

MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

26. oktober 2023

Vsebina

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
- 5 Eksponentna in logaritemska funkcija

Section 1

Geometrija na ravnini in v prostoru

1 Geometrija na ravnini in v prostoru

- Osnovni geometrijski pojmi
- Kot
- Konstrukcije matematičnih objektov
- Preslikave na ravnini
- Trikotnik
- Krog
- Štirikotnik
- Večkotnik
- Podobnost
- Podobnost v pravokotnem trikotniku
- Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 90°
- Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 160°

2 Vektorji

Osnovni geometrijski pojmi

Kot

Konstrukcije matematičnih objektov

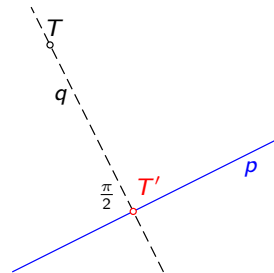
Preslikave na ravlini

Pravokotna projekcija

Dani sta točka T in premica p . Naj bo q tista pravokotnica na premico p , ki poteka skozi točko T . Presečišče T' premice q s premico p imenujemo **pravokotna projekcija** točke T na premico p . Točka T' je točki T najbližja točka premice p .

Razdalja točke T od premice p je:

$$d(T, p) = d(T, T') = |TT'|.$$



Pravokotna projekcija daljice AB na premico je daljica $A'B'$, katere krajišči sta pravokotni projekciji točk A in B .

Toge preslikave

Toga preslikava (izometrija) je preslikava v ravni, ki ohranja razdalje.

$$\tau : A \mapsto A'$$

$$\tau : B \mapsto B'$$

$$d(A, B) = d(A', B')$$

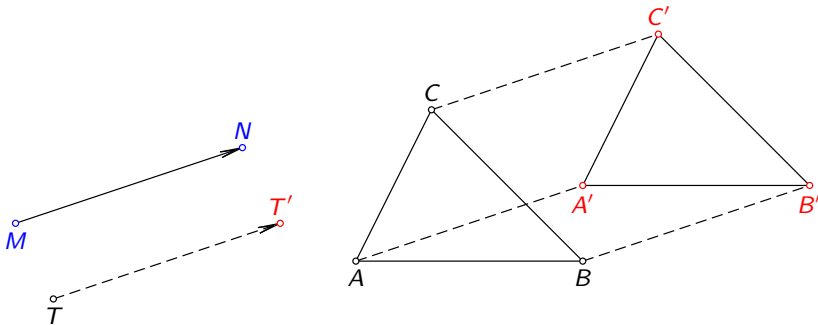
Med toge preslikave spadajo:

- **vzporedni premiki;**
- **zrcaljenje preko premice;**
- **zrcaljenje preko točke;**
- **rotacija okoli točke.**

Če kombiniramo več togih preslikav, je dobljena preslikava spet toga preslikava.

Vzporedni premik/translacija

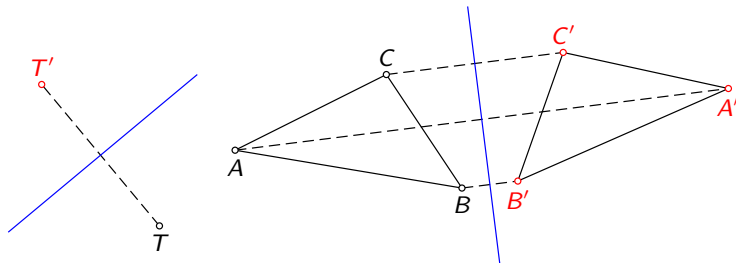
Vzporedni premik ali **translacija** za dano usmerjeno daljico \overrightarrow{MN} preslika točko T v tako točko T' , da sta daljici TT' in MN enako dolgi, vzporedni in enako usmerjeni.



Vzporedni premik ohranja orientacijo likov, daljice preslika v enako dolge vzporedne daljice, ohranja velikost kotov, like preslika v skladne like, nima negibnih točk za $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$.

Zrcaljenje preko premice

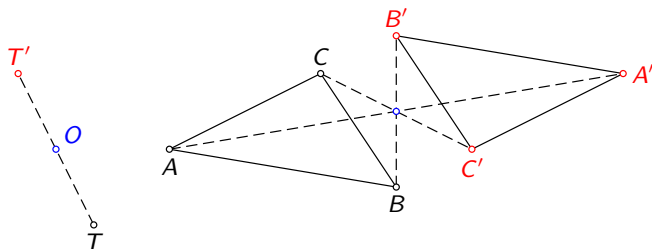
Zrcaljenje čez premico p preslika točko T v tako točko T' , da premica p pod pravim kotom razpolavlja daljico TT' .



Zrcaljenje čez premico daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikost kotov, ne ohranja orientacije likov, like preslika v skladne like, premic ne preslika v vzporedne premice.

Zrcaljenje preko točke

Zrcaljenje čez točko O preslika točko T v tako točko T' , da je O razpolovišče daljice TT' . Ta preslikava je enaka vrtenju okrog točke za 180° .

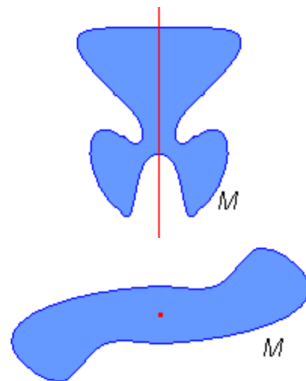


Zrcaljenje čez točko daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice preslika v vzporedne premice.

Simetrija

Množica točk \mathcal{M} je **simetrična/somerna glede na premico** p , če se pri zrcaljenju čez premico p preslika sama vase. Premico p imenujemo **simetrala, somernica, simetrijska os** množice \mathcal{M} .

Množica točk \mathcal{M} je **središčno simetrična/somerna glede na točko** T , če se pri zrcaljenju čez točko T preslika sama vase. Točko T imenujemo **center simetrije** množice \mathcal{M} .



Rotacija/vrtenje okoli točke

Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.

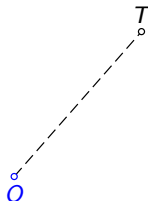
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.

 T O

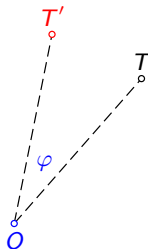
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



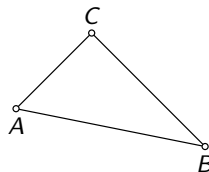
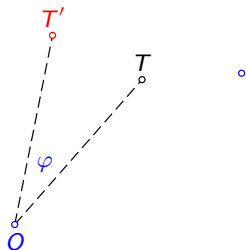
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



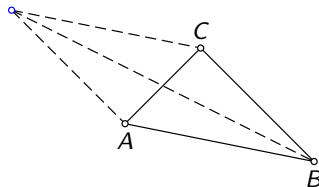
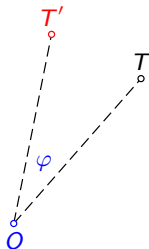
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



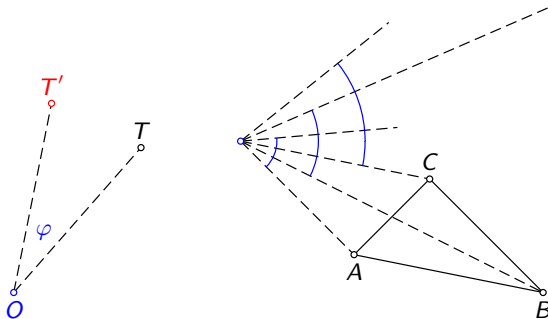
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



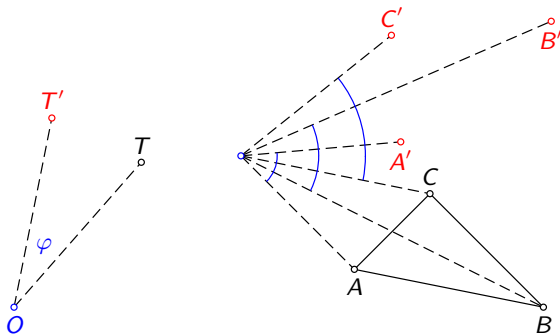
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



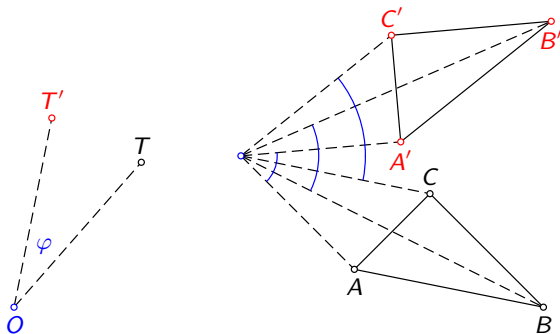
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



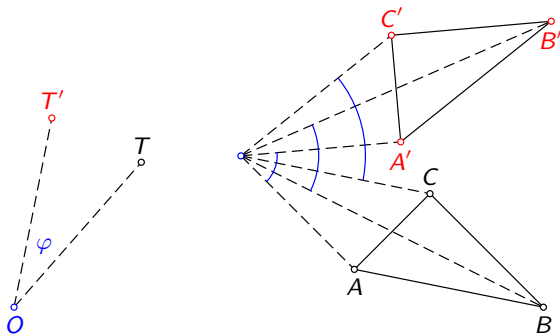
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T' , da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



Vrtenje okoli točke preslika daljice v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premic pa ne preslika v vzporedne premice.

Naloga

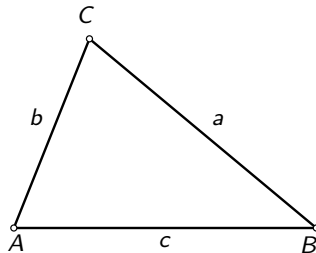
Konstruiraj daljico AB poljubne dolžine. Konstruiraj še:

- točko C , ki jo dobiš tako, da točko B zavrtiš okrog točke A za kot 120° ;
- točko D , ki je pravokotna projekcija točke C na nosilko daljice AB ;
- zrcalno sliko točke C glede na točko B in dobljeno točko označi C' ;
- simetralo kota z vrhom v B , katerega kraka potekata skozi C in C' .

Trikotnik

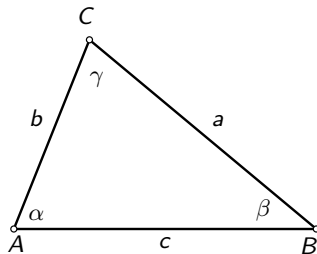
Trikotnik

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



Trikotnik

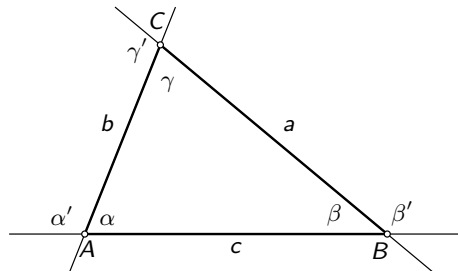
Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**,

Trikotnik

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota zunanjih kotov trikotnika je 360° :

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je $\alpha = 67^\circ 13'$ in $\beta' = 133^\circ 25'$.

Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je $\alpha = 67^\circ 13'$ in $\beta' = 133^\circ 25'$.

Naloga 68

Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju 2 : 5 : 11. V kolikšnem razmerju so velikosti zunanjih kotov tega trikotnika?

Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je $\alpha = 67^\circ 13'$ in $\beta' = 133^\circ 25'$.

Naloga 68

Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju 2 : 5 : 11. V kolikšnem razmerju so velikosti zunanjih kotov tega trikotnika?

Naloga 70

Notranji kot ob oglišču A trikotnika $\triangle ABC$ je za 1° manjši od velikosti notranjega kota ob oglišču C . Zunanji kot v oglišču C je za 1° večji od dvakratnika velikosti notranjega kota ob oglišču A . Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika $\triangle ABC$.

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Trikotniška neenakost

Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Naloga 76

Ali obstaja trikotnik z danimi dolžinami stranic?

- ① $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$;
- ② $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$;
- ③ $a = 5 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$.

Naloga 76

Ali obstaja trikotnik z danimi dolžinami stranic?

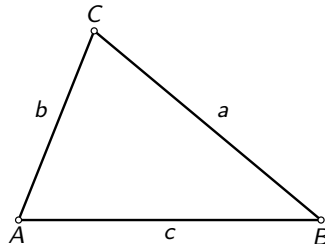
- ① $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$;
- ② $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$;
- ③ $a = 5 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$.

Naloga 77

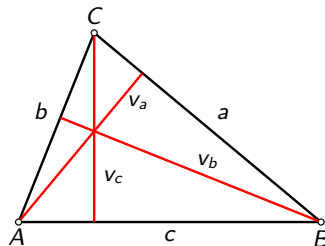
Po velikosti uredi notranje kote trikotnika $\triangle ABC$.

- ① $a = 33 \text{ dm}$, $b = 22 \text{ dm}$, $c = 28 \text{ dm}$;
- ② $a = 32 \text{ m}$, $b = 35 \text{ m}$, $c = 38 \text{ m}$;

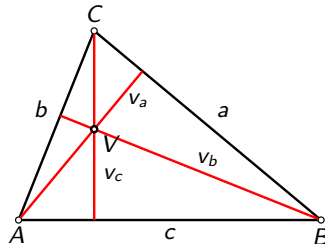
Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.



Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

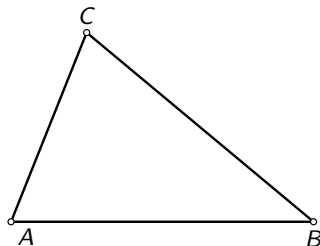


Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

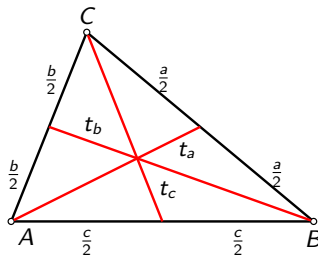


Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**.

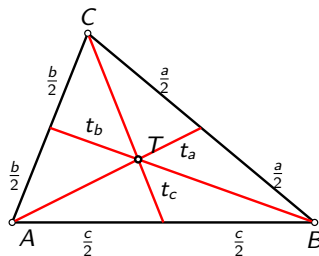
Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



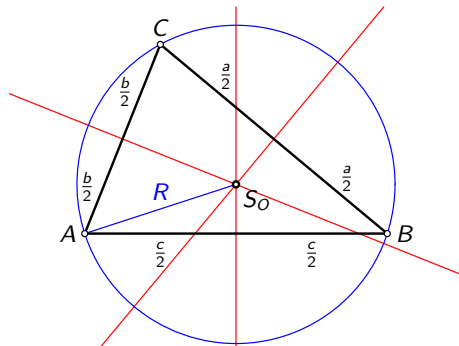
Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju 1 : 2.

Naloga 81

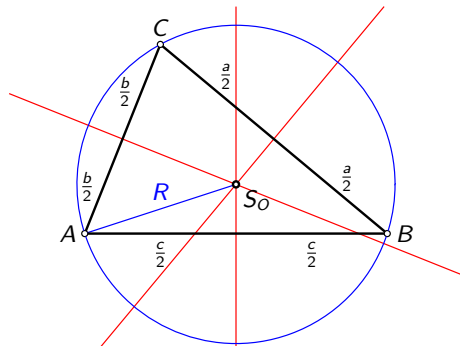
Konstruiraj trikotnik.

- $a = 2 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$;
- $c = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
- $a = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$;
- $a = 2,5 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $v_c = 2 \text{ cm}$;
- $v_c = 3 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$;
- $v_a = 2 \text{ cm}$, $v_b = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 45^\circ$;
- $b = 65 \text{ cm}$, $t_b = 3,5 \text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$;
- $v_a = 3 \text{ cm}$, $t_c = 4 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$.

Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.

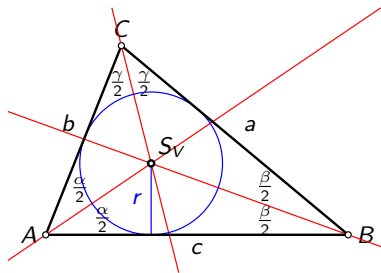


Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.

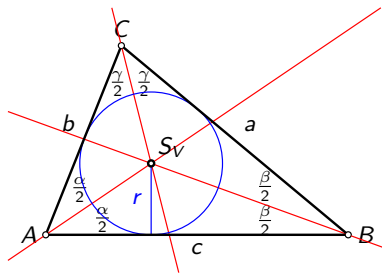


Očrtana krožnica poteka skozi vsa tri oglišča trikotnika. Vse tri stranice trikotnika so tetive te krožnice.

Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Včrtana krožnica ima vse tri stranice trikotnika za tangente.

Naloga 83

Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $b = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

1. Konstruiraj trikotnik $\triangle ABC$.
2. Konstruiraj trikotniku $\triangle ABC$ očrtano krožnico.
3. Koliko je velik zunanji kot pri oglišču A ?

Naloga 83

Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $b = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

1. Konstruiraj trikotnik $\triangle ABC$.
2. Konstruiraj trikotniku $\triangle ABC$ očrtano krožnico.
3. Koliko je velik zunanji kot pri oglišču A ?

Naloga 84

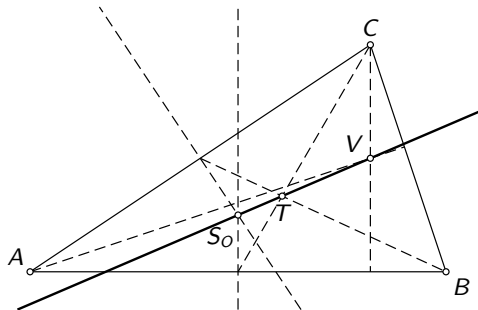
Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $a = 5 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, $t_c = 4 \text{ cm}$.

1. Konstruiraj trikotnik $\triangle ABC$.
2. Konstruiraj trikotniku $\triangle ABC$ včrtano krožnico.
3. Kateri izmed $\angle BAC$ in $\angle ACB$ je večji? Utemelji (brez merjenja).

Težišče, središče trikotniku očrtane krožnice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Težišče, središče trikotniku očrtane krožnice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Višinska točka, središče očrtane krožnice in težišče so vedno kolinearne. Premico, ki jih povezuje, imenujemo **Eulerjeva premica**.



Krog

Štirikotnik

Večkotnik

Podobnost

Podobnost v pravokotnem trikotniku

Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 90°

Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 360°

Section 2

Vektorji

1 Geometrija na ravnini in v prostoru

2 Vektorji

- Vektorske količine
- Računanje z vektorji
- Linearna kombinacija vektorjev, baza
- Skalarni produkt vektorjev
- Vektorji v koordinatnem sistemu
- Skalarni produkt v koordinatnem sistemu
- (i) Vektorski produkt
- (i) Premice v prostoru
- (i) Ravnine v prostoru

3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila

Vektorske količine

Računanje z vektorji

Linearna kombinacija vektorjev, baza

Skalarni produkt vektorjev

Vektorji v koordinatnem sistemu

Skalarni produkt v koordinatnem sistemu

(i) Vektorski produkt

(i) Premice v prostoru

(i) Ravnine v prostoru

Section 3

Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

1 Geometrija na ravnini in v prostoru

2 Vektorji

3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

- Koreni poljubnih stopenj
- Potence z racionalnimi eksponenti
- Lastnosti funkcij
- Transformacije na ravnini
- Inverzna funkcija
- Potenčna funkcija z naravnim eksponentom
- Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom
- Korenska funkcija
- Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila

Koreni poljubnih stopenj

Potence z racionalnimi eksponenti

Lastnosti funkcij

Transformacije na ravnini

Inverzna funkcija

Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom

Korenska funkcija

Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

Section 4

Kvadratna funkcija, kompleksna števila

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
 - Kvadratna enačba
 - Kvadratna funkcija in parabola
 - Presečišča parabol
 - Kvadratna neenačba
 - Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi
 - Množica kompleksnih števil
 - Računanje s kompleksnimi števili

Kvadratna enačba

Kvadratna funkcija in parabola

Presečišča parabol

Kvadratna neenačba

Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi

Množica kompleksnih števil

Računanje s kompleksnimi števili

Section 5

Eksponentna in logaritemska funkcija

- 1 Geometrija na ravnini in v prostoru
- 2 Vektorji
- 3 Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija
- 4 Kvadratna funkcija, kompleksna števila
- 5 EkspONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA**
 - EkspONENTNA ENAČBA
 - LOGARITEM
 - Pravila za računanje z logaritmi
 - Logaritemska enačba
 - EkspONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA
 - Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo
 - Sprememba osnove logaritma

Eksponentna enačba

Logaritem

Pravila za računanje z logaritmi

Logaritemska enačba

Eksponentna in logaritemska funkcija

Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo

Sprememba osnove logaritma

Eksponentna in logaritemska neenačba