow x - y > 0$$

Slika števila  $x$  leži na številski premici levo od slike števila  $y$ :

$$x < y \Leftrightarrow x - y < 0$$

Slika števila  $x$  sovpada s sliko števila  $y$ :

$$x = y \Leftrightarrow x - y = 0$$

Velja pa tudi:

$$x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$$

#### Pozitivna in negativna števila

V množici  $\mathbb{Z}$  so pozitivna tista števila, ki so večja od števila 0 in njihove slike ležijo desno od izhodišča, negativna pa tista števila, ki so manjša od števila 0 in njihove slike ležijo levo od izhodišča.

Vsako pozitivno celo število (vsako naravno število) je večje od katerega koli negativnega celega števila.

#### 3.7.1 Linearna urejenost

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica  $\mathbb{Z}$  **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo naslednje lastnosti: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost, stroga sovisnost.

##### Refleksivnost

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq x$$

##### Antisimetričnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

**Tranzitivnost**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

**Stroga sovisnost**

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \vee y \leq x$$

**3.7.2 Lastnosti relacij  $\leq$  in  $<$** **Monotonost vsote**

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z \quad x \leq y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z \quad x \leq y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Obravnavane lastnosti veljajo tudi za relaciji  $\geq$  in  $>$ .

**Naloga 3.9.** Uredite števila 3, -2, 5, -1, 0, -7, 6, -6 po velikosti in jih predstavite na številski premici.

**Naloga 3.10.** Uredite števila 104, -27, 35, -107, 36, -26, 25, -28, 81 po velikosti.

**Naloga 3.11.** Gladina Mrtvega morja leži v depresiji na -423 m nadmorske višine, njegova največja globina pa je 378 m. Kolikšna je najmanjša nadmorska višina dna Mrtvega morja?

**Naloga 3.12.** Za katera cela števila  $x$  ima izraz  $3x - 5(x + 2)$  večjo ali enako vrednost od izraza  $4 - (12 + x)$ ?



## Poglavje 4

# Potence in izrazi

### 4.1 Potence z naravnim eksponentom

Potenca  $x^n$  z **osnovo/bazo**  $x$  in **eksponentom/stopnjo**  $n \in \mathbb{N}$ , je produkt  $n$  faktorjev enakih  $x$ .

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ faktorjev}}$$

### 4.2 Pravila za računanje s potencami

Dve potenci z isto osnovo zmnožimo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa seštejemo.

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{m \text{ faktorjev}} = x^{n+m}$$

Potenco potenciramo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa zmnožimo.

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}}}_{m \text{ faktorjev}} = x^{n \cdot m}$$

Produkt dveh ali več števil potenciramo tako, da potenciramo posamezne faktorje in jih potem zmnožimo.

$$(xy)^n = \underbrace{(xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy)}_{n \text{ faktorjev}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \dots \cdot y)}_{n \text{ faktorjev}} = x^n y^n$$

Za naravne eksponente velja še:

$$\begin{aligned} (-x)^{2n} &= x^{2n} \\ (-x)^{2n+1} &= -x^{2n+1} \end{aligned}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1; & n = 2k \\ -1; & n = 2k - 1 \end{cases}; k \in \mathbb{N}$$

**Naloga 4.1.** Števila  $-3^2$ ,  $(-4)^2$ ,  $-2^4$ ,  $(-1)^{2024}$ ,  $(-2)^3$  in  $(-3)^2$  uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.

**Naloga 4.2.** Poiščite podatke in jih zapišite na dva načina: s potenco in številom brez potence.

- Razdalja med Zemljo in Soncem
- Zemljina masa
- Masa Sonca
- Število zvezd v naši Galaksiji

**Naloga 4.3.** Izračunajte.

- $(-3)^2 + 2^4$
- $(5 - 3)^3 + (-3)^2$
- $(2^2 + 1)^2 + (-3)^3 + (-2)^4$
- $(-1)^{2024} + ((-2)^5 + 5^2 - (7 - 3^2)^3)^2$
- $-1^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$

**Naloga 4.4.** Poenostavite izraz.

- $2^7 \cdot 2^3$
- $a^3 \cdot a^{12} \cdot a^5$
- $(2z)^3$
- $(m^2 \cdot m^4)^3$
- $a^3 + 2a^3 - 6a^3$
- $x^2 \cdot x^4 + (-2x^3)^2 - 2(-x)^6$

**Naloga 4.5.** Izračunajte, rezultat zapišite s potenco.

- $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^6$
- $(10^3)^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3$
- $(-2)^3 \cdot 2^7$
- $-2^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^3$
- $2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 6^4 \cdot 3$
- $(-3)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 21^7 \cdot 7$

**Naloga 4.6.** Poenostavite.

- $2^3 \cdot 3^4 \cdot (2^4 \cdot 3^2)^5$
- $(5^2 \cdot 7)^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- $(-2^3 \cdot 3^5)^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5$
- $(-4)^2 \cdot (-7)^{13} \cdot (-28)^5 \cdot (-7^2)^3$
- $-6^2 \cdot (-3)^2 \cdot 8^5 \cdot (-3^2)^3$

**Naloga 4.7.** Poenostavite.

- $a^3 \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^3 \cdot b^5$
- $4x^4 \cdot (2x^3)^2$
- $(k^3 \cdot 2h^5)^2$
- $(x^2y^4)^2 \cdot (x^3y)^3$
- $(a^2b^5)^3(ab^3)^2$
- $x^2y^3(x^3y^6)^2$

**Naloga 4.8.** Poenostavite.

- $2^3 \cdot x^2 \cdot 3^2 \cdot (-x)^6$
- $(-a^3b)^4(-a^2b^5a^3)^3$
- $(2s^2 \cdot (-s^2)^5)^5$
- $(-2(z^4)^2(-2z)^3z^5)^3$
- $(-3ab^2)^3(-a^4b^2(a^3)^5)^2(ab^3)^2$
- $(xy^2z)^3(x^3(-y^2)^5(-z))^3(x^2y^3(-z^2)^3)$

**Naloga 4.9.** Odpravite oklepaje in poenostavite, če je mogoče.

- $a^n \cdot a^{n+2} \cdot (-a)^3$



- $(-x^n)^4 \cdot x^2$
- $a^n \cdot (a^2 - a^3 + 2)$
- $(x^2 + 3x^n - 5) \cdot x^{n+1}$

**Naloga 4.10.** *Poenostavite.*

- $(2s(g^2)^2)^2 - 3(s^4g)g^7$
- $(-4x^2xy^3)^2 + (xy)^5(-2^3xy)$
- $a^2(a^3 - b^2) - a^5 + (-a)^2b^2$
- $(p^2(q^3)^2)^2 - 2p^4q^{12} + 7(-p^3p)(q^4)^3 - (-2)^3(pq^3)^4$

**Naloga 4.11.** *Poenostavite.*

- $5a^{n+1} + 4a^{n+1} - 6a^{n+1}$
- $3x^{n+2} + 5x^n \cdot x^2 + 2x \cdot x^{n+1}$
- $3^{5x} \cdot 9^x - 3^{7x} + 27^x \cdot 9^{2x}$
- $4^{2y} + 3 \cdot (2^y)^4 - 5 \cdot 8^y \cdot 2^y$
- $5^p \cdot 125^p \cdot 25^p + 2(5^p)^6 - 4 \cdot 25^{3p}$

### 4.3 Večkratniki

**Večkratnik** ali tudi  **$k$ -kratnik** števila  $x$  je vsota  $k$  enakih sumandov  $x$ :

$$k \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{k \text{ sumandov}}.$$

Vse večkratnike števila  $x$  dobimo tako, da število  $x$  zapored pomnožimo z vsemi celimi števili:

$$\{\dots, -5x, -4x, -3x, -2x, -x, 0, x, 2x, 3x, 4x, 5x, \dots\} = \{kx; k, x \in \mathbb{Z}\} = x\mathbb{Z}.$$

Število  $k$  je **koeficient** števila oziroma spremenljivke  $x$ .

### 4.4 Algebrski izrazi

**Algebrski izraz** ali **izraz** je smiseln zapis sestavljen iz:

- števil,
- spremenljivk/parametrov, ki predstavljajo števila in jih označujemo s črkami,
- oznak računskih operacij in funkcij, ki jih povezujejo,
- oklepajev, ki določajo vrstni red računanja.

Če v izraz namesto spremenljivk vstavimo konkretna števila in izračunamo rezultat, dobimo **vrednost izraza** (pri dani izbiri spremenljivk).

Dva matematična izraza sta **enakovredna**, če imata pri katerikoli izbiri spremenljivk vedno enako vrednost.

### 4.5 Računanje z algebrskimi izrazi

Pri poenostavljanju izrazov veljajo vsi računski zakoni, ki veljajo za računanje s števili.

**Komutativnost seštevanja**

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

**Asociativnost seštevanja**

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

**Komutativnost množenja**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

**Asociativnost množenja**

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

**Distributivnost seštevanja in množenja**

$$(x + y) \cdot z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

Če v distributivnostnem zakonu zamenjamo levo in desno stran, dobimo pravilo o **izpostavljanju skupnega faktorja**:  $xz + yz = (x + y)z$ .

### 4.5.1 Seštevanje in izpostavljanje izrazov

Med seboj lahko seštevamo samo člene, ki se razlikujejo kvečjemu v koeficientu. To naredimo tako, da seštejemo koeficienta.

$$mx^2 + ny + kx^2 + ly = mx^2 + kx^2 + ny + ly = (m + k)x^2 + (n + l)y$$

### 4.5.2 Množenje izrazov

Dva izraza zmnožimo tako, da vsak člen prvega izraza zmnožimo z vsakim členom drugega izraza. Potem pa seštejemo podobne člene.

$$(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$$

**Naloga 4.12.** *Poenostavite.*

- $3a + 2b - a + 7b$
- $2a^2b - ab^2 + 3a^2b$
- $5a^4 - (2a)^4 + (-3a^2)^2 - 3(a^2)^2$
- $3(a - 2(a + b)) - 2(b - a(-2)^2)$

**Naloga 4.13.** *Zapišite izraz.*

- *Kvadrat razlike števil  $x$  in  $y$ .*
- *Razlika kvadratov števil  $x$  in  $y$ .*
- *Razlika petkratnika  $m$  in kvadrata števila 3.*
- *Kub razlike sedemkratnika števila  $x$  in trikratnika števila  $y$ .*

**Naloga 4.14.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $3x + 12y^2$
- $m^3 + 8mp$
- $22a^3 - 33ab$
- $kr^2 - rk^2$
- $4u^2v^3 - 6uv^2$
- $12a^2b - 8(ab)^2 - (2ab)^4$

**Naloga 4.15.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $3x(x + 1) + 5(x + 1)$
- $(a - 1)(a + 1) + (a - 1)$
- $4(m - 1) - (1 - m)(a + b)$
- $3(c - 2) + 5c(2 - x)$
- $(-y + x)3a - (y - x)b$

**Naloga 4.16.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $5^{11} - 5^{10} + 5^9$
- $2 \cdot 3^8 + 5 \cdot 3^6$
- $4 \cdot 5^{10} - 10 \cdot 5^8 - 8 \cdot 5^9$
- $7^5 - 7^6 + 7 \cdot 7^4$

**Naloga 4.17.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $3^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+2}$
- $2^{k+2} - 2^k$
- $5 \cdot 3^m + 2 \cdot 3^{m+1}$
- $2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1}$
- $3 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+2} + 4 \cdot 5^{n+3}$
- $7^n + 2 \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 7^{n+1}$

**Naloga 4.18.** *Izpostavite skupni faktor in izračunajte.*

- $2^{2n} + 4^n + (2^n)^2$
- $5^{2n+1} - 25^n + 3 \cdot 5^{2n-1}$
- $5 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 8^{n-1}$
- $49^n - 2 \cdot 7^{2n-1}$

**Naloga 4.19.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $4a^n + 6a^{n+1}$
- $b^n + b^{n+1} - 2b^{n-1}$
- $a^{n-3} + 5a^n$
- $3x^{n+1} - 15x^n + 18x^{n-1}$

**Naloga 4.20.** *Zmnožite.*

- $(x - 3)(x + 2)$
- $(2m + 3)(5m - 1)$
- $(1 - a)(1 + a)$
- $(x - 3y)(2x + y)$
- $(m - 2k)(3m - k)$

**Naloga 4.21.** *Zmnožite.*

- $(a + b - 1)(a - b)$
- $(2x + y)(3x - 4y + 5)$
- $(m + 2n - k)(m + 2n + k)$

**Naloga 4.22.** *Zmnožite.*

- $(x^2 - 3)(x^3 + 2)$
- $(3x^2 - y)(5y^4 - 7x^3)$
- $(u^3 - 1)(u^3 + 1)$
- $(a^5b^2 - 4b)(3a^7 + 2a^2b)$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(z + w)(z^2 - zw + w^2)$

**Naloga 4.23.** *Poenostavite.*

- $(2x - y)(3 + y) + (y - 4)(y + 4) - 2xy + 3(y - 2x + 5)$
- $(x - y)(x + y) - (x^2 + xy + y^2)(x - y) - (1 - x)x^2 + (-y)y^2$
- $2ab + (a - 3b^2)(a + 3b^2) + 2^3(-b^2)^2 - (a - b)(b - a) - 2a^3$

## 4.6 Potenciranje izrazov

### Kvadrat vsote in razlike binoma

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

### Kub vsote in razlike binoma

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

### Kvadrat trinoma

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

**Naloga 4.24.** *Kvadrirajte.*

- $(x + 3)^2$
- $(y + 2x)^2$
- $(2a + 3b)^2$
- $(x - 3y)^2$
- $(1 - a^2)^2$
- $(2x^2y^3 - z^5)^2$

**Naloga 4.25.** *Kvadrirajte.*

- $(-a - b)^2$
- $(-2x^5 + y)^2$
- $(a^{n+1} + b^n)^2$
- $(a + b - 3)^2$
- $(z + 2x^3 - 1)^2$
- $(2x^5 - 3m^6 + 2m^n)^2$

**Naloga 4.26.** *Kubirajte.*

- $(x + 1)^3$
- $(a - 2)^3$
- $(2m + 3)^3$
- $(-a + 2b)^3$
- $(-z - 2g)^3$
- $(a^4 - 2b^2)^3$

**Naloga 4.27.** *Dopolnite do popolnega kvadrata in ga zapišite.*

- $x^2 + 8x + \_ = (x + \_)^2$
- $x^2 + 12x + \_ = (x + \_)^2$
- $a^2 - 10a + \_ = (a - \_)^2$
- $m^2 - 2m + \_ = (m - \_)^2$

**Naloga 4.28.** *Poenostavite.*

- $(2a + 5)^2 - (a - 3)(a + 5) - a(a + 7) - 2a^2 - a$
- $(x - 2y)(x + 2y) + 4(y^2 - 3) - (x - 4)^2 + 7(x + 4)$
- $(2m + 1)(2m - 1) - (3m^2 - 4m) - 2^4 - (m - 2)^3 + (2m - 3)^2 + m^2m$

## 4.7 Razstavljanje izrazov

Razstavljanje/razcepljanje/faktorizacija izraza je zapis izraza kot dveh ali več faktorjev.

Izpostavljanje skupnega faktorja

$$xy + xz = x(y + z)$$

$$xy - xz = x(y - z)$$

Pri razstavljanju smo vedno pozorni na to, da razstavimo vse, kar je mogoče.

Razlika kvadratov

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Razlika kubov

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Razlika četrth potenc

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

Razlika  $n$ -tih potenc

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Vsota kvadratov

Vsote kvadratov  $x^2 + y^2$  ne moremo razstaviti v množici  $\mathbb{Z}$  (oziroma  $\mathbb{R}$ ).

Vsota kubov

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Vsota četrth potenc

Vsote četrth potenc  $x^4 + y^4$  ne moremo razstaviti v množici  $\mathbb{Z}$  (oziroma  $\mathbb{R}$ ).

Vsota  $n$ -tih potenc

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Trinome, ki sledijo naslednjim oblikam lahko razstavimo.

Za nekatere trinome pa se lahko zgodi, da jih ne moremo razstaviti v množici  $\mathbb{Z}$  (oziroma  $\mathbb{R}$ ).

Tričlenik, ki je kvadrat

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

**Viétovo pravilo**

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

**Ugibanje**

$$ax^2 + bx + c = (dx + e)(fx + g)$$

**Razstavljanje štiričlenika – združitev 2 člena + 2 člena**

$$xa + xb + ya + yb = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

**Razstavljanje štiričlenika – združitev 3 členi + 1 člen**

$$a + 2ax + x^2 - b^2 = (a + x)^2 - b^2 = (a + x - b)(a + x + b)$$

**Naloga 4.29.** Razstavite razliko kvadratov.

- $x^2 - 25$
- $64 - y^2$
- $16m^2 - 81$
- $25a^2 - 49b^2$
- $121u^2 - 36v^2$

**Naloga 4.30.** Razstavite razliko kvadratov.

- $2z^2 - 8$
- $3b^2 - 12$
- $48 - 27h^2$
- $200t^2 - 8z^2$
- $a^2b - 49b$
- $80x^2 - 45y^2$

**Naloga 4.31.** Razstavite razliko kvadratov.

- $162s^3 - 32sc^2$
- $f^4 - 9g^2$
- $16u^4 - 81v^4$
- $a^4 - 16$
- $-18a^2 + 2b^4$

**Naloga 4.32.** Razstavite razliko kvadratov.

- $(f + 3)^2 - 25$
- $(2 - r)(2 + r)$
- $81x^4 - (y - 2)^2$
- $(x - y)^2 - (2x + 3y)^2$
- $5(4 - k)(4 + k)$

**Naloga 4.33.** Razstavite in izračunajte.

- $102^2 - 2^2$
- $23^2 - 22^2$
- $999^2 - 1$

**Naloga 4.34.** Razstavite vsoto ali razliko kubov.

- $a^2 - 8b^3$
- $1 + x^3$
- $27m^2 + 8$
- $27 + 64b^3$
- $125x^3 - 64y^3$
- $64a^6 - b^3$

**Naloga 4.35.** Razstavite vsoto ali razliko kubov.

- $a^3b^3 - 1$
- $8a^3 - b^6c^9$
- $m^5 + 27g^3m^2$
- $(a + 2)^3 - b^3$
- $10^3 - (a + b)^3$

**Naloga 4.36.** Razstavite.

- $m^2 + 14m + 45$
- $a^2 + 9a + 18$
- $x^2 - 9x + 20$
- $y^2 - 11y + 24$
- $z^2 - 13z + 22$
- $x^2 + 5x - 24$

**Naloga 4.37.** Razstavite.

- $m^2 + m - 110$
- $u^2 + 9u - 22$
- $x^2 - 5x - 24$
- $z^2 - 3z - 28$
- $p^2 - 4p - 45$
- $x^2 - 18x + 81$

**Naloga 4.38.** Razstavite.

- $3x^2 + 87x + 300$
- $2y^2 + 18y + 28$
- $2x^2 - 30x + 108$
- $7a^2 - 84a + 245$
- $6p^5 - 72p^4 + 216p^3$
- $2x^2 + 4x - 70$

**Naloga 4.39.** Razstavite.

- $72y - 81 + 9y^2$
- $3k^3 + 9k^2 - 12k$
- $16t - 4t^2 + 84$
- $p^3 + 13p^2 + 22p$
- $50b + 125 + 5b^2$
- $-7x^2 + 7x + 42$

**Naloga 4.40.** Razstavite.

- $x^2 + 16xy + 63y^2$
- $a^2 - 2aab - 35b^2$
- $p^2 + 3pk - 10k^2$
- $2z^2 - 2zu - 24u^2$
- $60c^3d^4 + 3c^5 - 27c^4d^2$



**Naloga 4.41.** Zapišite izraze kot popolne kvadrate.

- $x^2 + 18x + 81$
- $a^4 + 14a^2 + 29$
- $m^2 - 10m + 25$
- $100 - 20b + b^2$
- $u^2 - 12uv + 36v^2$
- $4y^2 - 12yz + 9z^2$

**Naloga 4.42.** Razstavite.

- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $b^4 - 26b^2 + 25$
- $a^4 - 8a^2 - 9$
- $n^4 - 17n^2 + 16$
- $2y^6 + 10y^4 + 8y^2$

**Naloga 4.43.** Razstavite.

- $2a^2 + 7a - 4$
- $2x^2 + 5x + 3$
- $4m^2 + 10m - 24$
- $4p^2 + 29p - 24$
- $2f^2 + 9f - 5$
- $7b^2 + 23b + 6$

**Naloga 4.44.** Razstavite.

- $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125$
- $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 27$
- $16^x - 5 \cdot 4^x + 6$
- $4^x - 18 \cdot 2^x + 32$

**Naloga 4.45.** Razstavite.

- $a^3 + 3a^2 - 4a - 12$
- $c^3 - 4c^2 - c + 4$
- $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
- $a^2 + ab - 2a - 2b$
- $a^2 + 3ab + 2a + 6b$
- $2xy + x - 4y - 2$

**Naloga 4.46.** Razstavite.

- $a^2 + 2a + 1 - b^2$
- $m^2 - 6m + 9 - k^2$
- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$
- $u^2 - z^2 - 8z - 16$
- $x^2 - y^2 + 14y - 49$
- $25 - y^2 + 2xy - x^2$

**Naloga 4.47.** Razstavite.

- $a^5 - b^5$
- $a^4 - 16$
- $x^4y^4 - 625$
- $a^5 + 32$
- $x^5 - 32$
- $81 - x^4y^8$

**Naloga 4.48.** Razstavite.

- $a^4 - 5a^3 - 24a^2$
- $3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$
- $108m^4 - 3m^2$
- $x^2 - 29xy + 100y^2$
- $u^4 - 125uv^3$
- $81 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$

## Poglavje 5

# Deljivost

### 5.1 Relacija deljivosti

Naravno število  $m$  je **delitelj** naravnega števila  $n$  (**deljenec**), če obstaja naravno število  $k$  (**kvocient**), da velja:

$$n = k \cdot m.$$

Naravno število  $m$  deli naravno število  $n$ , ko je število  $n$  večkratnik števila  $m$ .

$$m \mid n \Leftrightarrow n = k \cdot m; \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

Število  $m$  je delitelj samega sebe in vseh svojih večkratnikov.

1 je delitelj vsakega naravnega števila.

Če  $d$  deli naravni števili  $m$  in  $n$ ,  $n > m$ , potem  $d$  deli tudi vsoto in razliko števil  $m$  in  $n$ .

Pri deljenju poljubnega naravnega števila  $n$  z naravnim številom  $m$  imamo dve možnosti:  $n$  je deljivo z  $m$  ali  $n$  ni deljivo z  $m$ .

Relacija deljivosti je:

1. **refleksivna**:

$$a \mid a;$$

2. **antisimetrična**:

$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b;$$

3. **tranzitivna**:

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c.$$

Relacija s temi lastnostmi je relacija **delne urejenosti**, zato relacija deljivosti delno ureja množico  $\mathbb{N}$ .

**Naloga 5.1.** Zapišite vse delitelje števil.

- 6
- 16
- 37
- 48
- 120

**Naloga 5.2.** Pokažite, da trditev velja.

- Izraz  $x - 3$  deli izraz  $x^2 - 2x - 3$ .
- Izraz  $x + 2$  deli izraz  $x^3 + x^2 - 4x - 4$ .
- Izraz  $x - 2$  deli izraz  $x^3 - 8$ .

**Naloga 5.3.** Pokažite, da trditev velja.

- $19 \mid (3^{21} - 3^{20} + 3^{18})$
- $7 \mid (3 \cdot 4^{11} + 4^{12} + 7 \cdot 4^{10})$
- $14 \mid (5 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^8 - 3 \cdot 3^7)$
- $25 \mid (7 \cdot 2^{23} - 3 \cdot 2^{24} + 3 \cdot 2^{25} - 2^{22})$
- $11 \mid (2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^7 + 10^8)$
- $35 \mid (6^{32} - 36^{15})$

**Naloga 5.4.** Pokažite, da trditev velja.

- $3 \mid (2^{2n+1} - 5 \cdot 2^{2n} + 9 \cdot 2^{2n-1})$
- $29 \mid (5^{n+3} - 2 \cdot 5^{n+1} + 7 \cdot 5^{n+2})$
- $10 \mid (3 \cdot 7^{4n-1} - 4 \cdot 7^{4n-2} + 7^{4n+1})$
- $10 \mid (9^{3n-1} + 9 \cdot 9^{3n+1} + 9^{3n} - 9^{3n+2})$
- $5 \mid (7 \cdot 2^{4n-2} + 3 \cdot 4^{2n} - 16^n)$

**Naloga 5.5.** Pokažite, da je za poljubno naravno število  $u$  vrednost izraza

$$(u + 7)(7 - u) - 3(3 - u)(u + 5)$$

večkratnik števila 4.

## 5.2 Kriteriji deljivost

### Deljivost z 2

Število je deljivo z 2 natanko takrat, ko so enice števila deljive z 2.

### Deljivost s 3

Število je deljivo s 3 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva s 3.

### Deljivost s 4 oziroma 25

Število je deljivo s 4 oziroma 25 natanko takrat, ko je dvomestni konec števila deljiv s 4 oziroma 25.

### Deljivost s 5

Število je deljivo s 5 natanko takrat, ko so enice števila enake 0 ali 5.

### Deljivost s 6

Število je deljivo s 6 natanko takrat, ko je deljivo z 2 in s 3 hkrati.

### Deljivost z 8 oziroma s 125

Število je deljivo z 8 oziroma s 125 natanko takrat, ko je trimestni konec števila deljiv z 8 oziroma s 125.

### Deljivost z 9

Število je deljivo z 9 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva z 9.

### Deljivost z 10 oziroma $10^n$

Število je deljivo z 10 natanko takrat, ko so enice števila enake 0.

Število je deljivo z  $10^n$  natanko takrat, ko ima število na zadnjih  $n$  mestih števko 0.

### Deljivost z 11

Število je deljivo z 11 natanko takrat, ko je alternirajoča vsota števk tega števila deljiva z 11.

### Deljivost s 7

Algoritem za preverjanje deljivosti s 7:

1. vzamemo enice danega števila in jih pomnožimo s 5,
2. prvotnemu številu brez enic prištejemo dobljeni produkt,
3. vzamemo enice dobljene vsote in jih pomnožimo s 5,
4. produkt prištejemo prej novo dobljenemu številu ...

Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo dvomestnega števila – če je to deljivo s 7, je prvotno število deljivo s 7.

**Naloga 5.6.** *S katerimi od števil 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 so deljiva naslednja števila?*

- 84742
- 393948
- 12390

- 19401

**Naloga 5.7.** Določite vse možnosti za števko  $a$ , da je število  $\overline{65833a}$ :

- deljivo s 3,
- deljivo s 4,
- deljivo s 5,
- deljivo s 6.

**Naloga 5.8.** Določite vse možnosti za števko  $b$ , da je število  $\overline{65b90b}$ :

- deljivo z 2,
- deljivo s 3,
- deljivo s 6,
- deljivo z 9,
- deljivo z 10.

**Naloga 5.9.** Določite vse možnosti za števki  $c$  in  $d$ , da je število  $\overline{115c1d}$  deljivo s 6.

**Naloga 5.10.** Določite vse možnosti za števki  $e$  in  $f$ , da je število  $\overline{115e1f}$  deljivo z 8.

**Naloga 5.11.** Pokažite, da za vsako naravno število  $n$  12 deli  $n^4 - n^2$ .

**Naloga 5.12.** Preverite, ali je število 8641969 deljivo s 7.

## 5.3 Osnovni izrek o deljenju

### Osnovni izrek o deljenju

Za poljubni naravni števili **m** (**deljenec**) in **n** (**delitelj**),  $m \geq n$ , obstajata natanko določeni nenegativni števili **k** (**količnik/kvocien**) in **r** (**ostanek**), da velja:

$$m = k \cdot n + r; \quad 0 \leq r < n; \quad m, n \in \mathbb{N}; k, r \in \mathbb{N}_0.$$

Če je ostanek pri deljenju enak 0, je število  $m$  **večkratnik** števila  $n$ . Tedaj je število  $m$  deljivo s številom  $n$ . Pravimo, da  $n$  deli število  $m$ :  $n \mid m$ .

**Naloga 5.13.** Določite, katera števila so lahko ostanki pri deljenju naravnega števila  $n$  s:

- številom 3;
- številom 7;
- številom 365.

**Naloga 5.14.** Zapišite prvih nekaj naravnih števil, ki dajo:

- pri deljenju s 4 ostanek 3;
- pri deljenju s 7 ostanek 4;
- pri deljenju z 9 ostanek 4.

**Naloga 5.15.** Zapišite naravno število, ki da:

- pri deljenju s 7 količnik 5 in ostanek 3;
- pri deljenju z 10 količnik 9 in ostanek 1;
- pri deljenju s 23 količnik 2 in ostanek 22.

**Naloga 5.16.** Zapišite množico vseh naravnih števil  $n$ , ki dajo:

- pri deljenju z 2 ostanek 1;
- pri deljenju z 2 ostanek 0;
- pri deljenju s 5 ostanek 2.

**Naloga 5.17.** Katere število smo delili s 7, če smo dobili kvocien 3 in ostanek 5?

**Naloga 5.18.** S katerim številom smo delili število 73, če smo dobili kvocien 12 in ostanek 1?

**Naloga 5.19.** Marjeta ima čebulice tulipana, ki jih želi posaditi v več vrst. V vsaki od 3 vrst je izkopala po 8 jamic, potem pa ugotovila, da ji bosta 2 čebulici ostali. Koliko čebulic ima Marjeta?

**Naloga 5.20.** Če neko število delimo z 8, dobimo ostanek 7. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s 4?

**Naloga 5.21.** Če neko število delimo s 24 dobimo ostanek 21. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s 3?

## 5.4 Praštevila in sestavljena števila

Glede na število deliteljev, lahko naravna števila razdelimo na tri skupine:

- **število 1** – število, ki ima samo enega delitelja (samega sebe);
- **praštevila** – števila, ki imajo natanko dva delitelja (1 in samega sebe);
- **sestavljena števila** – števila, ki imajo več kot dva delitelja.

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \mathbb{P} \cup \{\text{sestavljena števila}\}$$

Praštevilo je neskončno mnogo.

Število  $n$  je praštevilo, če ni deljivo z nobenim praštevilom, manjšim ali enakim  $\sqrt{n}$ .

**Eratostenovo sito:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

**Naloga 5.22.** Preverite, ali so števila 103, 163, 137, 197, 147, 559 praštevila.

## 5.5 Osnovni izrek aritmetike

Vsako naravno število lahko enolično/na en sam način (do vrstnega reda faktorjev natančno) zapišemo kot produkt potenc s praštevilskimi osnovami:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}; p_i \in \mathbb{P} \wedge n, k_i \in \mathbb{N}.$$

Zapis naravnega števila kot produkt potenc s praštevilskimi osnovami imenujemo tudi **praštevilski razcep**.

**Naloga 5.23.** Zapišite število 8755 kot produkt samih praštevil in njihovih potenc.

**Naloga 5.24.** Razcepite število 3520 na prafaktorje.

**Naloga 5.25.** Zapišite praštevilski razcep števila 38250.

**Naloga 5.26.** Zapišite praštevilski razcep števila 3150.

**Naloga 5.27.** Razcepite število 66 na prafaktorje in zapišite vse njegove delitelje.

**Naloga 5.28.** Razcepite število 204 na prafaktorje in zapišite vse njegove delitelje.

**Naloga 5.29.** Zapišite vse izraze, ki delijo dani izraz.

- $x^2 + x - 1$
- $x^3 - x^2 - 4x + 4$
- $x^3 - 27$



## 5.6 Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

**Največji skupni delitelj** števil  $m$  in  $n$  je največje število od tistih, ki delijo števili  $m$  in  $n$ . Oznaka:  $D(m, n)$ .

**Najmanjši skupni večkratnik** števil  $m$  in  $n$  je najmanjše število od tistih, ki so deljiva s številoma  $m$  in  $n$ . Oznaka:  $v(m, n)$ .

Števili  $m$  in  $n$ , katerih največji skupni delitelj je 1, sta **tuji števili**.

### Računanje $D$ in $v$ s prafaktorizacijo števil

- Števili  $m$  in  $n$  prafaktoriziramo.
- Za  $D(m, n)$  vzamemo potence, ki so skupne obema številom v prafaktorizaciji.
- Za  $v(m, n)$  vzamemo vse potence, ki se pojavijo v prafaktorizaciji števil, z največjim eksponentom.

Za poljubni naravni števili  $m$  in  $n$  velja zveza  $D(m, n) \cdot v(m, n) = m \cdot n$ .

### Evklidov algoritem

V tem algoritmu zapored uporabljamo osnovni izrek o deljenju.

Najprej ga uporabimo na danih dveh številih.

V naslednjem koraku deljenec postane prejšnji delitelj, delitelj pa prejšnji ostanek.

V vsakem koraku imamo manjša števila, zato se algoritem konča v končno mnogo korakih.

Največji skupni delitelj danih števil  $m$  in  $n$  je zadnji od 0 različen ostanek pri deljenju v Evklidovem algoritmu.

**Naloga 5.30.** *Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik danih parov števil.*

- 6 in 8
- 36 in 48
- 550 in 286
- 6120 in 4158

**Naloga 5.31.** *Preverite, ali sta števili 522 in 4025 tuji števili.*

**Naloga 5.32.** *Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik treh števil.*

- 1320, 6732 in 297
- 372, 190 in 11264

**Naloga 5.33.** *Z Evklidovim algoritmom izračunajte največji skupni delitelj parov števil.*

- 754 in 3146
- 4446 in 6325

**Naloga 5.34.** *Izračunajte število  $b$ , če velja:  $D(78166, b) = 418$  in  $v(78166, b) = 1485154$ .*

**Naloga 5.35.** *Določite največji skupni delitelj izrazov.*

- $x^3 - 5x^2 - 24x$  in  $x^2 - 64$
- $x^2 + 3x + 10$ ,  $x^3 - 4x$  in  $x^3 - 8$
- $x^2 - 25$  in  $x^3 - 27$

**Naloga 5.36.** *Določite najmanjši skupni večkratnik izrazov.*

- $x^2 - 64$  in  $x + 8$
- $x, 8 - x$  in  $x^2 - 64$
- $x^2 + 3x - 10, 2x$  in  $x^2 + 5x$

**Naloga 5.37.** *Velika Janezova terasa je dolga 1035 cm in široka 330 cm. Janez bi jo rad sam tlakoval s kvadratnimi vinilnimi ploščami. Ker ni najbolj vešč tega dela, bo kupil tako velike plošče, da mu jih ne bo treba rezati. Koliko so največ lahko velik kvadratne plošče? Koliko plošč bo potreboval za tlakovanje?*

**Naloga 5.38.** *Neca gre v knjižnico vsake 14 dni, Nace pa vsakih 10 dni. V knjižnici se srečata v ponedeljek 1. marca. Čez koliko dni se bosta naslednjič srečala? Na kateri dan in datum?*

## Poglavje 6

# Racionalna števila

### 6.1 Ulomki in racionalna števila

**Ulolek**  $\frac{x}{y}$  je zapis, ki predstavlja zapis deljenja

$$x : y = \frac{x}{y}; \quad y \neq 0 \wedge x, y \in \mathbb{Z}.$$

Število/izraz  $x$  imenujemo **števec**,  $y$  pa **imenovalec**, med njima je **ulomkova črta**.

Ulolek  $\frac{x}{0}$  ni definiran (nima pomena), saj z 0 ne moremo deliti.

**Algebrski ulomek** je ulomek, v katerem v števcu in/ali imenovalcu nastopajo algebrski izrazi.

Vsako celo število  $x \in \mathbb{Z}$  lahko zapišemo z ulomkom:  $x = \frac{x}{1}$ .

**Ničelni ulomek** je ulomek oblike  $\frac{0}{y} = 0; y \neq 0$ .

V ulomku, kjer v števcu ali imenovalcu nastopa negativno število, upoštevamo enakost

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}.$$

Vsakemu neničelnemu ulomku  $\frac{x}{y}$  lahko priredimo njegovo **obratno vrednost**:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}; \quad x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

### Racionalna števila

Množica racionalnih števil  $\mathbb{Q}$  je sestavljena iz vseh ulomkov (kar pomeni, da vsebuje tudi vsa naravna in cela števila).

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y}; x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil  $\mathbb{Q}^-$ ,
- množico z elementom nič:  $\{0\}$  in
- množico pozitivnih racionalnih števil:  $\mathbb{Q}^+$ .

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

Ulomka  $\frac{x}{y}$  in  $\frac{w}{z}$  sta enaka/enakovredna natanko takrat, ko je  $xz = wy$ ;  $y, z \neq 0$ .

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow xz = wy; \quad y, z \neq 0$$

Enaka/enakovredna ulomka sta različna zapisa za isto racionalno število.

**Naloga 6.1.** Za katere vrednosti  $x$  ulomek ni definiran?

- $\frac{x-2}{x+1}$
- $\frac{2}{x-5}$
- $\frac{x+2}{13}$
- $\frac{3}{2x-5}$

**Naloga 6.2.** Za katere vrednosti  $x$  ima ulomek vrednost enako 0?

- $\frac{x-2}{x+1}$
- $\frac{2}{x-5}$
- $\frac{x+2}{13}$
- $\frac{3}{2x-5}$

**Naloga 6.3.** Ali imata ulomka isto vrednost?

- $\frac{2}{3}$  in  $\frac{10}{15}$
- $\frac{-1}{2}$  in  $\frac{1}{-2}$
- $\frac{4}{5}$  in  $\frac{-8}{-10}$
- $\frac{5}{8}$  in  $\frac{8}{5}$

**Naloga 6.4.** Za kateri  $x$  imata ulomka isto vrednost?

- $\frac{x+1}{2}$  in  $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{2x-1}$  in  $\frac{1}{3}$
- $\frac{x+1}{2}$  in  $\frac{x-1}{-3}$
- $\frac{x+1}{x-2}$  in  $\frac{2}{5}$

**Naloga 6.5.** Ali ulomka predstavljata isto vrednost?

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$  in  $-\frac{1}{2}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$  in  $\frac{3}{2}$
- $1\frac{3}{7}$  in  $\left(\frac{7}{10}\right)^{-1}$

**Naloga 6.6.** Ali ulomka predstavljata isto vrednost?

- $2 \cdot \frac{3}{4}$  in  $\frac{3}{2}$
- $2\frac{3}{4}$  in  $\frac{3}{2}$
- $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$  in  $1\frac{5}{2}$
- $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$  in  $\frac{5}{7}$

**Naloga 6.7.** Zapišite s celim delom oziroma z ulomkom.

- $\frac{14}{5}$
- $-\frac{5}{2}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{110}{17}$
- $3\frac{5}{8}$
- $2\frac{9}{2}$

## 6.2 Razširjanje in krajšanje ulomkov

### Razširjanje ulomka

Ulomek ohrani svojo vrednost, če števec in imenovalec pomnožimo z istim neničelnim številom oziroma izrazom. Temu postopku pravimo **razširjanje ulomka**.

$$\frac{x}{y} = \frac{x \cdot z}{y \cdot z}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Ko ulomke seštevamo ali odštevamo, jih razširimo na **najmanjši skupni imenovalec**, ki je najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev.

### Krajšanje ulomka

Vrednost ulomka se ne spremeni, če števec in imenovalec delimo z istim neničelnim številom oziroma izrazom. Temu postopku rečemo **krajšanje ulomka**.

$$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Ulomek  $\frac{x}{y}$  je **okrajšan**, če je  $(x, y) = 1$ , torej če sta števec in imenovalec tuji števili.

**Naloga 6.8.** Razširite ulomke na najmanjši skupni imenovalec.

- $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$  in  $\frac{5}{6}$
- $\frac{2}{7}, 1$  in  $\frac{1}{2}$
- $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}$  in  $-\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$  in  $-\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{-1}, \frac{3}{2}$  in  $\frac{1}{-3}$
- $\frac{3}{-4}, \frac{-1}{2}$  in  $-\frac{2}{5}$

**Naloga 6.9.** Razširite ulomke na najmanjši skupni imenovalec.

- $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x+1}$  in  $1$
- $\frac{2}{x}, \frac{1}{x-3}$  in  $\frac{1}{(x-3)^2}$
- $\frac{3}{x^2-4x}, \frac{1}{x}$  in  $\frac{2}{x-4}$
- $\frac{4}{x-4}, \frac{2}{x-2}$  in  $\frac{1}{x^2-6x+8}$
- $\frac{2}{x-1}$  in  $\frac{3}{1-x}$
- $\frac{1}{2-x}, \frac{2}{x+2}$  in  $\frac{3}{x^2-4}$

**Naloga 6.10.** Okrajšajte ulomek.

- $\frac{100}{225}$
- $\frac{34}{51}$
- $\frac{121}{3}$
- $\frac{45}{75}$

**Naloga 6.11.** Okrajšajte ulomek.

- $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$
- $\frac{x^3+8}{2x+4}$
- $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$
- $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$
- $\frac{x^2-9}{3-x}$
- $\frac{x-4}{16-x^2}$

### 6.3 Seštevanje in odštevanje ulomkov

#### Seštevanje ulomkov

Ulomke **seštevamo** tako, da jih razširimo na skupni imenovalce, nato seštejemo števce, imenovalce pa prepisemo.

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw}{yw} + \frac{yz}{yw} = \frac{xw + yz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

#### Odštevanje ulomkov

Ulomke **odštevamo** tako, da prištejemo nasprotni ulomek.

$$\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{x}{y} + \left(-\frac{z}{w}\right) = \frac{xw}{yw} + \frac{-yz}{yw} = \frac{xw - yz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

**Naloga 6.12.** Izračunajte.

- $\frac{5}{7} + \frac{1}{14}$
- $\frac{2}{9} - \frac{1}{3}$
- $\frac{3}{8} + 1\frac{1}{2}$
- $1 - \frac{5}{6}$

**Naloga 6.13.** Izračunajte.

- $\left(\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12}$
- $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - 2\right)$
- $\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} - 3\right) + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}$
- $1 - \left(2 - \left(3 - 4 - \left(5 - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}\right)$

**Naloga 6.14.** Poenostavite.

- $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}$
- $\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x}$
- $\frac{3}{x^2-4x} - \left(\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x^2-5x+4}\right)$
- $\frac{2}{xy} + \frac{3}{x} - \frac{2}{y}$

**Naloga 6.15.** Poenostavite.

- $\frac{(x-3)^2 + (x+3)^2}{x^2+9} - \frac{3x^2}{2x^2-x^2}$
- $\frac{(a-3)^3 - (a-1)^3 + 26}{6a} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$
- $\frac{x^3-2x^2-x+2}{-x(1-x)-2} - \left(\frac{x-1}{x} - 1\right)^{-1}$
- $\left(\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right)\right)\right) - \left(\frac{60}{x}\right)^{-1}$

### 6.4 Množenje ulomkov

Ulomka **množimo** tako, da števce množimo s števci, imenovalce pa množimo z imenovalci.

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Produkt danega in njemu obratnega ulomka je enak 1.

$$\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$$

**Naloga 6.16.** *Izračunajte.*

- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$
- $\frac{-2}{13} \cdot \left(-\frac{39}{4}\right)$
- $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9}$
- $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$
- $\frac{-2}{5} \cdot 4\frac{2}{7}$
- $3 \cdot \frac{2}{3}$

**Naloga 6.17.** *Poenostavite.*

- $\frac{x^2-9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x^2+5x}{-x+2} \cdot \frac{2x^2-8}{x^2+7x+10}$
- $\frac{x^3-4x^2-4x+16}{2x+4} \cdot \frac{6x}{3x-6}$
- $2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+x}$

**Naloga 6.18.** *Poenostavite.*

- $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+x^2+x} \cdot \frac{x^2+x}{2-x}$
- $\left(\frac{6-x}{x^2+6x} - \frac{x}{36-x^2}\right) \cdot \left(\frac{2x-6}{x^2+6x}\right)^{-1} + \frac{x}{6-x}$
- $\left(\left(x-y + \left(\frac{x+y}{2xy}\right)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+y}\right)^{-1} - 2xy\right) \cdot (x-y)^{-1}$
- $\left(xy + y^2 - \frac{xy+y^2}{3xy-3x^2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{3x}\right)^{-1} - \left(-\frac{y-x}{y}\right)^{-1}$

## 6.5 Deljenje ulomkov

Ulomek **delimo** z neničelnim ulomkom tako, da prvi ulomek množimo z obratno vrednostjo drugega ulomka.

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z, w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Deljenje ulomkov lahko zapišemo kot **dvojni ulomek**.

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z, w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

**Naloga 6.19.** *Izračunajte.*

- $2 : \frac{4}{5}$
- $1\frac{2}{3} : 2\frac{5}{6}$
- $\frac{7}{12} : 14$
- $\frac{3}{8} : \frac{9}{32}$

**Naloga 6.20.** *Izračunajte.*

- $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{8}}$
- $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$
- $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{-5}}$
- $\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{2}{5}}$

- $\frac{\frac{3}{5}}{-2}$
- $\frac{-\frac{1}{2}}{2^{-1}}$

**Naloga 6.21.** *Poenostavite.*

- $\frac{x^2+x-6}{x+2} : (x-2)$
- $\frac{x-1}{2x^2-4x} : \frac{x^2}{x-2}$
- $x : \frac{x^2+x}{x^3+1}$

**Naloga 6.22.** *Poenostavite.*

- $\frac{x-1}{x^2-4} : \frac{1-x^2}{x-2}$
- $\frac{x-2}{(x+2)^{-1}} : \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{-1}$
- $\frac{3-x}{2-x} : \frac{x-3}{x-2}$



## 6.6 Urejenost racionalnih števil

Za ulomka  $\frac{x}{y}$  in  $\frac{z}{w}$  ( $y, w \notin \{0\}$ ) velja natanko ena izmed treh možnosti:

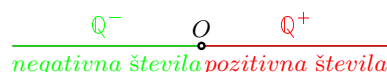
1. prvi ulomek je večji od drugega  $\frac{x}{y} \geq \frac{z}{w}$  natanko tedaj, ko je  $xw \geq yz$ ;
2. drugi ulomek je večji od prvega  $\frac{x}{y} \leq \frac{z}{w}$  natanko tedaj, ko je  $xw \leq yz$ ;
3. ulomka sta enaka  $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$  natanko tedaj, ko je  $xw = yz$  oziroma  $\frac{x}{y} \leq \frac{z}{w} \wedge \frac{x}{y} \geq \frac{z}{w}$ .

Enaka ulomka predstavljata isto racionalno število.

Slika večjega racionalnega števila  $\frac{x}{y}$  je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila  $\frac{z}{w}$ .



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



V množici ulomkov velja, da je vsak negativen ulomek manjši od vsakega pozitivnega ulomka.

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši ali enak* ( $\leq$ ) oziroma *biti večji ali enak* ( $\geq$ ).

Za to relacijo linearne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

- **refleksivnost:**  $\forall \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leq \frac{x}{y}$ ;
- **antisimetričnost:**  $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leq \frac{z}{w} \wedge \frac{z}{w} \leq \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ ;
- **tranzitivnost:**  $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w}, \frac{r}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leq \frac{z}{w} \wedge \frac{z}{w} \leq \frac{r}{q} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{r}{q}$  in
- **stroga sovisnost:**  $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leq \frac{z}{w} \vee \frac{z}{w} \leq \frac{x}{y}$ .

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši* ( $<$ ) oziroma *biti večji* ( $>$ ).

Tedaj veljajo le lastnosti: **refleksivnost**, **antisimetričnost** in **tranzitivnost**.

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \wedge \quad \frac{r}{q} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{q} < \frac{z}{w} \cdot \frac{r}{q}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \wedge \quad \frac{r}{q} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{q} > \frac{z}{w} \cdot \frac{r}{q}$$

### Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{r}{q} < \frac{z}{w} + \frac{r}{q}$$

**Naloga 6.23.** *Kateri od ulomkov je večji?*

- $\frac{3}{7}, \frac{3}{8}$
- $\frac{3}{3}, \frac{3}{3}$
- $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}$
- $\frac{1}{100}, \frac{1}{200}$

**Naloga 6.24.** *Katero število je za  $\frac{3}{5}$  večje od  $\frac{2}{3}$ ?*

**Naloga 6.25.** *Katero število je za  $\frac{1}{3}$  manjše od  $\frac{7}{9}$ ?*

**Naloga 6.26.** *Ulomke uredite po velikosti od večjega k manjšemu.*

- $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{8}{9}$  in  $\frac{7}{8}$
- $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$  in  $-\frac{2}{5}$

**Naloga 6.27.** *Ali obstajajo ulomki z imenovalcem 25, ki so med  $\frac{4}{9}$  in  $\frac{5}{9}$ ? Če obstajajo, jih zapišite.*

**Naloga 6.28.** *Ali obstajajo ulomki z imenovalcem 100, ki so med  $\frac{13}{53}$  in  $\frac{14}{53}$ ? Če obstajajo, jih zapišite.*

## 6.7 Potence s celimi eksponenti

Naravna števila so enaka pozitivnim celim številom, torej so potence s pozitivnimi celimi eksponenti enake potencam z naravnimi eksponenti.

Potenca z eksponentom enakim 0 je definirana kot:

$$x^0 = \begin{cases} 1 & x \neq 0; \\ 1 \text{ ali } ND & x = 0. \end{cases}$$

Potenca z negativnim celim eksponentom pa je definirana kot:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad x \notin \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

### Pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti

V spodaj zapisanih pravilih upoštevamo realni osnovi  $x, y \in \mathbb{R}$  in cele eksponente  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
- $x^n \cdot y^n = (xy)^n$
- $(x^n)^m = x^{nm}$
- $x^n : x^m = \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $x^n : y^n = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n; \quad y \neq 0$

**Naloga 6.29.** *Poenostavite.*

- $x^{10} : x^5$
- $b^4 : b^{-11}$
- $y^{-3} : y^2$

**Naloga 6.30.** *Poenostavite.*

- $\frac{x^3 y^{-2}}{x^{-2} y^3}$
- $\frac{2^{10} a^4 b^{-4}}{2^{-2} a^{-2} b}$
- $\frac{3^{10} x^{-12} y^{-20}}{6^{10} x^2 y^{-3}}$

**Naloga 6.31.** *Poenostavite.*

- $\left(\frac{-2^5 a^{-4} b^3}{2^{-2} a b^{-2}}\right)^2 : \left(-\frac{a^2 b^4}{2^3 a^{-2}}\right)^3$
- $\left(\frac{-3^4 x^{-2} y^3}{x^3 z^2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3^5 x^2 z^{-2}}{y^{-3}}\right)^3$
- $-\frac{5^5 a^4 b^{-3}}{a^{-3} b^2} : \left(-\frac{5^2 a^{-2} b}{a^2}\right)^2$

**Naloga 6.32.** *Poenostavite.*

- $\frac{x^{-2} + x^{-1}}{x^{-3} + x^{-2}}$
- $\frac{x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}}{x^{-4} - x^{-1}}$
- $\frac{1 + x^{-2}}{x^{-4} - 1}$
- $\frac{x^{-2} + x^{-3}}{x^{-3} - x^{-2}}$

**Naloga 6.33.** *Poenostavite.*

- $\frac{3^{n+2} - 2 \cdot 3^{n-1}}{3^{n-2} + 3^n}$
- $\frac{5^{2n} + 5^{2n-1} - 2 \cdot 5^{2n+1}}{25^n}$

- $\frac{7^{3n-3} + 3 \cdot 7^{3n-2} - 7^{3n-4}}{7^{3n-2} - 7^{3n-1}}$
- $\frac{2^{n-1} + 3 \cdot 2^n}{4^n + 5 \cdot 2^{n-1}}$

**Naloga 6.34.** *Napišite brez negativnih eksponentov.*

- $x^{-1} + 2x^{-2}$
- $1 - x^{-1} - x^{-2}$
- $\frac{1}{x^{-1}} + x^{-1}$
- $\left( \frac{\frac{2}{x^{-2}}}{(x^{-2})^{-1}} \right)^{-1}$

**Naloga 6.35.** *Poenostavite.*

- $(x - x^{-1}) \cdot (x^2 - 1)^{-1}$
- $\frac{x^{-2} + x^{-1}}{x^{-2} - x^{-1}} - (1 - x)^{-1}$
- $\left( \frac{x^{-3} - x^{-1}}{1 - x^{-2}} \right)^{-1} + \left( \frac{1}{x} \right)^{-1}$
- $(x^{-2} - 2x^{-1} + 1)^{-1} - (x - 1)^{-2}$

## 6.8 Decimalni zapis

Vsako racionalno število lahko zapišemo na dva načina:

- z **ulomkom** in
- z **decimalnim zapisom**.

**Decimalni zapis** sestavljajo tri komponente:

- celi del,
- **decimalna pika** oziroma **decimalna vejica** in
- **ulomljeni del**.

Decimalni zapis racionalnega števila (zapisanega z ulomkom) dobimo tako, da števec ulomka delimo z njegovim imenovalcem.

### Končen decimalni zapis

**Končen decimalni zapis** dobimo pri **desetiških/decimalnih ulomkih**.

To so ulomki, katerih imenoalec se lahko razširi na potenco števila 10, takšni imenovalci so oblike  $2^n \cdot 5^m$ .

### Neskončen periodičen decimalni zapis

**Neskončen periodičen decimalni zapis** dobimo pri **nedesetiških/nedecimalnih ulomkih**.

To so ulomki, katerih imenovalca ne moremo razširiti na potenco števila 10.

Najmanjšo skupino števk, ki se pri neskončnem periodičnem decimalnem zapisu ponavlja, imenujemo **perioda**. Označujemo jo s črtico nad to skupino števk.

Glede na število števk, ki v njej nastopajo, določimo njen **red**.

**Naloga 6.36.** Zapišite z decimalnim zapisom.

- $\frac{3}{8}$
- $\frac{2}{125}$
- $\frac{125}{6}$
- $\frac{25}{5}$
- $\frac{6}{4}$
- $\frac{9}{4}$
- $\frac{15}{1}$
- $\frac{7}{11}$
- $\frac{11}{13}$

**Naloga 6.37.** Periodično decimalno število zapišite z okrajšanim ulomkom.

- $0.\overline{24}$
- $0.\overline{9}$
- $1.\overline{2}$
- $1.0\overline{3}$
- $1.00\overline{12}$

**Naloga 6.38.** *Izračunajte.*

- $2.3 + 4.8$
- $11.3 + 2.35$
- $0.94 + 0.24$
- $5.6 - 2.9$
- $0.2 - 1.25$
- $12.5 - 20.61$

**Naloga 6.39.** *Izračunajte.*

- $0.1 \cdot 2.44$
- $1.2 \cdot 0.4$
- $11 \cdot 0.002$
- $0.5 \cdot 0.04$
- $0.3 : 5$
- $12.5 : 0.05$
- $2 : 0.02$
- $0.15 : 0.3$

**Naloga 6.40.** *Izračunajte.*

- $(0.24 + 0.06) : 5 - 1.2$
- $12 : (1.2 - 0.2 \cdot 3) + 1.2$
- $(2 - 0.3 : (0.025 + 0.035)) \cdot 0.11$
- $(1 - 0.2 : (0.03 + 0.02)) \cdot 1.5$
- $0.3 \cdot (1.2 - 0.6 \cdot (0.04 + 0.06))$

## Poglavje 7

# Realna števila

### 7.1 Realna števila

Med poljubnima dvema racionalnima številoma  $\frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q}$  je vsaj še eno racionalno število – aritmetična sredina teh dveh števil  $\frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{z}{w} \right)$ .

Med poljubnima racionalnima številoma je neskončno mnogo racionalnih števil in pravimo, da je množica  $\mathbb{Q}$  **povsod gosta**.

Množici  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{Z}$  imata enako moč – sta števno neskončni ( $m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{Z}) = \aleph_0$ ).

**Iracionalna števila**  $\mathbb{I}$  so vsi kvadratni koreni števil, ki niso popolni kvadrati, tretji koreni, ki niso popolni kubi, ..., število  $\pi$ , Eulerjevo število  $e$  ...

Množici racionalnih in iracionalnih števil sta disjunktni:  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ .

**Realna števila** so množica števil, ki jo dobimo kot unijo racionalnih in iracionalnih števil:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ .

Množica realnih števil je močnejša od množice racionalnih števil. Pravimo, da je (neštevno) neskončna.

Množico realnih števil lahko, glede na predznak števil, razdelimo na tri množice:

- množico negativnih realnih števil  $\mathbb{R}^-$ ,
- množico z elementom nič:  $\{0\}$  in
- množico pozitivnih realnih števil:  $\mathbb{R}^+$ .

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$



Vsaki točki na številski premici ustreza natanko eno realno število in obratno, vsakemu realnemu številu ustreza natanko ena točka na številski premici.

Številsko premico, ki upodablja realna števila, imenujemo tudi **realna os**.

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica  $\mathbb{R}$  **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo:

- **refleksivnost**:  $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$ ;
- **antisimetričnost**:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ;
- **tranzitivnost**:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ;
- **stroga sovisnost**:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \vee y \leq x$ .

Za realcijo urejenosti na množici  $\mathbb{R}$  veljajo še naslednje lastnosti:

- **monotonost vsote:**  $x < y \Rightarrow x + z < y + z$  oziroma  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
- $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$  in  $x \leq y \wedge z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$ ;
- $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$  in  $x \leq y \wedge z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$ .



## 7.2 Kvadratni koren

**Kvadratni koren**  $\sqrt{a}$  realnega števila  $a \geq 0$  je tisto nenegativno realno število  $x$ , katerega kvadrat je enak  $a$ .

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow a = x^2; \quad a, x \in \mathbb{R}^+$$

Število  $a$  imenujemo **korenjenec**, simbol  $\sqrt{\phantom{x}}$  pa **korenski znak**.

### Pravila za računanje s kvadratnimi koreni

- $(\sqrt{a})^2 = a; \quad a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad a, b \geq 0$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad a \geq 0, b > 0$

**Delno korenjenje** poteka tako, da korenjenec zapišemo kot produkt dveh ali več faktorjev, od katerih je vsaj en popoln kvadrat (ga lahko korenimo).

Nato koren zapišemo kot produkt korenov in korenimo kar lahko.

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = a \sqrt{b}$$

**Racionalizacija imenovalca** pomeni, da ulomek zapišemo z enakovrednim ulomkom, ki v imenovalcu nima korena. To naredimo z razširjanjem ulomka.

Izraze s kvadratnimi koreni poenostavimo tako, da uporabimo že znane obrazce, delno korenimo in racionaliziramo imenovalce.

#### Naloga 7.1. Izračunajte.

- $\sqrt{49 \cdot 64}$
- $\sqrt{4 \cdot 324}$
- $\sqrt{361 \cdot 16}$
- $\sqrt{-16 \cdot 25}$
- $\sqrt{3 \cdot 12}$
- $\sqrt{\frac{225}{289}}$
- $\sqrt{\frac{169}{256}}$
- $\sqrt{\frac{49}{121}}$
- $\sqrt{\frac{18}{32}}$

#### Naloga 7.2. Izračunajte.

- $\sqrt{\sqrt{16}}$
- $\sqrt{\sqrt{81}}$
- $\sqrt{\sqrt{256}}$
- $\sqrt{\sqrt{1}}$
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

#### Naloga 7.3. Izračunajte.

- $\sqrt{x^4 y^8}$
- $\sqrt{e^{10} f^{26}}$
- $\sqrt{a^{20} b^4}$
- $\sqrt{(-x)^{20} y^4}$
- $\sqrt{3a^6 + a^6}$

#### Naloga 7.4. Izračunajte.

- $\sqrt{16 + 36 + 12}$
- $\sqrt{121 + \sqrt{81}}$
- $\sqrt{10 + 21 + 69}$
- $\sqrt{10 + 11 - 21}$
- $\sqrt{9 + 4 - 4}$
- $\sqrt{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2}$
- $\sqrt{5 \cdot 7 + 1}$
- $\sqrt{8 \cdot 7 - 5 \cdot 4}$
- $\sqrt{10 \cdot 8 - 4 \cdot 4}$
- $\sqrt{11 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4}$

#### Naloga 7.5. Izračunajte.

- $\sqrt{20}$
- $\sqrt{98}$
- $\sqrt{300}$

- $\sqrt{125}$
- $\sqrt{x^3}$
- $\sqrt{x^4 y^5 z^6}$
- $\sqrt{128 a^{13} b^9}$
- $\sqrt{100 x^2 y^5 + 62 x^2 y^5}; \quad x, y \geq 0$
- $\sqrt{8 a^6 b^5 - 12 a^4 b^6}; \quad a, b \geq 0$

**Naloga 7.6.** *Izračunajte.*

- $\sqrt{44} + \sqrt{99}$
- $\sqrt{192} + \sqrt{147}$
- $\sqrt{180} - \sqrt{245} + 2\sqrt{500}$
- $\sqrt{243 a^3 b} + 2a\sqrt{48ab} - \sqrt{363 a^2} \cdot \sqrt{ab}; \quad a, b \geq 0$
- $\sqrt{3a^6 + a^6}$

**Naloga 7.7.** *Racionalizirajte imenovalce.*

- $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
- $\frac{2}{5\sqrt{3}}$
- $\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

- $\frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$
- $\frac{2 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{2}}$

**Naloga 7.8.** *Izračunajte.*

- $\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$
- $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
- $(1 + \sqrt{5})^2$
- $(3 - \sqrt{2})^2$
- $(2 - \sqrt{3})^3$

**Naloga 7.9.** *Izračunajte.*

- $(2 - \sqrt{5})^3 - (1 + 2\sqrt{5})^2$
- $(2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^3$
- $(1 + \sqrt{5}) \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$
- $(3 - \sqrt{5}) \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

## 7.3 Kubični koren

**Kubični koren**  $\sqrt[3]{a}$  realnega števila  $a$  je tisto realno število  $x$ , katerega kub je enak  $a$ .

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow a = x^3; \quad a, x \in \mathbb{R}$$

Število  $a$  imenujemo **korenjenec**, simbol  $\sqrt{\phantom{x}}$  **korenski znak**, število 3 pa **korenski eksponent**.

**Pravila za računanje s kubičnimi koreni**

- $(\sqrt[3]{a})^3 = a$
- $\sqrt[3]{a^3} = a$
- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}; \quad b \neq 0$

**Naloga 7.10.** *Izračunajte.*

- $\sqrt[3]{-1}$
- $\sqrt[3]{216}$
- $\sqrt[3]{8}$
- $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$
- $\sqrt[3]{-\frac{27}{343}}$
- $\sqrt[3]{1\frac{488}{512}}$

**Naloga 7.11.** *Izračunajte.*

- $\sqrt{\sqrt{256}} - \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt[3]{-8} + (2 - \sqrt{2})^2$
- $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{0.16} + \sqrt{0.64} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{48} - \sqrt{27}$
- $(1 - \sqrt{5})^2 - (1 + \sqrt{5})^2 + \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{125} + \sqrt{245}$

## 7.4 Interval

**Interval** je množica vseh realnih števil, ki ležijo med dvema danima številoma  $a$  in  $b$ , kjer je  $a < b$ .

Števili  $a$  in  $b$  imenujemo **krajišči intervala**.

### Vključenost krajišč

- Simbola "[ " in "]" označujeta krajišče, ki spada k intervalu.
- Simbola "(" in ")" označujeta krajišče, ki ne spada k intervalu.

Pri zapisu intervalov moramo biti pozorni na zapis vrstnega reda števil, ki določata krajišči.

$$[a, b] \neq [b, a]$$

### 7.4.1 Vrste intervalov

#### Zaprti interval

Vsebuje vsa realna števila med  $a$  in  $b$ , vključno s krajiščema  $a$  in  $b$ .

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$



#### Odperti interval

Vsebuje vsa realna števila med  $a$  in  $b$ , vendar ne vsebuje krajišč  $a$  in  $b$ .

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$



#### Polodprti/polzaprti interval

- Vsebuje vsa realna števila med  $a$  in  $b$ , vključno s krajiščem  $a$ , vendar ne vsebuje krajišča  $b$ .

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$



- Vsebuje vsa realna števila med  $a$  in  $b$ , vključno s krajiščem  $b$ , vendar ne vsebuje krajišča  $a$ .

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$



**Neomejeni/neskončni intervali**

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$



- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$



- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$



- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$



- $(-\infty, \infty) = \{x; x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$



**Naloga 7.12.** Zapišite kot interval.

- $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R}; 4 \leq x \leq 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R}; -14 < x \leq -9\}$

**Naloga 7.13.** Zapišite interval, ki je narisana na sliki.

- 
- 
- 

**Naloga 7.14.** Zapišite presek intervalov.

- $[0, 2) \cap (-1, 1]$
- $[-3, 5] \cap (-3, 5)$
- $[2, 5) \cap [5, 7)$
- $[-1, 3) \cap (-4, -1]$
- $[4, 6] \cap [-1, 4]$
- $(-1, 3) \cap [1, 2)$

**Naloga 7.15.** Zapišite unijo intervalov.

- $[0, 2) \cup (-1, 1]$
- $[-3, 5] \cup (-3, 5)$
- $[2, 5) \cup [5, 7)$
- $[-1, 3) \cup (-4, 1]$

**Naloga 7.16.** Zapišite razliko intervalov.

- $[2, 3] \setminus [3, 4)$

- $(1, 3) \setminus (3, 4)$
- $[2, 5) \setminus (-1, 2]$
- $(2, 8) \setminus [5, 6)$

**Naloga 7.17.** *Izračunajte.*

- $([1, 3) \setminus (1, 4]) \cup (1, 2)$
- $[-2, 4] \setminus ((-1, 2] \cap [0, 3))$
- $((-2, 3] \setminus [-3, 2)) \cap [3, 5)$

## 7.5 Reševanje enačb

**Enačba** je enakost dveh izrazov, pri čemer vsaj v enem nastopa **neznanka**, ki je ponavadi označena s črko  $x$ .

**Rešitev enačbe** je vsaka vrednost neznanke, za katero sta vrednosti leve in desne strani enačbe enaki.

Enačbo rešujemo tako, da jo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo, iz katere preberemo rešitve. Ekvivalentno enačbo dobimo, če:

- na obeh straneh enačbe prištejemo isto število ali izraz;
- obe strani enačbe množimo z istim neničelnim številom ali izrazom.

**Linearna enačba** je enačba oblike  $ax + b = 0$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Rešujemo jo tako, da jo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo, ki ima na eni strani samo neznanko.

**Razcepna enačba** je enačba, v kateri nastopajo potence neznanke (na primer  $x^2$ ,  $x^3$ ) in jo je mogoče zapisati kot produkt (linearnih) faktorjev.

Preoblikujemo jo v ekvivalentno enačbo, ki ima vse člene na eni strani neenačaja, na drugi pa 0. Izraz (neničelna stran) razstavimo, kolikor je mogoče, in preberemo rešitve.

**Racionalna enačba** je enačba, v kateri nastopajo neznake (tudi) v imenovalcu, pri tem smo pozorni na obstoj ulomkov. Nato enačbo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo.

**Naloga 7.18.** *Rešite enačbe.*

- $3(2a - 1) - 5(a - 2) = 9$
- $2(y - 2) + 3(1 - y) = 7$
- $3(3 - 2(t - 1)) = 3(5 - t)$
- $-(2 - x) + 3(x + 1) = x - 5$

**Naloga 7.19.** *Rešite enačbe.*

- $\frac{1}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{7}{10}$
- $\frac{a-1}{3} + \frac{a+2}{a+2} = \frac{1}{2}$
- $2\frac{2}{3} - \frac{3t+1}{6} = 0$
- $\left(\frac{2}{b+1}\right)^{-1} + \frac{b-1}{4} = b+3$

**Naloga 7.20.** *Rešite razcepne enačbe.*

- $x^2 - 3x = -2$
- $(x+2)^3 - (x-1)^3 = 8x^2 + x + 2$
- $x^4 = 16x^2$
- $(x^2 - 4x + 5)^2 - (x^2 + 4x + 1)^2 - 78 = 2x^2(x + 30) - 18(x + 1)^3$
- $x^3 - 4x^2 + 4 = x$
- $x^5 = 3x^4 - 2x^3$

**Naloga 7.21.** *Rešite enačbe.*

- $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-3}$
- $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{2}{a-1}$
- $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x+4}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-x-2}$
- $\frac{1}{3a-1} + \frac{1}{3a+1} = \frac{a-1}{9a^2-1}$

**Naloga 7.22.** *Neznano število smo delili s 4 in dobljenemu količniku prišteli 1. Dobili smo enako, kot če bi istemu številu prišteli 10. Izračunajte neznano število.*

**Naloga 7.23.** *Kvadrat neznanega števila je za 4 manjši od njegovega štirikratnika. Izračunajte neznano število.*

**Naloga 7.24.** *Avtomobil vozi s povprečno hitrostjo  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , kolesar s povprečno hitrostjo  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Avtomobil gre iz Lendave v Ormož (približno 50 km), kolesar vozi v obratno smer. Koliko časa pred avtomobilom mora na pot kolesar, da se bosta srečala na polovici poti?*

**Naloga 7.25.** *Vsota števk dvomestnega števila je 3. Če zamenjamo njegovi števki, dobimo za 9 manjše število. Katero število je to?*

**Naloga 7.26.** *Andreja je bila ob rojstvu hčere Eve stara 38 let. Čez koliko let bo Andreja stara trikrat toliko kot Eva?*

**Naloga 7.27.** *Prvi delavec sam pozida steno v 10 urah, drugi v 12 urah, tretji v 8 urah. Delavci skupaj začnejo zidati steno. Po dveh urah tretji delavec odide, pridruži pa se četrti delavec. Skupaj s prvim in drugim delavcem nato končajo steno v eni uri. V kolikšnem času četrti delavec pozida steno?*



## 7.6 Reševanje neenačb

**Neenačba** je neenakost dveh izrazov, pri čemer vsaj v enem nastopa neznanka. Med levo in desno stranjo je postavljen eden od neenačajeve:  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  ali  $\geq$ .

Neenačbo rešujemo tako, da jo preoblikujemo v ekvivalentno neenačbo. To dobimo, če:

- prištejemo isto število ali izraz na obeh straneh neenačbe;
- množimo obe strani neenačbe z istim pozitivnim številom ali izrazom;
- množimo obe strani neenačbe z istim negativnim številom ali izrazom in se pri tem neenačaj obrne.

**Linearna neenačba** je oblike  $ax + b < 0$ , ali pa nastopa drug neenačaj:  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ .

**Naloga 7.28.** Poiščite vsa realna števila, ki ustrezajo pogoju.

- $3a + 2 < 2a - 1$
- $7t + 8 \geq 8(t - 2)$
- $5x - 2 > 2(x + 1) - 3$
- $x - 1 \leq 2(x - 3) - x$

**Naloga 7.29.** Rešite neenačbe.

- $\frac{x}{2} + \frac{2}{3} < \frac{8}{3}$
- $\frac{4 + 5a}{34} - \frac{4}{51} \geq 2 + \frac{2 - a}{51}$
- $x + \frac{x - 2}{3} < \frac{x - 3}{4} + \frac{x - 1}{2}$
- $\frac{2x - 2}{15} + \frac{x}{3} < \frac{4x - 2}{5} + \frac{2}{10}$

**Naloga 7.30.** Rešite sisteme neenačb.

- $-2 < y - 2 < 1$
- $-4 \leq 5a - 9 \leq 1$
- $(x + 1 > 3) \wedge (2x \leq 3(x - 1))$
- $(3x - 5 < x + 3) \vee (2x \geq x + 6)$

## 7.7 Reševanje sistemov enačb

### 7.7.1 Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama

Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama ali sistem  $2 \times 2$  je v splošnem oblike:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$x$  in  $y$  sta **neznanki**,  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  so **koefficienti**.

**Rešitev sistema** je **urejen par** števil  $(x, y)$ , ki zadoščajo obema enačbama.

Sistem  $2 \times 2$  ima lahko eno rešitev, nima rešitve ali ima neskončno rešitev.

Sistem lahko rešujemo s primerjalnim načinom, zamenjalnim načinom ali z metodo nasprotnih koefficientov.

#### Primerjalni način

Iz obeh enačb izrazimo isto neznanko, nato njuni vrednosti enačimo.

#### Zamenjalni način

Iz ene enačbe izrazimo eno izmed neznank (preverimo, če je kateri od koefficientov pri neznankah enak 1 – takšno neznanko hitro izrazimo) in izraženo vrednost vstavimo v drugo enačbo.

#### Metoda nasprotnih koefficientov

Eno ali obe enačbi pomnožimo s takimi števili, da bosta pri eni izmed neznank koefficienta nasprotni števili, nato enačbi seštejemo. Ostane ena enačba z eno neznanko.

**Naloga 7.31.** *Rešite sisteme enačb.*

- $2x + y = 9$
- $x - 3y = 8$
- $x - y = 5$
- $y - x = 3$
- $2x - 3y = 5$
- $-4x + 6y = -10$
- $3x - y = 5$
- $6x - 10 = 2y$

**Naloga 7.32.** *Z zamenjalnim načinom rešite sisteme enačb.*

- $2x + 5y = -2$
- $x - 3y = -1$
- $\frac{x}{2} - y = 3$
- $y + x = -2$
- $3x - 2y = 1$
- $x + y = \frac{7}{6}$
- $0.5x + 0.2y = 2$
- $\frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y = 1$

**Naloga 7.33.** Z metodo nasprotnih koeficientov rešite sisteme enačb.

- $2x + 3y = 3$
- $-4x + 3y = 0$
- $4x - 3y = -2$
- $-8x + y = -1$
- $3x - 2y = 2$
- $2x - 3y = -2$
- $x - y = -5$
- $0.6x + 0.4y = 7$

**Naloga 7.34.** V bloku je 26 stanovanj. Vsako stanovanje ima 2 ali 3 sobe. Koliko je posameznih vrst stanovanj, če je v bloku 61 sob?

**Naloga 7.35.** Kmet ima v ogradi 20 živali. Če so v ogradi le race in koze, koliko je posameznih živali, če smo našteali 50 nog?

**Naloga 7.36.** Razredničarka na sladoled pelje svojih 30 dijakov. Naročili so lahko 2 ali 3 kepice sladoleda. Koliko dijakov je naročilo dve in koliko tri kepice sladoleda, če razredničarka ni jedla sladoleda, plačala pa je 79 kepic sladoleda?

**Naloga 7.37.** Babica ima dvakrat toliko vnukinj kot vnukov. Vnukinjam je podarila po tri bombone, vnukom pa po štiri bombone. Koliko vnukinj in vnukov ima, če je podarila 70 bombonov?

### 7.7.2 Sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

Sistem treh linearnih enačb z tremi neznankami ali sistem  $3 \times 3$  je v splošnem oblike:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$x$ ,  $y$  in  $z$  so **neznanke**,  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  so **koeficienti**.

**Rešitev sistema** je **urejena trojka** števil  $(x, y, z)$ , ki zadoščajo vsem trem enačbam.

Sistem  $3 \times 3$  rečujemo z istimi postopki kot sisteme  $2 \times 2$ , le da postopek ponovimo večkrat.

**Naloga 7.38.** Z metodo nasprotnih koeficientov rešite sisteme enačb.

- $2x + y - 3z = 5$
- $x + 2y + 2z = 1$
- $-x + y + z = -4$
- $x - 2y + 6z = 5$
- $-x + 3z = -1$
- $4y - 3z = -3$
- $x + y - z = 0$
- $x - y - 3z = 2$
- $2x + y - 3z = 1$
- $2x - 4y + z = 3$
- $4x - y + 2z = 4$
- $-8x + 2y - 4z = 7$

## 7.8 Obravnava enačb in neenačb

Kadar v enačbi poleg neznake  $x$  nastopajo tudi druge črke, na primer  $a, b, c, k, l, \dots$ , le-te označujejo števila, ki imajo poljubno realno vrednost. Imenujemo jih **parametri**.

Vrednost parametrov vpliva na rešitev enačbe, zato moramo enačbo reševati glede na vrednosti parametrov. Temu postopku rečemo **obrnava enačbe**.

**Naloga 7.39.** *Obravnavajte enačbe.*

- $2(ax - 3) + 3 = ax$
- $-4x - b(x - 2)^2 = 3 - bx^2 - 7b$
- $3(a - 2)(x - 2) = a^2(x - 1) - 4x + 7$
- $(b - 3)^2x - 3 = 4x - 3b$

**Naloga 7.40.** *Obravnavajte neenačbe.*

- $a(x - 2) \leq 4$
- $mx + 4 > m^2 - 2x$
- $a(a - 3x + 1) \geq a(x - 4) + a^2x$
- $(k - 1)^2x \leq kx + 2(k + 1) + 5x$

## 7.9 Sklepni račun

Pri sklepnem računu obravnavamo situacije, v katerih nastopata dve količini, ki sta premo sorazmerni ali obratno sorazmerni.

### Premo sorazmerje

Količini  $x$  in  $y$  sta **premo sorazmerni**, če obstaja takšno število  $k$ , da je  $x = k \cdot y$ .

### Obratno sorazmerje

Količini  $x$  in  $y$  sta **obratno sorazmerni**, če obstaja takšno število  $k$ , da je  $x = \frac{y}{k}$ .

**Naloga 7.41.** *Delavec v štirih urah zasluži 10 £. Koliko zasluži v dvanajstih urah?*

**Naloga 7.42.** *Tiskalnik v sedmih minutah natisne 42 strani. Koliko časa potrebuje za 108 strani?*

**Naloga 7.43.** *Tri čebele v treh dneh oprašijo devetsto cvetov. Koliko cvetov v šestih dneh opraši šest čebel?*

**Naloga 7.44.** *Kolesar od Ljubljane do Geometrijskega središča Slovenije potuje dve uri s hitrostjo 20 km/h. Kako hitro bi moral peljati, da bi pot prevozil v eni uri in petnajstih minutah?*

**Naloga 7.45.** *En računalnik za pripravo posebnih efektov filma potrebuje 14 ur. Koliko časa bi potrebovali trije taki računalniki, za pripravo posebnih efektov za šest filmov?*

**Naloga 7.46.** *Sedem pleskarjev pleska hišo 15 dni. Po petih dneh dva delavca premestijo na drugo delovišče. Koliko časa bodo preostali delavci pleskali hišo?*

## 7.10 Odstotni račun

Količine pri odstotnem računu so povezane s sklepnim računim, in sicer so v premem sorazmerju.

**Odstotek** (ali procent) % celote definiramo kot stotino celote, **odtisoček** (ali promil) ‰ kot tisočino celote.

$$1 \% = \frac{1}{100} \quad 1 \text{ ‰} = \frac{1}{1000}$$

**Relativni delež** je kvocient med deležem in osnovo:  $r = \frac{d}{o}$ .

**Naloga 7.47.** Zapišite z okrajšanim ulomkom oziroma odstotkom.

- 12 %
- 20 %  $a$
- 250 %
- 0.5 %  $b$
- 12 ‰
- $\frac{3}{4}a$
- $\frac{7}{20}x$
- $\frac{31}{10}y$
- 0.8  $z$
- $\frac{25}{8}m$

**Naloga 7.48.** Izračunajte.

- Koliko je 20 % od 10 kg?
- Koliko je 25 % od 20 £?
- Koliko je 10 % od 1 l?
- Koliko je 250 % od 12 g?
- Koliko je 1 ‰ od 2350 kg?
- Koliko je 17 ‰ od 100 m?

## 7.11 Absolutna vrednost

**Absolutna vrednost**  $|x|$  števila  $x$  geometrijsko predstavlja oddaljenost točke, ki predstavlja število  $x$ , od izhodišča na številski premici.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0; \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

### Lastnosti absolutne vrednosti

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$  – **trikotniška neenakost**

Z absolutno vrednostjo izračunamo tudi razdaljo med  $x$  in  $y$  kot  $|x - y|$  ali  $|y - x|$ .

## 7.12 Zaokroževanje, približki, napake

### Pravila zaokroževanja

- Zadnjo števk pustimo enako, če je prva izbrisana števk manjša od 5;
- zadnjo števk povečamo za 1, če je prva izbrisana števk 5 ali več.

Zaokroževanje na  $n$  **decimalnih mest** pomeni: opustiti vse decimalke od  $n$ -tega mesta dalje in zaokrožiti. Primer:  $\sqrt{2} \doteq 1.41$  (na 2 decimalni mesti).

Zaokroževanje na  $n$  **mest** pomeni, da ima število v svojem zapisu  $n$  števk, pri pogoju, da ne štejemo ničel na začetku in na koncu. Primer:  $\sqrt{2} \doteq 1.41$  (na 3 mesta).

Pri zapisu uporabimo  $\doteq$ , kar označuje, da smo rezultat zapisali približno in ne natančno.

### Absolutna in relativna napaka

Naj bo  $x$  točna vrednost in  $X$  njen **približek**.

**Absolutna napaka** približka je  $|X - x|$ ; **relativna napaka** je  $\frac{|X - x|}{x}$ .

Absolutno napako zapišemo tudi  $X = x \pm \epsilon$ , kar pomeni, da se absolutna napaka približka  $X$  razlikuje od točne vrednosti  $x$  kvečjemu za  $\epsilon$ .

**Naloga 7.49.** Na kartonski škatli je oznaka velikosti  $50 \pm 3$  cm. Koliko je največja in koliko najmanjša velikost škatle, ki ustreza tej oznaki? Ali je lahko relativna napaka velikosti 8 %?

**Naloga 7.50.** Pri 200 m vrvi smemo narediti 7 % napako. Ali je lahko takšna vrv dolga 230 m? Kako dolgi bosta najkrajša in najdaljša vrv, ki še ustrezata?

**Naloga 7.51.** V EU morajo biti banane za prodajo dolge najmanj 14 cm. V trgovino dobijo novo pošiljko banan, ki jih izmerijo, da so dolžine 13.7 cm. Njihov meter ima 5 % odstopanje. Ali lahko prodajajo takšne banane?



## Poglavje 8

# Statistika

### 8.1 Osnovni pojmi statistike

**Populacija** je množica, ki jo statistično proučujemo. Element populacije imenujemo **statistična enota**.

**Vzorec** je podmnožica populacije, katere elementi predstavljajo največjo možno mero značilnosti celotne množice. Vzorec izberemo, kadar je celotna populacija prevelika množica, da bi analizirali vse njene elemente.

- **Reprezentativen vzorec** je vzorec, ki je izbran tako, da predstavlja značilnosti celotne populacije.
- **Slučajni vzorec** je vzorec, ki je izbran naključno – vsi elementi populacije imajo enako možnost, da bodo izbrani.

**Numerus** je število elementov vzorca. Oznaka  $N$ .

**Statistična spremenljivka/podatek/znak** je vrednost ali lastnost, ki jo proučujemo.

Vrste statističnih spremenljivk:

- **opisne/kvalitativne** statistične spremenljivke
- **vrstne/ordinalne** statistične spremenljivke
- **številске/kvantitativne** statistične spremenljivke

Številске statistične spremenljivke:

- **diskretne** številске spremenljivke – zavzamejo lahko posamezne vrednosti
- **zvezne** številске spremenljivke – zavzamejo lahko vsako vrednost z nekega intervala

**Naloga 8.1.** Zapišite, kaj je v danem primeru populacija, vzorec, statistična enota, spremenljivka in ugotovite ali je spremenljivka opisna ali numerična in, če je numerična, ugotovite, ali je zvezna ali diskretna.

- Na spletni strani je anketa z vprašanjem “Ali imate doma pomivalni stroj?”. Nanjo je odgovorilo 254 ljudi.
- V televizijski oddaji gledalci glasujejo za dva kandidata.
- Razrednik svojih 28 dijakov vpraša, kolikšna je oddaljenost njihovega doma do šole.
- Maturant piše seminarsko nalogo z naslovom “Uporaba TikTok-a med srednješolci”. Pridobil je odgovore 369 srednješolcev, ki so odgovarjali na vprašanje “Ali uporabljate TikTok?”
- Znanstveniki pri raziskavi spremljajo, koliko jajc znesejo kokoši na slovenskih farmah na mesec.

**Naloga 8.2.** *Slovenija ima več kot 6000 naselij. Statistični urad Republike Slovenije je januarja 2024 naredil analizo naselij glede na število prebivalcev. Rezultati so prikazani v tabeli.*

velikostni razred naselja	število naselij
0	57
1 – 24	719
25 – 49	851
50 – 99	1256
100 – 199	1444
200 – 499	1109
500 – 999	359
1000 – 4999	199
5000 – 9999	23
10000 – 49999	16
50000+	2

*Zapišite, kaj je v danem primeru populacija, statistična enota, spremenljivka in ugotovite ali je spremenljivka opisna ali numerična in, če je numerična, ugotovite ali je zvezna ali diskretna.*

## 8.2 Urejanje in grupiranje podatkov

Podatke, pridobljene v posamezni raziskavi, moramo najprej urediti.

Če podatkov ni veliko, jih uredimo po velikosti v **ranžirno vrsto**, sicer jih združujemo v skupine, **frekvenčne razrede**.

Podatek z največjo vrednostjo označimo z  $x_{max}$ , podatek z najnižjo vrednostjo pa  $x_{min}$ .

**Frekvenca**  $f$  statističnega znaka je posamezno število diskretnih statističnih enot iste vrednosti.

**Frekvenčni razred** je skupina podatkov iz vzorca. Frekvenčni razredi so navadno enako široki, in skupaj zajamejo celoten razpon podatkov. Za zvezen nabor podatkov za frekvenčne razrede izberemo intervale (navadno oblike  $[a, b)$ ).

**Širina frekvenčnega razreda**  $d_k$  je razlika med zgornjo ( $z_k$ ) in spodnjo ( $s_k$ ) mejo frekvenčnega razreda:

$$d_k = z_k - s_k.$$

Če so razredi enako široki, določimo njihovo širino kot kvocient med celotnim razponom podatkov  $x_{max} - x_{min}$  in številom razredov.

**Sredina frekvenčnega razreda**  $x_k$  je aritmetična sredina zgornje in spodnje meje razreda:

$$x_k = \frac{z_k + s_k}{2}.$$

Grupirane podatke predstavimo s **frekvenčno preglednico/porazdelitvijo**.

Za podatke v frekvenčnih preglednicah računamo:

- **(absolutno) frekvenco**  $f_k$  – število podatkov z vrednostmi v danem frekvenčnem razredu;
- **relativno frekvenco**  $f'_k$  – delež celote, ki ga predstavlja število podatkov v danem frekvenčnem razredu;
- **(absolutno) kumulativno frekvenco**  $F_k$  – število podatkov, katerih vrednosti zavzemajo manjšo vrednost od zgornje meje danega frekvenčnega razreda;
- **relativno kumulativno frekvenco**  $F'_k$  – delež celote, ki ga predstavlja število podatkov v danem in vseh manjših frekvenčnih razredih.

**Naloga 8.3.** Na šoli analizirajo količino prevzetih obrokov v jedilnici. Rezultati so zbrani v tabeli.

Oddelek	Število prevzetih obrokov
1.a	12
1.b	14
1.c	20
2.a	17
2.b	16
2.c	9
3.a	13
3.b	16
3.c	14
4.a	21
4.b	8
4.c	12

Analizirajte podatke s frekvenčno preglednico. Podatke razdelite v razrede 5 – 9, 10 – 14, 15 – 19, 20 in več.

**Naloga 8.4.** *Dijaki 3. a oddelka so zapisovali svoje približljene barve.*

*Zapisali so jih: modra, rdeča, rdeča, zelena, rumena, rdeča, modra, zelena, modra, modra, rumena, rdeča, zelena, modra, rumena, rumena, zelena, rdeča.*

*Analizirajte rezultate s frekvenčno preglednico.*

**Naloga 8.5.** *Lokostrelec si beleži rezultate treningov.*

*Vrednosti so bile: 10.3, 10.4, 9.9, 9.7, 10.2, 8.9, 9.4, 10.1, 9.0, 10.3, 9.5, 10.6.*

*Analizirajte rezultate s frekvenčno preglednico.*

**Naloga 8.6.** *V frekvenčni preglednici so zbrani podatki o številu sorojencev dijakov 2. b oddelka.*

*Dopolnite preglednico.*

Število sorojencev	$f_k$	$f'_k$	$F_k$	$F'_k$
0	5			
1		25 %		
2				
3		10 %		
skupaj	20	100 %	/	/

## 8.3 Mere osredinjenosti

### Aritmetična sredina

**Aritmetična sredina** ali **povprečje** je količnik vsote vseh vrednosti statistične spremenljivke in števila teh vrednosti.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Če se vrednosti statistične spremenljivke ponavljajo ( $k_i$  vrednosti  $x_i$ ), je formula sledeča:

$$\bar{x} = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m}{k_1 + k_2 + \cdots + k_m} = \frac{\sum_{i=1}^m k_ix_i}{\sum_{i=1}^m k_i}, \quad \sum_{i=1}^m k_i = N$$

Pri grupiranih podatkih za vrednosti vzamemo sredine frekvenčnih razredov.

### Modus

**Modus** ali **gostiščnica**  $Mo$  je vrednost statistične spremenljivke, ki se v množici vseh vrednosti najpogosteje ponavlja.

Če se v neki množici dve vrednosti pojavita enako mnogokrat najpogosteje, rečemo, da je porazdelitev vrednosti **bimodalna**.

Za grupirane podatke določamo **modalni razred**, to je tisti razred, ki ima največjo frekvenčno gostoto.

### Mediana

**Mediana** ali **središčnica**  $Me$  je tista vrednost statistične spremenljivke, pri kateri je polovica vrednosti večjih ali enakih, druga polovica vrednosti pa manjših ali enakih od te vrednosti.

Če imamo liho število vrednosti statistične spremenljivke, za mediano vzamemo vrednost, ki stoji na mestu  $\frac{n+1}{2}$  po velikosti urejenih podatkov.

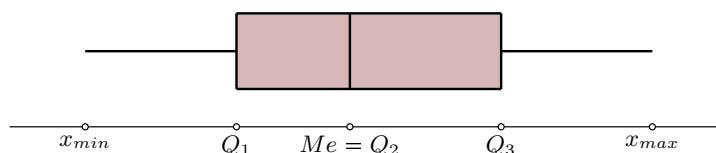
Če je število vrednosti sodo, za vrednost mediane vzamemo aritmetično sredino srednjih dveh podatkov.

### Kvartili

Mediana razdeli podatke na dve polovici. Ti dve polovici lahko spet razdelimo na dve polovici in dobimo štiri enako močne množice podatkov. Meje teh skupin imenujemo **kvartili**.

**Prvi kvartil**  $Q_1$  je mediana prve (spodnje) polovice podatkov, **drugi kvartil**  $Q_2$  je mediana  $Me$  vseh podatkov, **tretji kvartil**  $Q_3$  pa je mediana druge (zgornje) polovice podatkov.

Vrednosti kvartilov, minimalno vrednost in maksimalno vrednost množice podatkov grafično predstavimo z **diagramom kvartilov** oziroma **šktalo z brki**.



**Naloga 8.7.** Izračunajte aritmetično sredino količin.

- 1.5 s, 3.5 s, 1 s
- 4 km, 2000 m, 3 km
- 4 £, 2 £, 3 £, 1 £, 5 £

**Naloga 8.8.** Izračunajte aritmetično sredino danim podatkom.

- 2, 3, 1, 8, 19, 2, 7
- 13, 39, 12
- 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.6

**Naloga 8.9.** Določite modus danim številskim podatkom.

- 1, 4, 2, 4, 1, 6, 3, 4, 1, 4, 6, 4, 4, 8
- 3, 25, 10, 3, 5, 7, 5, 7, 9, 4, 49
- $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{8}, \frac{2}{9}$
- $\frac{1}{3}, \frac{4}{2}, \frac{1}{5}, \frac{8}{10}, \frac{9}{8}$
- $\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{1}{4}, \frac{10}{10}, \frac{9}{9}$

**Naloga 8.10.** V porodnišnici so izmerili dolžine dojenčkov, ki so se rodili v enem dnevu.

50, 51, 51, 44, 47, 48, 53, 49, 52, 55, 46, 50, 50, 49, 47, 47

Določite mediano podatkov.

**Naloga 8.11.** Otroci v vrtcu so metali žogo na koš in si zapisovali dosežke. Podatki so prikazani v preglednici.

Otrok	Jaka	Jure	Miha	Polona	Valerija	Tina	Mojca	Cene	Darja
Št. košev	5	7	10	8	5	6	9	9	4

Izračunajte, koliko košev je otrok zadel v povprečju. Podatke uredite po vrsti in določite  $Mo$ ,  $Me$  ter narišite škatlo z brki.

## 8.4 Mere razpršenosti

Informacijo o **porazdelitvi** oziroma **razpršenosti** podatkov lahko izračunamo s pomočjo: variacijskega razmika, interkvartilnega ranga, variance in standardnega odklona.

### Variacijski razmik

**Variacijski razmik**  $R$  je razlika med maksimalno in minimalno vrednostjo statistične spremenljivke:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Variacijski razmik je zelo odvisen od ekstremnih vrednosti, posebno osamelcev, zato ga uporabljamo le v kombinaciji z drugimi merami razpršenosti.

### Interkvartilni rang

**Interkvartilni rang** oziroma **medčetrtnski razmik**  $IR$  je razlika med vrednostjo prvega in tretjega kvartila:

$$IR = Q_3 - Q_1.$$

**Osamelec** je podatek, katerega vrednost je za več kot 3-kratnik interkvartilnega ranga  $IR$  nad tretjim kvartilom  $Q_3$  ali pod prvim kvartilom  $Q_1$ .

Podatek je "pogojno osamelec", če je njegova vrednost za več kot 1.5-kratnik interkvartilnega ranga  $IR$  nad tretjim kvartilom  $Q_3$  ali pod prvim kvartilom  $Q_1$ .

Interkvartilni rang je mera razpršenosti, ki ni občutljiva na osamelce.

### Varianca

**Varianca**  $\sigma^2$  predstavlja aritmetično sredino kvadratov odmikov vrednosti statistične spremenljivke od aritmetične sredine:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

### Standardni odklon

**Standardni odklon**  $\sigma$  izračunamo kot koren variance:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Predstavlja povprečje odmikov vrednosti statistične spremenljivke od aritmetične sredine.

**Naloga 8.12.** V preglednici so predstavljene cene treh izdelkov v trgovini po posameznih mesecih leta 2019.

Izdelek	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Avg	Sep	Okt	Nov
Kruh	3.35	3.29	3.34	3.38	3.38	3.37	3.38	3.55	3.53	3.54	3.49
Jagode	8.73	7.18	5.52	4.48	5.72	5.64	6.49	6.58	7.15	7.58	8.34
Cvetača	2.04	2.17	1.58	1.75	2.13	1.85	1.93	1.87	1.81	1.99	1.80

Izračunajte povprečno ceno in standardni odklon cene vsakega izdelka.

**Naloga 8.13.** V preglednici je prikazano število rojstev v Sloveniji po letih.

Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Število	21111	21165	20641	20345	20241	19585	19328	18767	18989

Izračunajte povprečno število rojstev in standardni odklon.

**Naloga 8.14.** Pridobili smo podatke (urejene po velikosti): 1, 13, 14, 15, 15, 15, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20 in 40.

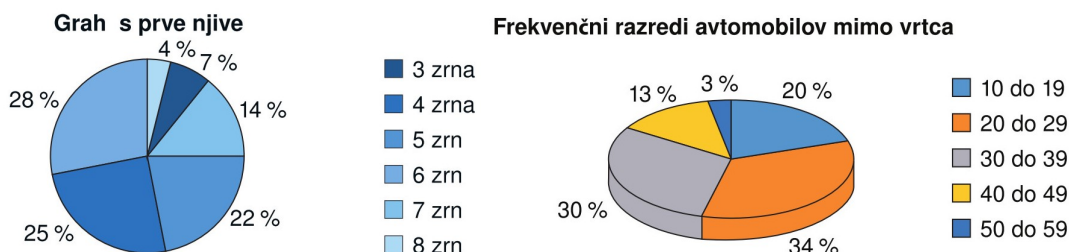
- Opišite razpršenost podatkov  $R$ ,  $IR$ ,  $Q_1$ ,  $Q_3$ ,  $\sigma$ ,  $\bar{x}$ .
- Največjo in najmanjšo vrednost (v tem primeru sta to osamelca) odstranimo. Kako se spremeni razpršenost podatkov?



## 8.5 Grafično prikazovanje podatkov

### Strukturni krog

**Strukturni krog** ali **krožni diagram** uporabljamo, kadar so podatki razvrščeni v malo frekvenčnih razredov ali ne dosežejo veliko različnih diskretnih vrednosti.

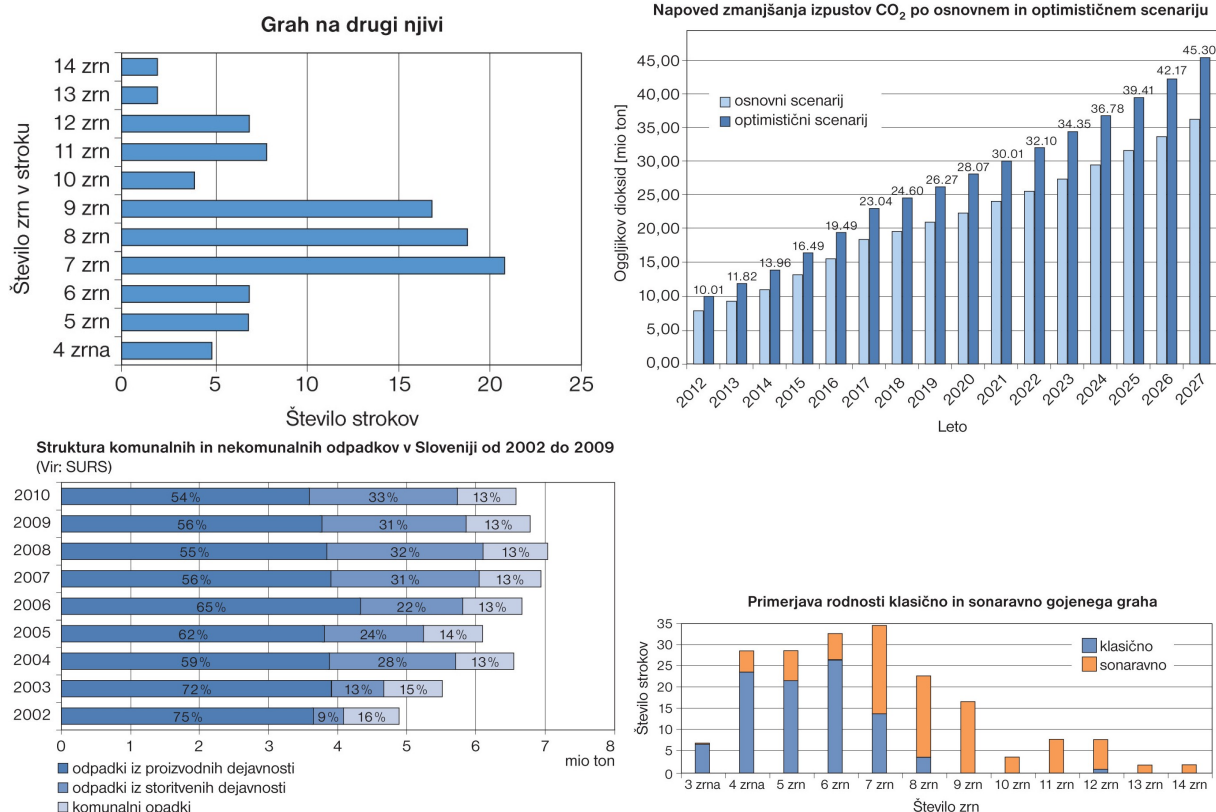


Celoto predstavlja  $360^\circ$ , za ostale deleže središčne kote izračunamo s sklepnim računom.

### Stolpčni diagram

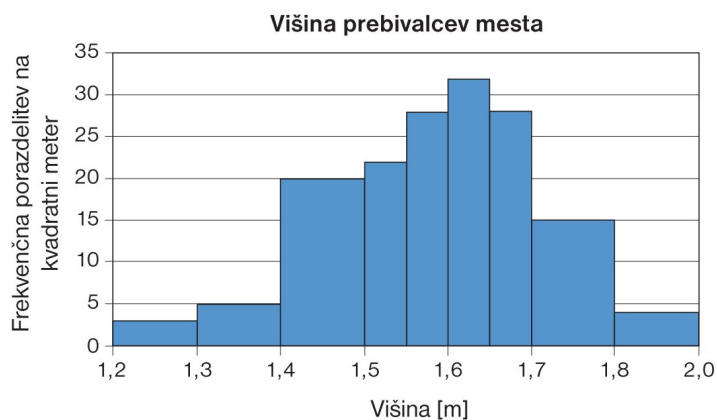
**Stolpčni diagram** uporabljamo, ko so podatki razvrščeni v veliko frekvenčnih razredov ali lahko dosežejo veliko diskretnih vrednosti.

Stolpčni diagrami so lahko **pokončni** ali **ležeči**. Če želimo prikazati več podatkov naenkrat, uporabimo **sestavljeni** ali **strukturni** stolpčni diagram.



## Histogram

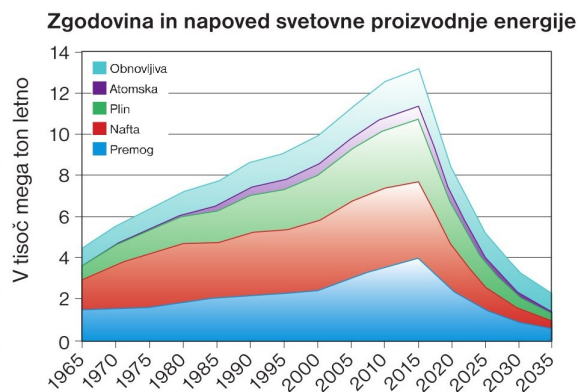
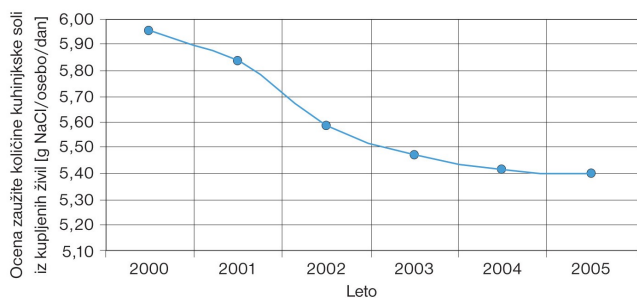
**Histogram** uporabljamo za prikaz grupiranih podatkov.



Širine frekvenčnih razredov niso nujno enake. Meje razredov narišemo na vodoravni osi, frekvence posameznih razredov pa na navpični osi.

## Linijski diagram

**Linijski diagram/poligon** uporabljamo, ko želimo prikazati postopno spreminjanje vrednosti nekega podatka skozi daljše časovno obdobje. Frekvenčne porazdelitve ponazorimo s **frekvenčnim poligonom**, podatki so lahko zvezni ali grupirani.



**Naloga 8.15.** Na matematičnem testu je bilo mogoče doseči 50 točk. Dosežki so bili: 35, 22, 41, 47, 36, 30, 27, 19, 31, 43, 48, 44, 23, 26, 36, 10, 33, 14, 9.

Razdelite jih v pet enako velikih razredov ter predstavite s histogramom.

**Naloga 8.16.** Otroci v vrtcu so metali žogo na koš in si zapisovali dosežke. Podatki so prikazani v preglednici.

Otrok	Jaka	Jure	Miha	Polona	Valerija	Tina	Mojca	Cene	Darja
Št. košev	5	7	10	8	5	6	9	9	4

Izračunajte, koliko košev je otrok zadel v povprečju. Podatke uredite po vrsti in določite  $M_o$ ,  $M_e$  ter narišite škatlo z brki.

**Naloga 8.17.** *Bojana beleži, koliko časa potrebuje za pot do šole. Podatke je zapisala v preglednico.*

Dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Čas [min]	9	11	10	8	11	10	9	12	9	11

*S stolpčnim diagramom predstavite, kako pogosto v šolo potuje 8 minut, 9 minut ...*

**Naloga 8.18.** *V domu ostarelih občanov je 500 oskrbovancev. Od 50 do 60 let jih je 15 %, med 60 in 70 leti je 160 oskrbovancev, med 70 in 80 leti pa 200 starostnikov. Drugi so stari med 80 in 90 let.*

- Iz grupiranih podatkov izračunajte povprečno starost oskrbovancev tega doma.*
- Grafično ponazorite starost oskrbovancev.*