

# MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,  
Univerza v Ljubljani

20. november 2023

# Vsebina

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
- 5 Eksponentna in logaritemska funkcija

## Section 1

# Geometrija na ravnini in v prostoru

## 1 Geometrija na ravnini in v prostoru

- Osnovni geometrijski pojmi
- Kot
- Konstrukcije matematičnih objektov
- Preslikave na ravnini
- Trikotnik
- Krog
- Štirikotnik
- Večkotnik
- Podobnost
- Podobnost v pravokotnem trikotniku
- Kotne funkcije kotov, velikih od  $0^\circ$  do  $90^\circ$
- Kotne funkcije kotov, velikih od  $0^\circ$  do  $160^\circ$

## 2 Vektorji

# Osnovni geometrijski pojmi

# Kot

# Konstrukcije matematičnih objektov

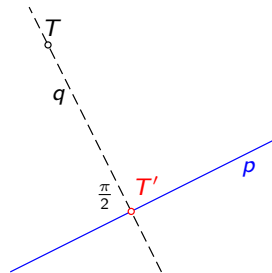
# Preslikave na ravlini

## Pravokotna projekcija

Dani sta točka  $T$  in premica  $p$ . Naj bo  $q$  tista pravokotnica na premico  $p$ , ki poteka skozi točko  $T$ . Presečišče  $T'$  premice  $q$  s premico  $p$  imenujemo **pravokotna projekcija** točke  $T$  na premico  $p$ . Točka  $T'$  je točki  $T$  najbližja točka premice  $p$ .

**Razdalja** točke  $T$  od premice  $p$  je:

$$d(T, p) = d(T, T') = |TT'|.$$



Pravokotna projekcija daljice  $AB$  na premico je daljica  $A'B'$ , katere krajišči sta pravokotni projekciji točk  $A$  in  $B$ .



## Toge preslikave

**Toga preslikava** (izometrija) je preslikava v ravni, ki ohranja razdalje.

$$\tau : A \mapsto A'$$

$$\tau : B \mapsto B'$$

$$d(A, B) = d(A', B')$$

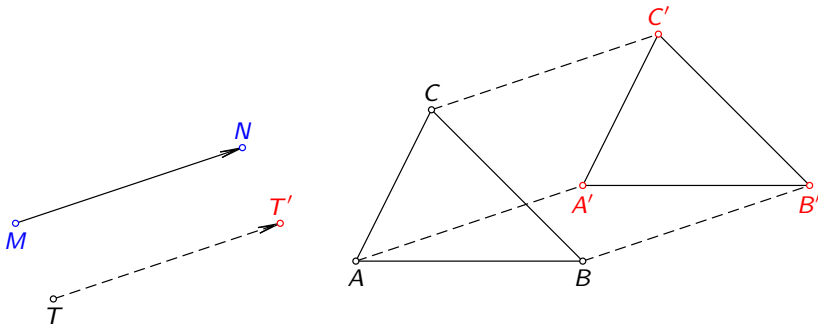
Med toge preslikave spadajo:

- **vzporedni premiki;**
- **zrcaljenje preko premice;**
- **zrcaljenje preko točke;**
- **rotacija okoli točke.**

Če kombiniramo več togih preslikav, je dobljena preslikava spet toga preslikava.

## Vzporedni premik/translacija

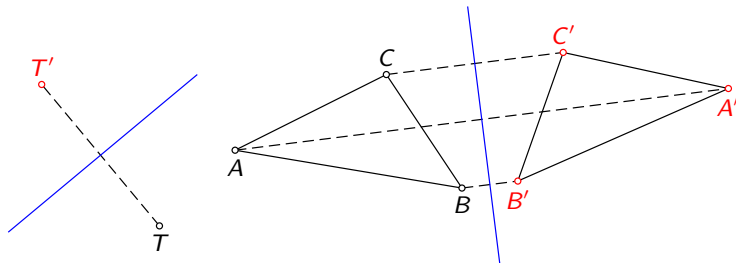
**Vzporedni premik** ali **translacija** za dano usmerjeno daljico  $\overrightarrow{MN}$  preslika točko  $T$  v tako točko  $T'$ , da sta daljici  $TT'$  in  $MN$  enako dolgi, vzporedni in enako usmerjeni.



Vzporedni premik ohranja orientacijo likov, daljice preslika v enako dolge vzporedne daljice, ohranja velikost kotov, like preslika v skladne like, nima negibnih točk za  $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ .

## Zrcaljenje preko premice

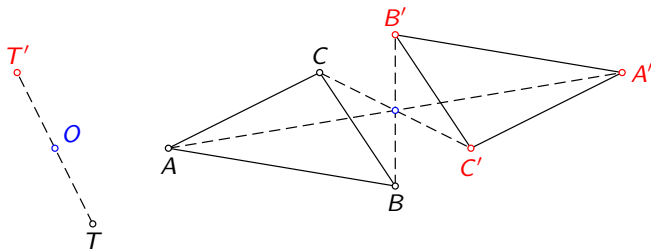
**Zrcaljenje čez premico  $p$**  preslika točko  $T$  v tako točko  $T'$ , da premica  $p$  pod pravim kotom razpolavlja daljico  $TT'$ .



Zrcaljenje čez premico daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikost kotov, ne ohranja orientacije likov, like preslika v skladne like, premic ne preslika v vzporedne premice.

## Zrcaljenje preko točke

**Zrcaljenje čez točko**  $O$  preslika točko  $T$  v tako točko  $T'$ , da je  $O$  razpolovišče daljice  $TT'$ . Ta preslikava je enaka vrtenju okrog točke za  $180^\circ$ .

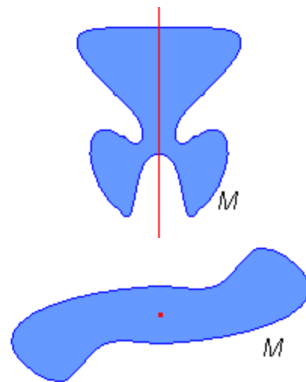


Zrcaljenje čez točko daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice preslika v vzporedne premice.

## Simetrija

Množica točk  $\mathcal{M}$  je **simetrična/somerna glede na premico**  $p$ , če se pri zrcaljenju čez premico  $p$  preslika sama vase. Premico  $p$  imenujemo **simetrala, somernica, simetrijska os** množice  $\mathcal{M}$ .

Množica točk  $\mathcal{M}$  je **središčno simetrična/somerna glede na točko**  $T$ , če se pri zrcaljenju čez točko  $T$  preslika sama vase. Točko  $T$  imenujemo **center simetrije** množice  $\mathcal{M}$ .



## Rotacija/vrtenje okoli točke

## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .

## Rotacija/vrtenje okoli točke

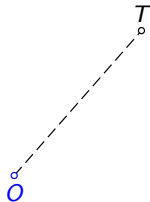
**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .

 $T$  $O$



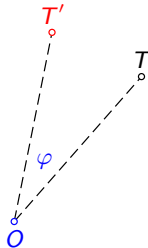
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



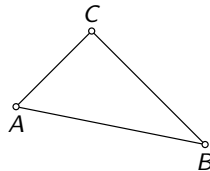
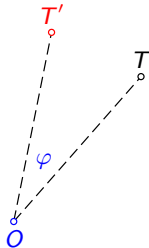
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



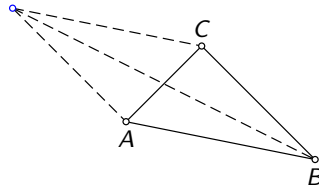
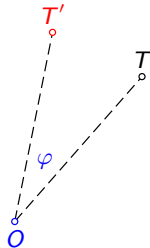
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



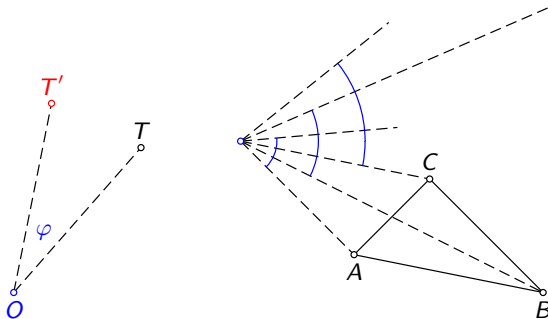
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



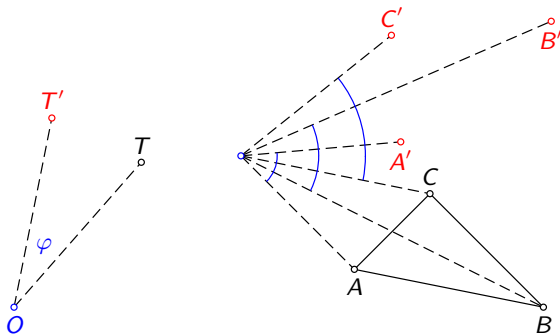
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



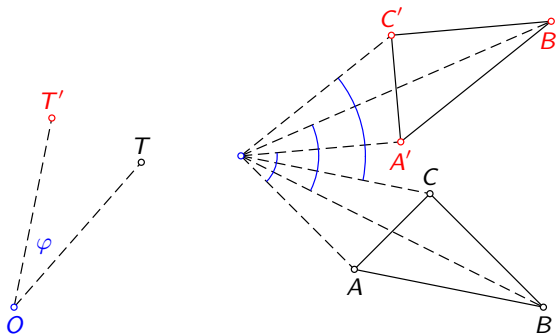
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



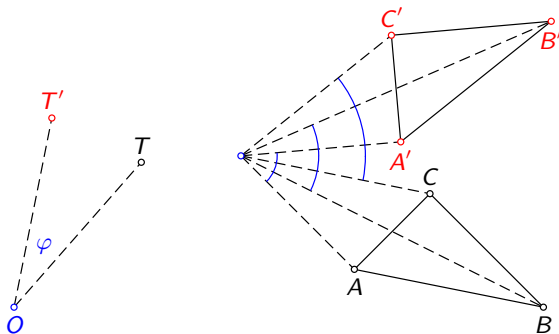
## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



## Rotacija/vrtenje okoli točke

**Vrtenje** ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot  $\varphi$  okrog točke  $O$  preslika točko  $T$  v točko  $T'$ , da velja:  $|OT| = |OT'|$  in  $\angle TOT' = \varphi$ .



Vrtenje okoli točke preslika daljice v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premic pa ne preslika v vzporedne premice.



## Naloga

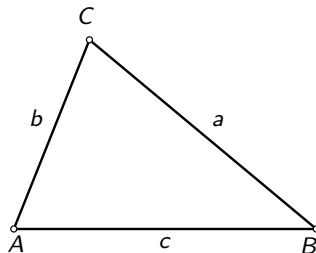
Konstruiraj daljico  $AB$  poljubne dolžine. Konstruiraj še:

- točko  $C$ , ki jo dobiš tako, da točko  $B$  zavrtiš okrog točke  $A$  za kot  $120^\circ$ ;
- točko  $D$ , ki je pravokotna projekcija točke  $C$  na nosilko daljice  $AB$ ;
- zrcalno sliko točke  $C$  glede na točko  $B$  in dobljeno točko označi  $C'$ ;
- simetralo kota z vrhom v  $B$ , katerega kraka potekata skozi  $C$  in  $C'$ .

# Trikotnik

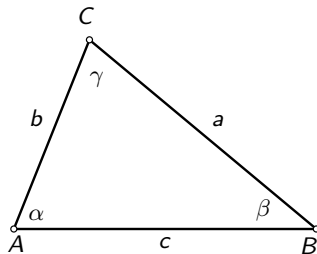
# Trikotnik

**Trikotnik** je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** ( $a, b, c$ ), ki povezujejo tri nekolinearne točke ( $A, B, C$ ) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



# Trikotnik

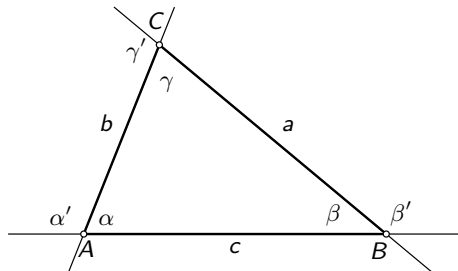
**Trikotnik** je lik/množica točk v ravlini, omejena s tremi daljicami – **stranice** ( $a, b, c$ ), ki povezujejo tri nekolinearne točke ( $A, B, C$ ) v ravlini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku  $\triangle ABC$  so  $\alpha, \beta$  in  $\gamma$  **notranji koti**,

# Trikotnik

**Trikotnik** je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** ( $a, b, c$ ), ki povezujejo tri nekolinearne točke ( $A, B, C$ ) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku  $\triangle ABC$  so  $\alpha, \beta$  in  $\gamma$  **notranji koti**, njihovi sokoti  $\alpha', \beta'$  in  $\gamma'$  pa so **zunanji koti**.

Vsota notranjih kotov trikotnika je  $180^\circ$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Vsota notranjih kotov trikotnika je  $180^\circ$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota notranjih kotov trikotnika je  $180^\circ$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota zunanjih kotov trikotnika je  $360^\circ$ :

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$



## Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika  $\triangle ABC$ , če je  $\alpha = 67^\circ 13'$  in  $\beta' = 133^\circ 25'$ .

### Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika  $\triangle ABC$ , če je  $\alpha = 67^\circ 13'$  in  $\beta' = 133^\circ 25'$ .

### Naloga 68

Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju 2 : 5 : 11. V kolikšnem razmerju so velikosti zunanjih kotov tega trikotnika?

### Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika  $\triangle ABC$ , če je  $\alpha = 67^\circ 13'$  in  $\beta' = 133^\circ 25'$ .

### Naloga 68

Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju 2 : 5 : 11. V kolikšnem razmerju so velikosti zunanjih kotov tega trikotnika?

### Naloga 70

Notranji kot ob oglišču  $A$  trikotnika  $\triangle ABC$  je za  $1^\circ$  manjši od velikosti notranjega kota ob oglišču  $C$ . Zunanji kot v oglišču  $C$  je za  $1^\circ$  večji od dvakratnika velikosti notranjega kota ob oglišču  $A$ . Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika  $\triangle ABC$ .

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

### Trikotniška neenakost

Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

## Naloga 76

Ali obstaja trikotnik z danimi dolžinami stranic?

- ①  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 10 \text{ cm}$ ;
- ②  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$ ;
- ③  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,  $c = 6 \text{ cm}$ .

### Naloga 76

Ali obstaja trikotnik z danimi dolžinami stranic?

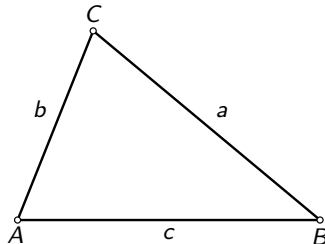
- ①  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 10 \text{ cm}$ ;
- ②  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$ ;
- ③  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,  $c = 6 \text{ cm}$ .

### Naloga 77

Po velikosti uredi notranje kote trikotnika  $\triangle ABC$ .

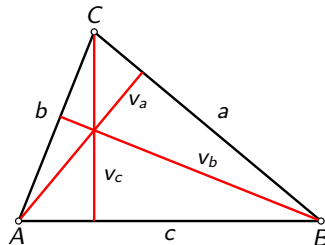
- ①  $a = 33 \text{ dm}$ ,  $b = 22 \text{ dm}$ ,  $c = 28 \text{ dm}$ ;
- ②  $a = 32 \text{ m}$ ,  $b = 35 \text{ m}$ ,  $c = 38 \text{ m}$ ;

**Višina** na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

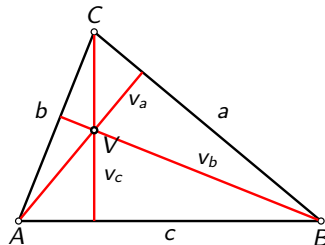




**Višina** na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

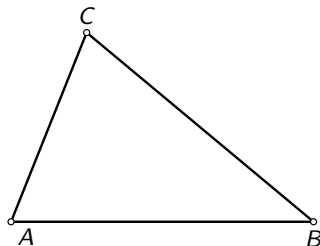


**Višina** na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

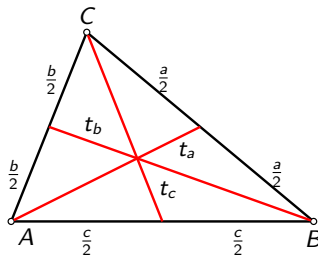


Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**.

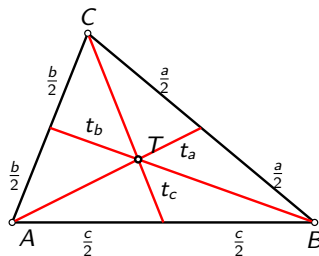
**Težiščnica** na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



**Težiščnica** na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



**Težiščnica** na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



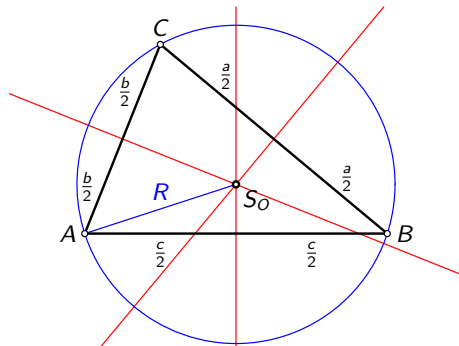
Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju 1 : 2.

## Naloga 81

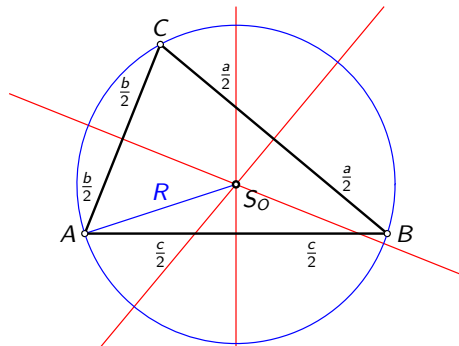
Konstruiraj trikotnik.

- $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ;
- $c = 4 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ;
- $a = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- $a = 2,5 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $v_c = 2 \text{ cm}$ ;
- $v_c = 3 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 75^\circ$ ;
- $v_a = 2 \text{ cm}$ ,  $v_b = 4 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ;
- $b = 65 \text{ cm}$ ,  $t_b = 3,5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ;
- $v_a = 3 \text{ cm}$ ,  $t_c = 4 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ .

Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.



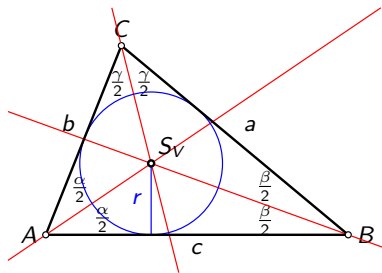
Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.



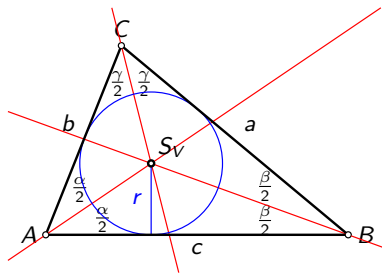
Očrtana krožnica poteka skozi vsa tri oglišča trikotnika. Vse tri stranice trikotnika so tetive te krožnice.



Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Včrtana krožnica ima vse tri stranice trikotnika za tangente.

## Naloga 83

Dan je trikotnik  $\triangle ABC$  s podatki  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

- ① Konstruiraj trikotnik  $\triangle ABC$ .
- ② Konstruiraj trikotniku  $\triangle ABC$  očrtano krožnico.
- ③ Koliko je velik zunanji kot pri oglišču  $A$ ?

## Naloga 83

Dan je trikotnik  $\triangle ABC$  s podatki  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

1. Konstruiraj trikotnik  $\triangle ABC$ .
2. Konstruiraj trikotniku  $\triangle ABC$  očrtano krožnico.
3. Koliko je velik zunanji kot pri oglišču  $A$ ?

## Naloga 84

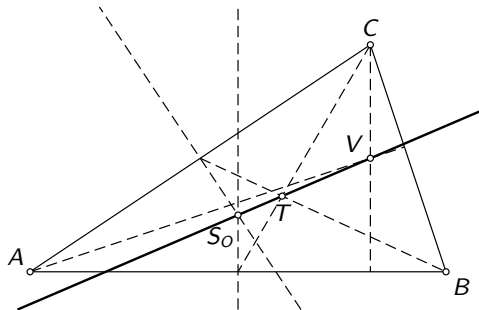
Dan je trikotnik  $\triangle ABC$  s podatki  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$ ,  $t_c = 4 \text{ cm}$ .

1. Konstruiraj trikotnik  $\triangle ABC$ .
2. Konstruiraj trikotniku  $\triangle ABC$  včrtano krožnico.
3. Kateri izmed  $\angle BAC$  in  $\angle ACB$  je večji? Utemelji (brez merjenja).

Težišče, središče trikotniku očrtane krožnice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Težišče, središče trikotniku očrtane krožnice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

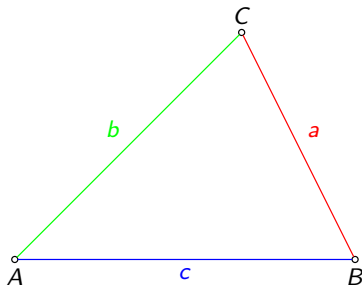
Višinska točka, središče očrtane krožnice in težišče so vedno kolinearne. Premico, ki jih povezuje, imenujemo **Eulerjeva premica**.



# Vrste trikotnikov – glede na stranice

## Vrste trikotnikov – glede na stranice

### RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK

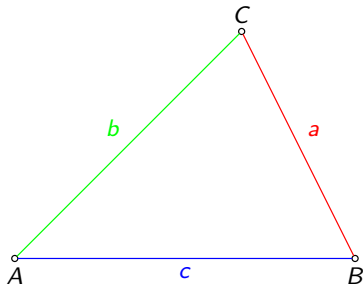


vse tri stranice različno dolge



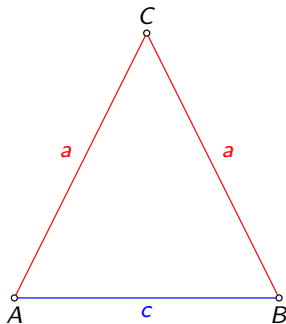
## Vrste trikotnikov – glede na stranice

### RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



vse tri stranice različno dolge

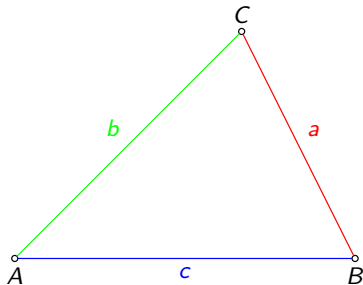
### ENAKOKRAKI TRIKOTNIK



dve stranici enako dolgi

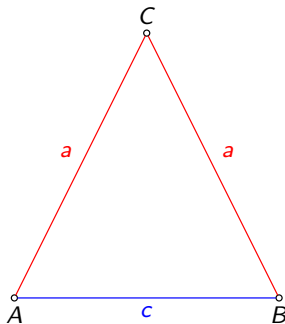
## Vrste trikotnikov – glede na stranice

### RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



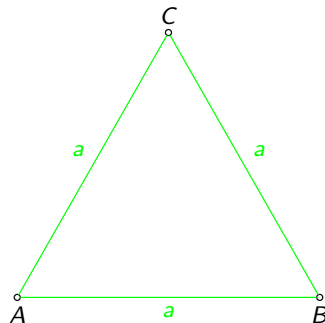
vse tri stranice različno dolge

### ENAKOKRAKI TRIKOTNIK



dve stranici enako dolgi

### ENAKOSTRANIČNI ali PRAVILNI TRIKOTNIK

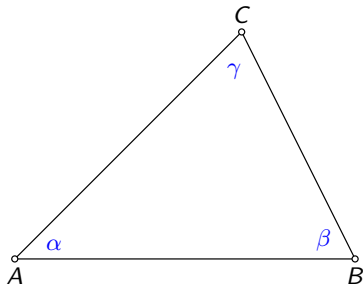


vse tri stranice enako dolge

# Vrste trikotnikov – glede na kote

## Vrste trikotnikov – glede na kote

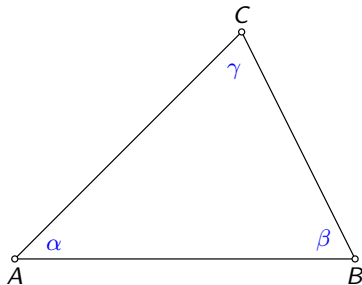
### OSTROKOTNI TRIKOTNIK



ima tri ostre notranje kote

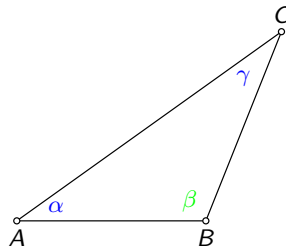
## Vrste trikotnikov – glede na kote

### OSTROKOTNI TRIKOTNIK



ima tri ostre notranje kote

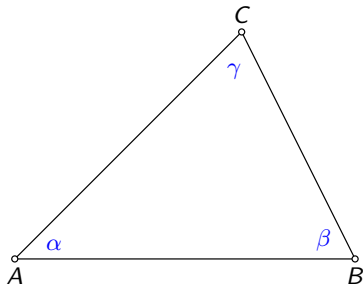
### TOPOKOTNI TRIKOTNIK



ima en topi notranji kot,  
ostala dva kota ostra

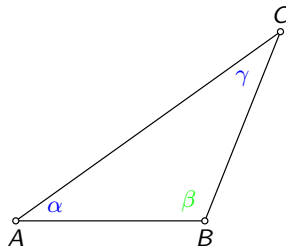
## Vrste trikotnikov – glede na kote

### OSTROKOTNI TRIKOTNIK



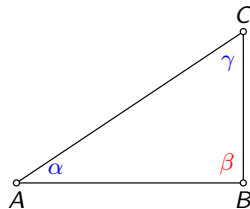
ima tri ostre notranje kote

### TOPOKOTNI TRIKOTNIK



ima en topi notranji kot,  
ostala dva kota ostra

### PRAVOKOTNI TRIKOTNIK



ima en pravi notranji kot,  
ostala dva kot ostra

# Krog

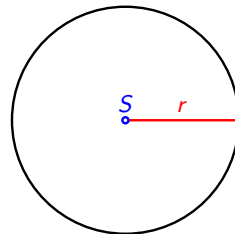
# Krog

**Krožnica** je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke  $S$ . Točko  $S$  imenujemo **središče** krožnice, razdalja  $r$  med središčem in poljubno točko na krožnici pa je **polmer** ali **radij** krožnice.

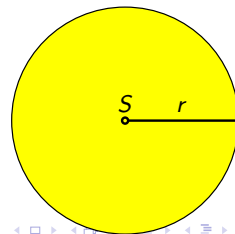


# Krog

**Krožnica** je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke  $S$ . Točko  $S$  imenujemo **središče** krožnice, razdalja  $r$  med središčem in poljubno točko na krožnici pa je **polmer** ali **radij** krožnice.



**Krog** s središčem  $S$  in polmerom  $r$  je množica ravninskih točk, katerih oddaljenost od središča je manjša ali enaka  $r$ . To pomeni, da je krog del ravnine omejen s krožnico.



# Štirikotnik

# Večkotnik

# Podobnost

# Podobnost v pravokotnem trikotniku

# Kotne funkcije kotov, velikih od $0^\circ$ do $90^\circ$

# Kotne funkcije kotov, velikih od $0^\circ$ do $360^\circ$

## Section 2

# Vektorji



## 1 Geometrija na ravnini in v prostoru

## 2 Vektorji

- Vektorske količine
- Računanje z vektorji
- Linearna kombinacija vektorjev, baza
- Skalarni produkt vektorjev
- Vektorji v koordinatnem sistemu
- Skalarni produkt v koordinatnem sistemu
- (i) Vektorski produkt
- (i) Premice v prostoru
- (i) Ravnine v prostoru

## 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

## 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila

# Vektorske količine

# Računanje z vektorji

# Linearna kombinacija vektorjev, baza

# Skalarni produkt vektorjev

# Vektorji v koordinatnem sistemu

# Skalarni produkt v koordinatnem sistemu

# (i) Vektorski produkt



# (i) Premice v prostoru

# (i) Ravnine v prostoru

## Section 3

# Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

## 1 Geometrija na ravnini in v prostoru

## 2 Vektorji

## 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

- Koreni poljubnih stopenj
- Potence z racionalnimi eksponenti
- Lastnosti funkcij
- Transformacije na ravnini
- Inverzna funkcija
- Potenčna funkcija z naravnim eksponentom
- Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom
- Korenska funkcija
- Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

## 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila

# Koreni poljubnih stopenj

# Potence z racionalnimi eksponenti

# Lastnosti funkcij

# Transformacije na ravnini



# Inverzna funkcija

# Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

# Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom

# Korenska funkcija

# Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

## Section 4

# Kvadratna funkcija, kompleksna števila

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
  - Kvadratna enačba
  - Kvadratna funkcija in parabola
  - Presečišča parabol
  - Kvadratna neenačba
  - Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi
  - Množica kompleksnih števil
  - Računanje s kompleksnimi števili

# Kvadratna enačba



# Kvadratna funkcija in parabola

# Presečišča parabol

# Kvadratna neenačba

# Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi

# Množica kompleksnih števil

# Računanje s kompleksnimi števili

## Section 5

# Eksponentna in logaritemska funkcija

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
- 5 Eksponentna in logaritemska funkcija**
  - Eksponentna enačba
  - Logaritem
  - Pravila za računanje z logaritmi
  - Logaritemska enačba
  - Eksponentna in logaritemska funkcija
  - Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo
  - Sprememba osnove logaritma



# Eksponentna enačba

## Štirje tipi eksponentne enačbe:

- 1 z enako osnovo:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

- 2 z različno osnovo in enakimi eksponenti:

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}, a \neq b \Rightarrow f(x) = 0$$

- 3 z različno osnovo in različnima eksponentoma:

$$a^{f(x)} = c; c \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{reševanje z logaritmom}$$

4

$$a^{f(x)} = g(x) \Rightarrow \text{grafično reševanje}$$

# Logaritem

**Logaritem** z osnovo  $a$  števila  $x$  je tisti eksponent, pri katerem je potenca z osnovo  $a$  enaka  $x$ :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

V zapisu  $\log_a x$  imenujemo število  $x$  **logaritmand**, število  $a$  pa **osnova logaritma**. Le-ta je pozitivna in različna od 1.

Logaritem z osnovo  $e$  imenujemo **naravni logaritem** in ga označimo z  $\ln$ :  $\log_e x = \ln x$ .

Logaritem z osnovo 10 imenujemo **desetiški logaritem** in ga označimo z  $\log$ :  $\log_{10} x = \log x$ .

## Lastnosti logaritmov

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x, \text{ kjer je } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \text{ kjer je } x > 0$$

# Pravila za računanje z logaritmi

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

## Prehod k novi osnovi

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

# Logaritemska enačba

Enačba je logaritemska, če v njej nastopa neznanka v osnovi ali v logaritmandu vsaj enega logaritma.

Reševanje logaritemske enačbe:

- z uporabo definicije;
- s pravili za logaritmiranje;
- s prehodom k isti osnovi;
- z uvedbo nove neznanke;
- grafično reševanje.

# EkspONENTNA in logaritemska funkcija

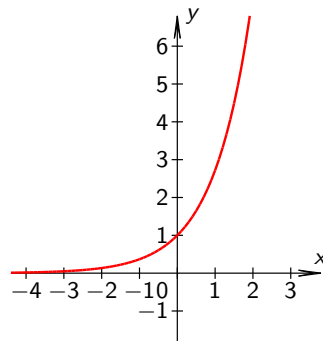
## EkspONENTNA funkcija

**EkspONENTNA funkcija** je realna funkcija oblike:

$$f(x) = a^x, \text{ kjer je } a > 0 \wedge a \neq 1.$$

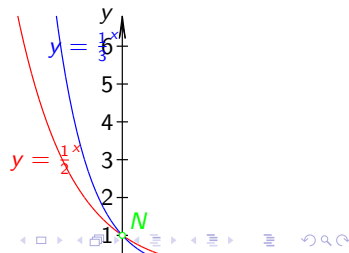
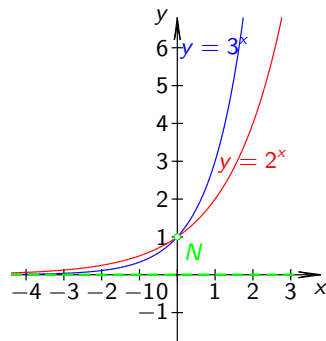
Število  $a$  imenujemo **osnova** eksponentne funkcije.

Kot poseben primer eksponentne funkcije velja **naravna eksponentna funkcija**  $f(x) = e^x$ . To je eksponentna funkcija, ki ima za osnovo Eulerjevo število  $e = 2,71828 \dots$



## Lastnosti eksponentne funkcije:

- definicijsko območje predstavljajo vsa realna števila:  
 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ ;
- zaloga vrednosti je množica pozitivnih realnih števil:  
 $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$ ;
- za  $a > 1$  je naraščajoča, za  $0 < a < 1$  je padajoča;
- je injektivna;
- vodoravna asimptota grafa funkcije je abscisna os:  
 $y = 0$ ;
- graf funkcije poteka skozi točko  $N(0, 1)$ .



# Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo



# Sprememba osnove logaritma

# Eksponentna in logaritemska neenačba