

# MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Gimnazija Antona Aškerca,  
Šolski center Ljubljana

22. julij 2025

## 1 Kotne funkcije

# Section 1

## Kotne funkcije

- 1 Kotne funkcije
  - Definicija kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku
  - Računanje vrednosti kotnih funkcij
  - Zveze med kotnimi funkcijami
  - Razširitev pojma kotne funkcije do polnega kota

# Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

**Sinus** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  nasprotno kateto in hipotenuzo:

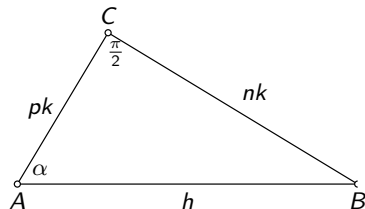
$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

**Kosinus** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  priležno kateto in hipotenuzo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

**Tangens** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  nasprotno kateto in priležno kateto:

$$\tan \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}.$$



**Kotangens** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  priležno kateto in nasprotno kateto:

$$\cot \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}}.$$



## Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet  $a = 12 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$ . Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota  $\beta$ .

## Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet  $a = 12 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$ . Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota  $\beta$ .

## Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet  $a = 6 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$ . Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota  $\beta$ .



### Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet  $a = 12 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$ . Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota  $\beta$ .

### Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet  $a = 6 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$ . Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota  $\beta$ .

### Naloga

V pravokotnem trikotniku je dolžina hipotenuze  $c = 10$  in dolžina katete  $a = 6$ . Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot  $\alpha$ .



## Naloga

Načrtajte pravokotni trikotnik  $\triangle ABC$ , v katerem velja:

- $\sin \alpha = \frac{2}{5}$
- $\cos \alpha = \frac{5}{6}$
- $\tan \alpha = \frac{3}{7}$
- $\cos \beta = \frac{4}{7}$
- $\tan \beta = \frac{0.3}{0.2}$

# Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

# Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

$\varphi$ [rad]	$\varphi$ [°]	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0

## Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varphi$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \tan \varphi$$



## Naloga

Na štiri decimalna mesta natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot  $x$ .

- $x = 55^\circ$
- $x = 39^\circ$
- $x = 12^\circ$



## Naloga

Na štiri decimalna mesta natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot  $x$ .

- $x = 55^\circ$
- $x = 39^\circ$
- $x = 12^\circ$

## Naloga

Na minuto natančno izračunaj velikost kota, če je:

- $\sin x = 0.25$
- $\cos x = 0.6$
- $\tan x = 3$
- $\sin x = 2$
- $\cos x = \frac{2}{5}$



## Naloga

Natančno izračunajte vrednost izraza.

- $\sin 90^\circ + \cos 0^\circ + \tan 45^\circ$

- $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 60^\circ} - \frac{\tan 60^\circ}{\cos 60^\circ}$

- $\tan 30^\circ \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$

- $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

- $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

- $\frac{1 - \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$

- $\frac{\sin 90^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$

- $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ - 3 \tan 30^\circ$



## Naloga

V pravokotniku meri stranica  $a = 10 \text{ cm}$ , diagonal pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico  $a$  in diagonalo na dve decimalki stopinje natančno.

## Naloga

V pravokotniku meri stranica  $a = 10 \text{ cm}$ , diagonalna pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico  $a$  in diagonalo na dve decimalki stopinje natančno.

## Naloga

V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico  $24 \text{ cm}$ , osnovnica pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.

### Naloga

V pravokotniku meri stranica  $a = 10 \text{ cm}$ , diagonalna pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico  $a$  in diagonalno na dve decimalki stopinje natančno.

### Naloga

V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico  $24 \text{ cm}$ , osnovnica pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.

### Naloga

Enakokraki trapez ima osnovnici dolgi  $45 \text{ cm}$  in  $23 \text{ cm}$ , višina pa je  $60 \text{ cm}$ . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na minuto natančno.

### Naloga

V pravokotniku meri stranica  $a = 10 \text{ cm}$ , diagonalna pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico  $a$  in diagonalno na dve decimalki stopinje natančno.

### Naloga

V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico  $24 \text{ cm}$ , osnovnica pa  $14 \text{ cm}$ . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.

### Naloga

Enakokraki trapez ima osnovnici dolgi  $45 \text{ cm}$  in  $23 \text{ cm}$ , višina pa je  $60 \text{ cm}$ . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na minuto natančno.

### Naloga

Vrh stolpa vidimo pod kotom  $19.17^\circ$ , če pa se mu približamo za  $50 \text{ m}$ , ga vidimo pod kotom  $34.23^\circ$ . Izračunajte višino stolpa, če je točka gledišča na višini  $1.7 \text{ m}$ .





## Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom  $AB$  v krogu s polmerom  $8\text{ cm}$ , če je  $|AB| = 6\text{ cm}$ ? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

## Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom  $AB$  v krogu s polmerom  $8\text{ cm}$ , če je  $|AB| = 6\text{ cm}$ ? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

## Naloga

V enakokrakem trapezu z osnovnicama  $12\text{ cm}$  in  $6\text{ cm}$  kot ob osnovnici meri  $\alpha = 73^\circ$ . Izračunajte dolžino kraka.

### Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom  $AB$  v krogu s polmerom  $8\text{ cm}$ , če je  $|AB| = 6\text{ cm}$ ? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

### Naloga

V enakokrakem trapezu z osnovnicama  $12\text{ cm}$  in  $6\text{ cm}$  kot ob osnovnici meri  $\alpha = 73^\circ$ . Izračunajte dolžino kraka.

### Naloga

Pravokotnik ima stranici dolgi  $5\text{ cm}$  in  $6\text{ cm}$ . Na minuto natančno izračunajte kot, ki ga oklepata diagonali v pravokotniku.

### Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom  $AB$  v krogu s polmerom  $8\text{ cm}$ , če je  $|AB| = 6\text{ cm}$ ? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

### Naloga

V enakokrakem trapezu z osnovnicama  $12\text{ cm}$  in  $6\text{ cm}$  kot ob osnovnici meri  $\alpha = 73^\circ$ . Izračunajte dolžino kraka.

### Naloga

Pravokotnik ima stranici dolgi  $5\text{ cm}$  in  $6\text{ cm}$ . Na minuto natančno izračunajte kot, ki ga oklepata diagonalni v pravokotniku.

### Naloga

V rombu je dolžina diagonale  $e$  dvakrat tolikšna kot dolžina diagonale  $f$ . Na minuto natančno izračunajte velikost kota  $\alpha$ .

# Zveze med kotnimi funkcijami



## Naloga

Natančno izračunajte vrednosti preostalih kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku, če je kot  $\alpha$  oster in velja:

- $\cos \alpha = 0.1$

- $\sin \alpha = \frac{8}{17}$

- $\tan \alpha = 2$





## Naloga

Poenostavite izraze s pomočjo zvez med kotnimi funkcijami.

$$\bullet 1 - \sqrt{(1 - \sin^2 x) \cos^2 x}$$

$$\bullet \tan^2 x - \frac{1}{1 - \sin^2 x}$$

$$\bullet \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

$$\bullet \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \cos x - 1$$

$$\bullet \cos x (1 + \tan^2 x)$$

$$\bullet \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x}$$

$$\bullet \frac{1}{\tan x} + \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$\bullet \sin x + \cos^2 x \cdot \sin^{-1} x$$

$$\bullet \frac{1}{\left( \frac{\tan^{-1} x \cdot \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \right)}$$

$$\bullet \left( (\tan x \cos x)^{-2} + \cos^{-2} x \right) \sin^2 x$$

$$\bullet \left( \frac{1}{\cot x} \sin^{-1} x \right)^{-2} + \sin x \tan x \cos x$$



## Naloga

Natančno izračunajte brez uporabe računalja.

- $\frac{\cos 15^\circ}{\sin 75^\circ} - 2 \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ}$

- $\sin^2 55^\circ + \cos^2 45^\circ - \frac{\tan 33^\circ}{\sin 33^\circ}$

- $\sin^2 86^\circ \cdot (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ + \tan^2 4^\circ)$

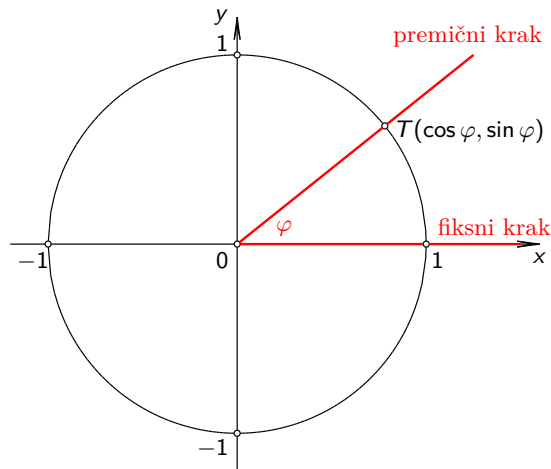
- $\frac{1 - \sin^2 15^\circ}{\sin^2 75^\circ}$

# Kotne funkcije v enotskem krogu

**Enotska krožnica** je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot  $\varphi$  z vrhom v koordinatnem izhodišču določata:

- **fiksni/nepremični krak** kota leži na pozitivnem delu abscisne osi in
- **premični krak** določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov ter seka enotsko krožnico v točki  $(\cos x, \sin x)$ .

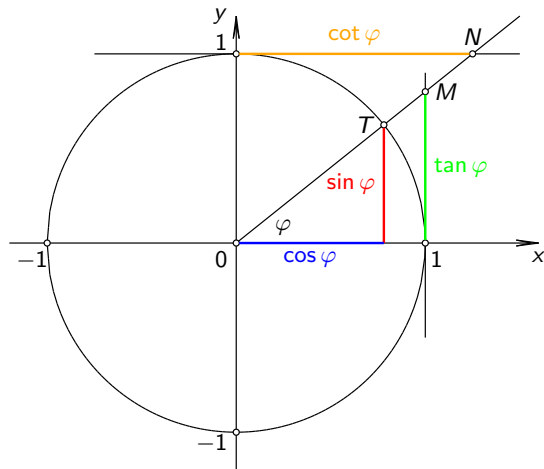


**Sinus** kota  $\varphi$  je enak ordinati presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

**Kosinus** kota  $\varphi$  je enak abscisi presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

**Tangens** kota  $\varphi$  je enak ordinati presečišča nosilke premičnega kraka z navpično tangento enotskega kroga v točki  $(1, 0)$ .

**Kotangens** kota  $\varphi$  je enak abscisi presečišča nosilke premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega kroga v točki  $(0, 1)$ .



# Stopinje in radiani

## Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik 1 radian.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57,3^\circ$$

## Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo kot  $\varphi$  podan v radianih,  $\phi$  pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \phi$$

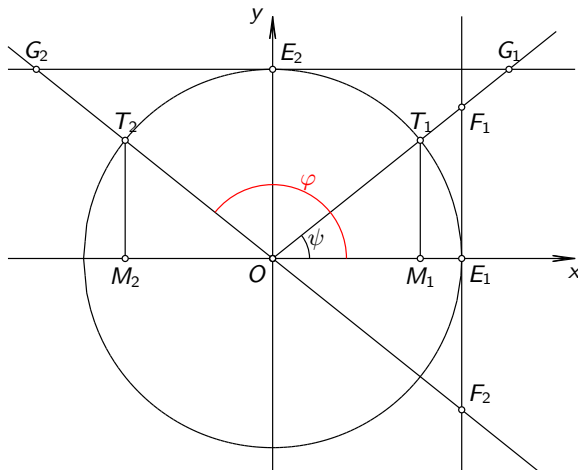
in

$$\phi = \frac{180^\circ}{\pi} \varphi.$$

# Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

$\varphi$ [rad]	$\varphi$ [°]	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0
$\pi$	180°	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	/	0



Kot med  $\frac{\pi}{2}$  in  $\pi$ 

Sinusa supplementarnih kotov sta enaka;  
kosinusa supplementarnih kotov sta  
nasprotno enaka.

$$\sin(\pi - \psi) = \sin \psi$$

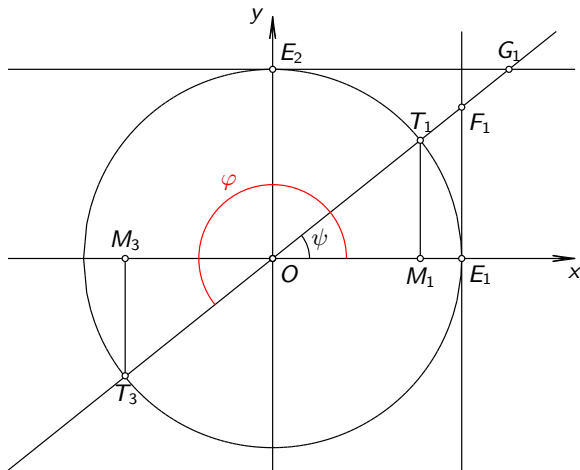
$$\cos(\pi - \psi) = -\cos \psi$$

Tangensa in kotangensa supplementarnih  
kotov sta nasprotno enaka.

$$\tan(\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(\pi - \psi) = -\cot \psi$$

# Kot med $\pi$ in $\frac{3\pi}{2}$



Sinusa in kosinusa kotov, ki se razlikujeta za  $\pi$ , sta nasprotno enaka.

$$\sin(\pi + \psi) = -\sin \psi$$

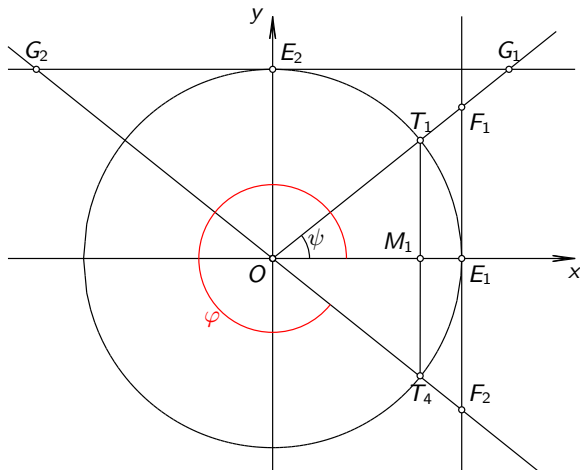
$$\cos(\pi + \psi) = -\cos \psi$$

Tangensa in kotangensa kotov, ki se razlikujeta za  $\pi$ , sta enaka.

$$\tan(\pi + \psi) = \tan \psi$$

$$\cot(\pi + \psi) = \cot \psi$$

# Kot med $\frac{3\pi}{2}$ in $2\pi$



$$\sin(2\pi - \psi) = -\sin \psi$$

$$\cos(2\pi - \psi) = \cos \psi$$

$$\tan(2\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(2\pi - \psi) = -\cot \psi$$

$$\sin(-\psi) = -\sin \psi$$

$$\cos(-\psi) = \cos \psi$$

$$\tan(-\psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(-\psi) = -\cot \psi$$



## Naloga

Izrazite s kotno funkcijo kota, manjšega od  $45^\circ$ .

•  $\sin 200^\circ$

•  $\cot 335^\circ$

•  $\cos 154^\circ$

•  $\cos 115^\circ$

•  $\tan 163^\circ$

•  $\sin 245^\circ$

•  $\tan 170^\circ$

•  $\cos 255^\circ$

•  $\tan 140^\circ$

•  $\sin 299^\circ$

•  $\sin 190^\circ$

•  $\cos 218^\circ$

•  $\cos 355^\circ$

•  $\cot 203^\circ$

•  $\tan 179^\circ$



## Naloga

Najprej izrazite vrednost dane kotne funkcije s kotno funkcijo ostrega kota in nato izračunajte njeno natančno vrednost.

- $\sin 300^\circ$

- $\cos 330^\circ$

- $\tan 315^\circ$

- $\cos 225^\circ$

- $\sin 240^\circ$

- $\tan 150^\circ$

- $\cos 120^\circ$

- $\sin 180^\circ$





## Naloga

Natančno izračunajte.

- $$\frac{\cos 300^\circ - \sin 210^\circ - \sin 0^\circ}{\tan 300^\circ + \tan 135^\circ}$$

- $$(\sin 150^\circ - \cos 210^\circ)^2 + \tan^2 315^\circ$$

- $$\frac{\cos 135^\circ + \sin 225^\circ}{\tan 300^\circ - \tan 120^\circ - \sin 270^\circ}$$

- $$\sin 120^\circ - \cos 150^\circ + \tan 225^\circ$$

- $$\frac{\cos 240^\circ + \tan 135^\circ - \sin^2 315^\circ}{den}$$



## Naloga

Za kot  $x$  je podana vrednost ene kotne funkcije in območje velikost kota. Izračunajte natančni vrednosti drugih kotnih funkcij za kot  $x$ .

- $x \in [180^\circ, 270^\circ]; \sin x = -0.6$

- $x \in [90^\circ, 180^\circ]; \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

- $IV.$  kvadrant;  $\tan x = -\sqrt{3}$

- $II.$  kvadrant;  $\tan x = -2$

- $III.$  kvadrant;  $\tan x = 3$

- $II.$  kvadrant;  $\sin x = \frac{3}{4}$

- $x \in [270^\circ, 360^\circ]; \cos x = \frac{1}{3}$

- $x \in [180^\circ, 270^\circ]; \cos x = -\frac{4}{5}$

- $IV.$  kvadrant;  $\sin x = -\frac{15}{17}$



## Naloga

Podana je vrednost ene kotne funkcije za kot  $x$ . Izračunajte velikost kota  $x$  glede na pogoj o njegovi velikosti.

- $x \in [270^\circ, 360^\circ]; \cos x = 0.5$

- $x \in [0^\circ, 360^\circ]; \tan x = -1$

- $x \in [180^\circ, 360^\circ]; \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $x \in [0^\circ, 360^\circ]; \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $x \in [180^\circ, 360^\circ]; \cos x = -1$

- $x \in [0^\circ, 180^\circ]; \tan x = 1$

- $x \in [180^\circ, 270^\circ]; \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $x \in [0^\circ, 360^\circ]; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $x \in [0^\circ, 270^\circ]; \tan x = -\sqrt{3}$



## Naloga

V enotski krožnici narišite vse kote, za katere velja dani podatek. Izračunajte velikosti kotov na štiri decimalna mesta natančno.

- $\sin x = 0.6$

- $\cos x = 0.3$

- $\tan x = 0.8$

- $\sin x = -\frac{2}{3}$

- $\cos x = -\frac{3}{5}$

- $\tan x = -\frac{3}{2}$

- $\tan x = 2$





## Naloga

Natančno izračunajte.

$$\frac{\sin 315^\circ + \cos 135^\circ - \tan^2 120^\circ}{\sin^2 150^\circ - \cos^2 225^\circ}$$

## Naloga

Natančno izračunajte.

$$\frac{\sin 315^\circ + \cos 135^\circ - \tan^2 120^\circ}{\sin^2 150^\circ - \cos^2 225^\circ}$$

## Naloga

Poenostavite izraz.

$$1 + \left( \frac{\sin^2 x + \tan^{-1} x \cdot \sin x \cdot \cos x}{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} \right)^{-1}$$

## Naloga

Natančno izračunajte.

$$\frac{\sin 315^\circ + \cos 135^\circ - \tan^2 120^\circ}{\sin^2 150^\circ - \cos^2 225^\circ}$$

## Naloga

Poenostavite izraz.

$$1 + \left( \frac{\sin^2 x + \tan^{-1} x \cdot \sin x \cdot \cos x}{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} \right)^{-1}$$

## Naloga

Za  $\tan x = -5$  in  $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$  izračunajte velikost kota  $x$ , na minuto natančno, in natančne vrednosti preostalih kotnih funkcij.



## Naloga

Zapišite s kotno funkcijo kota, manjšega od  $45^\circ$ .

- $\sin 355^\circ$
- $\cos 291^\circ$
- $\tan 174^\circ$
- $\sin 247^\circ$

## Naloga

Zapišite s kotno funkcijo kota, manjšega od  $45^\circ$ .

- $\sin 355^\circ$
- $\cos 291^\circ$
- $\tan 174^\circ$
- $\sin 247^\circ$

## Naloga

Voznik podmornice na višini  $-200\text{ m}$  vidi razbitino ladje, ki leži potopljena na višini  $-1200\text{ m}$ , pod kotom  $8.4^\circ$ . Izračunajte razdaljo, ki jo mora prevoziti, da bo točno nad razbitino, če se vozi s hitrostjo  $40\text{ km/h}$ . Koliko časa potrebuje za to pot?