MATEMATIKA

3. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

23. april 2024

1/66

Vsebina

- Motne funkcije
- Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice



2/66

Section 1

Kotne funkcije



3/66

- Motne funkcije
 - Kotne funkcije poljubnih kotov
 - Izrazi s kotnimi funkcijami
 - Adicijski izreki
 - Posledice adicijskih izrekov
 - Grafa funkcij sinus in kosinus
 - Grafa funkcij tangens in kotangens
 - Krožne funkcije
 - Trigonometrijske enačbe
 - Problemske naloge
 - Naklonski kot premice, kot med dvema premicama
- ② Geometrijski lik
- Geometrijska telesa
- 4 Polinomi in racionalne funkcije



23. april 2024

Stopinje in radiani

Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik 1 radian.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \doteq 57, 3^{\circ}$$

Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo φ kot podan v radianih, ϕ pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

$$\varphi = \frac{\pi}{180^{\circ}} \phi$$

in

$$\phi = \frac{180^{\circ}}{\pi} \varphi.$$

|ロ ト 4 回 ト 4 差 ト 4 差 ト | 差 | 夕 Q (^) |

5/66

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Sinus kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in hipotenuzo:

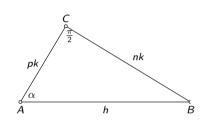
$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Kosinus kota α je količnik med kotu α priležno kateto in hipotenuzo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Tangens kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in priležno kateto:

$$\tan \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}.$$



Kotangens kota α je količnik med kotu α priležno kateto in nasprotno kateto:

$$\cot \alpha = \frac{\text{prile}\check{\text{z}}\text{na kateta}}{\text{nasprotna kateta}}.$$

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 6 / 66

Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot\varphi$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \tan\varphi$$

オロトオ御トオミトオミト ミ めのぐ

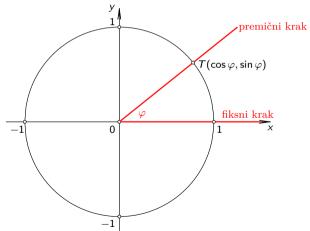
7/66

Kotne funkcije v enotskem krogu

Enotska krožnica je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot φ z vrhom v koordinatnem izhodišču:

- prvi (fiksni) krak kota leži na pozitivnem delu abscisne osi;
- drugi (premični) krak določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov.

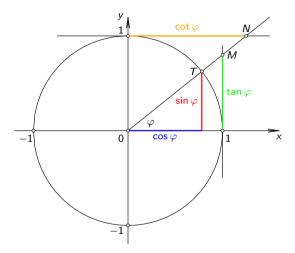


Sinus kota φ je enak oridnati presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Kosinus kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Tangens kota φ je enak ordinati presečišča premičnega kraka z navpično tangento enotskega kroga v točki (1,0).

Kotangens kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega korga v točko (0,1).



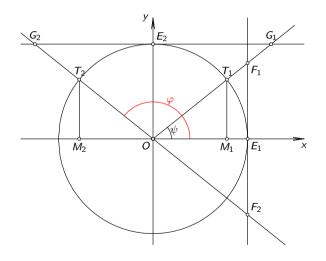
Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin arphi$	$\cos arphi$	$\tan\varphi$	$\cot arphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0
π	180°	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	/	0

(ロ) (間) (目) (目) (目) (の)

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 10 / 66

Kot med $\frac{\pi}{2}$ in π



Sinusa suplementarnih kotov sta enaka; kosinusa suplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\sin\left(\pi - \psi\right) = \sin\psi$$

$$\cos\left(\pi-\psi\right)=-\cos\psi$$

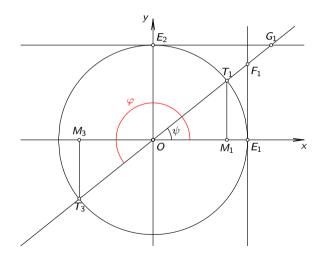
Tangensa in kotangensa suplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\tan (\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot (\pi - \psi) = -\cot \psi$$

11/66

Kot med π in $\frac{3\pi}{2}$



Sinusa in kosinusa kotov, ki se razlikujeta za π , sta nasprotno enaka.

$$\sin(\pi + \psi) = -\sin\psi$$

$$\cos(\pi + \psi) = -\cos\psi$$

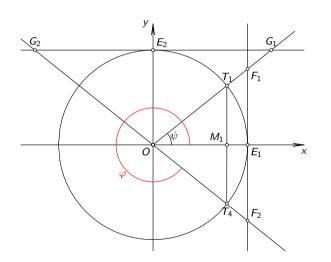
Tangensa in kotangensa kotov, ki se razlikujeta za π , sta enaka.

$$\tan(\pi + \psi) = \tan\psi$$

$$\cot (\pi + \psi) = \cot \psi$$

12/66

Kot med $\frac{3\pi}{2}$ in 2π



$$\sin(2\pi - \psi) = -\sin\psi$$
$$\cos(2\pi - \psi) = \cos\psi$$
$$\tan(2\pi - \psi) = -\tan\psi$$
$$\cot(2\pi - \psi) = -\cot\psi$$

$$\sin(-\psi) = -\sin\psi$$
$$\cos(-\psi) = \cos\psi$$
$$\tan(-\psi) = -\tan\psi$$
$$\cot(-\psi) = -\cot\psi$$

13/66

Kotne funkcije poljubnih kotov

◆ロト ◆御 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 夕 Q ②

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 14/66

Izrazi s kotnimi funkcijami

23. april 2024

15 / 66

Adicijski izreki

←□ → ←□ → ← □ → ← □ → へ○

16/66

Posledice adicijskih izrekov

4□ > 4回 > 4 直 > 4 直 > 直 9 9 ○

17/66

Grafa funkcij sinus in kosinus

⟨□⟩⟨□⟩⟨≡⟩⟨≡⟩ ⟨≡⟩ ≡ √0⟨○

23. april 2024

18 / 66

Grafa funkcij tangens in kotangens

4 D > 4 D > 4 E > 4 E > E 900

23. april 2024

19/66

Krožne funkcije

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

20 / 66

Trigonometrijske enačbe

4 □ ト ← □ ト ← □ ト ← □ ● ● の へ ○ ○

21/66

Problemske naloge



Naloga 1

Natančno izračunaj
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$
, če je $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ in $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.



23 / 66

Naloga 1

Natančno izračunaj
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$
, če je $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ in $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Naloga 2

Poenostavi izraz
$$\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\cos\left(2\pi-x\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\pi\right)$$
.



23 / 66

Naloga 1

Natančno izračunaj
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$
, če je $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ in $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Naloga 2

Poenostavi izraz
$$\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\cos\left(2\pi-x\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\pi\right)$$
.

Naloga 3

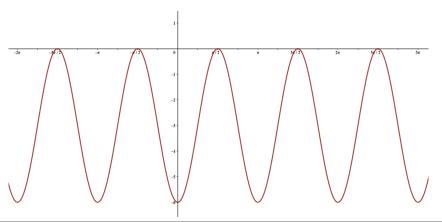
Pokaži, da velja:
$$\frac{\cot x \cdot \sin 2x - 1}{(\cos(-x) - \sin(-x))^2 - 1} = \cot 2x.$$



23 / 66

Naloga 4

Na sliki je graf funkcije $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$. Določi A > 0, B > 0, C in D. C izberi tako, da bo |C| najmanjše možno število. Kratko utemelji.





 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 24 / 66

Naloga 5

Brez uporabe računala natančno izračunaj. Zapiši vmesne izračune.



23. april 2024

25 / 66

Naloga 5

Brez uporabe računala natančno izračunaj. Zapiši vmesne izračune.

- $\cos(-1590^{\circ})$

Naloga 6

Reši enačbi:

- $2\cos^2 3x \cos 3x 1 = 0$



Naklonski kot premice, kot med dvema premicama

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 9 9 9

26 / 66

Section 2

Geometrijski liki



27 / 66

- Kotne funkcije
- Geometrijski liki
 - Obseg in ploščina
 - Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika
 - Obseg in ploščina trikotnika
 - Obseg in ploščina paralelograma
 - Obseg in ploščina trapeza in deltoida
 - Obseg in ploščina pravilnega večkotnika
 - Obseg in ploščina kroga
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice



28 / 66

Obseg in ploščina

29 / 66

Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 9 9 9

30 / 66

Obseg in ploščina trikotnika

4□ > 4回 > 4 直 > 4 直 > 直 9 9 ○

31/66

Obseg in ploščina paralelograma

32 / 66

Obseg in ploščina trapeza in deltoida

33 / 66

Obseg in ploščina pravilnega večkotnika

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B = 900

34 / 66

Obseg in ploščina kroga

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ ○

35 / 66

Section 3

Geometrijska telesa



36 / 66

- Motne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
 - Površina in prostornina
 - Pokončna prizma
 - Pokončni valj
 - Pokončna piramida
 - Pokočni krožni stožec
 - Korgla
 - Primerjava pokonnih teles
 - Poševna telesa
 - Prisekana telesa
 - Vrtenine
- 4 Polinomi in racionalne funkcije



37 / 66

Površina in prostornina

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

38 / 66

Pokončna prizma

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

39 / 66

Pokončni valj

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

40 / 66

Pokončna piramida

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 41/66

Pokočni krožni stožec

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 9 < ○</p>

42 / 66

23. april 2024

Korgla

Krogla

←□ > ←□ > ←□ > ←□ > □ □

43 / 66

Primerjava pokončnih teles

<ロ > ←回 > ←回 > ← 直 > ← 直 → り へ ○

23. april 2024

44 / 66

Poševna telesa

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

Prisekana telesa

46 / 66

Vrtenine

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

23. april 2024

Section 4

Polinomi in racionalne funkcije



 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 48 / 66

- Motne funkcije
- Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
 - Polinomi
 - Računanje s polinomi
 - Ničle polinoma in Hornerjev algoritem
 - Graf polinoma
 - Polinomska neenačba
 - Metoda bisekcije
 - Racionalna funkcija
 - Racionalna neenačba
 - Modeliranje s polinomsko in racionalno funkcijo



49 / 66

Polinomi

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

Računanje s polinomi

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 51/66

Ničle polinoma in Hornerjev algoritem

4 D D A A B D A B D B 900

52 / 66

Graf polinoma

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 53/66

Polinomska neenačba

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 9 < ○</p>

54 / 66

Metoda bisekcije

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 55 / 66

Racionalna funkcija

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 23. april 2024
 56 / 66

Racionalna neenačba

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 9 < ○</p>

57 / 66

23. april 2024

Modeliranje s polinomsko in racionalno funkcijo

58 / 66

Section 5

Stožnice



- Motne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice
 - Krožnica
 - Elipsa
 - Hiperbola
 - Parabola
 - Krivulje drugega reda
 - Iracionalna enačba



60/66

Krožnica

Krožnica



61/66

Elipsa

Elipsa

Hiperbola



23. april 2024

Parabola



64 / 66

Krivulje drugega reda

4□ > 4回 > 4 直 > 4 直 > 直 9 9 ○

65 / 66

23. april 2024

Iracionalna enačba

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

66 / 66

23. april 2024