

# Matematika

## Splošna gimnazija

ZAPISKI

28. november 2024



Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite

Jan Kastelic



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Osnove logike</b>	<b>1</b>
1.1	Izjave . . . . .	1
1.1.1	Enostavne in sestavjene izjave . . . . .	1
1.2	Logične operacije . . . . .	2
1.2.1	Negacija . . . . .	2
1.2.2	Konjunkcija . . . . .	2
1.2.3	Disjunkcija . . . . .	2
1.2.4	Komutativnost konjunkcije in disjunkcije . . . . .	3
1.2.5	Asociativnost konjunkcije in disjunkcije . . . . .	3
1.2.6	Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo . . . . .	3
1.2.7	De Morganova zakona . . . . .	3
1.2.8	Implikacija . . . . .	4
1.2.9	Ekvivalenca . . . . .	4
1.2.10	Vrstni red operacij . . . . .	5
1.2.11	Tavtologija in protislovje . . . . .	5
1.2.12	Kvantifikatorja . . . . .	5
1.3	Pomen izjav v matematiki . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Osnove teorije množic</b>	<b>7</b>
2.1	Množice . . . . .	7
2.2	Moč množice . . . . .	7
2.3	Podmnožice . . . . .	8
2.4	Operacije z množicami . . . . .	9
2.4.1	Komplement množice . . . . .	9
2.4.2	Unija množic . . . . .	9
2.4.3	Presek množic . . . . .	10
2.4.4	Lastnosti operacij unije in preseka . . . . .	10
2.4.5	Razlika množic . . . . .	11
2.4.6	Kartezični produkt množic . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Naravna in cela števila</b>	<b>13</b>
3.1	Naravna števila . . . . .	13
3.2	Operacije v množici $\mathbb{N}$ . . . . .	13
3.2.1	Seštevanje . . . . .	13
3.2.2	Množenje . . . . .	14
3.2.3	Odštevanje . . . . .	14
3.2.4	Vrstni red operacij . . . . .	14
3.3	Osnovni računski zakoni . . . . .	15
3.4	Cela števila . . . . .	17
3.5	Operacije v množici $\mathbb{Z}$ . . . . .	17
3.5.1	Seštevanje . . . . .	17

3.5.2	Odštevanje . . . . .	17
3.5.3	Množenje . . . . .	18
3.6	Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$ . . . . .	18
3.7	Urejenost naravnih in celih števil . . . . .	20
3.7.1	Linearna urejenost . . . . .	20
3.7.2	Lastnosti relacij $\leq$ in $<$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Potence in izrazi</b>	<b>23</b>
4.1	Potence z naravnim eksponentom . . . . .	23
4.2	Pravila za računanje s potencami . . . . .	23
4.3	Večkratniki . . . . .	26
4.4	Algebrski izrazi . . . . .	26
4.5	Računanje z algebrskimi izrazi . . . . .	26
4.5.1	Seštevanje in izpostavljanje izrazov . . . . .	27
4.5.2	Množenje izrazov . . . . .	27
4.6	Potenciranje izrazov . . . . .	29
4.7	Razstavljanje izrazov . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Deljivost</b>	<b>35</b>
5.1	Relacija deljivosti . . . . .	35
5.2	Kriteriji deljivosti . . . . .	37
5.3	Osnovni izrek o deljenju . . . . .	39







# Poglavje 1

## Osnove logike

### 1.1 Izjave

**Matematična izjava** je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.

Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R/P/1/⊤**;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N/0/⊥**.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami ( $A, B, C \dots$ ).

**Naloga 1.1.** *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število 12 deli število 3.*
- *Število 3 deli število 10.*
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je 10 dl isto kot 1 l?*
- *Število 41 je praštevilo.*

**Naloga 1.2.** *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- *A: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- *B: Število je deljivo s 4 natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s 4.*
- *C: Ostanek pri deljenju s 4 je lahko 1, 2 ali 3.*
- *D: Mesec februar ima 28 dni.*
- *E: Vsa praštevila so liha števila.*
- *F: Število 1 je naravno število.*
- *G: Praštevil je neskončno mnogo.*

#### 1.1.1 Enostavne in sestavljene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.

Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

## 1.2 Logične operacije

### 1.2.1 Negacija

**Negacija** izjave  $A$  je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava  $A$ . Oznaka:  $\neg A$ .

$\neg A$       **Ni res**, da velja izjava  $A$ .

Če je izjava  $A$  pravilna, je  $\neg A$  nepravilna in obratno: če je  $\neg A$  pravilna, je  $A$  nepravilna.

Negacija negacije izjave je potrditev izjave.  $\neg(\neg A) = A$

$A$	$\neg A$
$P$	$N$
$N$	$P$

**Naloga 1.3.** Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.

- $A$ :  $5 \cdot 8 = 30$
- $B$ : Število 3 je praštevilo.
- $C$ : Največje dvomestno število je 99.
- $D$ : Število 62 je večkratnik števila 4.
- $E$ : Praštevil je neskončno mnogo.
- $F$ :  $7 \leq 5$
- $G$ : Naša pisava je cirilica.

### 1.2.2 Konjunkcija

**Konjunkcija** izjav  $A$  in  $B$  nastane tako, da povežemo izjavi  $A$  in  $B$  z **in hkrati**.

$A \wedge B$       Velja izjava  $A$  **in (hkrati)** izjava  $B$ .

Če sta izjavi  $A$  in  $B$  pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

$A$	$B$	$A \wedge B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$N$
$N$	$N$	$N$

**Naloga 1.4.** Določite logično vrednost konjunkcijam.

- Število 28 je večkratnik števila 3 in večkratnik števila 8.
- Število 7 je praštevilo in je deljivo s številom 1.
- Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.
- Ostanki pri deljenju števila s 3 so lahko 0, 1 ali 2, pri deljenju s 5 pa 0, 1, 2, 3 ali 4.
- Število je deljivo s 3, če je vsota števk deljiva s 3, in je deljivo z 9, če je vsota števk deljiva z 9.

### 1.2.3 Disjunkcija

**Disjunkcija** izjav  $A$  in  $B$  nastane s povezavo **ali**.

$A \vee B$       Velja izjava  $A$  **ali** izjava  $B$  (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

$A$	$B$	$A \vee B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$P$
$N$	$P$	$P$
$N$	$N$	$N$

**Naloga 1.5.** Določite logično vrednost disjunkcijam.

- Število 24 je večkratnik števila 3 ali 8.
- Število 35 ni večkratnik števila 7 ali 6.
- Število 5 deli število 16 ali 18.
- Ploščina kvadrata s stranico  $a$  je  $a^2$  ali obseg kvadrata je  $4a$ .
- Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika  $160^\circ$ , ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.

### 1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

### 1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

### 1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

### 1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij:  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij:  $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

**Naloga 1.6.** Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?

- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

### 1.2.8 Implikacija

**Implikacija** izjav  $A$  in  $B$  je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

$A \Rightarrow B$     Če velja izjava  $A$ , **potem** velja izjava  $B$ . / **Iz**  $A$  sledi  $B$ .

Izjava  $A$  je **pogoj** ali **privzetek**, izjava  $B$  pa (**logična**) **posledica** izjave  $A$ .

Implikacija je nepravilna, ko je izjava  $A$  pravilna, izjava  $B$  pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$P$
$N$	$N$	$P$

**Naloga 1.7.** Določite, ali so izjave pravilne.

- Če je število deljivo s 100, je deljivo tudi s 4.
- Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.
- Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Če sta števili 2 in 3 lihi števili, potem je produkt teh dveh števil sodo število.
- Če je število 18 deljivo z 9, potem je deljivo s 3.
- Če je 7 večkratnik števila 7, potem 7 deli število 43.
- Če je število deljivo s 4, potem je deljivo z 2.

### 1.2.9 Ekvivalenca

**Ekvivalenca** izjavi  $A$  in  $B$  poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

$A \Leftrightarrow B$     Izjava  $A$  velja, **če in samo če** velja izjava  $B$ ./  
Izjava  $A$  velja **natanko tedaj, ko** velja izjava  $B$ .

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.

Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
$P$	$P$	$P$
$P$	$N$	$N$
$N$	$P$	$N$
$N$	$N$	$P$

**Naloga 1.8.** Določite, ali so naslednje izjave pravilne.

- Število je deljivo z 12 natanko takrat, ko je deljivo s 3 in 4 hkrati.
- Število je deljivo s 24 natanko takrat, ko je deljivo s 4 in 6 hkrati.
- Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.
- Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z 2.

### 1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

**Naloga 1.9.** V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

### 1.2.11 Tautologija in protislovje

**Tautologija** ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavljena, pravilna.

**Protislovje** je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

### 1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$  (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$  (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

## 1.3 Pomen izjav v matematiki

**Aksiomi** so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.

**Izreki** ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.

**Definicije** so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.



## Poglavje 2

# Osnove teorije množic

### 2.1 Množice

**Množica** je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.

Množica je določena, če:

- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$  ali  $A, B, C \dots$ ).

**Univerzalna množica** ali **univerzum** ( $\mathcal{U}$ ) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

**Element množice** je objekt v množici.

Označujemo jih z malimi črkami ( $a, b, c \dots$ ).

Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr.  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ ).

Element je lahko vsebovan v množici (npr.  $a \in \mathcal{A}$ ) ali pa v množici ni vsebovan (npr.  $d \notin \mathcal{A}$ ).

**Prazna množica** ( $\emptyset, \{\}$ ) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

### 2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka:  $\mathbf{m}(\mathcal{A})$  ali  $|\mathcal{A}|$ .

Množica je lahko:

- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov:  $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$ ;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov:  $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$ .

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.

Njeno moč pišemo kot:  $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$ .

Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

**Naloga 2.1.** Naštajte elemente množice in zapišite njeno moč, če je  $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ .

- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leq 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leq 8)\}$

**Naloga 2.2.** Naj bo  $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ . Zapišite množico tako, da naštujete njene elemente. Določite še njeno moč.

- Množica vseh deliteljev števila 18.
- Množica praštevil, ki so manjša od 20.

- Množica večkratnikov števila 5, ki so večji od 50 in manjši ali enaki 70.

**Naloga 2.3.** Zapišite množico s simboli.

- Množica vseh sodih naravnih števil.
- Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 5.

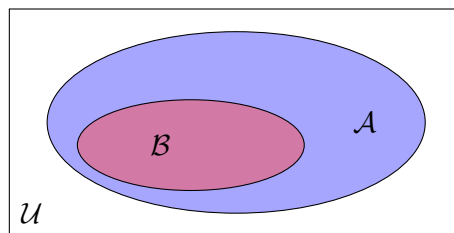
**Naloga 2.4.** Podane so množice tako, da so naštetni njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

## 2.3 Podmnožice

Množica  $\mathcal{B}$  je **podmnožica** množice  $\mathcal{A}$ , če za vsak element iz  $\mathcal{B}$  velja, da je tudi element množice  $\mathcal{A}$ .

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$  – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \emptyset \subseteq \mathcal{A}$  – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice  $\mathcal{B}$  množice  $\mathcal{A}$  je manjša ali enaka moči množice  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leq m(\mathcal{A})$$

Množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica  $\mathcal{B}$  množice  $\mathcal{A}$ , ki ni enaka množici  $\mathcal{A}$ , je **prava podmnožica** množice  $\mathcal{A}$ .

**Potenčna množica** množice  $\mathcal{A}$  je množica vseh podmnožic množice  $\mathcal{A}$ .

Oznaka:  $\mathcal{P}\mathcal{A}$  /  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ .

$$\mathcal{P}\mathcal{A} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{P}\mathcal{A}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

**Naloga 2.5.** Dana je množica  $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?

**Naloga 2.6.** Dana je množica  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ . Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?



## 2.4 Operacije z množicami

### 2.4.1 Komplement množice

**Komplement** množice  $\mathcal{A}$  (glede na izbrani univerzum  $\mathcal{U}$ ) je množica vseh elementov, ki so v množici  $\mathcal{U}$  in niso v množici  $\mathcal{A}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A}^c$  /  $\mathcal{A}'$ .

$$\mathcal{A}^c = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A}$$

**Naloga 2.7.** Naj bo univerzalna množica  $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$ . Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena množica?

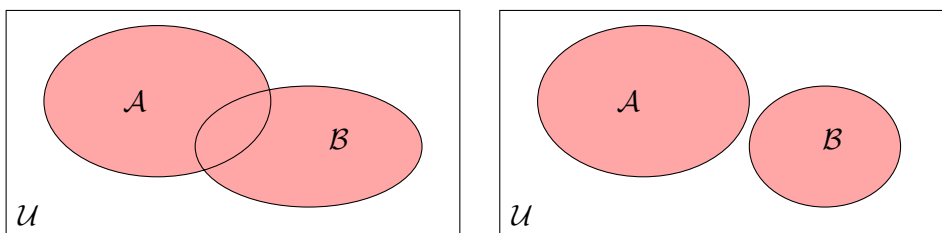
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

### 2.4.2 Unija množic

**Unija** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica vseh elementov, ki pripadajo množici  $\mathcal{A}$  ali množici  $\mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

**Naloga 2.8.** Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite množico  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$  in  $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

### 2.4.3 Presek množic

**Presek** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici  $\mathcal{A}$  in množici  $\mathcal{B}$ .  
Oznaka:  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

**Naloga 2.9.** Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite množico  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ . Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$  in  $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

### 2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

**Komutativnost unije in preseka**

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

**Asociativnost unije in preseka**

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

**Distributivnostna zakona za unijo in presek**

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

**De Morganova zakona**

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c.$$

Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c.$$

**2.4.5 Razlika množic**

**Razlika** množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica tistih elementov, ki pripadajo množici  $\mathcal{A}$  in hkrati ne pripadajo množici  $\mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  /  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{A} = \emptyset$$

**Naloga 2.10.** *Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite njuno razliko  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ .*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

**2.4.6 Kartezični produkt množic**

**Kartezični produkt** (nepraznih) množic  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  je množica urejenih parov  $(x, y)$ , pri čemer je  $x \in \mathcal{A}$  in  $y \in \mathcal{B}$ .

Oznaka:  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  za množici  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$  in  $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ :



**Naloga 2.11.** *Dani sta množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$ . Zapišite njun kartezični produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leq k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$  in  $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$

## Poglavje 3

# Naravna in cela števila

### 3.1 Naravna števila

Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število  $n$  ima svojega **naslednika**  $n + 1$ .
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika:  $n + 1 \neq m + 1; n \neq m$ .
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števke označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

$$\overline{xy} = 10x + y \qquad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

### 3.2 Operacije v množici $\mathbb{N}$

#### 3.2.1 Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma  $x$  in  $y$  priredimo **vsoto**  $x + y$ .

Število  $x$  oziroma  $y$  imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**. Število  $x + y$  pa imenujemo **vsota** ali **summa**.



Vsota naravnih števil je naravno število:  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$ .

### 3.2.2 Množenje

Poljubnima naravnima številoma  $x$  in  $y$  priredimo **produkt**  $x \cdot y$ .

Število  $x$  oziroma  $y$  imenujemo **množenec** ali **faktor**. Število  $x \cdot y$  pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



Produkt naravnih števil je naravno število:  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$ .

Število **1** je **nevtralni element** za množenje:  $1 \cdot x = x$ .

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil  $\mathbb{N}$ .

### 3.2.3 Odštevanje

Številoma  $x$  in  $y$ , pri čemer je  $y$  večje od  $x$  ( $x > y$ ), priredimo **razliko**  $x - y$ .

Število  $x$  imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število  $y$  pa imenujemo **odštevaneč** ali **subtrahend**. Številu  $x - y$  rečemo **razlika** ali **diferenca**.



Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu  $y$ , da dobimo število  $x$ .

$$(x - y) + y = x$$

Odštevanje ni notranja operacija v množici naravnih števil  $\mathbb{N}$ .

### 3.2.4 Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.

Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

### 3.3 Osnovni računski zakoni

#### Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

#### Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

#### Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

#### Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

#### Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemo tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja*.

#### Naloga 3.1. Izračunajte.

- $(1 + 2 \cdot 7) + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 7)$
- $3 \cdot (2 + 3 \cdot 5) \cdot (2 + 1)$
- $7 + (2 + 6 \cdot 3) + (8 + 4 \cdot 5)$
- $11 \cdot 4 + (12 - 6) \cdot 5$
- $8 + 2 \cdot (3 + 7) - 15$
- $37 - 5 \cdot (10 - 3)$

#### Naloga 3.2. Hitro izračunajte.

- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

#### Naloga 3.3. Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.

- Produktu števil 12 in 27 odštejte razliko števil 19 in 11.
- Vsoti produkta 4 in 12 ter produkta 5 in 16 odštejte 8.
- Vsoto števil 42 in 23 pomnožite z razliko števil 58 in 29.
- Produkt števil 14 in 17 pomnožite z vsoto števil 5 in 16.

**Naloga 3.4.** *Rešite besedilno nalogo.*

- *V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka 95 centov, čokoladni puding v prahu pa 24 centov, koliko moramo plačati?*
- *Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča 45 g riža, za odraslo pa 75 g. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?*



## 3.4 Cela Števila

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Množica celih števil  $\mathbb{Z}$  je definirana kot unija treh množic:

- množica **pozitivnih celih števil** ( $\mathbb{Z}^+$ ) – naravna števila  $\mathbb{N}$ ;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ( $\mathbb{Z}^-$ ) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Nasprotna vrednost števila  $n$  je število  $-n$ .

## 3.5 Operacije v množici $\mathbb{Z}$

### 3.5.1 Seštevanje

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 0 je **nevtralni element** pri seštevanju.

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Vsota celega števila in njemu nasprotnega števila je enaka 0.

$$-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Nasprotna vrednost nasprotne vrednosti je enaka prvotni vrednosti.

Vsota dveh pozitivnih števil je pozitivno število, vsota dveh negativnih števil pa je negativno število.

$$-\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = -(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Vsota nasprotnih vrednosti je enaka nasprotni vrednosti vsote.

Naj bosta  $x$  in  $y$  naravni števili. Vsota pozitivnega števila  $x$  in negativnega števila  $-y$  je:

- pozitivno število, če je  $x > y$  in
- negativno število, če je  $x < y$ .

### 3.5.2 Odštevanje

Razlika  $x - y$  dveh pozitivnih števil  $x$  in  $y$  je:

- pozitivno število, če je  $x > y$  in
- negativno število, če je  $x < y$ .

Razlika dveh negativnih števil  $(-x) - (-y)$  je:

- pozitivno število, če je  $x < y$  in
- negativno število, če je  $x > y$ .

Razlika pozitivnega števila  $x$  in negativnega števila  $-y$  je pozitivno število.

*Odštevanje v množici  $\mathbb{Z}$  je prištevanje nasprotne vrednosti.*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

### 3.5.3 Množenje

$$1 \cdot x = x; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 1 je **nevtralni element** za množenje.

$$(-1) \cdot x = -x; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Pri množenju celega števila  $x$  z  $-1$  dobimo nasprotno število  $-x$ .

$$0 \cdot x = 0; \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

Rezultat množenja števila s številom 0 je enak 0.

$$(-x)(-y) = xy$$

Produkt sodo mnogo negativnih števil je pozitivno število.

$$-x \cdot y = -(xy)$$

$$x(-y) = -(xy)$$

Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

$$(-x)(-y) = xy$$

Produkt liho mnogo negativnih faktorjev je negativno število.

Seštevanje, odštevanje in množenje so v množici  $\mathbb{Z}$  dvočlene notranje operacije.

## 3.6 Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$

### Komutativnost seštevanja

$$x + y = y + x$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

### Asociativnost seštevanja

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

### Komutativnost množenja

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

### Asociativnost množenja

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

**Distributivnost seštevanja in množenja ter odštevanja in množenja**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemo tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja*.

**Naloga 3.5.** *Izračunajte.*

- $17 - 13 - 2 + 10$
- $50 + 11 - 32 - 14$
- $3 + ((5 + 2(7 - 9)) \cdot 2 - 1)$
- $(2 - 5(6 - 10)) \cdot (5 - 2(7 - 5))$
- $9(11 - 3) + 7(10 - 15)$
- $8 + 9(11 - 18) - 2 \cdot 5$

**Naloga 3.6.** *Spretno izračunajte.*

- $7 \cdot 8 - 12 \cdot 8$
- $5 \cdot 18 + 9 \cdot 5 - 5 \cdot 2$
- $8 \cdot (4 - 9) \cdot 2$
- $5 \cdot 3 \cdot (12 - 8)$
- $(15 - 6)(12 - 3 \cdot 4)$

**Naloga 3.7.** *Rešite besedilne naloge.*

- *V hotelu imajo na voljo osemnajst enoposteljnih, štiriintrideset dvoposteljnih in petindevetdeset triposteljnih sob. Koliko ljudi lahko še prespi v hotelu, če je v njem že sto triinštirideset gostov?*
- *Pohod na bližnji hrib traja tri ure. Koliko minut moramo še hoditi, če smo na poti že 145 minut?*
- *S Ptuja in iz Postojne (razdalja med njima je približno 190 km) sočasno odpeljeta dva motorista drug proti drugemu. En vozi povprečno 40 km/h, drugi pa 5 km/h manj. Kolikšna bo razdalja med njima po dveh urah vožnje?*

**Naloga 3.8.** *Zapišite enačbe in jih poenostavite.*

- *Razlika petkratnika  $a$  in  $b$  je enaka trikratniku vsote štirikratnika  $a$  in petkratnika  $b$ .*
- *Vsota  $x$  in dvakratnika  $y$  je enaka razliki petkratnika  $x$  in dvanajstkratnika  $y$ .*

### 3.7 Urejenost naravnih in celih števil

Številska množica je **urejena**, kadar lahko po velikosti primerjamo njena poljubna elementa. Pri urejanju števil uporabljamo naslednje znake:

$<$	manjše / manj
$>$	večje / več
$\leq$	manjše ali enako / največ
$\geq$	večje ali enako / vsaj, najmanj
$=$	enako

Za poljubni števili  $x, y \in \mathbb{Z}$  velja natanko ena izmed naslednjih možnosti:  $x > y$ ,  $x < y$  ali  $x = y$ .

Slika števila  $x$  leži na številski premici desno od slike števila  $y$ :

$$\mathbf{x > y \Leftrightarrow x - y > 0}$$

Slika števila  $x$  leži na številski premici levo od slike števila  $y$ :

$$\mathbf{x < y \Leftrightarrow x - y < 0}$$

Slika števila  $x$  sovpada s sliko števila  $y$ :

$$\mathbf{x = y \Leftrightarrow x - y = 0}$$

Velja pa tudi:

$$x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$$

#### Pozitivna in negativna števila

V množici  $\mathbb{Z}$  so pozitivna tista števila, ki so večja od števila 0 in njihove slike ležijo desno od izhodišča, negativna pa tista števila, ki so manjša od števila 0 in njihove slike ležijo levo od izhodišča.

Vsako pozitivno celo število (vsako naravno število) je večje od katerega koli negativnega celega števila.

#### 3.7.1 Linearna urejenost

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica  $\mathbb{Z}$  **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo naslednje lastnosti: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost, stroga sovisnost.

##### Refleksivnost

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq x$$

##### Antisimetričnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

**Tranzitivnost**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

**Stroga sovisnost**

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}; x \neq y : x \leq y \vee y \leq x$$

**3.7.2 Lastnosti relacij  $\leq$  in  $<$** **Monotonost vsote**

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z \quad x \leq y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z \quad x \leq y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Obravnavane lastnosti veljajo tudi za relaciji  $\geq$  in  $>$ .

**Naloga 3.9.** Uredite števila 3, -2, 5, -1, 0, -7, 6, -6 po velikosti in jih predstavite na številski premici.

**Naloga 3.10.** Uredite števila 104, -27, 35, -107, 36, -26, 25, -28, 81 po velikosti.

**Naloga 3.11.** Gladina Mrtvega morja leži v depresiji na -423 m nadmorske višine, njegova največja globina pa je 378 m. Kolikšna je najmanjša nadmorska višina dna Mrtvega morja?

**Naloga 3.12.** Za katera cela števila  $x$  ima izraz  $3x - 5(x + 2)$  večjo ali enako vrednost od izraza  $4 - (12 + x)$ ?



## Poglavje 4

# Potence in izrazi

### 4.1 Potence z naravnim eksponentom

Potenca  $x^n$  z **osnovo/bazo**  $x$  in **eksponentom/stopnjo**  $n \in \mathbb{N}$ , je produkt  $n$  faktorjev enakih  $x$ .

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ faktorjev}}$$

### 4.2 Pravila za računanje s potencami

Dve potenci z isto osnovo zmnožimo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa seštejemo.

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{m \text{ faktorjev}} = x^{n+m}$$

Potenco potenciramo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa zmnožimo.

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}}}_{m \text{ faktorjev}} = x^{n \cdot m}$$

Produkt dveh ali več števil potenciramo tako, da potenciramo posamezne faktorje in jih potem zmnožimo.

$$(xy)^n = \underbrace{(xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy)}_{n \text{ faktorjev}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ faktorjev}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \dots \cdot y)}_{n \text{ faktorjev}} = x^n y^n$$

Za naravne eksponente velja še:

$$\begin{aligned} (-x)^{2n} &= x^{2n} \\ (-x)^{2n+1} &= -x^{2n+1} \end{aligned}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1; & n = 2k \\ -1; & n = 2k - 1 \end{cases}; k \in \mathbb{N}$$

**Naloga 4.1.** Števila  $-3^2$ ,  $(-4)^2$ ,  $-2^4$ ,  $(-1)^{2024}$ ,  $(-2)^3$  in  $(-3)^2$  uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.

**Naloga 4.2.** Poiščite podatke in jih zapišite na dva načina: s potenco in številom brez potence.

- Razdalja med Zemljo in Soncem
- Zemljina masa
- Masa Sonca
- Število zvezd v naši Galaksiji

**Naloga 4.3.** Izračunajte.

- $(-3)^2 + 2^4$
- $(5 - 3)^3 + (-3)^2$
- $(2^2 + 1)^2 + (-3)^3 + (-2)^4$
- $(-1)^{2024} + ((-2)^5 + 5^2 - (7 - 3^2)^3)^2$
- $-1^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$

**Naloga 4.4.** Poenostavite izraz.

- $2^7 \cdot 2^3$
- $a^3 \cdot a^{12} \cdot a^5$
- $(2z)^3$
- $(m^2 \cdot m^4)^3$
- $a^3 + 2a^3 - 6a^3$
- $x^2 \cdot x^4 + (-2x^3)^2 - 2(-x)^6$

**Naloga 4.5.** Izračunajte, rezultat zapišite s potenco.

- $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^6$
- $(10^3)^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3$
- $(-2)^3 \cdot 2^7$
- $-2^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^3$
- $2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 6^4 \cdot 3$
- $(-3)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 21^7 \cdot 7$

**Naloga 4.6.** Poenostavite.

- $2^3 \cdot 3^4 \cdot (2^4 \cdot 3^2)^5$
- $(5^2 \cdot 7)^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- $(-2^3 \cdot 3^5)^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5$
- $(-4)^2 \cdot (-7)^{13} \cdot (-28)^5 \cdot (-7^2)^3$
- $-6^2 \cdot (-3)^2 \cdot 8^5 \cdot (-3^2)^3$

**Naloga 4.7.** Poenostavite.

- $a^3 \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^3 \cdot b^5$
- $4x^4 \cdot (2x^3)^2$
- $(k^3 \cdot 2h^5)^2$
- $(x^2y^4)^2 \cdot (x^3y)^3$
- $(a^2b^5)^3(ab^3)^2$
- $x^2y^3(x^3y^6)^2$

**Naloga 4.8.** Poenostavite.

- $2^3 \cdot x^2 \cdot 3^2 \cdot (-x)^6$
- $(-a^3b)^4(-a^2b^5a^3)^3$
- $(2s^2 \cdot (-s^2)^5)^5$
- $(-2(z^4)^2(-2z)^3z^5)^3$
- $(-3ab^2)^3(-a^4b^2(a^3)^5)^2(ab^3)^2$
- $(xy^2z)^3(x^3(-y^2)^5(-z))^3(x^2y^3(-z^2)^3)$

**Naloga 4.9.** Odpravite oklepaje in poenostavite, če je mogoče.

- $a^n \cdot a^{n+2} \cdot (-a)^3$



- $(-x^n)^4 \cdot x^2$
- $a^n \cdot (a^2 - a^3 + 2)$
- $(x^2 + 3x^n - 5) \cdot x^{n+1}$

**Naloga 4.10.** *Poenostavite.*

- $(2s(g^2)^2)^2 - 3(s^4g)g^7$
- $(-4x^2xy^3)^2 + (xy)^5(-2^3xy)$
- $a^2(a^3 - b^2) - a^5 + (-a)^2b^2$
- $(p^2(q^3)^2)^2 - 2p^4q^{12} + 7(-p^3p)(q^4)^3 - (-2)^3(pq^3)^4$

**Naloga 4.11.** *Poenostavite.*

- $5a^{n+1} + 4a^{n+1} - 6a^{n+1}$
- $3x^{n+2} + 5x^n \cdot x^2 + 2x \cdot x^{n+1}$
- $3^{5x} \cdot 9^x - 3^{7x} + 27^x \cdot 9^{2x}$
- $4^{2y} + 3 \cdot (2^y)^4 - 5 \cdot 8^y \cdot 2^y$
- $5^p \cdot 125^p \cdot 25^p + 2(5^p)^6 - 4 \cdot 25^{3p}$

### 4.3 Večkratniki

**Večkratnik** ali tudi  **$k$ -kratnik** števila  $x$  je vsota  $k$  enakih sumandov  $x$ :

$$k \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{k \text{ sumandov}}.$$

Vse večkratnike števila  $x$  dobimo tako, da število  $x$  zapored pomnožimo z vsemi celimi števili:

$$\{\dots, -5x, -4x, -3x, -2x, -x, 0, x, 2x, 3x, 4x, 5x, \dots\} = \{kx; k, x \in \mathbb{Z}\} = x\mathbb{Z}.$$

Število  $k$  je **koeficient** števila oziroma spremenljivke  $x$ .

### 4.4 Algebrski izrazi

**Algebrski izraz** ali **izraz** je smiseln zapis sestavljen iz:

- števil,
- spremenljivk/parametrov, ki predstavljajo števila in jih označujemo s črkami,
- oznak računskih operacij in funkcij, ki jih povezujejo,
- oklepajev, ki določajo vrstni red računanja.

Če v izraz namesto spremenljivk vstavimo konkretna števila in izračunamo rezultat, dobimo **vrednost izraza** (pri dani izbiri spremenljivk).

Dva matematična izraza sta **enakovredna**, če imata pri katerikoli izbiri spremenljivk vedno enako vrednost.

### 4.5 Računanje z algebrskimi izrazi

Pri poenostavljanju izrazov veljajo vsi računski zakoni, ki veljajo za računanje s števili.

**Komutativnost seštevanja**

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

**Asociativnost seštevanja**

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

**Komutativnost množenja**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

**Asociativnost množenja**

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

**Distributivnost seštevanja in množenja**

$$(x + y) \cdot z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

Če v distributivnostnem zakonu zamenjamo levo in desno stran, dobimo pravilo o **izpostavljanju skupnega faktorja**:  $xz + yz = (x + y)z$ .

### 4.5.1 Seštevanje in izpostavljanje izrazov

Med seboj lahko seštevamo samo člene, ki se razlikujejo kvečjemu v koeficientu. To naredimo tako, da seštejemo koeficienta.

$$mx^2 + ny + kx^2 + ly = mx^2 + kx^2 + ny + ly = (m + k)x^2 + (n + l)y$$

### 4.5.2 Množenje izrazov

Dva izraza zmnožimo tako, da vsak člen prvega izraza zmnožimo z vsakim členom drugega izraza. Potem pa seštejemo podobne člene.

$$(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$$

**Naloga 4.12.** *Poenostavite.*

- $3a + 2b - a + 7b$
- $2a^2b - ab^2 + 3a^2b$
- $5a^4 - (2a)^4 + (-3a^2)^2 - 3(a^2)^2$
- $3(a - 2(a + b)) - 2(b - a(-2)^2)$

**Naloga 4.13.** *Zapišite izraz.*

- *Kvadrat razlike števil  $x$  in  $y$ .*
- *Razlika kvadratov števil  $x$  in  $y$ .*
- *Razlika petkratnika  $m$  in kvadrata števila 3.*
- *Kub razlike sedemkratnika števila  $x$  in trikratnika števila  $y$ .*

**Naloga 4.14.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $3x + 12y^2$
- $m^3 + 8mp$
- $22a^3 - 33ab$
- $kr^2 - rk^2$
- $4u^2v^3 - 6uv^2$
- $12a^2b - 8(ab)^2 - (2ab)^4$

**Naloga 4.15.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $3x(x + 1) + 5(x + 1)$
- $(a - 1)(a + 1) + (a - 1)$
- $4(m - 1) - (1 - m)(a + b)$
- $3(c - 2) + 5c(2 - x)$
- $(-y + x)3a - (y - x)b$

**Naloga 4.16.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $5^{11} - 5^{10} + 5^9$
- $2 \cdot 3^8 + 5 \cdot 3^6$
- $4 \cdot 5^{10} - 10 \cdot 5^8 - 8 \cdot 5^9$
- $7^5 - 7^6 + 7 \cdot 7^4$

**Naloga 4.17.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $3^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+2}$
- $2^{k+2} - 2^k$
- $5 \cdot 3^m + 2 \cdot 3^{m+1}$
- $2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1}$
- $3 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+2} + 4 \cdot 5^{n+3}$
- $7^n + 2 \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 7^{n+1}$

**Naloga 4.18.** *Izpostavite skupni faktor in izračunajte.*

- $2^{2n} + 4^n + (2^n)^2$
- $5^{2n+1} - 25^n + 3 \cdot 5^{2n-1}$
- $5 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 8^{n-1}$
- $49^n - 2 \cdot 7^{2n-1}$

**Naloga 4.19.** *Izpostavite skupni faktor.*

- $4a^n + 6a^{n+1}$
- $b^n + b^{n+1} - 2b^{n-1}$
- $a^{n-3} + 5a^n$
- $3x^{n+1} - 15x^n + 18x^{n-1}$

**Naloga 4.20.** *Zmnožite.*

- $(x - 3)(x + 2)$
- $(2m + 3)(5m - 1)$
- $(1 - a)(1 + a)$
- $(x - 3y)(2x + y)$
- $(m - 2k)(3m - k)$

**Naloga 4.21.** *Zmnožite.*

- $(a + b - 1)(a - b)$
- $(2x + y)(3x - 4y + 5)$
- $(m + 2n - k)(m + 2n + k)$

**Naloga 4.22.** *Zmnožite.*

- $(x^2 - 3)(x^3 + 2)$
- $(3x^2 - y)(5y^4 - 7x^3)$
- $(u^3 - 1)(u^3 + 1)$
- $(a^5b^2 - 4b)(3a^7 + 2a^2b)$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(z + w)(z^2 - zw + w^2)$

**Naloga 4.23.** *Poenostavite.*

- $(2x - y)(3 + y) + (y - 4)(y + 4) - 2xy + 3(y - 2x + 5)$
- $(x - y)(x + y) - (x^2 + xy + y^2)(x - y) - (1 - x)x^2 + (-y)y^2$
- $2ab + (a - 3b^2)(a + 3b^2) + 2^3(-b^2)^2 - (a - b)(b - a) - 2a^3$

## 4.6 Potenciranje izrazov

### Kvadrat vsote in razlike binoma

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

### Kub vsote in razlike binoma

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

### Kvadrat trinoma

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

**Naloga 4.24.** *Kvadrirajte.*

- $(x + 3)^2$
- $(y + 2x)^2$
- $(2a + 3b)^2$
- $(x - 3y)^2$
- $(1 - a^2)^2$
- $(2x^2y^3 - z^5)^2$

**Naloga 4.25.** *Kvadrirajte.*

- $(-a - b)^2$
- $(-2x^5 + y)^2$
- $(a^{n+1} + b^n)^2$
- $(a + b - 3)^2$
- $(z + 2x^3 - 1)^2$
- $(2x^5 - 3m^6 + 2m^n)^2$

**Naloga 4.26.** *Kubirajte.*

- $(x + 1)^3$
- $(a - 2)^3$
- $(2m + 3)^3$
- $(-a + 2b)^3$
- $(-z - 2g)^3$
- $(a^4 - 2b^2)^3$

**Naloga 4.27.** *Dopolnite do popolnega kvadrata in ga zapišite.*

- $x^2 + 8x + \_ = (x + \_)^2$
- $x^2 + 12x + \_ = (x + \_)^2$
- $a^2 - 10a + \_ = (a - \_)^2$
- $m^2 - 2m + \_ = (m - \_)^2$

**Naloga 4.28.** *Poenostavite.*

- $(2a + 5)^2 - (a - 3)(a + 5) - a(a + 7) - 2a^2 - a$
- $(x - 2y)(x + 2y) + 4(y^2 - 3) - (x - 4)^2 + 7(x + 4)$
- $(2m + 1)(2m - 1) - (3m^2 - 4m) - 2^4 - (m - 2)^3 + (2m - 3)^2 + m^2m$

## 4.7 Razstavljanje izrazov

Razstavljanje/razcepljanje/faktorizacija izraza je zapis izraza kot dveh ali več faktorjev.

Izpostavljanje skupnega faktorja

$$xy + xz = x(y + z)$$

$$xy - xz = x(y - z)$$

Pri razstavljanju smo vedno pozorni na to, da razstavimo vse, kar je mogoče.

Razlika kvadratov

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Razlika kubov

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Razlika četrth potenc

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

Razlika  $n$ -tih potenc

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Vsota kvadratov

Vsote kvadratov  $x^2 + y^2$  ne moremo razstaviti v množici  $\mathbb{Z}$  (oziroma  $\mathbb{R}$ ).

Vsota kubov

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Vsota četrth potenc

Vsote četrth potenc  $x^4 + y^4$  ne moremo razstaviti v množici  $\mathbb{Z}$  (oziroma  $\mathbb{R}$ ).

Vsota  $n$ -tih potenc

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Trinome, ki sledijo naslednjim oblikam lahko razstavimo.

Za nekatere trinome pa se lahko zgodi, da jih ne moremo razstaviti v množici  $\mathbb{Z}$  (oziroma  $\mathbb{R}$ ).

Tričlenik, ki je kvadrat

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

**Viétovo pravilo**

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

**Ugibanje**

$$ax^2 + bx + c = (dx + e)(fx + g)$$

**Razstavljanje štiričlenika – združitev 2 člena + 2 člena**

$$xa + xb + ya + yb = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

**Razstavljanje štiričlenika – združitev 3 členi + 1 člen**

$$a + 2ax + x^2 - b^2 = (a + x)^2 - b^2 = (a + x - b)(a + x + b)$$

**Naloga 4.29.** Razstavite razliko kvadratov.

- $x^2 - 25$
- $64 - y^2$
- $16m^2 - 81$
- $25a^2 - 49b^2$
- $121u^2 - 36v^2$

**Naloga 4.30.** Razstavite razliko kvadratov.

- $2z^2 - 8$
- $3b^2 - 12$
- $48 - 27h^2$
- $200t^2 - 8z^2$
- $a^2b - 49b$
- $80x^2 - 45y^2$

**Naloga 4.31.** Razstavite razliko kvadratov.

- $162s^3 - 32sc^2$
- $f^4 - 9g^2$
- $16u^4 - 81v^4$
- $a^4 - 16$
- $-18a^2 + 2b^4$

**Naloga 4.32.** Razstavite razliko kvadratov.

- $(f + 3)^2 - 25$
- $(2 - r)(2 + r)$
- $81x^4 - (y - 2)^2$
- $(x - y)^2 - (2x + 3y)^2$
- $5(4 - k)(4 + k)$

**Naloga 4.33.** Razstavite in izračunajte.

- $102^2 - 2^2$
- $23^2 - 22^2$
- $999^2 - 1$

**Naloga 4.34.** *Razstavite vsoto ali razliko kubov.*

- $a^2 - 8b^3$
- $1 + x^3$
- $27m^2 + 8$
- $27 + 64b^3$
- $125x^3 - 64y^3$
- $64a^6 - b^3$

**Naloga 4.35.** *Razstavite vsoto ali razliko kubov.*

- $a^3b^3 - 1$
- $8a^3 - b^6c^9$
- $m^5 + 27g^3m^2$
- $(a + 2)^3 - b^3$
- $10^3 - (a + b)^3$

**Naloga 4.36.** *Razstavite.*

- $m^2 + 14m + 45$
- $a^2 + 9a + 18$
- $x^2 - 9x + 20$
- $y^2 - 11y + 24$
- $z^2 - 13z + 22$
- $x^2 + 5x - 24$

**Naloga 4.37.** *Razstavite.*

- $m^2 + m - 110$
- $u^2 + 9u - 22$
- $x^2 - 5x - 24$
- $z^2 - 3z - 28$
- $p^2 - 4p - 45$
- $x^2 - 18x + 81$

**Naloga 4.38.** *Razstavite.*

- $3x^2 + 87x + 300$
- $2y^2 + 18y + 28$
- $2x^2 - 30x + 108$
- $7a^2 - 84a + 245$
- $6p^5 - 72p^4 + 216p^3$
- $2x^2 + 4x - 70$

**Naloga 4.39.** *Razstavite.*

- $72y - 81 + 9y^2$
- $3k^3 + 9k^2 - 12k$
- $16t - 4t^2 + 84$
- $p^3 + 13p^2 + 22p$
- $50b + 125 + 5b^2$
- $-7x^2 + 7x + 42$

**Naloga 4.40.** *Razstavite.*

- $x^2 + 16xy + 63y^2$
- $a^2 - 2aab - 35b^2$
- $p^2 + 3pk - 10k^2$
- $2z^2 - 2zu - 24u^2$
- $60c^3d^4 + 3c^5 - 27c^4d^2$



**Naloga 4.41.** *Zapišite izraze kot popolne kvadrate.*

- $x^2 + 18x + 81$
- $a^4 + 14a^2 + 29$
- $m^2 - 10m + 25$
- $100 - 20b + b^2$
- $u^2 - 12uv + 36v^2$
- $4y^2 - 12yz + 9z^2$

**Naloga 4.42.** *Razstavite.*

- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $b^4 - 26b^2 + 25$
- $a^4 - 8a^2 - 9$
- $n^4 - 17n^2 + 16$
- $2y^6 + 10y^4 + 8y^2$

**Naloga 4.43.** *Razstavite.*

- $2a^2 + 7a - 4$
- $2x^2 + 5x + 3$
- $4m^2 + 10m - 24$
- $4p^2 + 29p - 24$
- $2f^2 + 9f - 5$
- $7b^2 + 23b + 6$

**Naloga 4.44.** *Razstavite.*

- $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125$
- $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 27$
- $16^x - 5 \cdot 4^x + 6$
- $4^x - 18 \cdot 2^x + 32$

**Naloga 4.45.** *Razstavite.*

- $a^3 + 3a^2 - 4a - 12$
- $c^3 - 4c^2 - c + 4$
- $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
- $a^2 + ab - 2a - 2b$
- $a^2 + 3ab + 2a + 6b$
- $2xy + x - 4y - 2$

**Naloga 4.46.** *Razstavite.*

- $a^2 + 2a + 1 - b^2$
- $m^2 - 6m + 9 - k^2$
- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$
- $u^2 - z^2 - 8z - 16$
- $x^2 - y^2 + 14y - 49$
- $25 - y^2 + 2xy - x^2$

**Naloga 4.47.** *Razstavite.*

- $a^5 - b^5$
- $a^4 - 16$
- $x^4y^4 - 625$
- $a^5 + 32$
- $x^5 - 32$
- $81 - x^4y^8$

**Naloga 4.48.** *Razstavite.*

- $a^4 - 5a^3 - 24a^2$
- $3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$
- $108m^4 - 3m^2$
- $x^2 - 29xy + 100y^2$
- $u^4 - 125uv^3$
- $81 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$

## Poglavje 5

# Deljivost

### 5.1 Relacija deljivosti

Naravno število  $n$  je **delitelj** naravnega števila  $n$  (**deljenec**), če obstaja naravno število  $k$  (**kvocient**), da velja:

$$\mathbf{n = k \cdot m.}$$

Naravno število  $m$  deli naravno število  $n$ , ko je število  $n$  večkratnik števila  $m$ .

$$m \mid n \Leftrightarrow n = k \cdot m; \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

Število  $m$  je delitelj samega sebe in vseh svojih večkratnikov.

1 je delitelj vsakega naravnega števila.

Če  $d$  deli naravni števili  $m$  in  $n$ ,  $n > m$ , potem  $d$  deli tudi vsoto in razliko števil  $m$  in  $n$ .

Pri deljenju poljubnega naravnega števila  $n$  z naravnim številom  $m$  imamo dve možnosti:  $n$  je deljivo z  $m$  ali  $n$  ni deljivo z  $m$ .

Relacija deljivosti je:

1. **refleksivna**:

$$a \mid a;$$

2. **antisimetrična**:

$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b;$$

3. **tranzitivna**:

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c.$$

Relacija s temi lastnostmi je relacija **delne urejenosti**, zato relacija deljivosti delno ureja množico  $\mathbb{N}$ .

**Naloga 5.1.** Zapišite vse delitelje števil.

- 6
- 16
- 37
- 48
- 120

**Naloga 5.2.** Pokažite, da trditev velja.

- Izraz  $x - 3$  deli izraz  $x^2 - 2x - 3$ .
- Izraz  $x + 2$  deli izraz  $x^3 + x^2 - 4x - 4$ .
- Izraz  $x - 2$  deli izraz  $x^3 - 8$ .

**Naloga 5.3.** Pokažite, da trditev velja.

- $19 \mid (3^{21} - 3^{20} + 3^{18})$
- $7 \mid (3 \cdot 4^{11} + 4^{12} + 7 \cdot 4^{10})$
- $14 \mid (5 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^8 - 3 \cdot 3^7)$
- $25 \mid (7 \cdot 2^{23} - 3 \cdot 2^{24} + 3 \cdot 2^{25} - 2^{22})$
- $11 \mid (2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^7 + 10^8)$
- $35 \mid (6^{32} - 36^{15})$

**Naloga 5.4.** Pokažite, da trditev velja.

- $3 \mid (2^{2n+1} - 5 \cdot 2^{2n} + 9 \cdot 2^{2n-1})$
- $29 \mid (5^{n+3} - 2 \cdot 5^{n+1} + 7 \cdot 5^{n+2})$
- $10 \mid (3 \cdot 7^{4n-1} - 4 \cdot 7^{4n-2} + 7^{4n+1})$
- $10 \mid (9^{3n-1} + 9 \cdot 9^{3n+1} + 9^{3n} - 9^{3n+2})$
- $5 \mid (7 \cdot 2^{4n-2} + 3 \cdot 4^{2n} - 16^n)$

**Naloga 5.5.** Pokažite, da je za poljubno naravno število  $u$  vrednost izraza

$$(u + 7)(7 - u) - 3(3 - u)(u + 5)$$

večkratnik števila 4.

## 5.2 Kriteriji deljivost

### Deljivost z 2

Število je deljivo z 2 natanko takrat, ko so enice števila deljive z 2.

### Deljivost s 3

Število je deljivo s 3 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva s 3.

### Deljivost s 4 oziroma 25

Število je deljivo s 4 oziroma 25 natanko takrat, ko je dvomestni konec števila deljiv s 4 oziroma 25.

### Deljivost s 5

Število je deljivo s 5 natanko takrat, ko so enice števila enake 0 ali 5.

### Deljivost s 6

Število je deljivo s 6 natanko takrat, ko je deljivo z 2 in s 3 hkrati.

### Deljivost z 8 oziroma s 125

Število je deljivo z 8 oziroma s 125 natanko takrat, ko je trimestni konec števila deljiv z 8 oziroma s 125.

### Deljivost z 9

Število je deljivo z 9 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva z 9.

### Deljivost z 10 oziroma $10^n$

Število je deljivo z 10 natanko takrat, ko so enice števila enake 0.

Število je deljivo z  $10^n$  natanko takrat, ko ima število na zadnjih  $n$  mestih števko 0.

### Deljivost z 11

Število je deljivo z 11 natanko takrat, ko je alternirajoča vsota števk tega števila deljiva z 11.

### Deljivost s 7

Algoritem za preverjanje deljivosti s 7:

1. vzamemo enice danega števila in jih pomnožimo s 5,
2. prvotnemu številu brez enic prištejemo dobljeni produkt,
3. vzamemo enice dobljene vsote in jih pomnožimo s 5,
4. produkt prištejemo prej novo dobljenemu številu ...

Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo dvomestnega števila – če je to deljivo s 7, je prvotno število deljivo s 7.

**Naloga 5.6.** *S katerimi od števil 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 so deljiva naslednja števila?*

- 84742
- 393948
- 12390

- 19401

**Naloga 5.7.** Določite vse možnosti za števko  $a$ , da je število  $\overline{65833a}$ :

- deljivo s 3,
- deljivo s 4,
- deljivo s 5,
- deljivo s 6.

**Naloga 5.8.** Določite vse možnosti za števko  $b$ , da je število  $\overline{65b90b}$ :

- deljivo z 2,
- deljivo s 3,
- deljivo s 6,
- deljivo z 9,
- deljivo z 10.

**Naloga 5.9.** Določite vse možnosti za števki  $c$  in  $d$ , da je število  $\overline{115c1d}$  deljivo s 6.

**Naloga 5.10.** Določite vse možnosti za števki  $e$  in  $f$ , da je število  $\overline{115e1f}$  deljivo z 8.

**Naloga 5.11.** Pokažite, da za vsako naravno število  $n$  12 deli  $n^4 - n^2$ .

**Naloga 5.12.** Preverite, ali je število 8641969 deljivo s 7.

## 5.3 Osnovni izrek o deljenju

### Osnovni izrek o deljenju

Za poljubni naravni števili **m** (**deljenec**) in **n** (**delitelj**),  $m \geq n$ , obstajata natanko določeni nenegativni števili **k** (**količnik/kvocijent**) in **r** (**ostanek**), da velja:

$$m = k \cdot n + r; \quad 0 \leq r < n; \quad m, n \in \mathbb{N}; k, r \in \mathbb{N}_0.$$

Če je ostanek pri deljenju enak 0, je število  $m$  **večkratnik** števila  $n$ . Tedaj je število  $m$  deljivo s številom  $n$ . Pravimo, da  $n$  deli število  $m$ :  $n \mid m$ .

**Naloga 5.13.** Določite, katera števila so lahko ostanki pri deljenju naravnega števila  $n$  s:

- številom 3;
- številom 7;
- številom 365.

**Naloga 5.14.** Zapišite prvih nekaj naravnih števil, ki dajo:

- pri deljenju s 4 ostanek 3;
- pri deljenju s 7 ostanek 4;
- pri deljenju z 9 ostanek 4.

**Naloga 5.15.** Zapišite naravno število, ki da:

- pri deljenju s 7 količnik 5 in ostanek 3;
- pri deljenju z 10 količnik 9 in ostanek 1;
- pri deljenju s 23 količnik 2 in ostanek 22.

**Naloga 5.16.** Zapišite množico vseh naravnih števil  $n$ , ki dajo:

- pri deljenju z 2 ostanek 1;
- pri deljenju z 2 ostanek 0;
- pri deljenju s 5 ostanek 2.

**Naloga 5.17.** Katere število smo delili s 7, če smo dobili kvocijent 3 in ostanek 5?

**Naloga 5.18.** S katerim številom smo delili število 73, če smo dobili kvocijent 12 in ostanek 1?

**Naloga 5.19.** Marjeta ima čebulice tulipana, ki jih želi posaditi v več vrst. V vsaki od 3 vrst je izkopala po 8 jamic, potem pa ugotovila, da ji bosta 2 čebulici ostali. Koliko čebulic ima Marjeta?

**Naloga 5.20.** Če neko število delimo z 8, dobimo ostanek 7. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s 4?

**Naloga 5.21.** Če neko število delimo s 24 dobimo ostanek 21. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s 3?