MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Gimnazija Antona Aškerca,
Šolski center Ljubljana

19. september 2025

Vsebina

Section 1

Geometrija v ravnini

1. Geometrija v ravnini
   - Osnovni geometrijski pojmi
   - Skladnost in merjenje
   - Vzporednost in pravokotnost
   - Trikotnik
   - Krožnica, krog, lok
   - Štirikotnik in pravilni *n*-kotnik
   - Podobnost

Osnovni geometrijski pojmi

Evklid je v prvi knjigi *Elementov* postavil 23 'opredelitev' temeljnih geometrijskih pojmov. Med njimi so:

- **Točka** je tisto, kar nima delov – nima razsežnosti.
- **Črta** je dolžina brez širine – ena razsežnost.
- **Ploskev** je tisto, kar ima samo dolžino in širino – dve razsežnosti.

Tem trditvam sledijo **aksiomi** (temeljne resnice) – privzamemo jih kot veljavne hipoteze, **izreki** – dokazujemo jih z aksiomi in prej dokazanimi izreki, in **definicije** – opisi novih pojmov in lastnosti.

Incidenčni aksiomi

Definicija

Incidenca je relacija, ki povezuje točko in premico – premica in točka sta v relaciji, če točka leži na premici; $A\ R\ p$, če $A \in p$.

Aksiom 1

Za dve različni točki A in B obstaja natanko določena premica p, tako da točki A in B ležita na njej.

Aksiom 2

Za vsako premico p obstajata vsaj dve različni točki P in Q, ki ležita na njej.

Aksiom 3

Obstajajo tri različne točke, ki ne ležijo hkrati na isti premici.

Definicija

Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ ki ležijo na isti premici, so **kolinearne**, če ne ležijo na isti premici, pa so **nekolinearne**.

Izrek

Dve različni premici imata lahko največ eno skupno točko.

Definicija

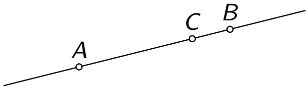
Premici, ki imata natanko eno skupno točko, se **sekata**, imenujemo ju **sečnici**, njuno skupno točko pa **presečišče** premic.

Definicija

Premici, ki ležita na isti ravnini in nimata nobene skupne točke ali imata vse točke skupne – sovpadata, sta **vzporedni**, imenujemo ju **vzporednici**.

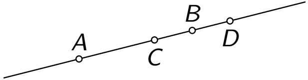
Aksiom

Če so tri različne točke kolinearne, ena vedno leži med drugima dvema.



Aksiom

Če sta A in B različni točki premice p, potem na premici p ležita vsaj še točki C in D, in sicer C leži med A in B, D pa tako, da je C med A in D.



Izrek

Med dvema različnima točkama premice je neskončno mnogo točk.

Definicija

Množica točk premice, ki ležijo med različnima točkama A in B, vključno z A in B, je **daljica** AB. Točki A in B sta njeni **krajišči**.

Definicija

Poljubna točka premice razdeli premico na dva **poltraka**. To točko imenujemo **izhodišče**, ponavadi jo označimo z O.

Definicija

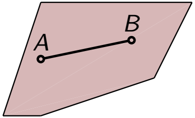
Premica, na kateri leži daljica oziroma poltrak, je **nosilka** daljice oziroma poltraka.

Definicija

Enostavni lik je množica točk v ravnini, ki jo omejuje sklenjena krivulja, ki sama sebe ne seka.

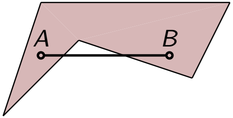
Definicija

Množica točk v ravnini je **konveksna**, če za poljubni točki A in B iz te množice velja, da je daljica AB njena podmnožica.



$$\mathcal{M} \text{ konveksna} \Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB \subseteq \mathcal{M}$$

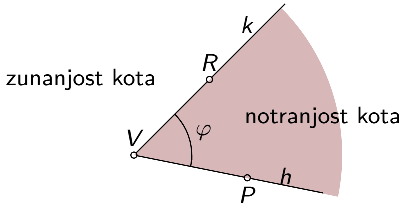
Množica točk, ki ni konveksna, je **nekonveksna** oziroma **konkavna**.



$$\mathcal{M} \text{ nekonveksna} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB \not\subseteq \mathcal{M}$$

Definicija

Dva poltraka s skupnim izhodiščem določata dva **kota**. Izhodišče poltrakov imenujemo **vrh** kota, poltraka pa imenujemo **kraka** kota.



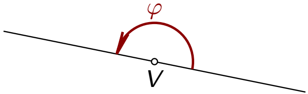
Če poltraka ne ležita na isti premici, je eden od kotov konveksen, drugi pa je nekonveksen.

Kot lahko označimo na več načinov:

- $\angle(h, k)$, kjer sta h in k poltraka, ki kot določata;
- $\angle PVR$, kjer je P točka na enem poltraku, V vrh kota in R točka na drugem poltraku;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – z grškimi črkami.

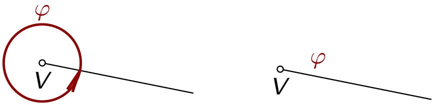
Definicija

Če poltraka s skupnim izhodiščem ležita na isti premici, vendar na različnih straneh izhodišča, določata dva enaka konveksna kota – **iztegnjena kota**.



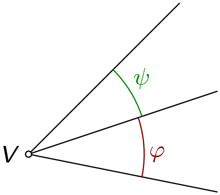
Definicija

Če se poltraka na isti premici prekrivata, določata **polni kot** ali **ničelni kot**.

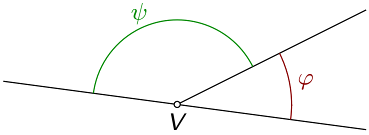


Definicija

Kota s skupnim vrhom, ki imata en skupen krak, presek njunih notranjosti pa je prazen, sta **sosedna kota**.



Sosedna kota, katerih kraka, ki nista skupna, ležita na isti premici, sta **sokota**.



Definicija

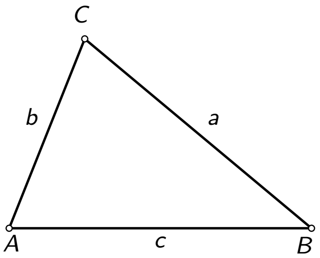
Tri nekolinearne točke A, B in C določajo **trikotnik** $\triangle ABC$. Točke A, B in C so **oglišča** trikotnika, daljice AB, BC in AC so njegove **stranice**.

Koti α, β in γ so **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti** trikotnika.

Trikotnik je **pozitivno orientiran**, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca; če si sledijo v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **negativno orientiran**.

Definicija

Tri nekolinearne točke A, B in C določajo **trikotnik** $\triangle ABC$. Točke A, B in C so **oglišča** trikotnika, daljice AB, BC in AC so njegove **stranice**.

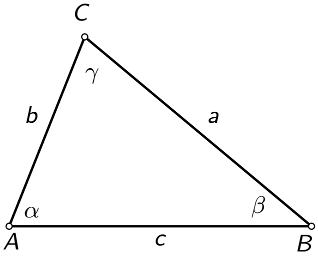


Koti α, β in γ so **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti** trikotnika.

Trikotnik je **pozitivno orientiran**, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca; če si sledijo v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **negativno orientiran**.

Definicija

Tri nekolinearne točke A, B in C določajo **trikotnik** $\triangle ABC$. Točke A, B in C so **oglišča** trikotnika, daljice AB, BC in AC so njegove **stranice**.

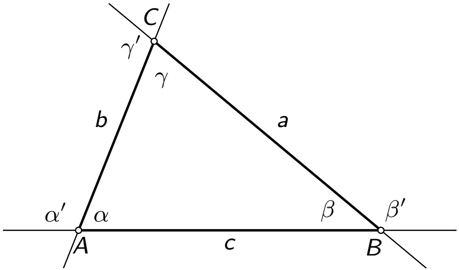


Koti α, β in γ so **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti** trikotnika.

Trikotnik je **pozitivno orientiran**, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca; če si sledijo v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **negativno orientiran**.

Definicija

Tri nekolinearne točke A, B in C določajo **trikotnik** $\triangle ABC$. Točke A, B in C so **oglišča** trikotnika, daljice AB, BC in AC so njegove **stranice**.



Koti α, β in γ so **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti** trikotnika.

Trikotnik je **pozitivno orientiran**, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca; če si sledijo v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **negativno orientiran**.

Definicija

Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ v ravnini, od katerih nobene zaporedne tri niso kolinearne, določajo n-**kotnik**.
Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ so **oglišča** n-kotnika; daljice, ki povezujejo sosedni oglišči, $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ so **stranice** n-kotnika; daljice, ki povezujejo po dve nesosedni oglišči, pa so **diagonale** n-kotnika.

Poljuben n-kotnika ima

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonal – iz vsakega od n oglišč gre $n-3$ diagonal, vsaka pa je šteta dvakrat.

Če za vsako nosilko stranice n-kotnika velja, da preostala oglišča ležijo na isti strani te nosilke, je n-kotnik **konveksen**.

Naloga

Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.

Naloga

Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.

Naloga

Ugotovite, ali obstaja n-kotnik, ki ima desetino toliko diagonal kot 28-kotnik. Če obstaja, izračunajte, koliko stranic ima.

Naloga

Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.

Naloga

Ugotovite, ali obstaja n-kotnik, ki ima desetino toliko diagonal kot 28-kotnik. Če obstaja, izračunajte, koliko stranic ima.

Naloga

Kateri n-kotnik ima štirikrat toliko diagonal kot stranic?

Naloga

Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.

Naloga

Ugotovite, ali obstaja n-kotnik, ki ima desetino toliko diagonal kot 28-kotnik. Če obstaja, izračunajte, koliko stranic ima.

Naloga

Kateri n-kotnik ima štirikrat toliko diagonal kot stranic?

Naloga

Izračunajte, kateri n-kotnik ima: 104 diagonale, 230 diagonal, $2n - 5$ diagonal.

Naloga

Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.

Naloga

Ugotovite, ali obstaja n-kotnik, ki ima desetino toliko diagonal kot 28-kotnik. Če obstaja, izračunajte, koliko stranic ima.

Naloga

Kateri n-kotnik ima štirikrat toliko diagonal kot stranic?

Naloga

Izračunajte, kateri n-kotnik ima: 104 diagonale, 230 diagonal, $2n - 5$ diagonal.

Naloga

Pokažite, da ne obstaja n-kotnik, ki ima 13 diagonal.

Naloga

Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.

- Tri različne točke, so vedno nekolinearne.
- Petkotnik ima enako število diagonal in stranic.
- Štiri različne premice se sekajo v največ 4 različnih točkah.
- Skozi štiri kolinearne točke gredo tri različne premice.
- Vzporedni premici imata lahko neskončno mnogo skupnih točk.

Naloga

Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.

- Tri različne točke, so vedno nekolinearne.
- Petkotnik ima enako število diagonal in stranic.
- Štiri različne premice se sekajo v največ 4 različnih točkah.
- Skozi štiri kolinearne točke gredo tri različne premice.
- Vzporedni premici imata lahko neskončno mnogo skupnih točk.

Naloga

Pokažite, da je število diagonal 25-kotnika večkratnik števila njegovih stranic.

Naloga

Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.

- Tri različne točke, so vedno nekolinearne.
- Petkotnik ima enako število diagonal in stranic.
- Štiri različne premice se sekajo v največ 4 različnih točkah.
- Skozi štiri kolinearne točke gredo tri različne premice.
- Vzporedni premici imata lahko neskončno mnogo skupnih točk.

Naloga

Pokažite, da je število diagonal 25-kotnika večkratnik števila njegovih stranic.

Naloga

Vsota števila stranic in diagonal n-kotnika je 105? Kateri n-kotnik je to?

Naloga

Izračunajte, kateri n-kotnik ima toliko diagonal kot stranic.

Naloga

Izračunajte, kateri n-kotnik ima toliko diagonal kot stranic.

Naloga

Člani filatelističnega društva so se domenili, da si bodo za praznike spet pošiljali voščilnice po klasični pošti. Ko so se dobili po novem letu, so prinesli vse voščilnice in jih našteli 132. Izračunajte, koliko članov društva, si je medseboj poslalo voščilnice.

Skladnost

Definicija

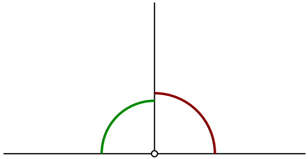
Dva lika L in L' sta **skladna**, če lahko lik L prenesemo na lik L' tako, da se popolnoma prekrijeta.
Znak za skladnost je $\cong$.

Skladnost je v množici ravninskih likov *ekvivalenčna relacija*, saj je:

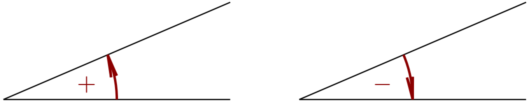
- *refleksivna*: $L \cong L$ – vsaka množica je skladna sama s seboj;
- *simetrična*: $L \cong L' \Rightarrow L' \cong L$ – če je prva množica skladna z drugo, je tudi druga skladna s prvo;
- *tranzitivna*: $L \cong L' \wedge L' \cong L'' \rightarrow L \cong L''$ – če je prva množica skladna z drugo in druga skladna s tretjo, je tudi prva množica skladna s tretjo množico.

Definicija

Kot, ki je skladen s svojim sokotom, je **pravi kot**.



Če si kraka sledita v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca, je **orientacija kota pozitivna**, če pa si sledita v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **orientacija kota negativna**.

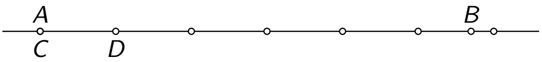


Merjenje

Daljici AB in CD, ki nista skladni, lahko premaknemo na poljubni premici tako, da levi krajišči sovpadata in da eno od desnih krajišč, npr. D leži med A in B. V tem primeru je daljica AB **daljša** od daljice CD oziroma je daljica CD **krajša** od daljice AB.

Arhimedov aksiom

Obstaja tako naravno število n, pri katerem je vsota n krajših daljic CD daljša od daljice AB, vsota $n-1$ krajših daljic CD pa je kvečjemu skladna z daljico AB.



Daljico CD imenujemo **enotska daljica**. Daljici AB smo priredili natančno določeno število – **dolžino** daljice AB oziroma **razdaljo** točk A in B.

$$|AB| = d(A, B)$$

Aksiom

Če je AB poljubna daljica, A' pa točka na poljubnem poltraku, obstaja na tem poltraku natančno določena točka B', da je daljica $A'B'$ skladna z daljico AB.

$$A'B' \cong AB$$

Izrek

Skladni daljici imata enako dolžino.

Aksiom

Naj daljici AB in BC ležita na isti premici in naj imata skupno le točko B. Daljici $A'B'$ in $B'C'$ naj ležita na tej ali neki drugi premici in naj imata skupno točko B'. Če velja $AB \cong A'B'$ in $BC \cong B'C'$, potem velja tudi $AC \cong A'C'$.

Izrek

Dolžina vsote daljic je enaka vsoti dolžin posameznih daljic.

Enote

Osnovna enota za merjenje dolžine je **meter**.
Iz nje izpeljane enote pa so *decimeter*, *centimeter*, *milimeter*, *kilometer* itd.

$$1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm$$

$$1\ km = 1000\ m$$

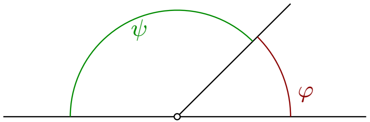
Enota za merjenje kotov je **kotna stopinja** – velikost $\frac{1}{360}$ polnega kota.
Izpeljani enoti sta *(kotna) minuta* in *(kotna) sekunda*.

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

Velikost kota nič je 0°, pravega kota je 90°, iztegnjenega kota je 180°, polnega kota pa je 360°.

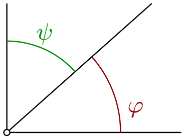
Definicija

Kota φ in ψ, katerih vsota meri 180°, sta **suplementarna kota**.



Definicija

Kota φ in ψ, katerih vsota meri 90°, sta **komplementarna kota**.



Sokota sta vedno suplementarna kota.

Skladnost trikotnikov

Definicija

Dva trikotnika sta **skladna**, če imata paroma skladne vse stranice in tem stranicam nasprotne kote.

Aksiom

Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata v dveh stranicah in v vmesnem kotu.

Izrek

Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta skladna, če se ujemata:

1. v vseh treh stranicah;
2. v eni stranici in obeh priležnih kotih;
3. v dveh stranicah in kotu, ki leži nasproti daljši od obeh stranic.

Naloga

Izračunajte dolžino daljice, če ena polovica meri $2x - 7$ enot, druga polovica pa $x + 8$ enot.

Naloga

Izračunajte dolžino daljice, če ena polovica meri $2x - 7$ enot, druga polovica pa $x + 8$ enot.

Naloga

Izračunaj dolžino x daljice AB, če je točka S njeno razpolovišče, točka R pa razpolovišče daljice SB in je $|SR| = \frac{x}{3} - 1$.

Naloga

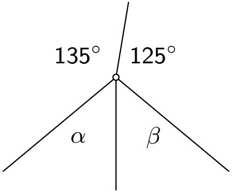
Izračunajte dolžino daljice, če ena polovica meri $2x - 7$ enot, druga polovica pa $x + 8$ enot.

Naloga

Izračunaj dolžino x daljice AB, če je točka S njeno razpolovišče, točka R pa razpolovišče daljice SB in je $|SR| = \frac{x}{3} - 1$.

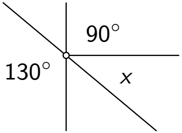
Naloga

Izračunajte velikosti kotov α in β, če je $\alpha = \beta$. Podatke razberite s skice.



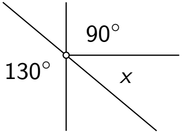
Naloga

Iz podatkov na skici izračunajte neznano velikost kota x.



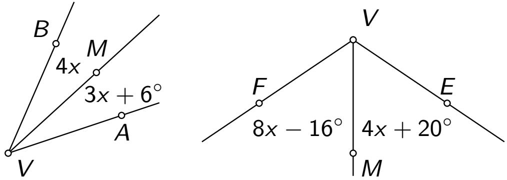
Naloga

Iz podatkov na skici izračunajte neznano velikost kota x.



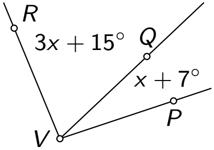
Naloga

Izračunajte velikosti kotov $\angle AVM$ in $\angle FVE$, če poltrak VM obakrat razpolavlja kot.



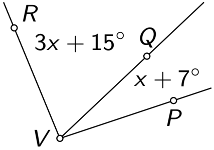
Naloga

Izračunajte velikost kota $\angle PVQ$, če je $\angle PVR = 94^\circ$.



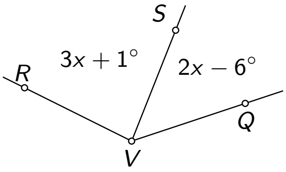
Naloga

Izračunajte velikost kota $\angle PVQ$, če je $\angle PVR = 94^\circ$.



Naloga

Izračunajte velikost kota $\angle SVR$, če je $\angle QVS = 50^\circ$.



Naloga

Kot $\varphi = 76^\circ 36' 53''$ zapišite v stopinjah na štiri mesta natančno, kot $\psi = 34.78^\circ$ pa zapišite v stopinjah, minutah in sekundah.

Naloga

Kot $\varphi = 76°36'53''$ zapišite v stopinjah na štiri mesta natančno, kot $\psi = 34.78°$ pa zapišite v stopinjah, minutah in sekundah.

Naloga

Kotu $\varphi = 37°16'43''$ izračunajte suplementarni in komplementarni kot.

Naloga

Kot $\varphi = 76^\circ 36' 53''$ zapišite v stopinjah na štiri mesta natančno, kot $\psi = 34.78^\circ$ pa zapišite v stopinjah, minutah in sekundah.

Naloga

Kotu $\varphi = 37^\circ 16' 43''$ izračunajte suplementarni in komplementarni kot.

Naloga

Razika dveh komplementarnih kotov je $37^\circ 16'$. Izračunajte velikosti kotov.

Naloga

Kot $\varphi = 76^\circ 36' 53''$ zapišite v stopinjah na štiri mesta natančno, kot $\psi = 34.78^\circ$ pa zapišite v stopinjah, minutah in sekundah.

Naloga

Kotu $\varphi = 37^\circ 16' 43''$ izračunajte suplementarni in komplementarni kot.

Naloga

Razika dveh komplementarnih kotov je $37^\circ 16'$. Izračunajte velikosti kotov.

Naloga

Kot φ je petkratnik svojega komplementarnega kota. Izračunajte njegovo velikost.

Naloga

Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.

- Sokota sta suplementarna.
- Kot z velikostjo 45° je komplementaren samemu sebi.
- Dve premici, ki se sekata, lahko določata kota z velikostjo 43° in 137°.
- Vsota velikosti dveh komplementarnih kotov je pravi kot.
- Suplementarna kota sta vedno tudi sokota.

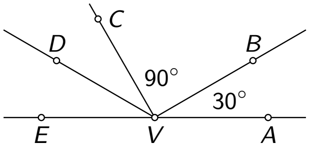
Naloga

Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.

- Sokota sta suplementarna.
- Kot z velikostjo 45° je komplementaren samemu sebi.
- Dve premici, ki se sekata, lahko določata kota z velikostjo 43° in 137°.
- Vsota velikosti dveh komplementarnih kotov je pravi kot.
- Suplementarna kota sta vedno tudi sokota.

Naloga

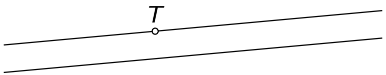
Poltrak VD razpolavlja $\angle CVE$, $\angle BVC$ je pravi kot. Določite velikosti kotov $\angle AVD$ in $\angle BVE$.



Vzporednost

Aksiom o vzporednici

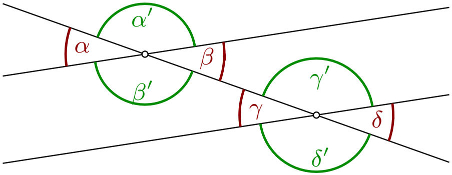
Skozi izbrano točko, ki ne leži na premici, lahko tej premici načrtamo natanko eno vzporednico.



Vzporednost je v množici premic na ravnini *ekvivalenčna relacija*, saj je:

- *refleksivna*: $p \parallel p$ – vsaka premica je vzporedna sama sebi;
- *simetrična*: $p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$ – če je premica p vzporedna premici q, je tudi premica q vzporedna premici p;
- *tranzitivna*: $p \parallel q \wedge q \parallel r \rightarrow p \parallel r$ – če je premica p vzporedna premici q, premica q pa vzporedna premici r, je tudi premica p vzporedna premici r.

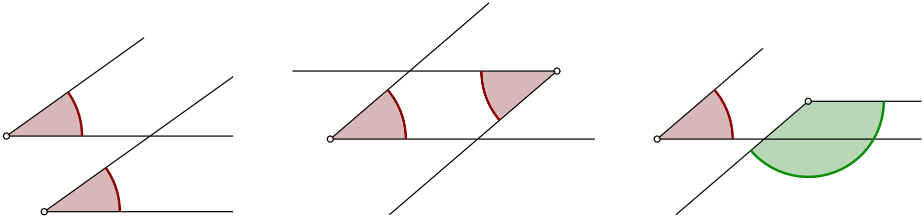
Če vzporednici sekamo s premico, dobimo dve presečišči, ob njiju pa pare **kotov z vzporednimi kraki**:



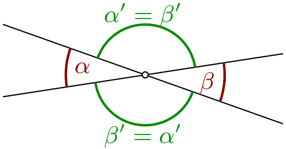
- pari kotov (α, γ), (β, δ), (α', γ'), (β', δ') imajo oba kraka vzporedna v isto smer;
- pari kotov z istim vrhom (α, β); (γ, δ), (α', β'); (γ', δ') imajo oba kraka vzporedna v nasprotno smer – **sovršni koti**;
- pari kotov (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ') imajo en krak vzporeden v isto smer, drugi krak pa vzporeden v nasprotno smer.

Izrek

Para konveksnih kotov z vzporednimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.



Sovršna kota sta skladna – imata isti sokot.



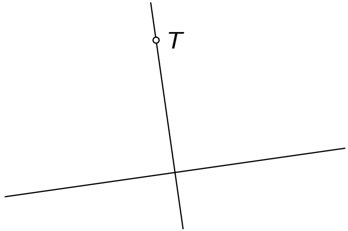
Pravokotnost

Definicija

Pravokotnica je premica, ki dano premico seka pod pravim kotom.

Izrek

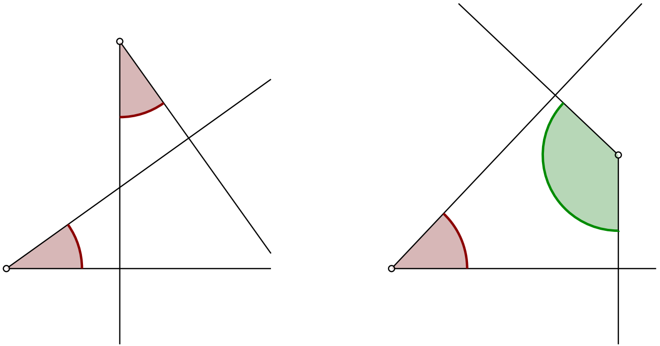
Skozi izbrano točko lahko na dano premico načrtamo natanko eno pravokotnico.



Kota s pravokotnimi kraki sta konveksna kota, katerih nosilki krakov enega kota sta pravokotni na nosilki krakov drugega kota.

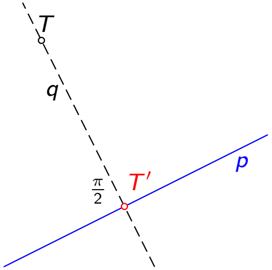
Izrek

Para konveksnih kotov s pravokotnimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.



Definicija

Pravokotna projekcija točke T na premico p je točka T', ki leži na presečišču premice p in pravokotnice q skozi točko T na premico p.
Točka T' je točki T najbližja točka premice p.



Razdalja točke T od premice p je:

$$d(T,p) = d(T,T') = |TT'| .$$

Pravokotna projekcija daljice AB na premico je daljica $A'B'$, katere krajišči sta pravokotni projekciji točk A in B.

Toge preslikave

Definicija

Toga preslikava (izometrija) je preslikava v ravnini, ki ohranja razdalje.

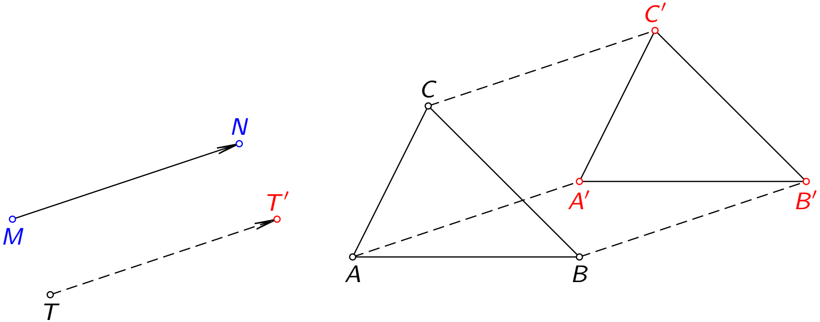
$$\tau : A \mapsto A'$$
$$\tau : B \mapsto B'$$
$$d(A, B) = d(A', B')$$

Med toge preslikave spadajo:

- **vzporedni premiki**;
- **zrcaljenje preko premice/premice**;
- **rotacija okoli točke**.

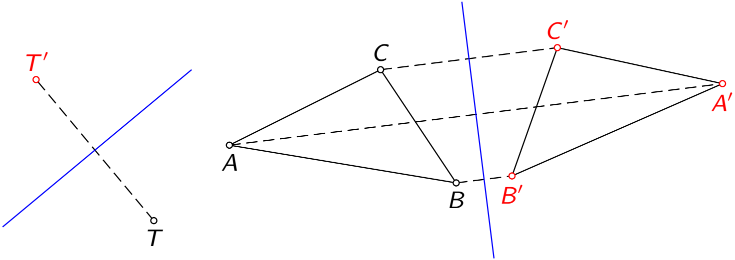
Če kombiniramo več togih preslikav, je dobljena preslikava spet toga preslikava.

Vzporedni premik ali **translacija** za dano usmerjeno daljico $\overrightarrow{MN}$ preslika točko T v tako točko T', da sta daljici TT' in MN enako dolgi, vzporedni in enako usmerjeni.



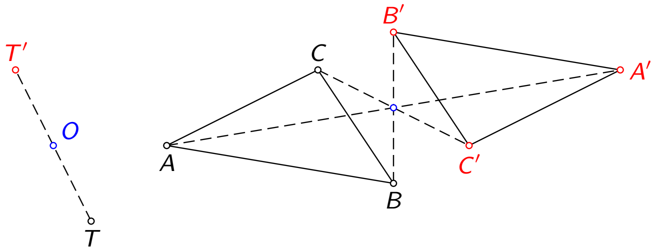
Vzporedni premik ohranja orientacijo likov, daljice preslika v enako dolge vzporedne daljice, ohranja velikost kotov, like preslika v skladne like, nima negibnih točk za $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$.

Zrcaljenje čez premico p preslika točko T v tako točko T', da premica p pod pravim kotom razpolavlja daljico TT'.



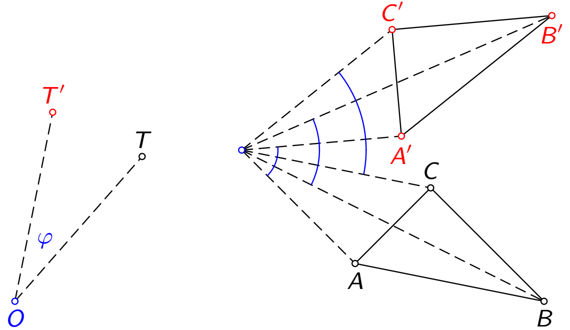
Zrcaljenje čez premico daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikost kotov, ne ohranja orientacije likov, like preslika v skladne like, premic ne preslika v vzporedne premice.

Zrcaljenje čez točko O preslika točko T v tako točko T', da je O razpolovišče daljice TT'. Ta preslikava je enaka vrtenju okrog točke za 180°.



Zrcaljenje čez točko daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice preslika v vzporedne premice.

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



Vrtenje okoli točke preslika daljice v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premic pa ne preslika v vzporedne premice.

Simetrija

Množica točk $\mathcal{M}$ je **simetrična/somerna glede na premico** p, če se pri zrcaljenju čez premico p preslika sama vase. Premico p imenujemo **simetrala**/**somernica**/**simetrijska os** množice $\mathcal{M}$.

Množica točk $\mathcal{M}$ je **središčno simetrična/somerna glede na točko** T, če se pri zrcaljenju čez točko T preslika sama vase. Točko T imenujemo **center simetrije** množice $\mathcal{M}$.

Naloga

Narišite kvadrat s stranico dolžine 1 in ga:

- vzporedno premaknite vzdolž ordinatne osi za 3 enota;
- zavrtite okrog oglišča B za kot 45° v negativni smeri;
- zrcalite preko nosilke stranice CD.

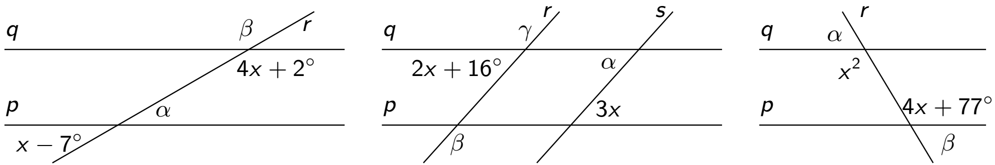
Naloga

Narišite kvadrat s stranico dolžine 1 in ga:

- vzporedno premaknite vzdolž ordinatne osi za 3 enota;
- zavrtite okrog oglišča B za kot 45° v negativni smeri;
- zrcalite preko nosilke stranice CD.

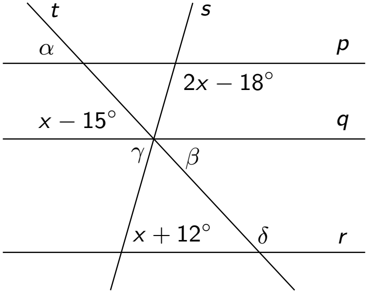
Naloga

Izračunajte velikosti kotov α, β in γ. Podatke razberite iz skic. Velja $p \parallel q$ in $r \parallel s$.



Naloga

S skice preberite ustrezne podatke ter izračunajte velikosti kotov α, β, γ in δ. Pri tem velja, da so premice p, q in r vzporedne.



Trikotnik

Definicija

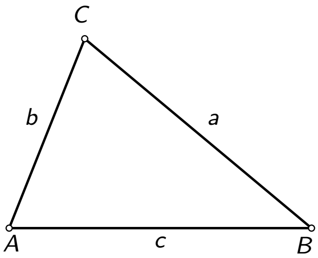
Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranicami** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.

V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Trikotnik

Definicija

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranicami** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.

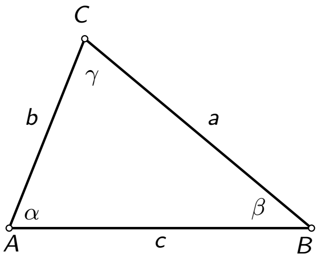


V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Trikotnik

Definicija

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranicami** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.

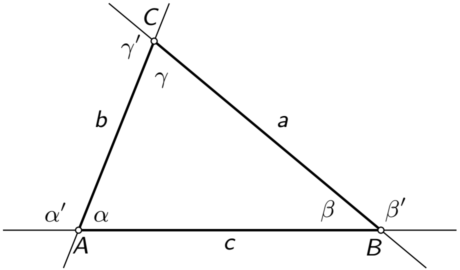


V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Trikotnik

Definicija

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranicami** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Izrek

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Izrek

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Izrek

Vsota zunanjih kotov trikotnika je 360°:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Izrek

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Izrek (Trikotniška neenakost)

Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

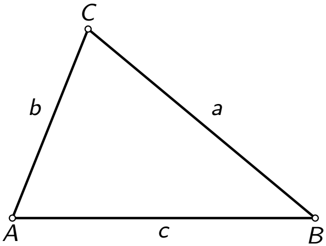
$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Izrek

Vsaka stranica trikotnika je daljša od absolutne vrednosti razlike dolžin drugih dveh stranic.

Definicija

Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

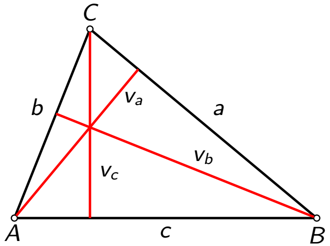


Izrek

Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**.

Definicija

Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

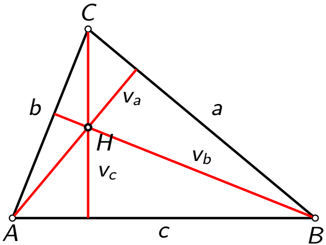


Izrek

Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**.

Definicija

Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

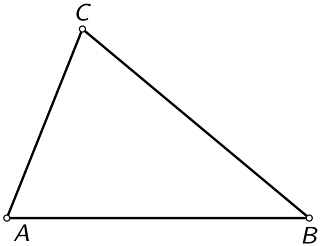


Izrek

Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**.

Definicija

Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.

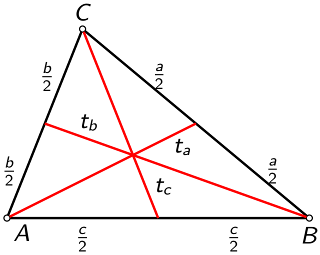


Izrek

Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju 1 : 2.

Definicija

Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.

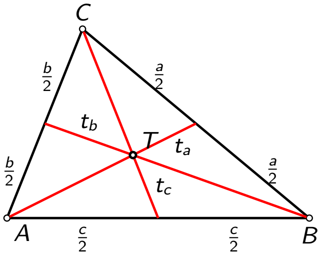


Izrek

Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju $1 : 2$.

Definicija

Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.

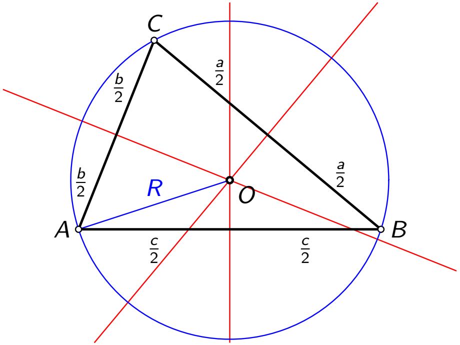


Izrek

Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika.
Težišče deli težiščnico v razmerju 1 : 2.

Izrek

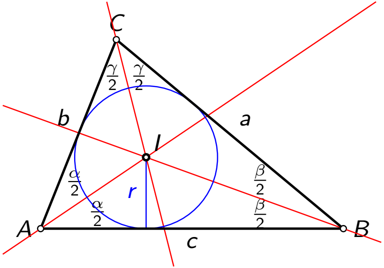
Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki – **središču trikotniku očrtane krožnice**.



Očrtana krožnica poteka skozi vsa oglišča trikotnika. Vse stranice trikotnika so tetive krožnice.

Izrek

Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.

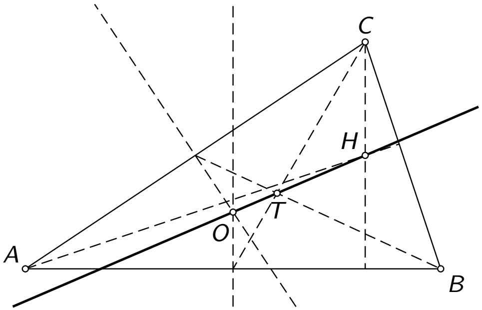


Včrtana krožnica ima vse tri stranice trikotnika za tangente.

Težišče, središče trikotniku očrtane kroznice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Izrek

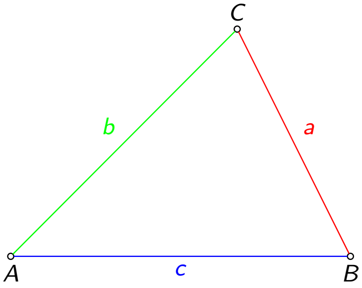
Višinska točka, središče očrtane krožnice in težišče so vedno kolinearne. Premico, ki jih povezuje, imenujemo **Eulerjeva premica**.



Vrste trikotnikov – glede na stranice

Vrste trikotnikov – glede na stranice

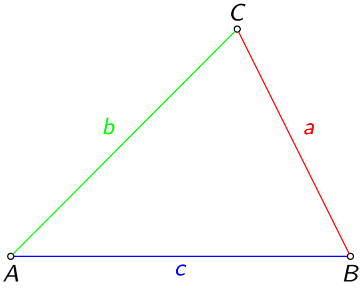
RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



vse tri stranice različno dolge

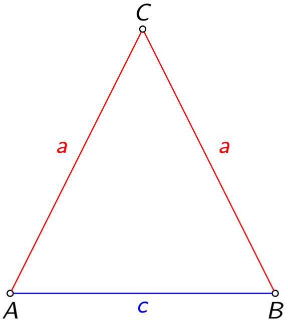
Vrste trikotnikov – glede na stranice

RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



vse tri stranice različno dolge

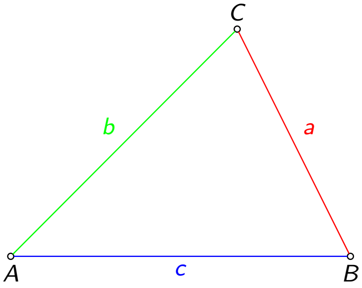
ENAKOKRAKI TRIKOTNIK



dve stranici enako dolgi

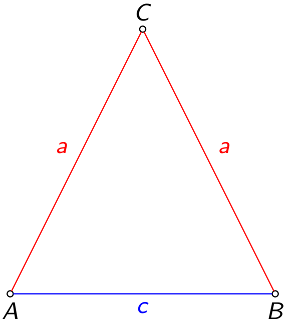
Vrste trikotnikov – glede na stranice

RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



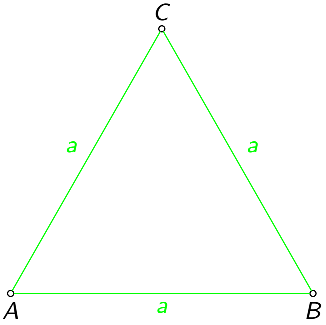
vse tri stranice različno dolge

ENAKOKRAKI TRIKOTNIK



dve stranici enako dolgi

ENAKOSTRANIČNI ali PRAVILNI TRIKOTNIK

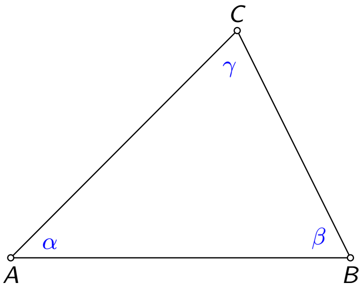


vse tri stranice enako dolge

Vrste trikotnikov – glede na kote

Vrste trikotnikov – glede na kote

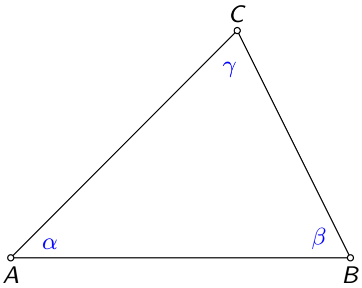
OSTROKOTNI TRIKOTNIK



ima tri ostre notranje kote

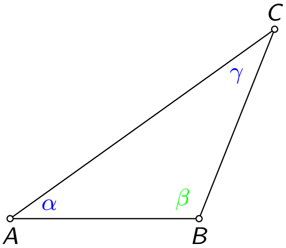
Vrste trikotnikov – glede na kote

OSTROKOTNI TRIKOTNIK



ima tri ostre notranje kote

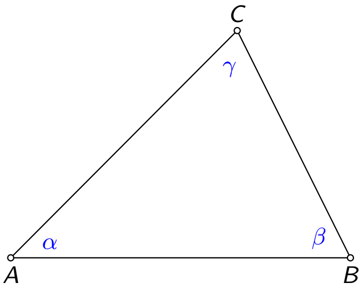
TOPOKOTNI TRIKOTNIK



ima en topi notranji kot, ostala dva kota ostra

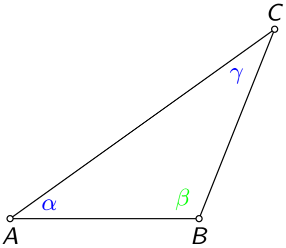
Vrste trikotnikov – glede na kote

OSTROKOTNI TRIKOTNIK



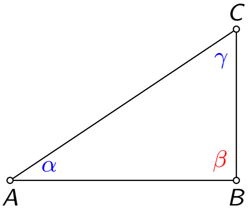
ima tri ostre notranje kote

TOPOKOTNI TRIKOTNIK



ima en topi notranji kot, ostala dva kota ostra

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK



ima en pravi notranji kot, ostala dva kot ostra

Naloga

Dve stranici trikotnika merita 2 in 7 enot. Zapišite interval vrednosti za dolžino tretje stranice tega trikotnika.

Naloga

Dve stranici trikotnika merita 2 in 7 enot. Zapišite interval vrednosti za dolžino tretje stranice tega trikotnika.

Naloga

Ali obstaja trikotnik, katerega dolžine stranic so rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} a+b+c&=16\\ a-c&=2\\ a+b&=13. \end{aligned}$$

Naloga

Dve stranici trikotnika merita 2 in 7 enot. Zapišite interval vrednosti za dolžino tretje stranice tega trikotnika.

Naloga

Ali obstaja trikotnik, katerega dolžine stranic so rešitve sistema enačb:

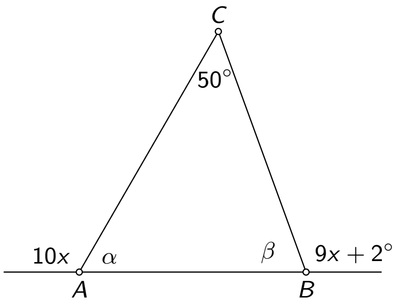
$$
\begin{aligned}
a + b + c &= 16 \\
a - c &= 2 \\
a + b &= 13.
\end{aligned}
$$

Naloga

Za katere vrednosti števila x obstaja trikotnik s stranicami dolžin $x + 7$, $2x + 2$ in $3x - 1$?

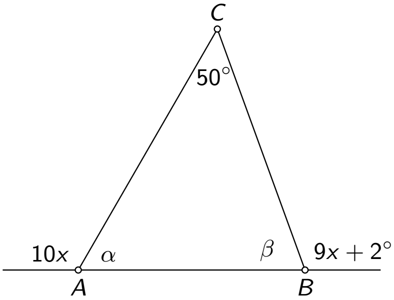
Naloga

Izračunajte velikosti kotov α in β.



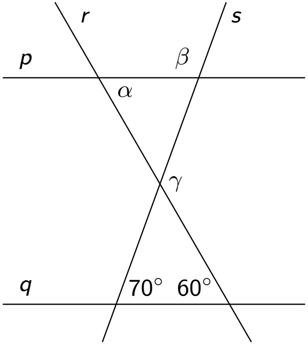
Naloga

Izračunajte velikosti kotov α in β.



Naloga

Premici p in q sta vzporedni. Izračunajte velikosti kotov α, β in γ.



Naloga

Izračunajte velikosti vseh notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je vsota velikosti dveh zunanjih kotov $\alpha' + \gamma' = 230°$, vsota velikosti dveh notranjih kotov pa $\alpha + \beta = 70°$.

Naloga

Izračunajte velikosti vseh notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je vsota velikosti dveh zunanjih kotov $\alpha' + \gamma' = 230°$, vsota velikosti dveh notranjih kotov pa $\alpha + \beta = 70°$.

Naloga

Izračunajte velikosti vseh notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je vsota velikosti dveh zunanjih kotov $\alpha' + \beta' = 234°$, razlika velikosti dveh notranjih kotov pa $\alpha - \beta = 28°$.

Naloga

Narišite trikotnik s podatki:

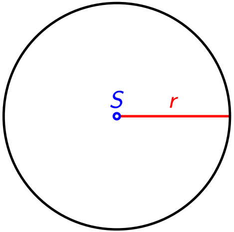
- $a = 4\ cm$, $b = 5\ cm$ in $c = 7\ cm$,
- $a = 4\ cm$, $b = 6\ cm$ in $\beta = 60^\circ$,
- $a = 4\ cm$, $b = 4.5\ cm$ in $t_a = 4\ cm$,
- $b = 4\ cm$, $t_b = 5\ cm$ in $\gamma = 105^\circ$,
- $v_a = 4\ cm$, $t_c = 2.5\ cm$ in $\beta = 30^\circ$,
- $b = 5\ cm$, $v_a = 2\ cm$ in $\beta = 30^\circ$,
- $a + b + c = 13\ cm$, $v_c = 3\ cm$ in $\alpha = 60^\circ$,
- $a + b = 7\ cm$, $\alpha = 45^\circ$ in $v_b = 4\ cm$.

Krožnica in krog

Definicija

Krožnica je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke S – **središče** krožnice. Razdalja r med središčem in poljubno točko na krožnici je **polmer** ali **radij** krožnice.

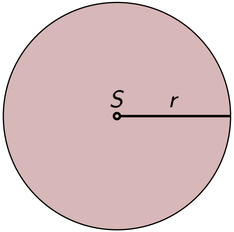
$$\mathcal{K} = \{T; d(T, S) = r\}$$



Definicija

Krog s središčem S in polmerom r je množica ravninskih točk, katerih oddaljenost od središča je manjša ali enaka r.

$$\mathcal{K} = \{T; d(T, S) \leq r\}$$



Definicija

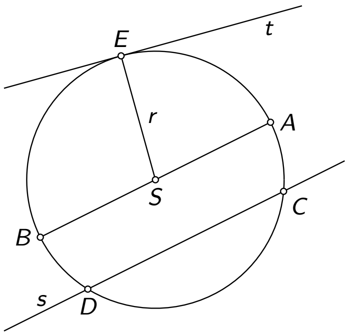
Premico s, ki seka krožnico, imenujemo **sekanta** krožnice. Zveznica CD njenih presečišč s krožnico je **tetiva**. Presečišči C in D razdelita krožnico na dva **krožna loka** $\overset{\frown}{CD}$ in $\overset{\frown}{DC}$.

Definicija

Premico t, ki se dotika krožnice v točki E, imenujemo **dotikalnica** ali **tangenta** krožnice. Polmer SE, ki povezuje dotikališče s središčem S, je pravokoten na tangento.

Definicija

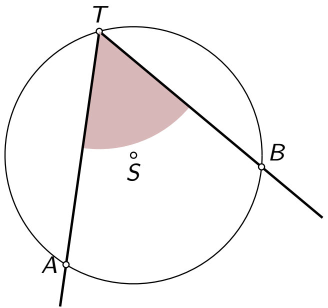
Točki A in B imenujemo **diametralni točki**, njuna zveznica je **premer** ali **diameter**.



Obodni in središčni kot

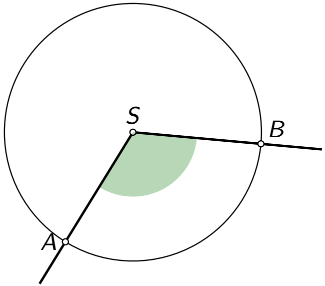
Definicija

Obodni kot nad lokom $\overset{\frown}{AB}$ je kot, ki ima vrh na krožnici, kraka pa gresta skozi točki A in B, ki določata lok.



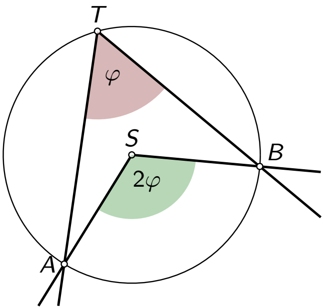
Definicija

Središčni kot nad lokom $\overset{\frown}{AB}$ je kot, ki ima vrh v središču krožnice, kraka pa gresta skozi točki A in B, ki določata lok.



Izrek

Nad istim lokom meri obodni kot polovico središčnega kota.

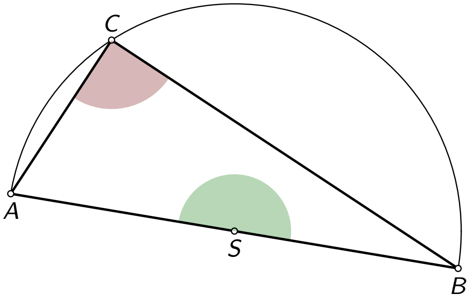


Izrek

Vsi obodni koti nad istim lokom so enaki/skladni.

Izrek (Talesov izrek o kotu v polkrogu)

Če je osnovnica trikotnika premer kroga in tretje oglišče trikotnika leži na krožnici, je trikotnik pravokoten.



Kotu v polkrogu pravimo tudi obodni kot nad premerom kroga.

Naloga

Vsota velikosti središčnega in obodnega kota nad istim lokom je 174°. Koliko merita središčni in obodni kot?

Naloga

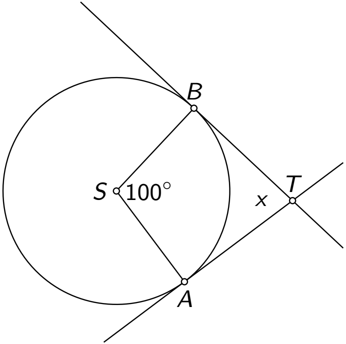
Središčni kot je za 64° večji od obodnega kota nad istim lokom. Izračunajte velikosti obeh kotov.

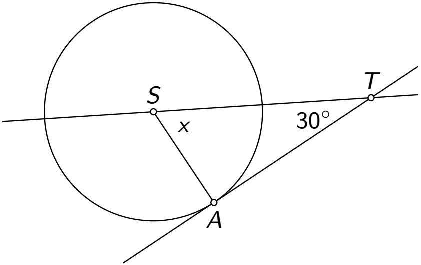
Naloga

Krožnica je razdeljena s tremi točkami A, B in C na tri loke AB, BC in CA, ki so po dolžini v razmerju $2 : 7 : 9$. Izračunajte velikosti središčnih kotov, ki pripadajo tem lokom, ter notranjih kotov trikotnika $\triangle ABC$. Pomagajte si s skico.

Naloga

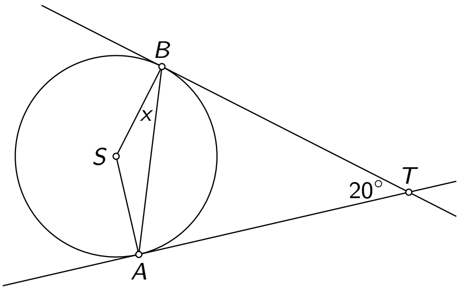
Izračunajte vrednost neznanke x, če sta premici skozi točki A in T ter B in T tangenti na krožnico.

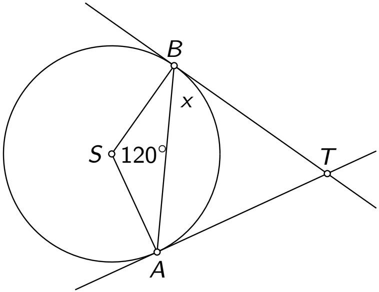




Naloga

Izračunajte vrednost neznanke x, če sta premici skozi točki A in T ter B in T tangenti na krožnico.





Štirikotnik

Štirikotnike delimo glede na število parov vzporednih stranic v tri skupine:

- **paralelograme**, ki imajo dva para vzporednih stranic;
- **trapeze**, ki imajo en par vzporednih stranic;
- **trapezoide**, ki nimajo nobenega para vzporednih stranic.

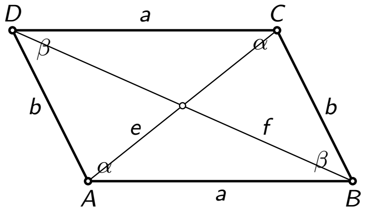
Vsak štirikotnik ima dve diagonali.
Diagonala e povezuje oglišči A in C, diagonala f pa oglišči B in D.

Izrek

Vsota notranjih kotov štirikotnika je $360°$.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Paralelogram



Izrek

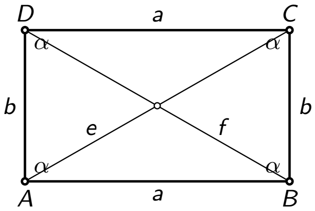
Naslednje trditve so enakovredne in karakterizirajo paralelogram:

1. Poljubni nasprotni stranici sta skladni ($|AB| = |CD| = a$ in $|AD| = |BC| = b$).
2. Diagonali se razpolavljata.
3. Poljubna sosednja kota sta suplementarna ($\alpha + \beta = 180^\circ$).
4. Poljubna nasprotna kota sta skladna.

Paralelograme delimo na *pravokotne* in *poševnokotne* oziroma na *enakostranične* in *raznostranične*.

Definicija

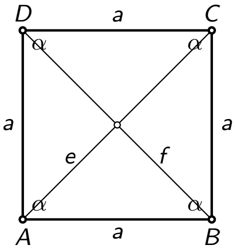
Pravokotnik je pravokotni raznostranični paralelogram.



Diagonali v pravokotniku sta skladni ($e = f$) in se razpolavljata; vsi notranji koti so pravi ($\alpha = 90^\circ$); višine so stranice same.

Definicja

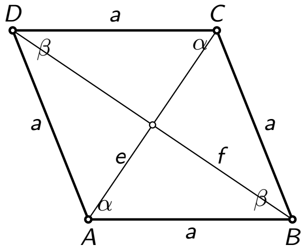
Kvadrat je pravokotni enakostranični paralelogram.



Diagonali v kvadratu sta skladni ($e = f$) in se razpolavljata in razpolavljata notranje kote, sekata se pod pravim kotom; vsi notranji koti so pravi ($\alpha = 90°$); višina je stranica sama.

Definicja

Romb je poševnokotni enakostranični paralelogram.

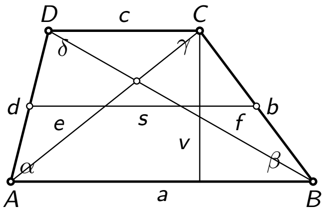


Diagonali v rombu se razpolavljata in razpolavljata notranje kote, sekata se pod pravim kotom.

Trapez

Definicija

Trapez je štirikotnik, ki ima en par vzporednih stranic.
Vzporedni stranici imenujemo **osnovnici** trapeza, preostali dve stranici pa **kraka** trapeza.

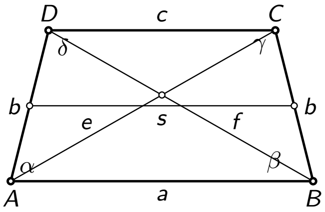


Definicija

Srednica trapeza je daljica, ki povezuje razpolovišči krakov trapeza.
Vzporedna je osnovnicama, njena dolžina meri $s = \frac{a+c}{2}$.

Definicija

Enakokraki trapez je trapez, katerega kraka sta skladna.

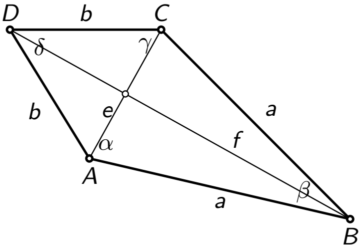


Enakokraki trapez ima skladni diagonali ($e = f$) in skladna para kotov ob isti osnovnici ($\alpha = \beta$ in $\gamma = \delta$).

Trapezoid

Definicija

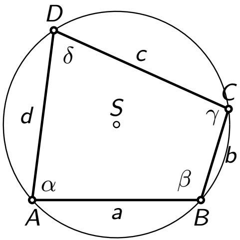
Deltoid je štirikotnik, ki ima dva para sosednjih skladnih nevzporednih stranic.



Diagonali deltoida se sekata pod pravim kotom. Daljša diagonala razpolavlja krajšo in oba notranja kota. Preostala kota sta skladna.

Definicija

Tetivni štirikotnik je štirikotnik, katerega stranice so tetive neke krožnice.



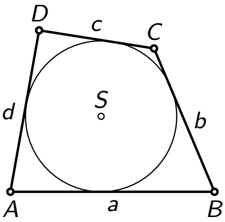
Izrek

Nasprotna kota tetivnega štirikotnika sta suplementarna:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

Definicija

Tangentni štirikotnik je štirikotnik, katerega stranice so odseki na tangentah neke krožnice.



Izrek

Vsota dolžin nasprotnih stranic tangentnega štirikotnika je enaka vsoti dolžin drugih dveh nasprotnih stranic:

$$a + c = b + d.$$

Pravilni n-kotnik

Podobnost

Podobnost v pravokotnem trikotniku