

Poglavje 2

Osnove teorije množic

2.1 Množice

Množica je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.

Množica je določena, če:

- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$ ali $A, B, C \dots$).

Univerzalna množica ali **univerzum** (\mathcal{U}) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

Element množice je objekt v množici.

Označujemo jih z malimi črkami ($a, b, c \dots$).

Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr. $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$).

Element je lahko vsebovan v množici (npr. $a \in \mathcal{A}$) ali pa v množici ni vsebovan (npr. $d \notin \mathcal{A}$).

Prazna množica ($\emptyset, \{\}$) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka: $\mathbf{m}(\mathcal{A})$ ali $|\mathcal{A}|$.

Množica je lahko:

- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$.

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.

Njeno moč pišemo kot: $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$.

Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

Naloga 2.1. Naštajte elemente množice in zapišite njeno moč, če je $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leq 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leq 8)\}$

Naloga 2.2. Naj bo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Zapišite množico tako, da naštujete njene elemente. Določite še njeno moč.

- Množica vseh deliteljev števila 18.
- Množica praštevil, ki so manjša od 20.

- Množica večkratnikov števila 5, ki so večji od 50 in manjši ali enaki 70.

Naloga 2.3. Zapišite množico s simboli.

- Množica vseh sodih naravnih števil.
- Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 5.

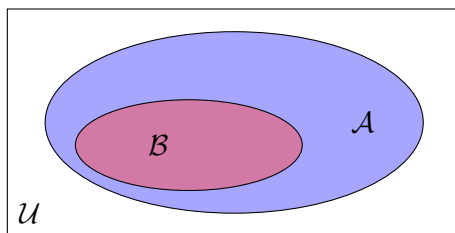
Naloga 2.4. Podane so množice tako, da so naštetih njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

2.3 Podmnožice

Množica \mathcal{B} je **podmnožica** množice \mathcal{A} , če za vsak element iz \mathcal{B} velja, da je tudi element množice \mathcal{A} .

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \emptyset \subseteq \mathcal{A}$ – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice \mathcal{B} množice \mathcal{A} je manjša ali enaka moči množice \mathcal{A} :

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leq m(\mathcal{A})$$

Množici \mathcal{A} in \mathcal{B} sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica \mathcal{B} množice \mathcal{A} , ki ni enaka množici \mathcal{A} , je **prava podmnožica** množice \mathcal{A} .

Potenčna množica množice \mathcal{A} je množica vseh podmnožic množice \mathcal{A} .

Oznaka: $\mathcal{P}\mathcal{A}$ / $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{P}\mathcal{A} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{P}\mathcal{A}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

Naloga 2.5. Dana je množica $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?

Naloga 2.6. Dana je množica $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?

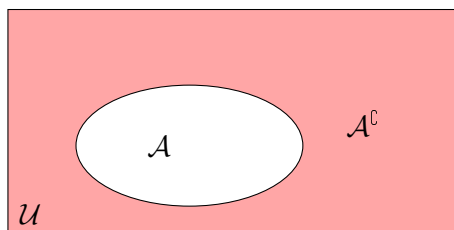
2.4 Operacije z množicami

2.4.1 Komplement množice

Komplement množice \mathcal{A} (glede na izbrani univerzum \mathcal{U}) je množica vseh elementov, ki so v množici \mathcal{U} in niso v množici \mathcal{A} .

Oznaka: \mathcal{A}^c / \mathcal{A}' .

$$\mathcal{A}^c = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$(\mathcal{A}^c)^c = \mathcal{A}$$

Naloga 2.7. Naj bo univerzalna množica $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$. Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena množica?

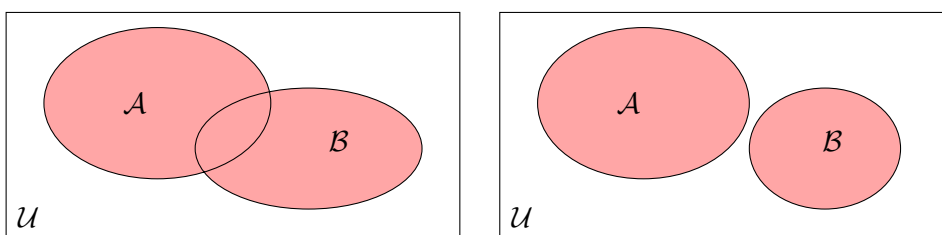
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.2 Unija množic

Unija množic \mathcal{A} in \mathcal{B} je množica vseh elementov, ki pripadajo množici \mathcal{A} ali množici \mathcal{B} .

Oznaka: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

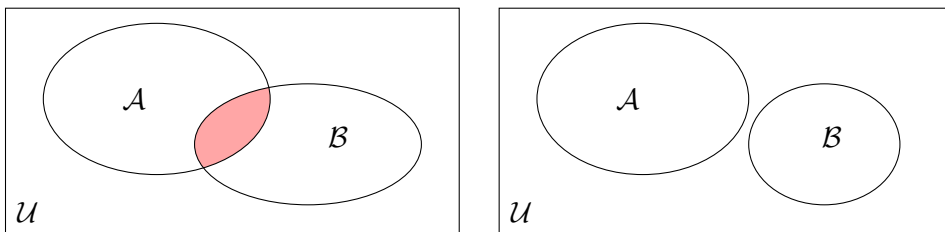
Naloga 2.8. Dani sta množici \mathcal{A} in \mathcal{B} . Zapišite množico $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ in $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ in $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

2.4.3 Presek množic

Presek množic \mathcal{A} in \mathcal{B} je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici \mathcal{A} in množici \mathcal{B} .
Oznaka: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

Naloga 2.9. Dani sta množici \mathcal{A} in \mathcal{B} . Zapišite množico $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ in $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ in $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici \mathcal{A} in \mathcal{B} velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

Komutativnost unije in preseka

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

Asociativnost unije in preseka

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

Distributivnost zakona za unijo in presek

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

De Morganova zakona

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c.$$

Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

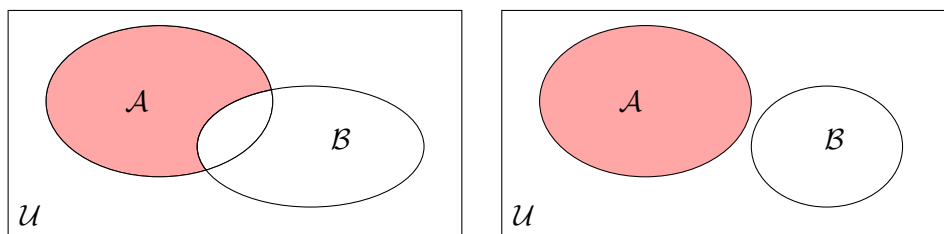
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c.$$

2.4.5 Razlika množic

Razlika množic \mathcal{A} in \mathcal{B} je množica tistih elementov, ki pripadajo množici \mathcal{A} in hkrati ne pripadajo množici \mathcal{B} .

Oznaka: $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ / $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{A} = \emptyset$$

Naloga 2.10. *Dani sta množici \mathcal{A} in \mathcal{B} . Zapišite njuno razliko $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.6 Kartezični produkt množic

Kartezični produkt (nepraznih) množic \mathcal{A} in \mathcal{B} je množica urejenih parov (x, y) , pri čemer je $x \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{B}$.

Oznaka: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

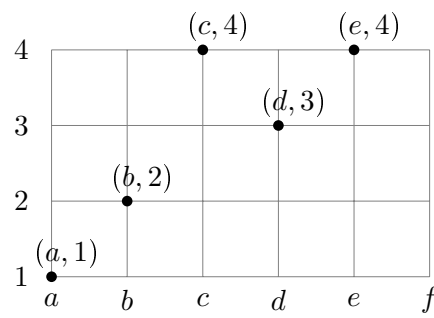
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ za množici $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$:



Naloga 2.11. *Dani sta množici \mathcal{A} in \mathcal{B} . Zapišite njun kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ in $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$