

MATEMATIKA

3. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

23. april 2024

- 1 Kotne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- 3 Geometrijska telesa
- 4 Polinomi in racionalne funkcije
- 5 Stožnice

Section 1

Kotne funkcije

- 1 Kotne funkcije
 - Kotne funkcije poljubnih kotov
 - Izrazi s kotnimi funkcijami
 - Adicijski izreki
 - Posledice adicijskih izrekov
 - Grafa funkcij sinus in kosinus
 - Grafa funkcij tangens in kotangens
 - Krožne funkcije
 - Trigonometrijske enačbe
 - Problemske naloge
 - Naklonski kot premice, kot med dvema premicama

2 Geometrijski liki

3 Geometrijska telesa

4 Polinomi in racionalne funkcije

Stopinje in radiani

Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik 1 radian.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57,3^\circ$$

Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo φ kot podan v radianih, ϕ pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \phi$$

in

$$\phi = \frac{180^\circ}{\pi} \varphi.$$

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Sinus kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in hipotenuzo:

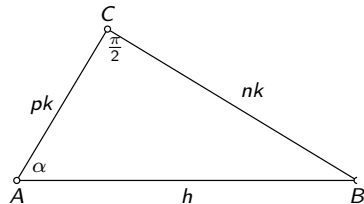
$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Kosinus kota α je količnik med kotu α priležno kateto in hipotenuzo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Tangens kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in priležno kateto:

$$\tan \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}.$$



Kotangens kota α je količnik med kotu α priležno kateto in nasprotno kateto:

$$\cot \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}}.$$

Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varphi$$

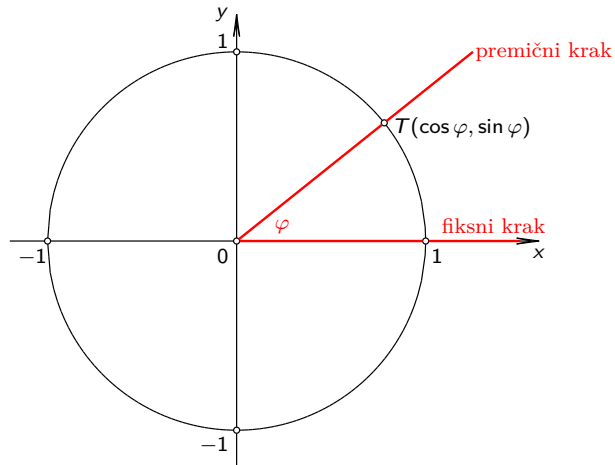
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \tan \varphi$$

Kotne funkcije v enotskem krogu

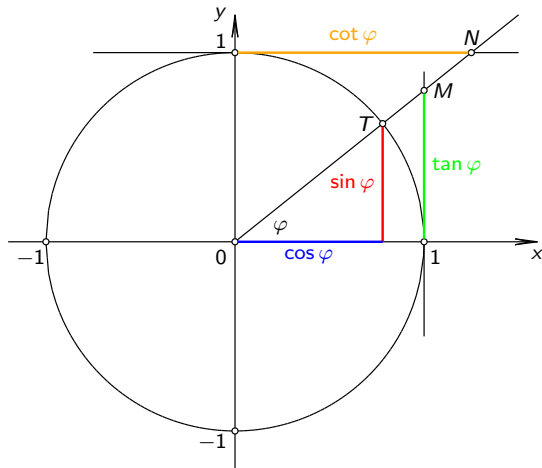
Enotska krožnica je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot φ z vrhom v koordinatnem izhodišču:

- prvi (fiksni) krak kota leži na pozitivnem delu abscisne osi;
- drugi (premični) krak določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov.



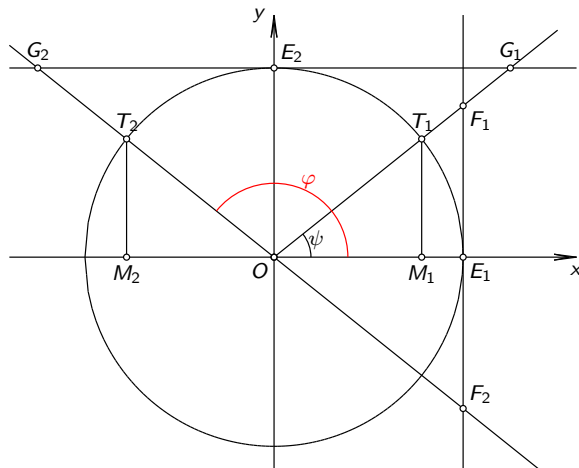
Kotangens kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega korga v točko $(0, 1)$.



Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0
π	180°	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	/	0

Kot med $\frac{\pi}{2}$ in π



Sinusa supplementarnih kotov sta enaka;
kosinusa supplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\sin(\pi - \psi) = \sin \psi$$

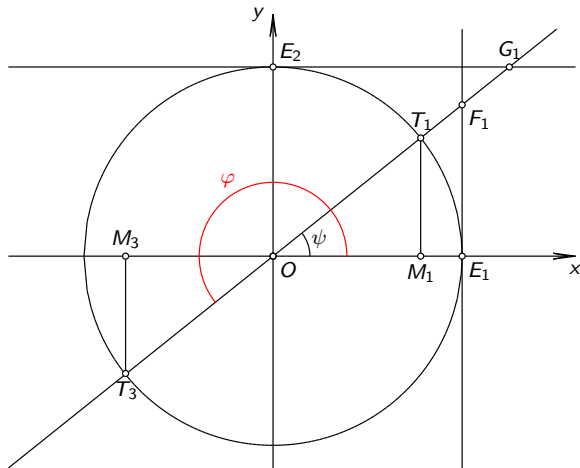
$$\cos(\pi - \psi) = -\cos \psi$$

Tangensa in kotangensa supplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\tan(\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(\pi - \psi) = -\cot \psi$$

Kot med π in $\frac{3\pi}{2}$



Sinusa in kosinusa kotov, ki se razlikujeta za π , sta nasprotno enaka.

$$\sin(\pi + \psi) = -\sin \psi$$

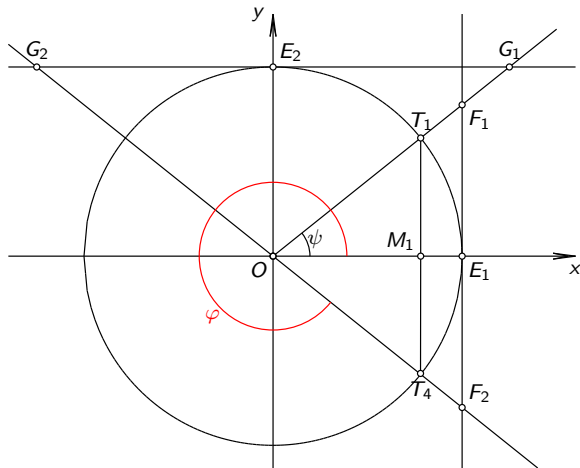
$$\cos(\pi + \psi) = -\cos \psi$$

Tangensa in kotangensa kotov, ki se razlikujeta za π , sta enaka.

$$\tan(\pi + \psi) = \tan \psi$$

$$\cot(\pi + \psi) = \cot \psi$$

Kot med $\frac{3\pi}{2}$ in 2π



$$\sin(2\pi - \psi) = -\sin \psi$$

$$\cos(2\pi - \psi) = \cos \psi$$

$$\tan(2\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(2\pi - \psi) = -\cot \psi$$

$$\sin(-\psi) = -\sin \psi$$

$$\cos(-\psi) = \cos \psi$$

$$\tan(-\psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(-\psi) = -\cot \psi$$

Kotne funkcije poljubnih kotov

Izrazi s kotnimi funkcijami

Adicijski izreki

Posledice adicijskih izrekov

Grafa funkcij sinus in kosinus

Grafa funkcij tangens in kotangens

Krožne funkcije

Trigonometrijske enačbe

Problemske naloge

Vaje, vaje, vaje ...

Vaje, vaje, vaje ...

Naloga 1

Natančno izračunaj $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, če je $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ in $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Vaje, vaje, vaje ...

Naloga 1

Natančno izračunaj $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, če je $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ in $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Naloga 2

Poenostavi izraz $\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \cos(2\pi - x) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(x - \pi)$.

Vaje, vaje, vaje ...

Naloga 1

Natančno izračunaj $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, če je $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ in $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Naloga 2

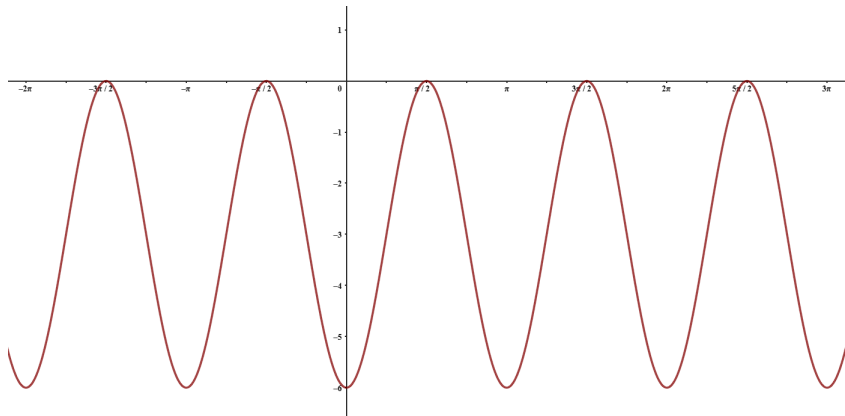
Poenostavi izraz $\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \cos(2\pi - x) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(x - \pi)$.

Naloga 3

Pokaži, da velja: $\frac{\cot x \cdot \sin 2x - 1}{(\cos(-x) - \sin(-x))^2 - 1} = \cot 2x$.

Naloga 4

Na sliki je graf funkcije $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$. Določi $A > 0$, $B > 0$, C in D . C izberi tako, da bo $|C|$ najmanjše možno število. Kratko utemelji.



Naloga 5

Brez uporabe računalu natančno izračunaj. Zapiši vmesne izračune.

a $\sin \frac{23\pi}{6}$

b $\cos(-1590^\circ)$

Naloga 5

Brez uporabe računala natančno izračunaj. Zapiši vmesne izračune.

a $\sin \frac{23\pi}{6}$

b $\cos(-1590^\circ)$

Naloga 6

Reši enačbi:

a $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$

b $2 \cos^2 3x - \cos 3x - 1 = 0$

Naklonski kot premice, kot med dvema premicama

Section 2

Geometrijski liki

1 Kotne funkcije

2 Geometrijski liki

- Obseg in ploščina
- Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika
- Obseg in ploščina trikotnika
- Obseg in ploščina paralelograma
- Obseg in ploščina trapeza in deltoida
- Obseg in ploščina pravilnega večkotnika
- Obseg in ploščina kroga

3 Geometrijska telesa

4 Polinomi in racionalne funkcije

5 Stožnice

Obseg in ploščina

Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika

Obseg in ploščina trikotnika

Obseg in ploščina paralelograma

Obseg in ploščina trapeza in deltoida

Obseg in ploščina pravilnega večkotnika

Obseg in ploščina kroga

Section 3

Geometrijska telesa

1 Kotne funkcije

2 Geometrijski liki

3 Geometrijska telesa

- Površina in prostornina
- Pokončna prizma
- Pokončni valj
- Pokončna piramida
- Pokočni krožni stožec
- Korgla
- Primerjava pokonnih teles
- Poševna telesa
- Prisekana telesa
- Vrtenine

4 Polinomi in racionalne funkcije

Površina in prostornina

Pokončna prizma

Pokončni valj

Pokončna piramida

Pokočni krožni stožec

Krogla

Primerjava pokončnih teles

Poševna telesa

Prisekana telesa

Vrtenine

Section 4

Polinomi in racionalne funkcije

- 1 Kotne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- 3 Geometrijska telesa
- 4 Polinomi in racionalne funkcije
 - Polinomi
 - Računanje s polinomi
 - Ničle polinoma in Hornerjev algoritem
 - Graf polinoma
 - Polinomska neenačba
 - Metoda bisekcije
 - Racionalna funkcija
 - Racionalna neenačba
 - Modeliranje s polinomske in racionalno funkcijo

Polinomi

Računanje s polinomi

Ničle polinoma in Hornerjev algoritem

Graf polinoma

Polinomska neenačba

Metoda bisekcije

Racionalna funkcija

Racionalna neenačba

Modeliranje s polinomske in racionalne funkcije

Section 5

Stožnice

- 1 Kotne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- 3 Geometrijska telesa
- 4 Polinomi in racionalne funkcije
- 5 Stožnice**
 - Krožnica
 - Elipsa
 - Hiperbola
 - Parabola
 - Krivulje drugega reda
 - Iracionalna enačba

Krožnica

Elipsa

Hiperbola

Parabola

Krivulje drugega reda

Iracionalna enačba