Poglavje 12

Geometrija v ravnini

12.1 Osnovni geometrijski pojmi

Evklid je v prvi knjigi *Elementov* postavil 23 'opredelitev' temeljnih geometrijskih pojmov. Med njimi so:

- **Točka** je tisto, kar nima delov – nima razsežnosti.
- **Črta** je dolžina brez širine – ena razsežnost.
- **Ploskev** je tisto, kar ima samo dolžino in širino – dve razsežnosti.

Tem trditvam sledijo **aksiomi** (temeljne resnice) – privzamemo jih kot veljavne hipoteze, **izreki** – dokazujemo jih z aksiomi in prej dokazanimi izreki, in **definicije** – opisi novih pojmov in lastnosti.

Incidenčni aksiomi

Definicija 12.1. *Incidenca je relacija, ki povezuje točko in premico – premica in točka sta v relaciji, če točka leži na premici;* $A\ R\ p$, *če* $A \in p$.

Aksiom 12.2. *Za dve različni točki* A *in* B *obstaja natanko določena premica* p*, tako da točki* A *in* B *ležita na njej.*

Aksiom 12.3. *Za vsako premico* p *obstajata vsaj dve različni točki* P *in* Q*, ki ležita na njej.*

Aksiom 12.4. *Obstajajo tri različne točke, ki ne ležijo hkrati na isti premici.*

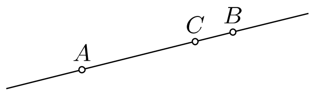
Definicija 12.5. *Točke* $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ *ki ležijo na isti premici, so* ***kolinearne****, če ne ležijo na isti premici, pa so* ***nekolinearne****.*

Izrek 12.6. *Dve različni premici imata lahko največ eno skupno točko.*

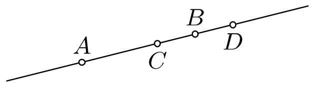
Definicija 12.7. *Premici, ki imata natanko eno skupno točko, se* ***sekata****, imenujemo ju* ***sečnici****, njuno skupno točko pa* ***presečišče*** *premic.*

Definicija 12.8. *Premici, ki ležita na isti ravnini in nimata nobene skupne točke ali imata vse točke skupne – sovpadata, sta* ***vzporedni****, imenujemo ju* ***vzporednici****.*

Aksiom 12.9. *Če so tri različne točke kolinearne, ena vedno leži med drugima dvema.*



Aksiom 12.10. *Če sta A in B različni točki premice p, potem na premici p ležita vsaj še točki C in D, in sicer C leži med A in B, D pa tako, da je C med A in D.*



Izrek 12.11. *Med dvema različnima točkama premice je neskončno mnogo točk.*

Definicija 12.12. *Množica točk premice, ki ležijo med različnima točkama A in B, vključno z A in B, je* ***daljica*** *AB. Točki A in B sta njeni* ***krajišči****.*

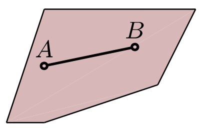
Definicija 12.13. *Poljubna točka premice razdeli premico na dva* ***poltraka****. To točko imenujemo* ***izhodišče****, ponavadi jo označimo z O.*

Definicija 12.14. *Premica, na kateri leži daljica oziroma poltrak, je* ***nosilka*** *daljice oziroma poltraka.*

Definicija 12.15. ***Enostavni lik*** *je množica točk v ravnini, ki jo omejuje sklenjena krivulja, ki sama sebe ne seka.*

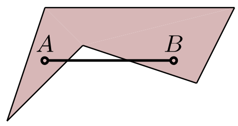
Definicija 12.16. *Množica točk v ravnini je* ***konveksna****, če za poljubni točki A in B iz te množice velja, da je daljica AB njena podmnožica.*

$$\mathcal{M} \textit{ konveksna} \Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB \subseteq \mathcal{M}$$

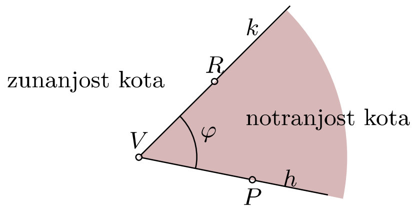


Množica točk, ki ni konveksna, je ***nekonveksna*** *oziroma* ***konkavna****.*

$$\mathcal{M} \textit{ nekonveksna} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow AB \not\subseteq \mathcal{M}$$



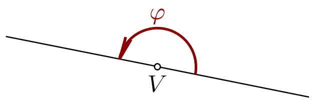
Definicija 12.17. *Dva poltraka s skupnim izhodiščem določata dva* ***kota****. Izhodišče poltrakov imenujemo* ***vrh*** *kota, poltraka pa imenujemo* ***kraka*** *kota.*



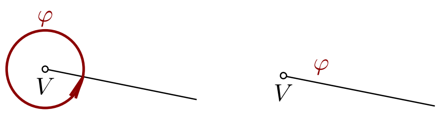
Če poltraka ne ležita na isti premici, je eden od kotov konveksen, drugi pa je nekonveksen. Kot lahko označimo na več načinov:

- $\angle(h, k)$, kjer sta h in k poltraka, ki kot določata;
- $\angle PVR$, kjer je P točka na enem poltraku, V vrh kota in R točka na drugem poltraku;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – z grškimi črkami.

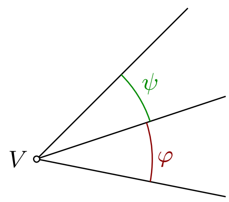
Definicija 12.18. *Če poltraka s skupnim izhodiščem ležita na isti premici, vendar na različnih straneh izhodišča, določata dva enaka konveksna kota –* ***iztegnjena kota****.*



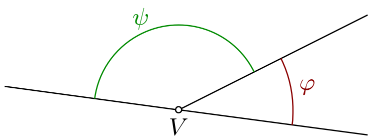
Definicija 12.19. *Če se poltraka na isti premici prekrivata, določata* ***polni kot*** *ali* ***ničelni kot****.*



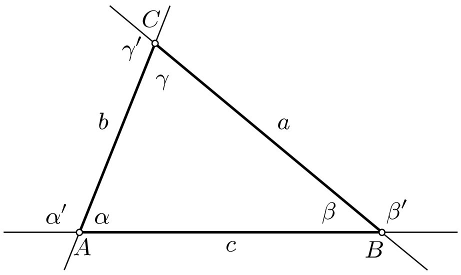
Definicija 12.20. *Kota s skupnim vrhom, ki imata en skupen krak, presek njunih notranjosti pa je prazen, sta* ***sosedna kota****.*



Definicija 12.21. *Sosedna kota, katerih kraka, ki nista skupna, ležita na isti premici, sta* ***sokota****.*



Definicija 12.22. *Tri nekolinearne točke A, B in C določajo* ***trikotnik*** $\triangle ABC$*. Točke A, B in C so* ***oglišča*** *trikotnika, daljice AB, BC in AC so njegove* ***stranice****.*



Koti α, β in γ so ***notranji koti****, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so* ***zunanji koti*** *trikotnika.*

Trikotnik je **pozitivno orientiran**, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri vrtenja urnega kazalca; če si sledijo v smeri vrtenja urnega kazalca, pa je **negativno orientiran**.

Definicija 12.23. *Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ v ravnini, od katerih nobene zaporedne tri niso kolinearne, določajo* ***n-kotnik****. Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ so* ***oglišča*** *n-kotnika; daljice, ki povezujejo sosedni oglišči, $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ so* ***stranice*** *n-kotnika; daljice, ki povezujejo po dve nesosedni oglišči, pa so* ***diagonale*** *n-kotnika.*

Poljuben n-kotnika ima

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonal – iz vsakega od n oglišč gre $n-3$ diagonal, vsaka pa je šteta dvakrat.

Če za vsako nosilko stranice n-kotnika velja, da preostala oglišča ležijo na isti strani te nosilke, je n-kotnik **konveksen**.

Naloga 12.24. *Izračunajte število diagonal: 17-kotnika, 31-kotnika in 28-kotnika.*

Naloga 12.25. *Ugotovite, ali obstaja n-kotnik, ki ima desetino toliko diagonal kot 28-kotnik. Če obstaja, izračunajte, koliko stranic ima.*

Naloga 12.26. *Kateri n-kotnik ima štirikrat toliko diagonal kot stranic?*

Naloga 12.27. *Izračunajte, kateri n-kotnik ima: 104 diagonale, 230 diagonal, $2n-5$ diagonal.*

Naloga 12.28. *Pokažite, da ne obstaja n-kotnik, ki ima 13 diagonal.*

Naloga 12.29. *Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je pravilna ali nepravilna.*

- *Tri različne točke, so vedno nekolinearne.*
- *Petkotnik ima enako število diagonal in stranic.*
- *Štiri različne premice se sekajo v največ 4 različnih točkah.*
- *Skozi štiri kolinearne točke gredo tri različne premice.*
- *Vzporedni premici imata lahko neskončno mnogo skupnih točk.*

Naloga 12.30. *Pokažite, da je število diagonal 25-kotnika večkratnik števila njegovih stranic.*

Naloga 12.31. *Vsota števila stranic in diagonal n-kotnika je 105? Kateri n-kotnik je to?*

Naloga 12.32. *Izračunajte, kateri n-kotnik ima toliko diagonal kot stranic.*

Naloga 12.33. *Člani filatelističnega društva so se domenili, da si bodo za praznike spet pošiljali voščilnice po klasični pošti. Ko so se dobili po novem letu, so prinesli vse voščilnice in jih našteli 132. Izračunajte, koliko članov društva, si je medseboj poslalo voščilnice.*