Matematika
Splošna gimnazija

ZAPISKI

9. januar 2025

Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite

Jan Kastelic

Kazalo

Poglavje 1

Osnove logike

1.1 Izjave

Matematična izjava je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.
Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R**/**P**/**1**/$\top$;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N**/**0**/$\bot$.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami (A, B, C ...).

Naloga 1.1. *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število* 12 *deli število* 3*.*
- *Število* 3 *deli število* 10*.*
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je* 10 *dl isto kot* 1 *l?*
- *Število* 41 *je praštevilo.*

Naloga 1.2. *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- A*: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- B*: Število je deljivo s* 4 *natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s* 4*.*
- C*: Ostanek pri deljenju s* 4 *je lahko* 1*,* 2 *ali* 3*.*
- D*: Mesec februar ima 28 dni.*
- E*: Vsa praštevila so liha števila.*
- F*: Število* 1 *je naravno število.*
- G*: Praštevil je neskončno mnogo.*

1.1.1 Enostavne in sestavjene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.
Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

1.2 Logične operacije

1.2.1 Negacija

Negacija izjave A je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava A. Oznaka: $\neg\mathbf{A}$.

$\neg\mathbf{A}$ **Ni res**, da velja izjava A.

Če je izjava A pravilna, je $\neg A$ nepravilna in obratno: če je $\neg A$ pravilna, je A nepravilna. Negacija negacije izjave je potrditev izjave. $\neg(\neg A) = A$

A	$\neg A$
P	N
N	P

Naloga 1.3. *Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.*

- *A:* $5 \cdot 8 = 30$
- *B: Število* 3 *je praštevilo.*
- *C: Največje dvomestno število je* 99*.*
- *D: Število* 62 *je večratnik števila* 4*.*
- *E: Praštevil je neskončno mnogo.*
- *F:* $7 \leqslant 5$
- *G: Naša pisava je cirilica.*

1.2.2 Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B nastane tako, da povežemo izjavi A in B z **in hkrati**.

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ Velja izjava A **in (hkrati)** izjava B.

Če sta izjavi A in B pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

Naloga 1.4. *Določite logično vrednost konjunkcijam.*

- *Število* 28 *je večratnik števila* 3 *in večkratnik števila* 8*.*
- *Število* 7 *je praštevilo in je deljivo s številom* 1*.*
- *Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.*
- *Ostanki pri deljenju števila s* 3 *so lahko* 0*,* 1 *ali* 2*, pri deljenju s* 5 *pa* 0*,* 1*,* 2*,* 3 *ali* 4*.*
- *Število je deljivo s* 3*, če je vsota števk deljiva s* 3*, in je deljivo z* 9*, če je vsota števk deljiva z* 9*.*

1.2.3 Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B nastane s povezavo **ali**.

$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ Velja izjava A **ali** izjava B (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

Naloga 1.5. *Določite logično vrednost disjunkcijam.*
- *Število* 24 *je večratnik števila* 3 *ali* 8.
- *Število* 35 *ni večratnik števila* 7 *ali* 6.
- *Število* 5 *deli število* 16 *ali* 18.
- *Ploščina kvadrata s stranico* a *je* a^2 *ali obseg kvadrata je* $4a$.
- *Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika* $160°$, *ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.*

1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Naloga 1.6. *Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?*
- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

1.2.8 Implikacija

Implikacija izjav A in B je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

A ⇒ B **Če** velja izjava A, **potem** velja izjava B. / **Iz** A **sledi** B.

Izjava A je **pogoj** ali **privzetek**, izjava B pa **(logična) posledica** izjave A.
Implikacija je nepravilna, ko je izjava A pravilna, izjava B pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \Rightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Naloga 1.7. *Določite, ali so izjave pravilne.*
- *Če je število deljivo s* 100*, je deljivo tudi s* 4.
- *Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.*
- *Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Če sta števili* 2 *in* 3 *lihi števili, potem je produkt teh dveh števil sodo število.*
- *Če je število* 18 *deljivo z* 9*, potem je deljivo s* 3.
- *Če je* 7 *večkratnik števila* 7*, potem* 7 *deli število* 43.
- *Če je število deljivo s* 4*, potem je deljivo z* 2.

1.2.9 Ekvivalenca

Ekvivalenca izjavi A in B poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

A ⇔ B Izjava A velja, **če in samo če** velja izjava B./
Izjava A velja **natanko tedaj, ko** velja izjava B.

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.
Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Naloga 1.8. *Določite, ali so naslednje izjave pravilne.*
- *Število je deljivo z* 12 *natanko takrat, ko je deljivo s* 3 *in* 4 *hkrati.*
- *Število je deljivo s* 24 *natanko takrat, ko je deljivo s* 4 *in* 6 *hkrati.*
- *Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.*
- *Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.*
- *Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z* 2.

1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

Naloga 1.9. *V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.*

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

1.2.11 Tavtologija in protislovje

Tavtologija ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavjena, pravilna.
Protislovje je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

1.2.12 Kvantifikatorja

- $\forall$ (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- $\exists$ (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

1.3 Pomen izjav v matematiki

Aksiomi so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.
Izreki ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.
Definicije so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.

Poglavje 2

Osnove teorije množic

2.1 Množice

Množica je skupek elementov, ki imajo neko skupno lastnost.
Množica je določena, če:

- lahko naštejemo vse njene elemente ali
- poznamo pravilo/skupno lastnost, ki pove, kateri elementi so v množici.

Označujemo jih z velikimi črkami ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$ ali $A, B, C \dots$).

Univerzalna množica ali **univerzum** ($\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki v danem primeru nastopajo oziroma jih opazujemo.

Element množice je objekt v množici.
Označujemo jih z malimi črkami ($a, b, c \dots$).
Elemente množice zapisujemo v zavitem oklepaju (npr. $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$).
Element je lahko vsebovan v množici (npr. $a \in \mathcal{A}$) ali pa v množici ni vsebovan (npr. $d \notin \mathcal{A}$).

Prazna množica ($\emptyset, \{\}$) je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa.

2.2 Moč množice

Število elementov v množici predstavlja **moč množice**. Oznaka: $\mathbf{m}(\mathcal{A})$ ali $|\mathcal{A}|$.
Množica je lahko:

- **končna množica** – vsebuje končno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \mathbf{n}$;
- **neskončna množica** – vsebuje neskončno mnogo elementov: $\mathbf{m}(\mathcal{A}) = \infty$.

Če ima množica toliko elementov, kot jih ima množica naravnih števil, je ta števno neskončna.
Njeno moč pišemo kot: $m(\mathcal{A}) = \aleph_0$.
Za množici, ki imata isto moč, rečemo, da sta **ekvipolentni** oziroma **ekvipotentni**.

Naloga 2.1. *Naštejte elemente množice in zapišite njeno moč, če je $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.*

- $\mathcal{A} = \{x; x \mid 24\}$
- $\mathcal{B} = \{x; 3 < x \leqslant 7\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 4k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 5\}$
- $\mathcal{D} = \{x; x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (4 < k \leqslant 8)\}$

Naloga 2.2. *Naj bo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Zapišite množico tako, da naštejete njene elemente. Določite še njeno moč.*

- *Množica vseh deliteljev števila 18.*
- *Množica praštevil, ki so manjša od 20.*

- *Množica večkratnikov števila* 5*, ki so večji od* 50 *in manjši ali enaki* 70*.*

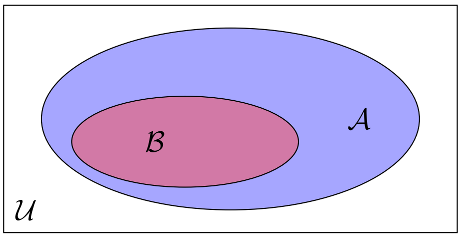
Naloga 2.3. *Zapišite množico s simboli.*
- *Množica vseh sodih naravnih števil.*
- *Množica vseh naravnih števil, ki dajo pri deljenju s* 7 *ostanek* 5*.*

Naloga 2.4. *Podane so množice tako, da so našteti njihovi elementi. Množice zapišite s simboli.*
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$
- $\mathcal{C} = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $\mathcal{D} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $\mathcal{E} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

2.3 Podmnožice

Množica $\mathcal{B}$ je **podmnožica** množice $\mathcal{A}$, če za vsak element iz $\mathcal{B}$ velja, da je tudi element množice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A}$$



- $\forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ – Vsaka množica je podmnožica same sebe.
- $\forall \mathcal{A} : \varnothing \subseteq \mathcal{A}$ – Prazna množica je podmnožica vsake množice.

Moč podmnožice $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$ je manjša ali enaka moči množice $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{B}) \leqslant m(\mathcal{A})$$

Množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sta **enaki**, če imata iste elemente; sta druga drugi podmnožici.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$$

Podmnožica $\mathcal{B}$ množice $\mathcal{A}$, ki ni enaka množici $\mathcal{A}$, je **prava podmnožica** množice $\mathcal{A}$.

Potenčna množica množice $\mathcal{A}$ je množica vseh podmnožic množice $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{PA}$ / $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{PA} = \{\mathcal{X}; \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\}$$

$$m(\mathcal{PA}) = 2^{m(\mathcal{A})}$$

Potenčna množica ni nikoli prazna – vsebuje vsaj prazno množico.

Naloga 2.5. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$*. Zapišite njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

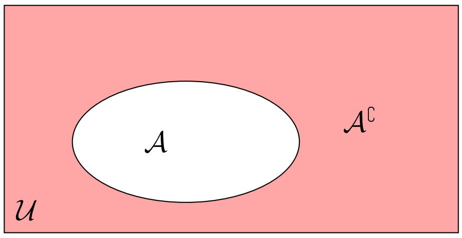
Naloga 2.6. *Dana je množica* $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$*. Zapiište njeno potenčno množico. Kakšna je njena moč?*

2.4 Operacije z množicami

2.4.1 Komplement množice

Komplement množice $\mathcal{A}$ (glede na izbrani univerzum $\mathcal{U}$) je množica vseh elementov, ki so v množici $\mathcal{U}$ in niso v množici $\mathcal{A}$.
Oznaka: $\mathcal{A}^{\complement}$ / $\mathcal{A}'$.

$$\mathcal{A}^{\complement} = \{x; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$



$$\left(\mathcal{A}^{\complement}\right)^{\complement} = \mathcal{A}$$

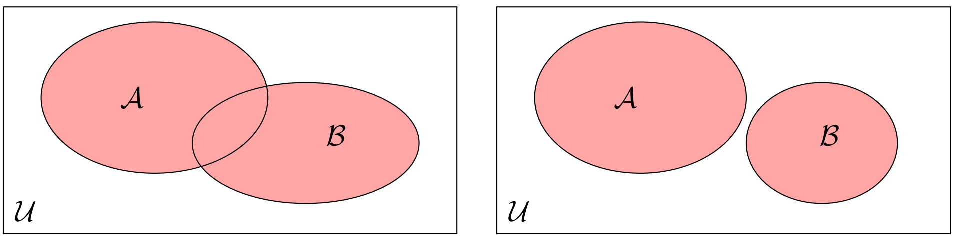
Naloga 2.7. *Naj bo univerzalna množica* $\mathcal{U} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant 20\}$. *Zapišite komplementarno množico danih množic. Kakšna je njena mmoč?*

- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 20\}$
- $\mathcal{C} = \{x; x = 2k \vee x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.2 Unija množic

Unija množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ ali množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{\complement} = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{A} \cup \varnothing = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

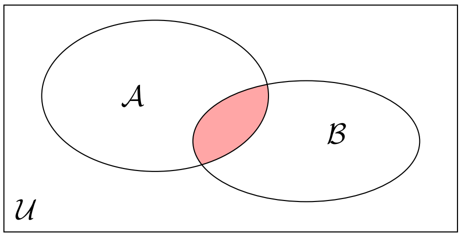
Naloga 2.8. *Dani sta množici* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}$. *Zapišite množico* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. *Določite še njeno moč.*

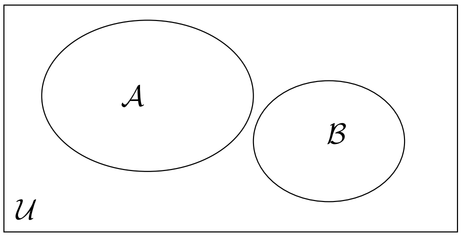
- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

2.4.3 Presek množic

Presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh elementov, ki hkrati pripadajo množici $\mathcal{A}$ in množici $\mathcal{B}$. Oznaka: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$$





$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\complement} = \varnothing$$

$$\mathcal{A} \cap \varnothing = \varnothing$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A}$$

Naloga 2.9. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite množico $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Določite še njeno moč.*

- $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 18\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 21\}$
- $\mathcal{A} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$ *in* $\mathcal{B} = \{10, 20, 30, 40, 50, \ldots\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leqslant 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 12\}$

Za množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Množici, katerih presek je prazna množica, sta **disjunktni** množici.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing \Rightarrow m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing \Rightarrow m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$$

2.4.4 Lastnosti operacij unije in preseka

Komutativnost unije in preseka

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

Asociativnost unije in preseka

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

Distributivnostna zakona za unijo in presek

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

De Morganova zakona

Komplement preseka dveh množic je enak uniji komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cup \mathcal{B}^{\complement}.$$

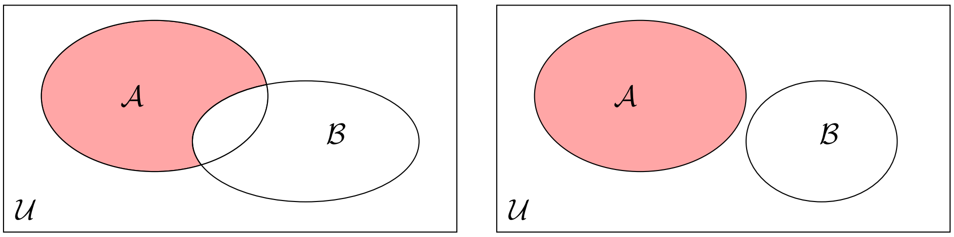
Komplement unije dveh množic je enak preseku komplementov obeh množic:

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\complement} = \mathcal{A}^{\complement} \cap \mathcal{B}^{\complement}.$$

2.4.5 Razlika množic

Razlika množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica tistih elementov, ki pripadajo množici $\mathcal{A}$ in hkrati ne pripadajo množici $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ / $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \{x; x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$$



$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\complement}$$

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{A} = \varnothing$$

Naloga 2.10. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njuno razliko $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

2.4.6 Kartezični produkt množic

Kartezični produkt (nepraznih) množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica urejenih parov (x, y), pri čemer je $x \in \mathcal{A}$ in $y \in \mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

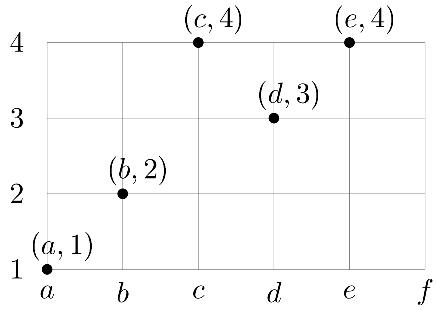
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

$$x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq (y, x)$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$$

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) \cdot m(\mathcal{B})$$

Kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ za množici $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$:



Naloga 2.11. *Dani sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njun kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Narišite diagram, ki predstavlja to množico.*

- $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 7\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (5 \leqslant k < 9)\}$
- $\mathcal{A} = \{x; x = 6k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k < 4\}$ *in* $\mathcal{B} = \{x; x = 3k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge (3 < k < 11)\}$

Poglavje 3

Naravna in cela števila

3.1 Naravna števila

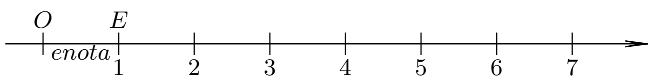
Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število n ima svojega **naslednika** $n + 1$.
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika: $n + 1 \neq m + 1; n \neq m$.
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števk označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

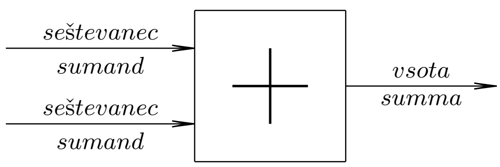
$$\overline{xy} = 10x + y \qquad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

3.2 Operacije v množici $\mathbb{N}$

3.2.1 Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma x in y priredimo **vsoto** $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Število x oziroma y imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**. Število $x + y$ pa imenujemo **vsota** ali **summa**.

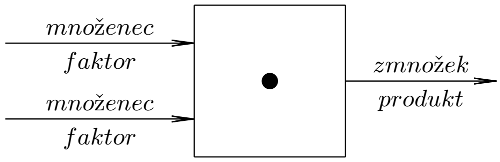


Vsota naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Množenje

Poljubnima naravnima številoma x in y priredimo **produkt** $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Število x oziroma y imenujemo **množenec** ali **faktor**. Število $x \cdot y$ pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



Produkt naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$.

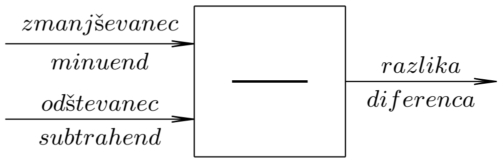
Število **1** je **nevtralni element** za mmnoženje: $1 \cdot x = x$.

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

3.2.3 Odštevanje

Številoma x in y, pri čemer je y večje od x $(x > y)$, priredimo **razliko** $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Število x imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število y pa imenujemo **odštevanec** ali **subtrahend**. Številu $x - y$ rečemo **razlika** ali **diferenca**.



Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu y, da dobimo število y.

$$(x - y) + y = x$$

Odštevanje ni notranja operacija v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

3.2.4 Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.
Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

3.3 Osnovni računski zakoni

Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja.*

Naloga 3.1. *Izračunajte.*

- $(1 + 2 \cdot 7) + 3 \cdot (2 \cdot 2 + 7)$
- $3 \cdot (2 + 3 \cdot 5) \cdot (2 + 1)$
- $7 + (2 + 6 \cdot 3) + (8 + 4 \cdot 5)$
- $11 \cdot 4 + (12 - 6) \cdot 5$
- $8 + 2 \cdot (3 + 7) - 15$
- $37 - 5 \cdot (10 - 3)$

Naloga 3.2. *Hitro izračunajte.*

- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

Naloga 3.3. *Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.*

- *Produktu števil* 12 *in* 27 *odštejte razliko števil* 19 *in* 11.
- *Vsoti produkta* 4 *in* 12 *ter produkta* 5 *in* 16 *odštejte* 8.
- *Vsoto števil* 42 *in* 23 *pomnožite z razliko števil* 58 *in* 29.
- *Produkt števil* 14 *in* 17 *pomnožite z vsoto števil* 5 *in* 16.

Naloga 3.4. *Rešite besedilno nalogo.*

- *V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka* 95 *centov, čokoladni puding v prahu pa* 24 *centov, koliko moramo plačati?*
- *Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča* 45 *g riža, za odraslo pa* 75 *g. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?*

3.4 Cela Števila

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\}$$

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je definirana kot unija treh množic:
- množica **pozitivnih celih števil** ($\mathbb{Z}^+$) – naravna števila $\mathbb{N}$;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ($\mathbb{Z}^-$) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Nasprotna vrednost števila n je število $-n$.

3.5 Operacije v množici $\mathbb{Z}$

3.5.1 Seštevanje

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 0 je **nevtralni element** pri seštevanju.

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Vsota celega števila in njemu nasprotnega števila je enaka 0.

$$-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Nasprotna vrednost nasprotne vrednosti je enaka prvotni vrednosti.

Vsota dveh pozitivnih števil je pozitivno število, vsota dveh negativnih števil pa je negativno število.

$$-\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = -(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Vsota nasprotnih vrednosti je enaka nasprotni vrednosti vsote.

Naj bosta x in y naravni števili. Vsota pozitivnega števila x in negativnega števila $-y$ je:
- pozitivno število, če je $x > y$ in
- negativno število, če je $x < y$.

3.5.2 Odštevanje

Razlika $x - y$ dveh pozitivnih števil x in y je:
- pozitivno število, če je $x > y$ in
- negativno število, če je $x < y$.

Razlika dveh negativnih števil $(-x) - (-y)$ je:
- pozitvno število, če je $x < y$ in
- negativno število, če je $x > y$.

Razlika pozitivnega števila x in negativnega števila $-y$ je pozitvno število.

Odštevanje v množici $\mathbb{Z}$ je prištevanje nasprotne vrednosti.

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

3.5.3 Množenje

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Število 1 je **nevtralni element** za množenje.

$$(\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Pri množenju celega števila x z -1 dobimo nasprotno število $-x$.

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0};\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Rezultat množenja števila s številom 0 je enak 0.

$$(-\mathbf{x})(-\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

Produkt sodo mnogo negativnih števil je pozitivno število.

$$-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -(\mathbf{xy})$$

$$\mathbf{x}(-\mathbf{y}) = -(\mathbf{xy})$$

Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativno število.

$$(-\mathbf{x})(-\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$$

Produkt liho mnogo negativnih faktorjev je negativno število.

Seštevanje, odštevanje in množenje so v množici $\mathbb{Z}$ dvočlene notranje operacije.

3.6 Osnovni računski zakoni v $\mathbb{Z}$

Komutativnost seštevanja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Asociativnost seštevanja

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

Komutativnost množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

Asociativnost množenja

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

Distributivnost seštevanja in množenja ter odštevanja in množenja

$$\mathbf{x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot z}$$

$$\mathbf{x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja.*

Naloga 3.5. *Izračunajte.*

- $17 - 13 - 2 + 10$
- $50 + 11 - 32 - 14$
- $3 + ((5 + 2(7 - 9)) \cdot 2 - 1)$
- $(2 - 5(6 - 10)) \cdot (5 - 2(7 - 5))$
- $9(11 - 3) + 7(10 - 15)$
- $8 + 9(11 - 18) - 2 \cdot 5$

Naloga 3.6. *Spretno izračunajte.*

- $7 \cdot 8 - 12 \cdot 8$
- $5 \cdot 18 + 9 \cdot 5 - 5 \cdot 2$
- $8 \cdot (4 - 9) \cdot 2$
- $5 \cdot 3 \cdot (12 - 8)$
- $(15 - 6)(12 - 3 \cdot 4)$

Naloga 3.7. *Rešite besedilne naloge.*

- *V hotelu imajo na voljo osemnajst enoposteljnih, štiriintrideset dvoposteljnih in petindevetdeset triposteljnih sob. Koliko ljudi lahko še prespi v hotelu, če je v njem že sto triinštirideset gostov?*
- *Pohod na bližnji hrib traja tri ure. Koliko minut moramo še hoditi, če smo na poti že* 145 *minut?*
- *S Ptuja in iz Postojne (razdalja med njima je približno* 190 *km) sočasno odpeljeta dva motorista drug proti drugemu. En vozi povprečno* 40 *km/h, drugi pa* 5 *km/h manj. Kolikšna bo razdalja med njima po dveh urah vožnje?*

Naloga 3.8. *Zapišite enačbe in jih poenostavite.*

- *Razlika petkratnka a in b je enaka trikratniku vsote štirikratnika a in petkratnika b.*
- *Vsota x in dvakratnika y je enaka razliki petkratnika x in dvanajstkratnika y.*

3.7 Urejenost naravnih in celih števil

Številska množica je **urejena**, kadar lahko po velikosti primerjamo njena poljubna elementa. Pri urejanju števil uporabljamo naslednje znake:

$<$	manjše / manj
$>$	večje / več
$\leqslant$	manjše ali enako / največ
$\geqslant$	večje ali enako / vsaj, najmanj
$=$	enako

Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{Z}$ velja natanko ena izmed naslednjih možnosti: $x > y$, $x < y$ ali $x = y$.

Slika števila x leži na številski premici desno od slike števila y:

$$\mathbf{x > y \Leftrightarrow x - y > 0}$$

Slika števila x leži na številski premici levo od slike števila y:

$$\mathbf{x < y \Leftrightarrow x - y < 0}$$

Slika števila x sovpada s sliko števila y:

$$\mathbf{x = y \Leftrightarrow x - y = 0}$$

Velja pa tudi:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x - y \leqslant 0$$

$$x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \geqslant 0$$

Pozitivna in negativna števila

V množici $\mathbb{Z}$ so pozitivna tista števila, ki so večja od števila 0 in njihove slike ležijo desno od izhodišča, negativna pa tista števila, ki so manjša od števila 0 in njihove slike ležijo levo od izhodišča.
Vsako pozitivno celo število (vsako naravno število) je večje od katerega koli negativnega celega števila.

3.7.1 Linearna urejenost

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica $\mathbb{Z}$ **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo naslednje lastnosti: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost, stroga sovisnost.

Refleksivnost

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leqslant x$$

Antisimetričnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

Tranzitivnost

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \land y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

Stroga sovisnost

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y \lor y \leqslant x$$

3.7.2 Lastnosti relacij $\leqslant$ in $<$

Monotonost vsote

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \qquad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$$

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$x < y \land z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z \qquad x \leqslant y \land z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$x < y \land z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z \qquad x \leqslant y \land z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geqslant y \cdot z$$

Pri množenju neenakosti z negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Obravnavane lastnosti veljajo tudi za relaciji $\geqslant$ in $>$.

Naloga 3.9. *Uredite števila* $3, -2, 5, -1, 0, -7, 6, -6$ *po velikosti in jih predstavite na številski premici.*

Naloga 3.10. *Uredite števila* $104, -27, 35, -107, 36, -26, 25, -28, 81$ *po velikosti.*

Naloga 3.11. *Gladina Mrtvega morja leži v depresiji na* -423 *m nadmorske višine, njegova največja globina pa je* 378 *m. Kolikšna je najmanjša nadmorska višina dna Mrtvega morja?*

Naloga 3.12. *Za katera cela števila* x *ima izraz* $3x - 5(x + 2)$ *večjo ali enako vrednost od izraza* $4 - (12 + x)$*?*

Poglavje 4

Potence in izrazi

4.1 Potence z naravnim eksponentom

Potenca $\mathbf{x^n}$ z **osnovo/bazo** x in **eksponentom/stopnjo** $n \in \mathbb{N}$, je produkt n faktorjev enakih x.

$$\mathbf{x^n} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n faktorjev}}$$

4.2 Pravila za računanje s potencami

Dve potenci z isto osnovo zmnožimo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa seštejemo.

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{m faktorjev}} = x^{n+m}$$

Potenco potenciramo tako, da osnovo ohranimo, ekponenta pa zmnožimo.

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}}}_{\text{m faktorjev}} = x^{n \cdot m}$$

Produkt dveh ali več števil potenciramo tako, da potenciramo posamezne faktorje in jih potem zmnožimo.

$$(xy)^n = \underbrace{(xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy)}_{\text{n faktorjev}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{n faktorjev}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \ldots \cdot y)}_{\text{n faktorjev}} = x^n y^n$$

Za naravne eksponente velja še:

$$(-x)^{2n} = x^{2n}$$
$$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1; & n = 2k \\ -1; & n = 2k-1 \end{cases} ; k \in \mathbb{N}$$

Naloga 4.1. *Števila* -3^2, $(-4)^2$, -2^4, $(-1)^{2024}$, $(-2)^3$ *in* $(-3)^2$ *uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.*

Naloga 4.2. *Poiščite podatke in jih zapišite na dva načina: s potenco in številom brez potence.*
- *Razdalja med Zemljo in Soncem*
- *Zemljina masa*
- *Masa Sonca*
- *Število zvezd v naši Galaksiji*

Naloga 4.3. *Izračunajte.*
- $(-3)^2 + 2^4$
- $(5-3)^3 + (-3)^2$
- $(2^2+1)^2 + (-3)^3 + (-2)^4$
- $(-1)^{2024} + ((-2)^5 + 5^2 - (7-3^2)^3)^2$
- $-1^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$

Naloga 4.4. *Poenostavite izraz.*
- $2^7 \cdot 2^3$
- $a^3 \cdot a^{12} \cdot a^5$
- $(2z)^3$
- $(m^2 \cdot m^4)^3$
- $a^3 + 2a^3 - 6a^3$
- $x^2 \cdot x^4 + (-2x^3)^2 - 2(-x)^6$

Naloga 4.5. *Izračunajte, rezultat zapišite s potenco.*
- $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^6$
- $(10^3)^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3$
- $(-2)^3 \cdot 2^7$
- $-2^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^3$
- $2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 6^4 \cdot 3$
- $(-3)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 21^7 \cdot 7$

Naloga 4.6. *Poenostavite.*
- $2^3 \cdot 3^4 \cdot (2^4 \cdot 3^2)^5$
- $(5^2 \cdot 7)^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- $(-2^3 \cdot 3^5)^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5$
- $(-4)^2 \cdot (-7)^{13} \cdot (-28)^5 \cdot (-7^2)^3$
- $-6^2 \cdot (-3)^2 \cdot 8^5 \cdot (-3^2)^3$

Naloga 4.7. *Poenostavite.*
- $a^3 \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^3 \cdot b^5$
- $4x^4 \cdot (2x^3)^2$
- $(k^3 \cdot 2h^5)^2$
- $(x^2y^4)^2 \cdot (x^3y)^3$
- $(a^2b^5)^3(ab^3)^2$
- $x^2y^3(x^3y^6)^2$

Naloga 4.8. *Poenostavite.*
- $2^3 \cdot x^2 \cdot 3^2 \cdot (-x)^6$
- $(-a^3b)^4(-a^2b^5a^3)^3$
- $(2s^2 \cdot (-s^2)^5)^5$
- $(-2(z^4)^2(-2z)^3z^5)^3$
- $(-3ab^2)^3(-a^4b^2(a^3)^5)^2(ab^3)^2$
- $(xy^2z)^3(x^3(-y^2)^5(-z))^3(x^2y^3(-z^2)^3)$

Naloga 4.9. *Odpravite oklepaje in poenostavite, če je mogoče.*
- $a^n \cdot a^{n+2} \cdot (-a)^3$

- $(-x^n)^4 \cdot x^2$
- $a^n \cdot (a^2 - a^3 + 2)$
- $(x^2 + 3x^n - 5) \cdot x^{n+1}$

Naloga 4.10. *Poenostavite.*

- $(2s(g^2)^2)^2 - 3(s^4g)g^7$
- $(-4x^2xy^3)^2 + (xy)^5(-2^3xy)$
- $a^2(a^3 - b^2) - a^5 + (-a)^2b^2$
- $(p^2(q^3)^2)^2 - 2p^4q^{12} + 7(-p^3p)(q^4)^3 - (-2)^3(pq^3)^4$

Naloga 4.11. *Poenostavite.*

- $5a^{n+1} + 4a^{n+1} - 6a^{n+1}$
- $3x^{n+2} + 5x^n \cdot x^2 + 2x \cdot x^{n+1}$
- $3^{5x} \cdot 9^x - 3^{7x} + 27^x \cdot 9^{2x}$
- $4^{2y} + 3 \cdot (2^y)^4 - 5 \cdot 8^y \cdot 2^y$
- $5^p \cdot 125^p \cdot 25^p + 2(5^p)^6 - 4 \cdot 25^{3p}$

4.3 Večkratniki

Večkratnik ali tudi k**-kratnik** števila x je vsota k enakih sumandov x:

$$k \cdot x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{k \text{ sumandov}}.$$

Vse večkratnike števila x dobimo tako, da število x zapored pomnožimo z vsemi celimi števili:

$$\{\ldots, -5x, -4x, -3x, -2x, -x, 0, x, 2x, 3x, 4x, 5x, \ldots\} = \{kx;\ k, x \in \mathbb{Z}\} = x\mathbb{Z}.$$

Število **k** je **koeficient** števila oziroma spremenljivke x.

4.4 Algebrski izrazi

Algebrski izraz ali **izraz** je smiseln zapis sestavljen iz:

- števil,
- spremenljivk/parametrov, ki predstavljajo števila in jih označujemo s črkami,
- oznak računskih operacij in funkcij, ki jih povezujejo,
- oklepajev, ki določajo vrstni red računanja.

Če v izraz namesto spremenljivk vstavimo konkretna števila in izračunamo rezultat, dobimo **vrednost izraza** (pri dani izbiri spremenljivk).

Dva matematična izraza sta **enakovredna**, če imata pri katerikoli izbiri spremenljivk vedno enako vrednost.

4.5 Računanje z algebrskimi izrazi

Pri poenostavljanju izrazov veljajo vsi računski zakoni, ki veljajo za računanje s števili.

Komutativnost seštevanja

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Asociativnost seštevanja

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Komutativnost množenja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Asociativnost množenja

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Distributivnost seštevanja in množenja

$$(x + y) \cdot z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

Če v distributivnostnem zakonu zamenjamo levo in desno stran, dobimo pravilo o **izpostavljanju skupnega faktorja**: $xz + yz = (x + y)z$.

4.5.1 Seštevanje in izpostavljanje izrazov

Med seboj lahko seštevamo samo člene, ki se razlikujejo kvečjemu v koeficientu. To naredimo tako, da seštejemo koeficienta.

$$mx^2 + ny + kx^2 + ly = mx^2 + kx^2 + ny + ly = (m + k)x^2 + (n + l)y$$

4.5.2 Množenje izrazov

Dva izraza zmnožimo tako, da vsak člen prvega izraza zmnožimo z vsakim členom drugega izraza. Potem pa seštejemo podobne člene.

$$(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$$

Naloga 4.12. *Poenostavite.*
- $3a + 2b - a + 7b$
- $2a^2b - ab^2 + 3a^2b$
- $5a^4 - (2a)^4 + (-3a^2)^2 - 3(a^2)^2$
- $3(a - 2(a + b)) - 2(b - a(-2)^2)$

Naloga 4.13. *Zapišite izraz.*
- *Kvadrat razlike števil x in y.*
- *Razlika kvadratov števil x in y.*
- *Razlika petkratnika m in kvadrata števila* 3.
- *Kub razlike sedemkratnika števila x in trikratnika števila y.*

Naloga 4.14. *Izpostavite skupni faktor.*
- $3x + 12y^2$
- $m^3 + 8mp$
- $22a^3 - 33ab$
- $kr^2 - rk^2$
- $4u^2v^3 - 6uv^2$
- $12a^2b - 8(ab)^2 - (2ab)^4$

Naloga 4.15. *Izpostavite skupni faktor.*
- $3x(x + 1) + 5(x + 1)$
- $(a - 1)(a + 1) + (a - 1)$
- $4(m - 1) - (1 - m)(a + b)$
- $3(c - 2) + 5c(2 - x)$
- $(-y + x)3a - (y - x)b$

Naloga 4.16. *Izpostavite skupni faktor.*
- $5^{11} - 5^{10} + 5^9$
- $2 \cdot 3^8 + 5 \cdot 3^6$
- $4 \cdot 5^{10} - 10 \cdot 5^8 - 8 \cdot 5^9$
- $7^5 - 7^6 + 7 \cdot 7^4$

Naloga 4.17. *Izpostavite skupni faktor.*
- $3^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+2}$
- $2^{k+2} - 2^k$
- $5 \cdot 3^m + 2 \cdot 3^{m+1}$
- $2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1}$
- $3 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+2} + 4 \cdot 5^{n+3}$
- $7^n + 2 \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 7^{n+1}$

Naloga 4.18. *Izpostavite skupni faktor in izračunajte.*

- $2^{2n} + 4^n + (2^n)^2$
- $5^{2n+1} - 25^n + 3 \cdot 5^{2n-1}$
- $5 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 8^{n-1}$
- $49^n - 2 \cdot 7^{2n-1}$

Naloga 4.19. *Izpostavite skupni faktor.*

- $4a^n + 6a^{n+1}$
- $b^n + b^{n+1} - 2b^{n-1}$
- $a^{n-3} + 5a^n$
- $3x^{n+1} - 15x^n + 18x^{n-1}$

Naloga 4.20. *Zmnožite.*

- $(x-3)(x+2)$
- $(2m+3)(5m-1)$
- $(1-a)(1+a)$
- $(x-3y)(2x+y)$
- $(m-2k)(3m-k)$

Naloga 4.21. *Zmnožite.*

- $(a+b-1)(a-b)$
- $(2x+y)(3x-4y+5)$
- $(m+2n-k)(m+2n+k)$

Naloga 4.22. *Zmnožite.*

- $(x^2-3)(x^3+2)$
- $(3x^2-y)(5y^4-7x^3)$
- $(u^3-1)(u^3+1)$
- $(a^5b^2-4b)(3a^7+2a^2b)$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $(z+w)(z^2-zw+w^2)$

Naloga 4.23. *Poenostavite.*

- $(2x-y)(3+y)+(y-4)(y+4)-2xy+3(y-2x+5)$
- $(x-y)(x+y)-(x^2+xy+y^2)(x-y)-(1-x)x^2+(-y)y^2$
- $2ab+(a-3b^2)(a+3b^2)+2^3(-b^2)^2-(a-b)(b-a)-2a^3$

4.6 Potenciranje izrazov

Kvadrat vsote in razlike binoma

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Kub vsote in razlike binoma

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Kvadrat trinoma

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Naloga 4.24. *Kvadrirajte.*
- $(x+3)^2$
- $(y+2x)^2$
- $(2a+3b)^2$
- $(x-3y)^2$
- $(1-a^2)^2$
- $(2x^2y^3 - z^5)^2$

Naloga 4.25. *Kvadrirajte.*
- $(-a-b)^2$
- $(-2x^5+y)^2$
- $(a^{n+1}+b^n)^2$
- $(a+b-3)^2$
- $(z+2x^3-1)^2$
- $(2x^5 - 3m^6 + 2m^n)^2$

Naloga 4.26. *Kubirajte.*
- $(x+1)^3$
- $(a-2)^3$
- $(2m+3)^3$
- $(-a+2b)^3$
- $(-z-2g)^3$
- $(a^4-2b^2)^3$

Naloga 4.27. *Dopolnite do popolnega kvadrata in ga zapišite.*
- $x^2 + 8x + \_ = (x + \_)^2$
- $x^2 + 12x + \_ = (x + \_)^2$
- $a^2 - 10a + \_ = (a - \_)^2$
- $m^2 - 2m + \_ = (m - \_)^2$

Naloga 4.28. *Poenostavite.*
- $(2a+5)^2 - (a-3)(a+5) - a(a+7) - 2a^2 - a$
- $(x-2y)(x+2y) + 4(y^2-3) - (x-4)^2 + 7(x+4)$
- $(2m+1)(2m-1) - (3m^2-4m) - 2^4 - (m-2)^3 + (2m-3)^2 + m^2m$

4.7 Razstavljanje izrazov

Razstavljanje/razcepljanje/faktorizacija izraza je zapis izraza kot dveh ali več faktorjev.

Izpostavljanje skupnega faktorja

$$xy + xz = x(y + z)$$

$$xy - xz = x(y - z)$$

Pri razstavljanju smo vedno pozorni na to, da razstavimo vse, kar je mogoče.

Razlika kvadratov

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Razlika kubov

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Razlika četrtih potenc

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

Razlika n-tih potenc

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Vsota kvadratov

Vsote kvadratov $x^2 + y^2$ ne moremo razstaviti v množici $\mathbb{Z}$ (oziroma $\mathbb{R}$).

Vsota kubov

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Vsota četrtih potenc

Vsote četrtih potenc $x^4 + y^4$ ne moremo razstaviti v množici $\mathbb{Z}$ (oziroma $\mathbb{R}$).

Vsota n-tih potenc

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Trinome, ki sledijo naslednjim oblikam lahko razstavimo.
Za nekatere trinome pa se lahko zgodi, da jih ne moremo razstaviti v množici $\mathbb{Z}$ (oziroma $\mathbb{R}$).

Tričlenik, ki je kvadrat

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

Viétovo pravilo

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

Ugibanje

$$ax^2 + bx + c = (dx+e)(fx+g)$$

Razstavljanje štiričlenika – združitev 2 člena + 2 člena

$$xa + xb + ya + yb = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$$

Razstavljanje štiričlenika – združitev 3 členi + 1 člen

$$a + 2ax + x^2 - b^2 = (a+x)^2 - b^2 = (a+x-b)(a+x+b)$$

Naloga 4.29. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $x^2 - 25$
- $64 - y^2$
- $16m^2 - 81$
- $25a^2 - 49b^2$
- $121u^2 - 36v^2$

Naloga 4.30. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $2z^2 - 8$
- $3b^2 - 12$
- $48 - 27h^2$
- $200t^2 - 8z^2$
- $a^2b - 49b$
- $80x^2 - 45y^2$

Naloga 4.31. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $162s^3 - 32sc^2$
- $f^4 - 9g^2$
- $16u^4 - 81v^4$
- $a^4 - 16$
- $-18a^2 + 2b^4$

Naloga 4.32. *Razstavite razliko kvadratov.*
- $(f+3)^2 - 25$
- $(2-r)(2+r)$
- $81x^4 - (y-2)^2$
- $(x-y)^2 - (2x+3y)^2$
- $5(4-k)(4+k)$

Naloga 4.33. *Razstavite in izračunajte.*
- $102^2 - 2^2$
- $23^2 - 22^2$
- $999^2 - 1$

Naloga 4.34. *Razstavite vsoto ali razliko kubov.*
- $a^2 - 8b^3$
- $1 + x^3$
- $27m^2 + 8$
- $27 + 64b^3$
- $125x^3 - 64y^3$
- $64a^6 - b^3$

Naloga 4.35. *Razstavite vsoto ali razliko kubov.*
- $a^3b^3 - 1$
- $8a^3 - b^6c^9$
- $m^5 + 27g^3m^2$
- $(a+2)^3 - b^3$
- $10^3 - (a+b)^3$

Naloga 4.36. *Razstavite.*
- $m^2 + 14m + 45$
- $a^2 + 9a + 18$
- $x^2 - 9x + 20$
- $y^2 - 11y + 24$
- $z^2 - 13z + 22$
- $x^2 + 5x - 24$

Naloga 4.37. *Razstavite.*
- $m^2 + m - 110$
- $u^2 + 9u - 22$
- $x^2 - 5x - 24$
- $z^2 - 3z - 28$
- $p^2 - 4p - 45$
- $x^2 - 18x + 81$

Naloga 4.38. *Razstavite.*
- $3x^2 + 87x + 300$
- $2y^2 + 18y + 28$
- $2x^2 - 30x + 108$
- $7a^2 - 84a + 245$
- $6p^5 - 72p^4 + 216p^3$
- $2x^2 + 4x - 70$

Naloga 4.39. *Razstavite.*
- $72y - 81 + 9y^2$
- $3k^3 + 9k^2 - 12k$
- $16t - 4t^2 + 84$
- $p^3 + 13p^2 + 22p$
- $50b + 125 + 5b^2$
- $-7x^2 + 7x + 42$

Naloga 4.40. *Razstavite.*
- $x^2 + 16xy + 63y^2$
- $a^2 - 2aab - 35b^2$
- $p^2 + 3pk - 10k^2$
- $2z^2 - 2zu - 24u^2$
- $60c^3d^4 + 3c^5 - 27c^4d^2$

Naloga 4.41. *Zapišite izraze kot popolne kvadrate.*
- $x^2 + 18x + 81$
- $a^4 + 14a^2 + 29$
- $m^2 - 10m + 25$
- $100 - 20b + b^2$
- $u^2 - 12uv + 36v^2$
- $4y^2 - 12yz + 9z^2$

Naloga 4.42. *Razstavite.*
- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $b^4 - 26b^2 + 25$
- $a^4 - 8a^2 - 9$
- $n^4 - 17n^2 + 16$
- $2y^6 + 10y^4 + 8y^2$

Naloga 4.43. *Razstavite.*
- $2a^2 + 7a - 4$
- $2x^2 + 5x + 3$
- $4m^2 + 10m - 24$
- $4p^2 + 29p - 24$
- $2f^2 + 9f - 5$
- $7b^2 + 23b + 6$

Naloga 4.44. *Razstavite.*
- $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125$
- $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 27$
- $16^x - 5 \cdot 4^x + 6$
- $4^x - 18 \cdot 2^x + 32$

Naloga 4.45. *Razstavite.*
- $a^3 + 3a^2 - 4a - 12$
- $c^3 - 4c^2 - c + 4$
- $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
- $a^2 + ab - 2a - 2b$
- $a^2 + 3ab + 2a + 6b$
- $2xy + x - 4y - 2$

Naloga 4.46. *Razstavite.*
- $a^2 + 2a + 1 - b^2$
- $m^2 - 6m + 9 - k^2$
- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$
- $u^2 - z^2 - 8z - 16$
- $x^2 - y^2 + 14y - 49$
- $25 - y^2 + 2xy - x^2$

Naloga 4.47. *Razstavite.*
- $a^5 - b^5$
- $a^4 - 16$
- $x^4y^4 - 625$
- $a^5 + 32$
- $x^5 - 32$
- $81 - x^4y^8$

Naloga 4.48. *Razstavite.*

- $a^4 - 5a^3 - 24a^2$
- $3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$
- $108m^4 - 3m^2$
- $x^2 - 29xy + 100y^2$
- $u^4 - 125uv^3$
- $81 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$

Poglavje 5

Deljivost

5.1 Relacija deljivosti

Naravno število m je **delitelj** naravnega števila n (**deljenec**), če obstaja naravno število k (**kvocient**), da velja:

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}.$$

Naravno število m deli naravno število n, ko je število n večkratnik števila m.

$$m \mid n \Leftrightarrow n = k \cdot m; \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

Število m je delitelj samega sebe in vseh svojih večkratnikov.
1 je delitelj vsakega naravnega števila.

Če d deli naravni števili m in n, $n > m$, potem d deli tudi vsoto in razliko števil m in n.

Pri deljenju poljubnega naravnega števila n z naravnim številom m imamo dve možnosti: n je deljivo z m ali n ni deljivo z m.

Relacija deljivosti je:

1. **refleksivna**:
$$a \mid a;$$
2. **antisimetrična**:
$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b;$$
3. **tranzitivna**:
$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c.$$

Relacija s temi lastnostmi je relacija **delne urejenosti**, zato relacija deljivosti delno ureja množico $\mathbb{N}$.

Naloga 5.1. *Zapišite vse delitelje števil.*

- 6
- 16
- 37
- 48
- 120

Naloga 5.2. *Pokažite, da trditev velja.*

- *Izraz* $x-3$ *deli izraz* x^2-2x-3.
- *Izraz* $x+2$ *deli izraz* x^3+x^2-4x-4.
- *Izraz* $x-2$ *deli izraz* x^3-8.

Naloga 5.3. *Pokažite, da trditev velja.*

- $19 \mid \left(3^{21}-3^{20}+3^{18}\right)$
- $7 \mid \left(3\cdot 4^{11}+4^{12}+7\cdot 4^{10}\right)$
- $14 \mid \left(5\cdot 3^{6}+2\cdot 3^{8}-3\cdot 3^{7}\right)$
- $25 \mid \left(7\cdot 2^{23}-3\cdot 2^{24}+3\cdot 2^{25}-2^{22}\right)$
- $11 \mid \left(2\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{7}+10^{8}\right)$
- $35 \mid \left(6^{32}-36^{15}\right)$

Naloga 5.4. *Pokažite, da trditev velja.*

- $3 \mid \left(2^{2n+1}-5\cdot 2^{2n}+9\cdot 2^{2n-1}\right)$
- $29 \mid \left(5^{n+3}-2\cdot 5^{n+1}+7\cdot 5^{n+2}\right)$
- $10 \mid \left(3\cdot 7^{4n-1}-4\cdot 7^{4n-2}+7^{4n+1}\right)$
- $10 \mid \left(9^{3n-1}+9\cdot 9^{3n+1}+9^{3n}-9^{3n+2}\right)$
- $5 \mid \left(7\cdot 2^{4n-2}+3\cdot 4^{2n}-16^{n}\right)$

Naloga 5.5. *Pokažite, da je za poljubno naravno število* u *vrednost izraza*

$$(u+7)(7-u)-3(3-u)(u+5)$$

večkratnik števila 4.

5.2 Kriteriji deljivost

Deljivost z 2

Število je deljivo z 2 natanko takrat, ko so enice števila deljive z 2.

Deljivost s 3

Število je deljivo s 3 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva s 3.

Deljivost s 4 oziroma 25

Število je deljivo s 4 oziroma 25 natanko takrat, ko je dvomestni konec števila deljiv s 4 oziroma 25.

Deljivost s 5

Število je deljivo s 5 natanko takrat, ko so enice števila enake 0 ali 5.

Deljivost s 6

Število je deljivo s 6 natanko takrat, ko je deljivo z 2 in s 3 hkrati.

Deljivost z 8 oziroma s 125

Število je deljivo z 8 oziroma s 125 natanko takrat, ko je trimestni konec števila deljiv z 8 oziroma s 125.

Deljivost z 9

Število je deljivo z 9 natanko takrat, ko je vsota števk števila deljiva z 9.

Deljivost z 10 oziroma 10^n

Število je deljivo z 10 natanko takrat, ko so enice števila enake 0.
Število je deljivo z 10^n natanko takrat, ko ima število na zadnjih n mestih števko 0.

Deljivost z 11

Število je deljivo z 11 natanko takrat, ko je alternirajoča vsota števk tega števila deljiva z 11.

Deljivost s 7

Algoritem za preverjanje deljivosti s 7:
1. vzamemo enice danega števila in jih pomnožimo s 5,
2. prvotnemu številu brez enic prištejemo dobljeni produkt,
3. vzamemo enice dobljene vsote in jih pomnožimo s 5,
4. produkt prištejemo prej novo dobljenemu številu ...

Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo dvomestnega števila – če je to deljivo s 7, je prvotno število deljivo s 7.

Naloga 5.6. *S katerimi od števil* 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 *so deljiva naslednja števila?*
- 84742
- 393948
- 12390

- 19401

Naloga 5.7. *Določite vse možnosti za števko a, da je število $\overline{65833a}$:*
- *deljivo s* 3*,*
- *deljivo s* 4*,*
- *deljivo s* 5*,*
- *deljivo s* 6*.*

Naloga 5.8. *Določite vse možnosti za števko b, da je število $\overline{65b90b}$:*
- *deljivo z* 2*,*
- *deljivo s* 3*,*
- *deljivo s* 6*,*
- *deljivo z* 9*,*
- *deljivo z* 10*.*

Naloga 5.9. *Določite vse možnosti za števki c in d, da je število $\overline{115c1d}$ deljivo s* 6*.*

Naloga 5.10. *Določite vse možnosti za števki e in f, da je število $\overline{115e1f}$ deljivo z* 8*.*

Naloga 5.11. *Pokažite, da za vsako naravno število n* 12 *deli $n^4 - n^2$.*

Naloga 5.12. *Preverite, ali je število* 8641969 *deljivo s* 7*.*

5.3 Osnovni izrek o deljenju

Osnovni izrek o deljenju

Za poljubni naravni števili **m** (**deljenec**) in **n** (**delitelj**), $m \geqslant n$, obstajata natanko določeni nenegativni števili **k** (**količnik/kvocient**) in **r** (**ostanek**), da velja:

$$m = k \cdot n + r; \quad 0 \leqslant r < n; \quad m, n \in \mathbb{N}; k, r \in \mathbb{N}_0.$$

Če je ostanek pri deljenju enak 0, je število m **večkratnik** števila n. Tedaj je število m deljivo s številom n. Pravimo, da n deli število m: $n \mid m$.

Naloga 5.13. *Določite, katera števila so lahko ostanki pri deljenju naravnega števila n s:*
- *številom* 3*;*
- *številom* 7*;*
- *številom* 365*.*

Naloga 5.14. *Zapišite prvih nekaj naravnih števil, ki dajo:*
- *pri deljenju s* 4 *ostanek* 3*;*
- *pri deljenju s* 7 *ostanek* 4*;*
- *pri deljenju z* 9 *ostanek* 4*.*

Naloga 5.15. *Zapišite naravno število, ki da:*
- *pri deljenju s* 7 *količnik* 5 *in ostanek* 3*;*
- *pri deljenju z* 10 *količnik* 9 *in ostanek* 1*;*
- *pri deljenju s* 23 *količnik* 2 *in ostanek* 22*.*

Naloga 5.16. *Zapišite množico vseh naravnih števil n, ki dajo:*
- *pri deljenju z* 2 *ostanek* 1*;*
- *pri deljenju z* 2 *ostanek* 0*;*
- *pri deljenju s* 5 *ostanek* 2*.*

Naloga 5.17. *Katero število smo delili s* 7*, če smo dobili kvocient* 3 *in ostanek* 5*?*

Naloga 5.18. *S katerim številom smo delili število* 73*, če smo dobili kvocient* 12 *in ostanek* 1*?*

Naloga 5.19. *Marjeta ima čebulice tulipana, ki jih želi posaditi v več vrst. V vsaki od* 3 *vrst je izkopala po* 8 *jamic, potem pa ugotovila, da ji bosta* 2 *čebulici ostali. Koliko čebulic ima Marjeta?*

Naloga 5.20. *Če neko število delimo z* 8*, dobimo ostanek* 7*. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s* 4*?*

Naloga 5.21. *Če neko število delimo s* 24 *dobimo ostanek* 21*. Kolikšen je ostanek, če to isto število delimo s* 3*?*

5.4 Praštevila in sestavljena števila

Glede na število deliteljev, lahko naravna števila razdelimo na tri skupine:
- **število** 1 – število, ki ima samo enega delitelja (samega sebe);
- **praštevila** – števila, ki imajo natanko dva delitelja (1 in samega sebe);
- **sestavljena števila** – števila, ki imajo več kot dva delitelja.

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \mathbb{P} \cup \{sestavljena\ \text{števila}\}$$

Praštevil je neskončno mnogo.

Število n je praštevilo, če ni deljivo z nobenim praštevilom, manjšim ali enakim $\sqrt{n}$.

Eratostenovo sito:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Naloga 5.22. *Preverite, ali so števila* $103, 163, 137, 197, 147, 559$ *praštevila.*

5.5 Osnovni izrek aritmetike

Vsako naravno število lahko enolično/na en sam način (do vrstnega reda faktorjev natančno) zapišemo kot produkt potenc s praštevilskimi osnovami:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}; p_i \in \mathbb{P} \wedge n, k_i \in \mathbb{N}.$$

Zapis naravnega števila kot produkt potenc s praštevilskimi osnovami imenujemo tudi **praštevilski razcep**.

Naloga 5.23. *Zapišite število* 8755 *kot produkt samih praštevil in njihovih potenc.*

Naloga 5.24. *Razcepite število* 3520 *na prafaktorje.*

Naloga 5.25. *Zapišite praštevilski razcep števila* 38250.

Naloga 5.26. *Zapišite praštevilski razcep števila* 3150.

Naloga 5.27. *Razcepite število* 66 *na prafaktorje in zapišite vse njegove delitelje.*

Naloga 5.28. *Razcepite število* 204 *na prafaktorje in zapišite vse njegove delitelje.*

Naloga 5.29. *Zapišite vse izraze, ki delijo dani izraz.*
- $x^2 + x - 1$
- $x^3 - x^2 - 4x + 4$
- $x^3 - 27$

5.6 Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

Največji skupni delitelj števil m in n je največje število od tistih, ki delijo števili m in n. Oznaka: $D(m, n)$.

Najmanjši skupni večkratnik števil m in n je najmanjše število od tistih, ki so deljiva s številoma m in n. Oznaka: $v(m, n)$.

Števili m in n, katerih največji skupni delitelj je 1, sta **tuji števili**.

Računanje D in v s prafaktorizacijo števil
- Števili m in n prafaktoriziramo.
- Za $D(m, n)$ vzamemo potence, ki so skupne obema številom v prafaktorizaciji.
- Za $v(m, n)$ vzamemo vse potence, ki se pojavijo v prafaktorizaciji števil, z največjim eksponentom.

Za poljubni naravni števili m in n velja zveza $\mathbf{D(m, n) \cdot v(m, n) = m \cdot n}$.

Evklidov algoritem
V tem algoritmu zapored uporabljamo osnovni izrek o deljenju.
Najprej ga uporabimo na danih dveh številih.
V naslednjem koraku deljenec postane prejšnji delitelj, delitelj pa prejšnji ostanek.
V vsakem koraku imamo manjša števila, zato se algoritem konča v končno mnogo korakih.

Največji skupni delitelj danih števil m in n je zadnji od 0 različen ostanek pri deljenju v Evklidovem algoritmu.

Naloga 5.30. *Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik danih parov števil.*
- 6 *in* 8
- 36 *in* 48
- 550 *in* 286
- 6120 *in* 4158

Naloga 5.31. *Preverite, ali sta števili* 522 *in* 4025 *tuji števili.*

Naloga 5.32. *Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik treh števil.*
- 1320*,* 6732 *in* 297
- 372*,* 190 *in* 11264

Naloga 5.33. *Z Evklidovim algoritmom izračunajte največji skupni delitelj parov števil.*
- 754 *in* 3146
- 4446 *in* 6325

Naloga 5.34. *Izračuanjte število b, če velja:* $D(78166, b) = 418$ *in* $v(78166, b) = 1485154$.

Naloga 5.35. *Določite največji skupni delitelj izrazov.*
- $x^3 - 5x^2 - 24x$ *in* $x^2 - 64$
- $x^2 + 3x + 10$*,* $x^3 - 4x$ *in* $x^3 - 8$
- $x^2 - 25$ *in* $x^3 - 27$

Naloga 5.36. *Določite najmanjši skupni večkratnik izrazov.*
- $x^2 - 64$ *in* $x + 8$
- x, $8 - x$ *in* $x^2 - 64$
- $x^2 + 3x - 10$, $2x$ *in* $x^2 + 5x$

Naloga 5.37. *Velika Janezova terasa je dolga* 1035 *cm in široka* 330 *cm. Janez bi jo rad sam tlakoval s kvadratnimi vinilnimi ploščami. Ker ni najbolj vešč tega dela, bo kupil tako velike plošče, da mu jih ne bo treba rezati. Koliko so največ lahko velik kvadratne plošče? Koliko plošč bo potreboval za tlakovanje?*

Naloga 5.38. *Neca gre v knjižnico vsake* 14 *dni, Nace pa vsakih* 10 *dni. V knjižnici se srečata v ponedeljek 1. marca. Čez koliko dni se bosta naslednjič srečala? Na kateri dan in datum?*

Poglavje 6

Racionalna števila

6.1 Ulomki in racionalna števila

Ulomek $\frac{x}{y}$ je zapis, ki predstavlja zapis deljenja

$$x : y = \frac{x}{y}; \quad y \neq 0 \wedge x, y \in \mathbb{Z}.$$

Število/izraz x imenujemo **števec**, y pa **imenovalec**, med njima je **ulomkova črta**.

Ulomek $\frac{x}{0}$ ni definiran (nima pomena), saj z 0 ne moremo deliti.

Algebrski ulomek je ulomek, v katerem v števcu in/ali imenovalcu nastopajo algebrski izrazi.

Vsako celo število $x \in \mathbb{Z}$ lahko zapišemo z ulomkom: $x = \frac{x}{1}$.

Ničelni ulomek je ulomek oblike $\frac{0}{y} = 0; y \neq 0$.

V ulomku, kjer v števcu ali imenovalcu nastopa negativno število, upoštevamo enakost

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}.$$

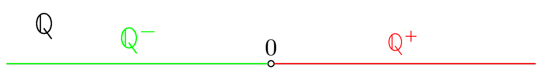
Vsakemu neničelnemu ulomku $\frac{x}{y}$ lahko priredimo njegovo **obratno vrednost**:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}; \quad x, y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Racionalna števila

Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ je sestavljena iz vseh ulomkov (kar pomeni, da vsebuje tudi vsa naravna in cela števila).

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y};\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^-$,
- množico z elementom nič: $\{\mathbf{0}\}$ in
- množico pozitivnih racionalnih števil: $\mathbb{Q}^+$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

Ulomka $\dfrac{x}{y}$ in $\dfrac{z}{w}$ sta enaka/enakovredna natanko takrat, ko je $xz = wy$; $y, z \neq 0$.

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow xz = wy; \quad y, z \neq 0$$

Enaka/enakovredna ulomka sta različna zapisa za isto racionalno število.

Naloga 6.1. *Za katere vrednosti x ulomek ni definiran?*
- $\frac{x-2}{x+1}$
- $\frac{2}{x-5}$
- $\frac{x+2}{3}$
- $\frac{13}{2x-5}$

Naloga 6.2. *Za katere vrednosti x ima ulomek vrednost enako 0?*
- $\frac{x-2}{x+1}$
- $\frac{2}{x-5}$
- $\frac{x+2}{3}$
- $\frac{13}{2x-5}$

Naloga 6.3. *Ali imata ulomka isto vrednost?*
- $\frac{2}{3}$ *in* $\frac{10}{15}$
- $\frac{-1}{2}$ *in* $\frac{1}{-2}$
- $\frac{4}{5}$ *in* $\frac{-8}{-10}$
- $\frac{5}{8}$ *in* $\frac{8}{5}$

Naloga 6.4. *Za kateri x imata ulomka isto vrednost?*
- $\frac{x+1}{2}$ *in* $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{2x-1}$ *in* $\frac{1}{3}$
- $\frac{x+1}{2}$ *in* $\frac{x-1}{-3}$
- $\frac{x+1}{x-2}$ *in* $\frac{2}{5}$

Naloga 6.5. *Ali ulomka predstavljata isto vrednost?*
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ *in* $-\frac{1}{2}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ *in* $\frac{3}{2}$
- $1\frac{3}{7}$ *in* $\left(\frac{7}{10}\right)^{-1}$

Naloga 6.6. *Ali ulomka predstavljata isto vrednost?*
- $2 \cdot \frac{3}{4}$ *in* $\frac{3}{2}$
- $2\frac{3}{4}$ *in* $\frac{3}{2}$
- $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$ *in* $1\frac{5}{2}$
- $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-1}$ *in* $\frac{5}{7}$

Naloga 6.7. *Zapišite s celim delom oziroma z ulomkom.*
- $\frac{14}{5}$
- $-\frac{5}{2}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{110}{17}$
- $3\frac{5}{8}$
- $2\frac{9}{2}$

6.2 Razširjanje in krajšanje ulomkov

Razširjanje ulomka

Ulomek ohrani svojo vrednost, če števec in imenovalec pomnožimo z istim neničelnim številom oziroma izrazom. Temu postopku pravimo **razširjanje ulomka**.

$$\frac{x}{y} = \frac{x \cdot z}{y \cdot z}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

Ko ulomke seštevamo ali odštevamo, jih razširimo na **najmanjši skupni imenovalec**, ki je najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev.

Krajšanje ulomka

Vrednost ulomka se ne spremeni, če števec in imenovalec delimo z istim neničelnim številom oziroma izrazom. Temu postopku rečemo **krajšanje ulomka**.

$$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

Ulomek $\dfrac{x}{y}$ je **okrajšan**, če je $(x, y) = 1$, torej če sta števec in imenovalec tuji števili.

Naloga 6.8. *Razširite ulomke na najmanjši skupni imenovalec.*

- $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ *in* $\frac{5}{6}$
- $\frac{2}{7}, 1$ *in* $\dfrac{1}{2}$
- $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}$ *in* $-\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$ *in* $\frac{-1}{3}$
- $\frac{2}{-1}, \frac{3}{2}$ *in* $\frac{1}{-3}$
- $\frac{3}{-4}, \frac{-1}{2}$ *in* $-\frac{2}{5}$

Naloga 6.9. *Razširite ulomke na najmanjši skupni imenovalec.*

- $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x+1}$ *in* 1
- $\frac{2}{x}, \frac{1}{x-3}$ *in* $\frac{1}{(x-3)^2}$
- $\frac{3}{x^2-4x}, \frac{1}{x}$ *in* $\frac{2}{x-4}$
- $\frac{4}{x-4}, \frac{2}{x-2}$ *in* $\frac{1}{x^2-6x+8}$
- $\frac{2}{x-1}$ *in* $\frac{3}{1-x}$
- $\frac{1}{2-x}, \frac{2}{x+2}$ *in* $\frac{3}{x^2-4}$

Naloga 6.10. *Okrajšajte ulomek.*

- $\frac{100}{225}$
- $\frac{34}{51}$
- $\frac{121}{3}$
- $\frac{45}{75}$

Naloga 6.11. *Okrajšajte ulomek.*

- $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$
- $\frac{x^3+8}{2x+4}$
- $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$
- $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$
- $\frac{x^2-9}{3-x}$
- $\frac{x-4}{16-x^2}$

6.3 Seštevanje in odštevanje ulomkov

Seštevanje ulomkov

Ulomke **seštevamo** tako, da jih razširimo na skupni imenovalec, nato seštejemo števce, imenovalce pa prepišemo.

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw}{yw} + \frac{yz}{yw} = \frac{xw + yz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Odštevanje ulomkov

Ulomke **odštevamo** tako, da prištejemo nasprotni ulomek.

$$\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{x}{y} + \left(-\frac{z}{w}\right) = \frac{xw}{yw} + \frac{-yz}{yw} = \frac{xw - yz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Naloga 6.12. *Izračunajte.*

- $\frac{5}{7} + \frac{1}{14}$
- $\frac{2}{9} - \frac{1}{3}$
- $\frac{3}{8} + 1\frac{1}{2}$
- $1 - \frac{5}{6}$

Naloga 6.13. *Izračunajte.*

- $\left(\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12}$
- $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - 2\right)$
- $\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} - 3\right) + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}$
- $1 - \left(2 - \left(3 - 4 - \left(5 - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}\right)$

Naloga 6.14. *Poenostavite.*

- $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}$
- $\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x}$
- $\frac{3}{x^2-4x} - \left(\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x^2-5x+4}\right)$
- $\frac{2}{xy} + \frac{3}{x} - \frac{2}{y}$

Naloga 6.15. *Poenostavite.*

- $\frac{(x-3)^2+(x+3)^2}{x^2-9} - \frac{3x^2}{2x^2-x^2}$
- $\frac{(a-3)^3-(a-1)^3+26}{6a} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$
- $\frac{x^3-2x^2-x+2}{-x(1-x)-2} - \left(\frac{x-1}{x} - 1\right)^{-1}$
- $\left(\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right)\right)\right) - \left(\frac{60}{x}\right)^{-1}$

6.4 Množenje ulomkov

Ulomka **množimo** tako, da števce množimo s števci, imenovalce pa množimo z imenovalci.

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}; \quad x, z \in \mathbb{Z} \wedge y, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Produkt danega in njemu obratnega ulomka je enak 1.

$$\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$$

Naloga 6.16. *Izračunajte.*

- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$
- $\frac{-2}{13} \cdot \left(-\frac{39}{4}\right)$
- $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9}$
- $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$
- $\frac{-2}{5} \cdot 4\frac{2}{7}$
- $3 \cdot \frac{2}{3}$

Naloga 6.17. *Poenostavite.*

- $\frac{x^2-9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x^2+5x}{-x+2} \cdot \frac{2x^2-8}{x^2+7x+10}$
- $\frac{x^3-4x^2-4x+16}{2x+4} \cdot \frac{6x}{3x-6}$
- $2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+x}$

Naloga 6.18. *Poenostavite.*

- $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+x^2+x} \cdot \frac{x^2+x}{2-x}$
- $\left(\frac{6-x}{x^2+6x} - \frac{x}{36-x^2}\right) \cdot \left(\frac{2x-6}{x^2+6x}\right)^{-1} + \frac{x}{6-x}$
- $\left(\left(x - y + \left(\frac{x+y}{2xy}\right)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+y}\right)^{-1} - 2xy\right) \cdot (x-y)^{-1}$
- $\left(xy + y^2 - \frac{xy+y^2}{3xy-3x^2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{3x}\right)^{-1} - \left(-\frac{y-x}{y}\right)^{-1}$

6.5 Deljenje ulomkov

Ulomek **delimo** z neničelnim ulomkom tako, da prvi ulomek množimo z obratno vrednostjo drugega ulomka.

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Deljenju ulomkov lahko zapišemo kot **dvojni ulomek**.

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}}; \quad x \in \mathbb{Z} \wedge y, z, w \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

Naloga 6.19. *Izračunajte.*

- $2 : \frac{4}{5}$
- $1\frac{2}{3} : 2\frac{5}{6}$
- $\frac{7}{12} : 14$
- $\frac{3}{8} : \frac{9}{32}$

Naloga 6.20. *Izračunajte.*

- $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{8}}$
- $\frac{\frac{1}{2}}{2}$
- $\frac{3}{\frac{5}{6}}$
- $\frac{\frac{2}{-5}}{\frac{-1}{5}}$

- $\dfrac{\frac{3}{5}}{-2}$
- $\dfrac{-\frac{1}{2}}{2^{-1}}$

Naloga 6.21. *Poenostavite.*

- $\frac{x^2+x-6}{x+2} : (x-2)$
- $\frac{x-1}{2x^2-4x} : \frac{x^2}{x-2}$
- $x : \frac{x^2+x}{x^3+1}$

Naloga 6.22. *Poenostavite.*

- $\frac{x-1}{x^2+4} : \frac{1-x^2}{x-2}$
- $\frac{x-2}{(x+2)^{-1}} : \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{-1}$
- $\frac{3-x}{2-x} : \frac{x-3}{x-2}$

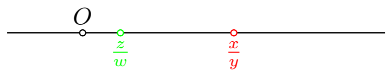
6.6 Urejenost racionalnih števil

Za ulomka $\frac{x}{y}$ in $\frac{z}{w}$ $(y, w \notin \{0\})$ velja natanko ena izmed treh možnosti:

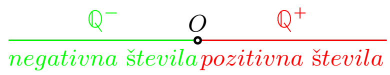
1. prvi ulomek je večji od drugega $\frac{x}{y} \geqslant \frac{z}{w}$ natanko tedaj, ko je $xw \geqslant yz$;
2. drugi ulomek je večji od prvega $\frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w}$ natanko tedaj, ko je $xw \leqslant yz$;
3. ulomka sta enaka $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ natanko tedaj, ko je $xw = yz$ oziroma $\frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \wedge \frac{x}{y} \geqslant \frac{z}{w}$.

Enaka ulomka predstavljata isto racionalno število.

Slika večjega racionalnega števila $\frac{x}{y}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{z}{w}$.



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



V množici ulomkov velja, da je vsak negativen ulomek manjši od vsakega pozitivnega ulomka.

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši ali enak* $(\leqslant)$ oziroma *biti večji ali enak* $(\geqslant)$.
Za to relacijo linearne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

- **refleksivnost**: $\forall \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{x}{y}$;
- **antisimetričnost**: $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \wedge \frac{z}{w} \leqslant \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$;
- **tranzitivnost**: $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w}, \frac{r}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \wedge \frac{z}{w} \leqslant \frac{r}{q} \Rightarrow \frac{x}{y} \leqslant \frac{r}{q}$ in
- **stroga sovisnost**: $\forall \frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} \leqslant \frac{z}{w} \vee \frac{z}{w} \leqslant \frac{x}{y}$.

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši* $(<)$ oziroma *biti večji* $(>)$.
Tedaj veljajo le lastnosti: **refleksivnost**, **antisimetričnost** in **tranzitivnost**.

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{r}{q} < \frac{z}{w} + \frac{r}{q}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \wedge \quad \frac{r}{q} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{q} < \frac{z}{w} \cdot \frac{r}{q}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \wedge \quad \frac{r}{q} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{q} > \frac{z}{w} \cdot \frac{r}{q}$$

Naloga 6.23. *Kateri od ulomkov je večji?*

- $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$
- $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$
- $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$
- $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$

Naloga 6.24. *Katero število je za $\frac{3}{5}$ večje od $\frac{2}{3}$?*

Naloga 6.25. *Katero število je za $\frac{1}{3}$ manjše od $\frac{7}{9}$?*

Naloga 6.26. *Ulomke uredite po velikosti od večjega k manjšemu.*

- $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{9}$ *in* $\frac{7}{8}$
- $-\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{-3}{4}$ *in* $\frac{2}{-5}$

Naloga 6.27. *Ali obstajajo ulomki z imenovalcem* 25, *ki so med $\frac{4}{9}$ in $\frac{5}{9}$? Če obstajajo, jih zapišite.*

Naloga 6.28. *Ali obstajajo ulomki z imenovalcem* 100, *ki so med $\frac{13}{53}$ in $\frac{14}{53}$? Če obstajajo, jih zapišite.*

6.7 Potence s celimi eksponenti

Naravna števila so enaka pozitivnim celim številom, torej so potence s pozitivnimi celimi eksponenti enake potencam z naravnimi eksponenti.

Potenca z eksponentom enakim 0 je definirana kot:

$$x^0 = \begin{cases} 1; & x \neq 0; \\ 0; & x = 0. \end{cases}$$

Potenca z negativnim celim eksponentom pa je definirana kot:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad x \notin \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti

V spodaj zapisanih pravilih upoštevamo realni osnovi $x, y \in \mathbb{R}$ in cele eksponente $m, n \in \mathbb{Z}$.

- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
- $x^n \cdot y^n = (xy)^n$
- $(x^n)^m = x^{nm}$
- $x^n : x^m = \dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $x^n : y^n = \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n; \quad y \neq 0$

Naloga 6.29. *Poenostavite.*
- $x^{10} : x^5$
- $b^4 : b^{-11}$
- $y^{-3} : y^2$

Naloga 6.30. *Poenostavite.*
- $\frac{x^3y^{-2}}{x^{-2}y^3}$
- $\frac{2^{10}a^4b^{-4}}{2^{-2}a^{-2}b}$
- $\frac{3^{10}x^{-12}y^{-20}}{6^{10}x^2y^{-3}}$

Naloga 6.31. *Poenostavite.*
- $\left(\frac{-2^5a^{-4}b^3}{2^{-2}ab^{-2}}\right)^2 : \left(-\frac{a^2b^4}{2^3a^{-2}}\right)^3$
- $\left(\frac{-3^4x^{-2}y^3}{x^3z^2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3^5x^2z^{-2}}{y^{-3}}\right)^3$
- $-\frac{5^5a^4b^{-3}}{a^{-3}b^2} : \left(-\frac{5^2a^{-2}b}{a^2}\right)^2$

Naloga 6.32. *Poenostavite.*
- $\frac{x^{-2}+x^{-1}}{x^{-3}+x^{-2}}$
- $\frac{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{x^{-4}-x^{-1}}$
- $\frac{1+x^{-2}}{x^{-4}-1}$
- $\frac{x^{-2}+x^{-3}}{x^{-3}-x^{-2}}$

Naloga 6.33. *Poenostavite.*
- $\frac{3^{n+2}-2\cdot3^{n-1}}{3^{n-2}+3^n}$
- $\frac{5^{2n}+5^{2n-1}-2\cdot5^{2n+1}}{25^n}$

- $\frac{7^{3n-3}+3\cdot 7^{3n-2}-7^{3n-4}}{7^{3n-2}-7^{3n-1}}$
- $\frac{2^{n-1}+3\cdot 2^{n}}{4^{n}+5\cdot 2^{2n-1}}$

Naloga 6.34. *Napišite brez negativnih eksponentov.*

- $x^{-1}+2x^{-2}$
- $1-x^{-1}-x^{-2}$
- $\frac{1}{x^{-1}}+x^{-1}$
- $\left(\frac{\frac{2}{x^{-2}}}{\left(x^{-2}\right)^{-1}}\right)^{-1}$

Naloga 6.35. *Poenostavite.*

- $\left(x-x^{-1}\right)\cdot\left(x^{2}-1\right)^{-1}$
- $\frac{x^{-2}+x^{-1}}{x^{-2}-x^{-1}}-(1-x)^{-1}$
- $\left(\frac{x^{-3}-x^{-1}}{1-x^{-2}}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$
- $\left(x^{-2}-2x^{-1}+1\right)^{-1}-(x-1)^{-2}$

6.8 Decimalni zapis

Vsako racionalno število lahko zapišemo na dva načina:
- z **ulomkom** in
- z **decimalnim zapisom**.

Decimalni zapis sestavljajo tri komponente:
- **celi del**,
- **decimalna pika** oziroma **decimalna vejica** in
- **ulomljeni del**.

Decimalni zapis racionalnega števila (zapisanega z ulomkom) dobimo tako, da števec ulomka delimo z njegovim imenovalcem.

Končen decimalni zapis

Končen decimalni zapis dobimo pri **desetiških/decimalnih ulomkih**.
To so ulomki, katerih imenovalec se lahko razširi na potenco števila 10, takšni imenovalci so oblike $2^n \cdot 5^m$.

Neskončen periodičen decimalni zapis

Neskončen periodičen decimalni zapis dobimo pri **nedesetiških/nedecimalnih ulomkih**.
To so ulomki, katerih imenovalca ne moremo razširiti na potenco števila 10.

Najmanjšo skupino števk, ki se pri neskončnem periodičnem decimalnem zapisu ponavlja, imenujemo **perioda**. Označujemo jo s črtico nad to skupino števk.
Glede na število števk, ki v njej nastopajo, določimo njen **red**.

Naloga 6.36. *Zapišite z decimalnim zapisom.*
- $\frac{3}{8}$
- $\frac{2}{125}$
- $\frac{6}{25}$
- $\frac{5}{6}$
- $\frac{4}{9}$
- $\frac{4}{15}$
- $\frac{1}{7}$
- $\frac{11}{13}$

Naloga 6.37. *Periodično decimalno število zapišite z okrajšanim ulomkom.*
- $0.\overline{24}$
- $0.\overline{9}$
- $1.\overline{2}$
- $1.0\overline{3}$
- $1.00\overline{12}$

Naloga 6.38. *Izračunajte.*

- $2.3 + 4.8$
- $11.3 + 2.35$
- $0.94 + 0.24$
- $5.6 - 2.9$
- $0.2 - 1.25$
- $12.5 - 20.61$

Naloga 6.39. *Izračunajte.*

- $0.1 \cdot 2.44$
- $1.2 \cdot 0.4$
- $11 \cdot 0.002$
- $0.5 \cdot 0.04$
- $0.3 : 5$
- $12.5 : 0.05$
- $2 : 0.02$
- $0.15 : 0.3$

Naloga 6.40. *Izračunajte.*

- $(0.24 + 0.06) : 5 - 1.2$
- $12 : (1.2 - 0.2 \cdot 3) + 1.2$
- $(2 - 0.3 : (0.025 + 0.035)) \cdot 0.11$
- $(1 - 0.2 : (0.03 + 0.02)) \cdot 1.5$
- $0.3 \cdot (1.2 - 0.6 \cdot (0.04 + 0.06))$