Poglavje 7

Realna števila

7.1 Realna števila

Med poljubnima dvema racionalnima številoma $\frac{x}{y}, \frac{z}{w} \in \mathbb{Q}$ je vsaj še eno racionalno število – aritmetična sredina teh dveh števil $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{w}\right)$.
Med poljubnima racionalnima številoma je neskončno mnogo racionalnih števil in pravimo, da je množica $\mathbb{Q}$ **povsod gosta**.

Množici $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Z}$ imata enako moč – sta števno neskončni ($m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{Z}) = \aleph_0$).

Iracionalna števila $\mathbb{I}$ so vsi kvadratni koreni števil, ki niso popolni kvadrati, tretji koreni, ki niso popolni kubi, ..., število π, Eulerjevo število e ...

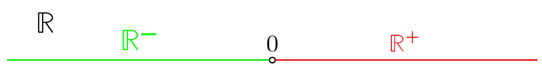
Množici racionalnih in iracionalnih števil sta disjunktni: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Realna števila so množica števil, ki jo dobimo kot unijo racionalnih in iracionalnih števil: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
Množica realnih števil je močnejša od množice racionalnih števil. Pravimo, da je (neštevno) neskončna.

Množico realnih števil lahko, glede na predznak števil, razdelimo na tri množice:

- množico negativnih realnih števil $\mathbb{R}^-$,
- množico z elementom nič: $\{\mathbf{0}\}$ in
- množico pozitivnih realnih števil: $\mathbb{R}^+$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$



Vsaki točki na številski premici ustreza natanko eno realno število in obratno, vsakemu realnemu številu ustreza natanko ena točka na številski premici.
Številsko premico, ki upodablja realna števila, imenujemo tudi **realna os**.

Z relacijo *biti manjši ali enak* je množica $\mathbb{R}$ **linearno urejena**, to pomeni, da veljajo:

- **refleksivnost**: $\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x$;
- **antisimetričnost**: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$;
- **tranzitivnost**: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;
- **stroga sovisnost**: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \vee y \leqslant x$.

Za realcijo urejenosti na množici $\mathbb{R}$ veljajo še naslednje lastnosti:

- **monotonost vsote**: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ oziroma $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$;
- $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$ in $x \leqslant y \wedge z > 0 \Rightarrow xz \leqslant yz$;
- $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$ in $x \leqslant y \wedge z < 0 \Rightarrow xz \geqslant yz$.