Matematika
Splošna gimnazija

ZAPISKI

2. november 2024

Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite

Jan Kastelic

Kazalo

Poglavje 1

Osnove logike

1.1 Izjave

Matematična izjava je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.
Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R**/**P**/**1**/$\top$;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N**/**0**/$\bot$.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami (A, B, C ...).

Naloga 1.1. *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število* 12 *deli število* 3.
- *Število* 3 *deli število* 10.
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je* 10 *dl isto kot* 1 *l?*
- *Število* 41 *je praštevilo.*

Naloga 1.2. *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- A*: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- B*: Število je deljivo s* 4 *natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s* 4.
- C*: Ostanek pri deljenju s* 4 *je lahko* 1, 2 *ali* 3.
- D*: Mesec februar ima 28 dni.*
- E*: Vsa praštevila so liha števila.*
- F*: Število* 1 *je naravno število.*
- G*: Praštevil je neskončno mnogo.*

1.1.1 Enostavne in sestavjene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.
Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

1.2 Logične operacije

1.2.1 Negacija

Negacija izjave A je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava A. Oznaka: $\neg\mathbf{A}$.

$\neg\mathbf{A}$ **Ni res**, da velja izjava A.

Če je izjava A pravilna, je $\neg A$ nepravilna in obratno: če je $\neg A$ pravilna, je A nepravilna. Negacija negacije izjave je potrditev izjave. $\neg(\neg A) = A$

A	$\neg A$
P	N
N	P

Naloga 1.3. *Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.*

- A: $5 \cdot 8 = 30$
- B: *Število* 3 *je praštevilo.*
- C: *Največje dvomestno število je* 99*.*
- D: *Število* 62 *je večratnik števila* 4*.*
- E: *Praštevil je neskončno mnogo.*
- F: $7 \leqslant 5$
- G: *Naša pisava je cirilica.*

1.2.2 Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B nastane tako, da povežemo izjavi A in B z **in hkrati**.

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ Velja izjava A **in (hkrati)** izjava B.

Če sta izjavi A in B pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

Naloga 1.4. *Določite logično vrednost konjunkcijam.*

- *Število* 28 *je večratnik števila* 3 *in večkratnik števila* 8*.*
- *Število* 7 *je praštevilo in je deljivo s številom* 1*.*
- *Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.*
- *Ostanki pri deljenju števila s* 3 *so lahko* 0*,* 1 *ali* 2*, pri deljenju s* 5 *pa* 0*,* 1*,* 2*,* 3 *ali* 4*.*
- *Število je deljivo s* 3*, če je vsota števk deljiva s* 3*, in je deljivo z* 9*, če je vsota števk deljiva z* 9*.*

1.2.3 Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B nastane s povezavo **ali**.

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ Velja izjava A **ali** izjava B (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

Naloga 1.5. *Določite logično vrednost disjunkcijam.*

- *Število* 24 *je večratnik števila* 3 *ali* 8.
- *Število* 35 *ni večratnik števila* 7 *ali* 6.
- *Število* 5 *deli število* 16 *ali* 18.
- *Ploščina kvadrata s stranico* a *je* a^2 *ali obseg kvadrata je* $4a$.
- *Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika* $160°$, *ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.*

1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Naloga 1.6. *Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?*

- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

1.2.8 Implikacija

Implikacija izjav A in B je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

A ⇒ B **Če** velja izjava A, **potem** velja izjava B. / **Iz** A **sledi** B.

Izjava A je **pogoj** ali **privzetek**, izjava B pa **(logična) posledica** izjave A.
Implikacija je nepravilna, ko je izjava A pravilna, izjava B pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \Rightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Naloga 1.7. *Določite, ali so izjave pravilne.*

- *Če je število deljivo s* 100*, je deljivo tudi s* 4*.*
- *Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.*
- *Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Če sta števili* 2 *in* 3 *lihi števili, potem je produk teh dveh števil sodo število.*
- *Če je število* 18 *deljivo z* 9*, potem je deljivo s* 3*.*
- *Če je* 7 *večkratnik števila* 7*, potem* 7 *deli število* 43*.*
- *Če je število deljivo s* 4*, potem je deljivo z* 2*.*

1.2.9 Ekvivalenca

Ekvivalenca izjavi A in B poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

A ⇔ B Izjava A velja, **če in samo če** velja izjava B./
Izjava A velja **natanko tedaj, ko** velja izjava B.

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.
Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Naloga 1.8. *Določite, ali so naslednje izjave pravilne.*

- *Število je deljivo z* 12 *natanko takrat, ko je deljivo s* 3 *in* 4 *hkrati.*
- *Število je deljivo s* 24 *natanko takrat, ko je deljivo s* 4 *in* 6 *hkrati.*
- *Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.*
- *Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z* 2*.*

1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

Naloga 1.9. *V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.*

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

1.2.11 Tavtologija in protislovje

Tavtologija ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavjena, pravilna.
Protislovje je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$ (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$ (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

1.3 Pomen izjav v matematiki

Aksiomi so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.
Izreki ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.
Definicije so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.

Poglavje 2

Osnove teorije množic

2.1 Množice

Množica je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.
Množica je določena, če:
- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$ ali $A, B, C \dots$).

Univerzalna množica ali **univerzum** ($\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

Element množice je objekt v množici.
Označujemo jih z malimi črkami ($a, b, c \dots$).
Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr. $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$).
Element je lahko vsebovan v množici (npr. $a \in \mathcal{A}$) ali pa v množici ni vsebovan (npr. $d \notin \mathcal{A}$).

Prazna množica ($\emptyset, \{\}$) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka: $\mathbf{m}(\mathcal{A})$ ali $|\mathcal{A}|$.
Množica je lahko:
- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$.

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.
Njeno moč pišemo kot: $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$.
Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

Naloga 2.1. *Naštejte elemente množice in zapišite njeno moč, če je $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.*
- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leqslant 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leqslant 8)\}$

Naloga 2.2. *Naj bo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Zapišite množico tako, da naštejete njene elemente. Določite še njeno moč.*
- *Množica vseh deliteljev števila 18.*
- *Množica praštevil, ki so manjša od 20.*

- *Množica večkratnikov števila* 5*, ki so večji od* 50 *in manjši ali enaki* 70*.*

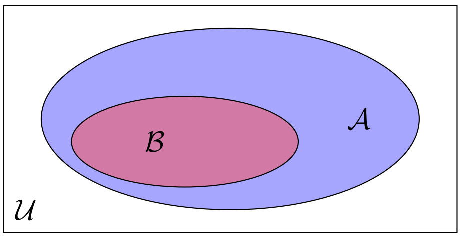
Naloga 2.3. *Zapišite množico s simboli.*
- *Množica vseh sodih naravnih števil.*
- *Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s* 7 *ostanek* 5*.*

Naloga 2.4. *Podane so množice tako, da so našteti njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.*
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

2.3 Podmnožice

Množica $\mathcal{B}$ je **podmnožica** množice $\mathcal{A}$, če za vsak element iz $\mathcal{B}$ velja, da je tudi element množice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \varnothing \subseteq \mathcal{A}$ – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$ je manjša ali enaka moči množice $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leqslant m(\mathcal{A})$$

Množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$, ki ni enaka množici $\mathcal{A}$, je **prava podmnožica** množice $\mathcal{A}$.

Potenčna množica množice $\mathcal{A}$ je množica vseh podmnožic množice $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{PA}$ / $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{PA} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{PA}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

Naloga 2.5. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$*. Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

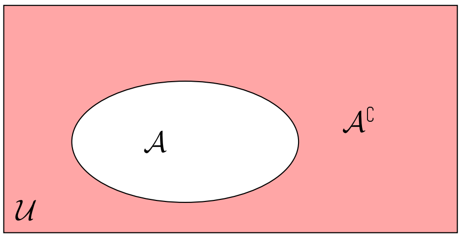
Naloga 2.6. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$*. Zapiište njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

2.4 Operacije z množicami

2.4.1 Komplement množice

Komplement množice $\mathcal{A}$ (glede na izbrani univerzum $\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki so v množici $\mathcal{U}$ in niso v množici $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{A}^{\complement}$ / $\mathcal{A}'$.

$$\mathcal{A}^{\complement} = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$\left(\mathcal{A}^{\complement}\right)^{\complement} = \mathcal{A}$$

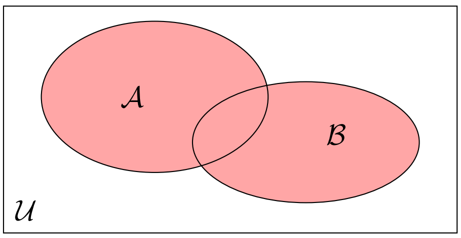
Naloga 2.7. *Naj bo univerzalna množica $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 20\}$. Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena mmoč?*

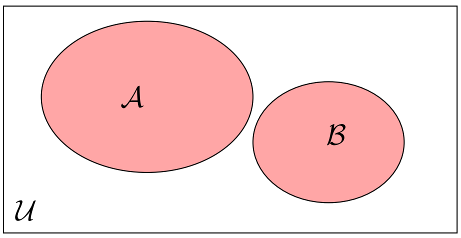
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.2 Unija množic

Unija množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ ali množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{\complement} = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

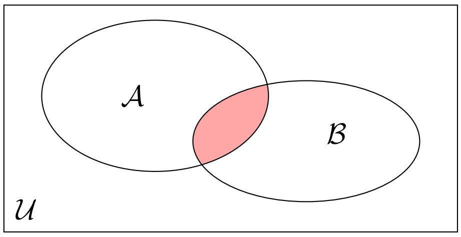
Naloga 2.8. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

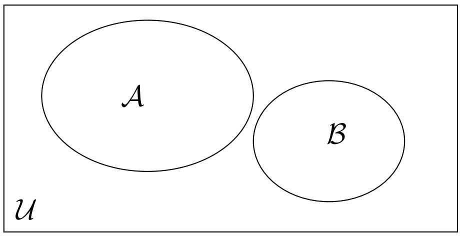
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

2.4.3 Presek množic

Presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici $\mathcal{A}$ in množici $\mathcal{B}$. Oznaka: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\complement} = \varnothing$$

$$\mathcal{A} \cap \varnothing = \varnothing$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

Naloga 2.9. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \ldots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

Komutativnost unije in preseka

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

Asociativnost unije in preseka

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

Distributivnostna zakona za unijo in presek

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

De Morganova zakona

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cup \mathcal{B}^{\complement}.$$

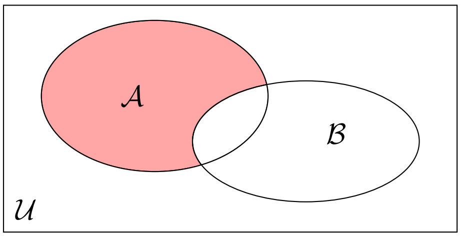
Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

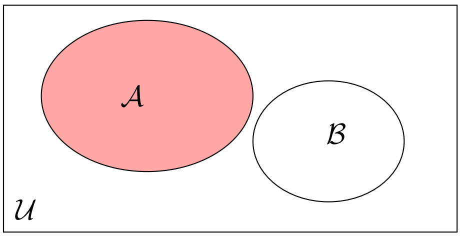
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cap \mathcal{B}^{\complement}.$$

2.4.5 Razlika množic

Razlika množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica tistih elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ in hkrati ne pripadajo množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ / $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\complement}$$

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{A} = \varnothing$$

Naloga 2.10. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njuno razliko $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.6 Kartezični produkt množic

Kartezični produkt (nepraznih) množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica urejenih parov (x, y), pri čemer je $x \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

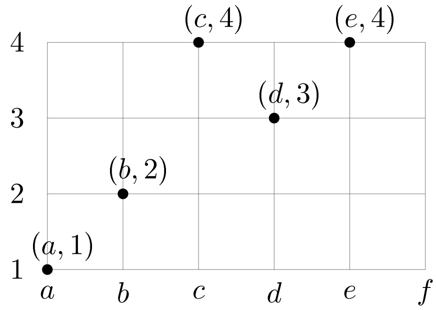
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ za množici $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$:



Naloga 2.11. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njun kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leqslant k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$

Poglavje 3

Naravna in cela števila

3.1 Naravna števila

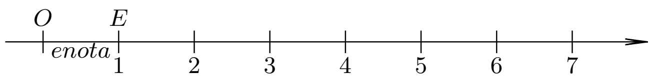
Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število n ima svojega **naslednika** $n + 1$.
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika: $n + 1 \neq m + 1; n \neq m$.
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števk označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

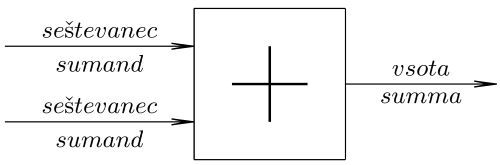
$$\overline{xy} = 10x + y \qquad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

3.2 Operacije v množici $\mathbb{N}$

3.2.1 Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma x in y priredimo **vsoto** $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Število x oziroma y imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**. Število $x + y$ pa imenujemo **vsota** ali **summa**.

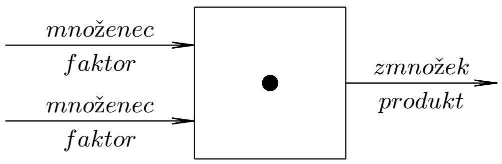


Vsota naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Množenje

Poljubnima naravnima številoma x in y priredimo **produkt** $\mathbf{x \cdot y}$.

Število x oziroma y imenujemo **množenec** ali **faktor**. Število $x \cdot y$ pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



Produkt naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$.

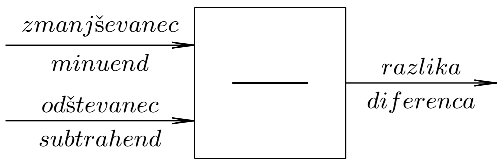
Število **1** je **nevtralni element** za mmnoženje: $1 \cdot x = x$.

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

3.2.3 Odštevanje

Številoma x in y, pri čemer je y večje od x $(x > y)$, priredimo **razliko** $\mathbf{x - y}$.

Število x imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število y pa imenujemo **odštevanec** ali **subtrahend**. Številu $x - y$ rečemo **razlika** ali **diferenca**.



Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu y, da dobimo število y.

$$(x - y) + y = x$$

Odštevanje ni notranja operacija v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

3.2.4 Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.
Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

3.3 Osnovni računski zakoni

Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja.*

Naloga 3.1. *Izračunajte.*
- $(1 + 2 \cdot 7) + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 7)$
- $3 \cdot (2 + 3 \cdot 5) \cdot (2 + 1)$
- $7 + (2 + 6 \cdot 3) + (8 + 4 \cdot 5)$
- $11 \cdot 4 + (12 - 6) \cdot 5$
- $8 + 2 \cdot (3 + 7) - 15$
- $37 - 5 \cdot (10 - 3)$

Naloga 3.2. *Hitro izračunajte.*
- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

Naloga 3.3. *Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.*
- *Produktu števil* 12 *in* 27 *odštejte razliko števil* 19 *in* 11.
- *Vsoti produkta* 4 *in* 12 *ter produkta* 5 *in* 16 *odštejte* 8.
- *Vsoto števil* 42 *in* 23 *pomnožite z razliko števil* 58 *in* 29.
- *Produkt števil* 14 *in* 17 *pomnožite z vsoto števil* 5 *in* 16.

Naloga 3.4. *Rešite besedilno nalogo.*

- *V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka* 95 *centov, čokoladni puding v prahu pa* 24 *centov, koliko moramo plačati?*
- *Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča* 45 *g riža, za odraslo pa* 75 *g. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?*

3.4 Cela Števila

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\}$$

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je definirana kot unija treh množic:
- množica **pozitivnih celih števil** ($\mathbb{Z}^+$) – naravna števila $\mathbb{N}$;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ($\mathbb{Z}^-$) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Nasprotna vrednost števila n je število $-n$.

3.5 Operacije v množici $\mathbb{Z}$

3.5.1 Seštevanje

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 0 je **nevtralni element** pri seštevanju.

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Vsota celega števila in njemu nasprotnega števila je enaka 0.

$$-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Nasprotna vrednost nasprotne vrednosti je enaka prvotni vrednosti.

Vsota dveh pozitivnih števil je pozitivno število, vsota dveh negativnih števil pa je negativno število.

$$-\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = -(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Vsota nasprotnih vrednosti je enaka nasprotni vrednosti vsote.

Naj bosta x in y naravni števili. Vsota pozitivnega števila x in negativnega števila $-y$ je:
- pozitivno število, če je $x > y$ in
- negativno število, če je $x < y$.

3.5.2 Odštevanje

Razlika $x - y$ dveh pozitivnih števil x in y je:
- pozitivno število, če je $x > y$ in
- negativno število, če je $x < y$.

Razlika dveh negativnih števil $(-x) - (-y)$ je:
- pozitvno število, če je $x < y$ in
- negativno število, če je $x > y$.

Razlika pozitivnega števila x in negativnega števila $-y$ je pozitvno število.

Odštevanje v množici $\mathbb{Z}$ je prištevanje nasprotne vrednosti.

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

3.5.3 Množenje

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 1 je **nevtralni element** za množenje.

$$(\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Pri množenju celega števila x z -1 dobimo nasprotno število $-x$.

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Rezultat množenja števila s številom 0 je enak 0.

$$(-\mathbf{x})(-\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

Produkt sodo mnogo negativnih števil je pozitivno število.

$$-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -(\mathbf{xy})$$

$$\mathbf{x}(-\mathbf{y}) = -(\mathbf{xy})$$

Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

$$(-\mathbf{x})(-\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

Produkt liho mnogo negativnih faktorjev je negativno število.

Seštevanje, odštevanje in množenje so v množici $\mathbb{Z}$ dvočlene notranje operacije.

3.6 Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$

Komutativnost seštevanja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Asociativnost seštevanja

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

Komutativnost množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

Asociativnost množenja

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

Distributivnost seštevanja in množenja ter odštevanja in množenja

$$\mathbf{x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot z}$$

$$\mathbf{x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja.*

Naloga 3.5. *Izračunajte.*

- $17 - 13 - 2 + 10$
- $50 + 11 - 32 - 14$
- $3 + ((5 + 2(7 - 9)) \cdot 2 - 1)$
- $(2 - 5(6 - 10)) \cdot (5 - 2(7 - 5))$
- $9(11 - 3) + 7(10 - 15)$
- $8 + 9(11 - 18) - 2 \cdot 5$

Naloga 3.6. *Spretno izračunajte.*

- $7 \cdot 8 - 12 \cdot 8$
- $5 \cdot 18 + 9 \cdot 5 - 5 \cdot 2$
- $8 \cdot (4 - 9) \cdot 2$
- $5 \cdot 3 \cdot (12 - 8)$
- $(15 - 6)(12 - 3 \cdot 4)$

Naloga 3.7. *Rešite besedilne naloge.*

- *V hotelu imajo na voljo osemnajst enoposteljnih, štiriintrideset dvoposteljnih in petindevetdeset triposteljnih sob. Koliko ljudi lahko še prespi v hotelu, če je v njem že sto triinštirideset gostov?*
- *Pohod na bližnji hrib traja tri ure. Koliko minut moramo še hoditi, če smo na poti že* 145 *minut?*
- *S Ptuja in iz Postojne (razdalja med njima je približno* 190 *km) sočasno odpeljeta dva motorista drug proti drugemu. En vozi povprečno* 40 *km/h, drugi pa* 5 *km/h manj. Kolikšna bo razdalja med njima po dveh urah vožnje?*

Naloga 3.8. *Zapišite enačbe in jih poenostavite.*

- *Razlika petkratnka a in b je enaka trikratniku vsote štirikratnika a in petkratnika b.*
- *Vsota x in dvakratnika y je enaka razliki petkratnika x in dvanajstkratnika y.*

3.7 Urejenost naravnih in celih števil

Številska množica je **urejena**, kadar lahko po velikosti primerjamo njena poljubna elementa. Pri urejanju števil uporabljamo naslednje znake:

$<$	manjše / manj
$>$	večje / več
$\leqslant$	manjše ali enako / največ
$\geqslant$	večje ali enako / vsaj, najmanj
$=$	enako

Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{Z}$ velja natanko ena izmed naslednjih možnosti: $x > y$, $x < y$ ali $x = y$.

Slika števila x leži na številski premici desno od slike števila y:

$$\mathbf{x > y \Leftrightarrow x - y > 0}$$

Slika števila x leži na številski premici levo od slike števila y:

$$\mathbf{x < y \Leftrightarrow x - y < 0}$$

Slika števila x sovpada s sliko števila y:

$$\mathbf{x = y \Leftrightarrow x - y = 0}$$

Velja pa tudi:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x - y \leqslant 0$$

$$x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \geqslant 0$$

Pozitivna in negativna števila

V množici $\mathbb{Z}$ so pozitivna tista števila, ki so večja od števila 0 in njihove slike ležijo desno od izhodišča, negativna pa tista števila, ki so manjša od števila 0 in njihove slike ležijo levo od izhodišča.
Vsako pozitivno celo število (vsako naravno število) je večje od katerega koli negativnega celega števila.

3.7.1 Linearna urejenost

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica $\mathbb{Z}$ **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo naslednje lastnosti: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost, stroga sovisnost.

Refleksivnost

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leqslant x$$

Antisimetričnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

Tranzitivnost

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

Stroga sovisnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}; x \neq y : x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

3.7.2 Lastnosti relacij $\leqslant$ in $<$

Monotonost vsote

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \qquad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$$

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z \qquad x \leqslant y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z \qquad x \leqslant y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geqslant y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Obravnavane lastnosti veljajo tudi za relaciji $\geqslant$ in $>$.

Naloga 3.9. *Uredite števila* $3, -2, 5, -1, 0, -7, 6, -6$ *po velikosti in jih predstavite na številski premici.*

Naloga 3.10. *Uredite števila* $104, -27, 35, -107, 36, -26, 25, -28, 81$ *po velikosti.*

Naloga 3.11. *Gladina Mrtvega morja leži v depresiji na* -423 *m nadmorske višine, njegova največja globina pa je* 378 *m. Kolikšna je najmanjša nadmorska višina dna Mrtvega morja?*

Naloga 3.12. *Za katera cela števila* x *ima izraz* $3x - 5(x + 2)$ *večjo ali enako vrednost od izraza* $4 - (12 + x)$*?*

Poglavje 4

Potence in izrazi

4.1 Potence z naravnim eksponentom

Potenca $\mathbf{x^n}$ z **osnovo/bazo** x in **eksponentom/stopnjo** $n \in \mathbb{N}$, je produkt n faktorjev enakih x.

$$\mathbf{x^n} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n faktorjev}}$$

4.2 Pravila za računanje s potencami

Dve potenci z isto osnovo zmnožimo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa seštejemo.

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{m faktorjev}} = x^{n+m}$$

Potenco potenciramo tako, da osnovo ohranimo, ekponenta pa zmnožimo.

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}}}_{\text{m faktorjev}} = x^{n \cdot m}$$

Produkt dveh ali več števil potenciramo tako, da potenciramo posamezne faktorje in jih potem zmnožimo.

$$(xy)^n = \underbrace{(xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy)}_{\text{n faktorjev}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \ldots \cdot y)}_{\text{n faktorjev}} = x^n y^n$$

Za naravne eksponente velja še:

$$(-x)^{2n} = x^{2n}$$

$$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1; & n = 2k \\ -1; & n = 2k-1 \end{cases} ; k \in \mathbb{N}$$

Naloga 4.1. *Števila* -3^2, $(-4)^2$, -2^4, $(-1)^{2024}$, $(-2)^3$ *in* $(-3)^2$ *uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.*

Naloga 4.2. *Poiščite podatke in jih zapišite na dva načina: s potenco in številom brez potence.*
- *Razdalja med Zemljo in Soncem*
- *Zemljina masa*
- *Masa Sonca*
- *Število zvezd v naši Galaksiji*

Naloga 4.3. *Izračunajte.*
- $(-3)^2 + 2^4$
- $(5-3)^3 + (-3)^2$
- $(2^2+1)^2 + (-3)^3 + (-2)^4$
- $(-1)^{2024} + ((-2)^5 + 5^2 - (7-3^2)^3)^2$
- $-1^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$

Naloga 4.4. *Poenostavite izraz.*
- $2^7 \cdot 2^3$
- $a^3 \cdot a^{12} \cdot a^5$
- $(2z)^3$
- $(m^2 \cdot m^4)^3$
- $a^3 + 2a^3 - 6a^3$
- $x^2 \cdot x^4 + (-2x^3)^2 - 2(-x)^6$

Naloga 4.5. *Izračunajte, rezultat zapišite s potenco.*
- $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^6$
- $(10^3)^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3$
- $(-2)^3 \cdot 2^7$
- $-2^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^3$
- $2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 6^4 \cdot 3$
- $(-3)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 21^7 \cdot 7$

Naloga 4.6. *Poenostavite.*
- $2^3 \cdot 3^4 \cdot (2^4 \cdot 3^2)^5$
- $(5^2 \cdot 7)^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- $(-2^3 \cdot 3^5)^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5$
- $(-4)^2 \cdot (-7)^{13} \cdot (-28)^5 \cdot (-7^2)^3$
- $-6^2 \cdot (-3)^2 \cdot 8^5 \cdot (-3^2)^3$

Naloga 4.7. *Poenostavite.*
- $a^3 \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^3 \cdot b^5$
- $4x^4 \cdot (2x^3)^2$
- $(k^3 \cdot 2h^5)^2$
- $(x^2y^4)^2 \cdot (x^3y)^3$
- $(a^2b^5)^3(ab^3)^2$
- $x^2y^3(x^3y^6)^2$

Naloga 4.8. *Poenostavite.*
- $2^3 \cdot x^2 \cdot 3^2 \cdot (-x)^6$
- $(-a^3b)^4(-a^2b^5a^3)^3$
- $(2s^2 \cdot (-s^2)^5)^5$
- $(-2(z^4)^2(-2z)^3z^5)^3$
- $(-3ab^2)^3(-a^4b^2(a^3)^5)^2(ab^3)^2$
- $(xy^2z)^3(x^3(-y^2)^5(-z))^3(x^2y^3(-z^2)^3)$

Naloga 4.9. *Odpravite oklepaje in poenostavite, če je mogoče.*
- $a^n \cdot a^{n+2} \cdot (-a)^3$

- $(-x^n)^4 \cdot x^2$
- $a^n \cdot (a^2 - a^3 + 2)$
- $(x^2 + 3x^n - 5) \cdot x^{n+1}$

Naloga 4.10. *Poenostavite.*
- $(2s(g^2)^2)^2 - 3(s^4 g)g^7$
- $(-4x^2 xy^3)^2 + (xy)^5(-2^3 xy)$
- $a^2(a^3 - b^2) - a^5 + (-a)^2 b^2$
- $(p^2(q^3)^2)^2 - 2p^4 q^{12} + 7(-p^3 p)(q^4)^3 - (-2)^3(pq^3)^4$

Naloga 4.11. *Poenostavite.*
- $5a^{n+1} + 4a^{n+1} - 6a^{n+1}$
- $3x^{n+2} + 5x^n \cdot x^2 + 2x \cdot x^{n+1}$
- $3^{5x} \cdot 9^x - 3^{7x} + 27^x \cdot 9^{2x}$
- $4^{2y} + 3 \cdot (2^y)^4 - 5 \cdot 8^y \cdot 2^y$
- $5^p \cdot 125^p \cdot 25^p + 2(5^p)^6 - 4 \cdot 25^{3p}$

4.3 Večkratniki

Večkratnik ali tudi k**-kratnik** števila x je vsota k enakih sumandov x:

$$k \cdot x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{k \text{ sumandov}}.$$

Vse večkratnike števila x dobimo tako, da število x zapored pomnožimo z vsemi celimi števili:

$$\{\ldots, -5x, -4x, -3x, -2x, -x, 0, x, 2x, 3x, 4x, 5x, \ldots\} = \{kx;\ k, x \in \mathbb{Z}\} = x\mathbb{Z}.$$

Število **k** je **koeficient** števila oziroma spremenljivke x.

4.4 Algebrski izrazi

Algebrski izraz ali **izraz** je smiseln zapis sestavljen iz:
- števil,
- spremenljivk/parametrov, ki predstavljajo števila in jih označujemo s črkami,
- oznak računskih operacij in funkcij, ki jih povezujejo,
- oklepajev, ki določajo vrstni red računanja.

Če v izraz namesto spremenljivk vstavimo konkretna števila in izračunamo rezultat, dobimo **vrednost izraza** (pri dani izbiri spremenljivk).

Dva matematična izraza sta **enakovredna**, če imata pri katerikoli izbiri spremenljivk vedno enako vrednost.

4.5 Računanje z algebrskimi izrazi

Pri poenostavljanju izrazov veljajo vsi računski zakoni, ki veljajo za računanje s števili.

Komutativnost seštevanja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Asociativnost seštevanja

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Komutativnost množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Asociativnost množenja

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Distributivnost seštevanja in množenja

$$(x + y) \cdot z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

Če v distributivnostnem zakonu zamenjamo levo in desno stran, dobimo pravilo o **izpostavljanju skupnega faktorja**: $xz + yz = (x + y)z$.

4.5.1 Seštevanje in izpostavljanje izrazov

Med seboj lahko seštevamo samo člene, ki se razlikujejo kvečjemu v koeficientu. To naredimo tako, da seštejemo koeficienta.

$$mx^2 + ny + kx^2 + ly = mx^2 + kx^2 + ny + ly = (m + k)x^2 + (n + l)y$$

4.5.2 Množenje izrazov

Dva izraza zmnožimo tako, da vsak člen prvega izraza zmnožimo z vsakim členom drugega izraza. Potem pa seštejemo podobne člene.

$$(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$$

Naloga 4.12. *Poenostavite.*
- $3a + 2b - a + 7b$
- $2a^2b - ab^2 + 3a^2b$
- $5a^4 - (2a)^4 + (-3a^2)^2 - 3(a^2)^2$
- $3(a - 2(a + b)) - 2(b - a(-2)^2)$

Naloga 4.13. *Zapišite izraz.*
- *Kvadrat razlike števil x in y.*
- *Razlika kvadratov števil x in y.*
- *Razlika petkratnika m in kvadrata števila* 3.
- *Kub razlike sedemkratnika števila x in trikratnika števila y.*

Naloga 4.14. *Izpostavite skupni faktor.*
- $3x + 12y^2$
- $m^3 + 8mp$
- $22a^3 - 33ab$
- $kr^2 - rk^2$
- $4u^2v^3 - 6uv^2$
- $12a^2b - 8(ab)^2 - (2ab)^4$

Naloga 4.15. *Izpostavite skupni faktor.*
- $3x(x + 1) + 5(x + 1)$
- $(a - 1)(a + 1) + (a - 1)$
- $4(m - 1) - (1 - m)(a + b)$
- $3(c - 2) + 5c(2 - x)$
- $(-y + x)3a - (y - x)b$

Naloga 4.16. *Izpostavite skupni faktor.*
- $5^{11} - 5^{10} + 5^9$
- $2 \cdot 3^8 + 5 \cdot 3^6$
- $4 \cdot 5^{10} - 10 \cdot 5^8 - 8 \cdot 5^9$
- $7^5 - 7^6 + 7 \cdot 7^4$

Naloga 4.17. *Izpostavite skupni faktor.*
- $3^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+2}$
- $2^{k+2} - 2^k$
- $5 \cdot 3^m + 2 \cdot 3^{m+1}$
- $2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1}$
- $3 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+2} + 4 \cdot 5^{n+3}$
- $7^n + 2 \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 7^{n+1}$

Naloga 4.18. *Izpostavite skupni faktor in izračunajte.*

- $2^{2n} + 4^n + (2^n)^2$
- $5^{2n+1} - 25^n + 3 \cdot 5^{2n-1}$
- $5 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 8^{n-1}$
- $49^n - 2 \cdot 7^{2n-1}$

Naloga 4.19. *Izpostavite skupni faktor.*

- $4a^n + 6a^{n+1}$
- $b^n + b^{n+1} - 2b^{n-1}$
- $a^{n-3} + 5a^n$
- $3x^{n+1} - 15x^n + 18x^{n-1}$

Naloga 4.20. *Zmnožite.*

- $(x-3)(x+2)$
- $(2m+3)(5m-1)$
- $(1-a)(1+a)$
- $(x-3y)(2x+y)$
- $(m-2k)(3m-k)$

Naloga 4.21. *Zmnožite.*

- $(a+b-1)(a-b)$
- $(2x+y)(3x-4y+5)$
- $(m+2n-k)(m+2n+k)$

Naloga 4.22. *Zmnožite.*

- $(x^2-3)(x^3+2)$
- $(3x^2-y)(5y^4-7x^3)$
- $(u^3-1)(u^3+1)$
- $(a^5b^2-4b)(3a^7+2a^2b)$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $(z+w)(z^2-zw+w^2)$

Naloga 4.23. *Poenostavite.*

- $(2x-y)(3+y)+(y-4)(y+4)-2xy+3(y-2x+5)$
- $(x-y)(x+y)-(x^2+xy+y^2)(x-y)-(1-x)x^2+(-y)y^2$
- $2ab+(a-3b^2)(a+3b^2)+2^3(-b^2)^2-(a-b)(b-a)-2a^3$