MATEMATIKA

3. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

20. november 2023

Vsebina

- Motne funkcije
- Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice



2/60

Section 1

Kotne funkcije



3/60

- Motne funkcije
 - Kotne funkcije poljubnih kotov
 - Izrazi s kotnimi funkcijami
 - Adicijski izreki
 - Posledice adicijskih izrekov
 - Grafa funkcij sinus in kosinus
 - Grafa funkcij tangens in kotangens
 - Krožne funkcije
 - Trigonometrijske enačbe
 - Problemske naloge
 - Naklonski kot premice, kod med dvema premicama
- 2 Geometrijski lik
- Geometrijska telesa
- 4 Polinomi in racionalne funkcije



4/60

Stopinje in radiani

Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik $1 \, \mathrm{radian}$.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \doteq 57, 3^{\circ}$$

Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo φ kot podan v radianih, ϕ pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

$$\varphi = \frac{\pi}{180^{\circ}} \phi$$

in

$$\phi = \frac{180^{\circ}}{\pi} \varphi.$$



Jan Kastelic (FMF)

MATEMATIKA

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Sinus kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in hipotenuzo:

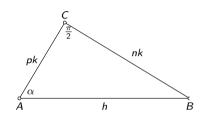
$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Kosinus kota α je količnik med kotu α priležno kateto in hipotenuzo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Tangens kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in priležno kateto:

$$\tan \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}.$$



Kotangens kota α je količnik med kotu α priležno kateto in nasprotno kateto:

$$\cot\alpha = \frac{\text{prile}\check{\text{z}}\text{na kateta}}{\text{nasprotna kateta}}.$$



20. november 2023

6/60

Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\cos\frac{\pi}{2} - \alpha = \sin\alpha$$

$$\sin\frac{\pi}{2} - \alpha = \cos\alpha$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan\frac{\pi}{2} - \alpha = \cot\alpha$$

$$\cot\frac{\pi}{2} - \alpha = \tan\alpha$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q A

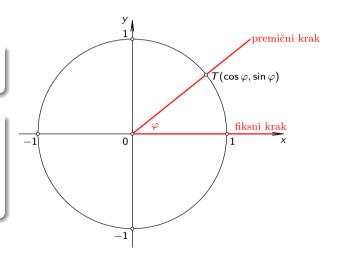
7/60

Kotne funkcije v enotskem krogu

Enotska krožnica je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot φ z vrhom v koordinatnem izhodišču:

- prvi (fiksni) krak kota leži na pozitivnem delu abscisne osi;
- drugi (premični) krak določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov.





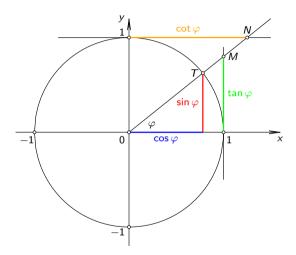
8 / 60

Sinus kota φ je enak oridnati presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Kosinus kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Tangens kota φ je enak ordinati presečišča premičnega kraka z navpično tangento enotskega kroga v točki (1,0).

Kotangens kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega korga v točko (0,1).



9/60

Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin arphi$	$\cos arphi$	$\tan\varphi$	$\cot arphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0
π	180°	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	/	0



10/60

Kotne funkcije poljubnih kotov

4□ ト 4回 ト 4 三 ト 4 三 り 9 ○ ○

11/60

Izrazi s kotnimi funkcijami

(ロ) (団) (巨) (巨) (巨) (の)

12/60

Adicijski izreki



13/60

Posledice adicijskih izrekov

◆□ ト ◆□ ト ◆ 重 ト ◆ 重 ・ 夕 Q ②

14/60

Grafa funkcij sinus in kosinus



20. november 2023

15 / 60

Grafa funkcij tangens in kotangens



16/60

Krožne funkcije



17/60

20. november 2023

Trigonometrijske enačbe

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

18/60

Problemske naloge



19/60

Naklonski kot premice, kot med dvema premicama

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B = 900

20 / 60

Section 2

Geometrijski liki



21/60

- Motne funkcije
- Geometrijski liki
 - Obseg in ploščina
 - Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika
 - Obseg in ploščina trikotnika
 - Obseg in ploščina paralelograma
 - Obseg in ploščina trapeza in deltoida
 - Obseg in ploščina pravilnega večkotnika
 - Obseg in ploščina kroga
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- 5 Stožnice



22 / 60

Obseg in ploščina



23 / 60

Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q Q

24 / 60

Obseg in ploščina trikotnika

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

25 / 60

Obseg in ploščina paralelograma

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q Q

20. november 2023

26 / 60

Obseg in ploščina trapeza in deltoida

10 × 4 10 × 4 15 × 4 10 × 4 10 ×

27 / 60

Obseg in ploščina pravilnega večkotnika



28 / 60

Obseg in ploščina kroga

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

29 / 60

Section 3

Geometrijska telesa



30 / 60

- Motne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
 - Površina in prostornina
 - Pokončna prizma
 - Pokončni valj
 - Pokončna piramida
 - Pokočni krožni stožec
 - Korgla
 - Primerjava pokonnih teles
 - Poševna telesa
 - Prisekana telesa
 - Vrtenine
- Polinomi in racionalne funkcije



31/60

Površina in prostornina

Pokončna prizma



33 / 60

Pokončni valj



34 / 60

Pokončna piramida



35 / 60

Pokočni krožni stožec

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

36 / 60

20. november 2023

Krogla



37 / 60

Primerjava pokončnih teles

◆ロト ◆団 ト ◆ 豆 ト ◆ 豆 ・ 夕 ♀ ○

38 / 60

Poševna telesa



39 / 60

Prisekana telesa



Vrtenine



20. november 2023

Section 4

Polinomi in racionalne funkcije



42 / 60

- Motne funkcije
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
 - Polinomi
 - Računanje s polinomi
 - Ničle polinoma in Hornerjev algoritem
 - Graf polinoma
 - Polinomska neenačba
 - Metoda bisekcije
 - Racionalna funkcija
 - Racionalna neenačba
 - Modeliranje s polinomsko in racionalno funkcijo







20. november 2023

MATEMATIKA

Polinomi



Računanje s polinomi

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

45 / 60

Ničle polinoma in Hornerjev algoritem

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > 0 0 0

46 / 60

Graf polinoma

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

47 / 60

Polinomska neenačba

4 D > 4 B > 4 B > 4 B > 9 Q C

48 / 60

Metoda bisekcije

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

49 / 60

Racionalna funkcija

50 / 60

Racionalna neenačba

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > 9 Q C

Jan Kastelic (FMF) MATEMATIKA

51/60

Modeliranje s polinomsko in racionalno funkcijo

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > 0 0 0

52 / 60

Section 5

Stožnice



53 / 60

- Motne funkcije
- Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice
 - Krožnica
 - Elipsa
 - Hiperbola
 - Parabola
 - Krivulje drugega reda
 - Iracionalna enačba



54 / 60

Krožnica



Elipsa

Elipsa

Hiperbola



57 / 60

Parabola



Krivulje drugega reda



59 / 60

20. november 2023

Iracionalna enačba



60 / 60

20. november 2023