#### **MATEMATIKA**

3. letnik – splošna gimnazija

#### Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

22. november 2023

#### Vsebina

- Motne funkcije
- @ Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice



2/63

#### Section 1

Kotne funkcije



3/63

- Motne funkcije
  - Kotne funkcije poljubnih kotov
  - Izrazi s kotnimi funkcijami
  - Adicijski izreki
  - Posledice adicijskih izrekov
  - Grafa funkcij sinus in kosinus
  - Grafa funkcij tangens in kotangens
  - Krožne funkcije
  - Trigonometrijske enačbe
  - Problemske naloge
  - Naklonski kot premice, kod med dvema premicama
- 2 Geometrijski lik
- Geometrijska telesa
- 4 Polinomi in racionalne funkcije



4/63

#### Stopinje in radiani

#### Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik 1 radian.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \doteq 57, 3^{\circ}$$

Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo  $\varphi$  kot podan v radianih,  $\phi$  pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

$$\varphi = \frac{\pi}{180^{\circ}} \phi$$

in

$$\phi = \frac{180^{\circ}}{\pi} \varphi.$$

ロト 4回 ト 4 重 ト 4 重 ト 9 9 (\*)

5/63

#### Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Sinus kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  nasprotno kateto in hipotenuzo:

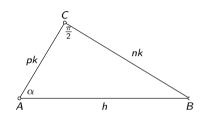
$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

**Kosinus** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  priležno kateto in hipotenuzo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

**Tangens** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  nasprotno kateto in priležno kateto:

$$\tan \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}.$$



**Kotangens** kota  $\alpha$  je količnik med kotu  $\alpha$  priležno kateto in nasprotno kateto:

$$\cot \alpha = \frac{\text{prile}\check{\text{z}}\text{na kateta}}{\text{nasprotna kateta}}.$$

←□▶←□▶←□▶←□▶□ ♥9<</p>

6/63

22. november 2023

#### Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot\varphi$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \tan\varphi$$

(ロ) (個) (注) (注) (注) のQ(()

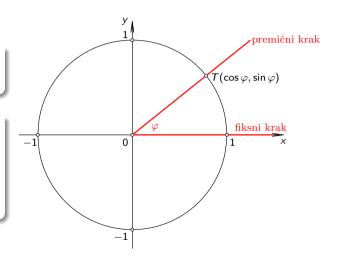
7/63

#### Kotne funkcije v enotskem krogu

**Enotska krožnica** je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot  $\varphi$  z vrhom v koordinatnem izhodišču:

- prvi (fiksni) krak kota leži na pozitivnem delu abscisne osi;
- drugi (premični) krak določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov.





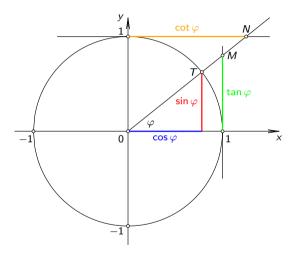
8 / 63

Sinus kota  $\varphi$  je enak oridnati presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

**Kosinus** kota  $\varphi$  je enak abscisi presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Tangens kota  $\varphi$  je enak ordinati presečišča premičnega kraka z navpično tangento enotskega kroga v točki (1,0).

Kotangens kota  $\varphi$  je enak abscisi presečišča premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega korga v točko (0,1).



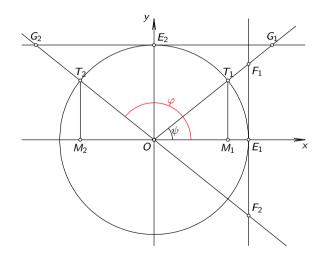
#### Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

$\varphi$ [rad]	φ [°]	$\sin arphi$	$\cos arphi$	anarphi	$\cot arphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0
$\pi$	180°	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	/	0

(ロ) (回) (目) (目) (目) (O) (O)

10/63

#### Kot med $\frac{\pi}{2}$ in $\pi$



Sinusa suplementarnih kotov sta enaka; kosinusa suplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\sin\left(\pi - \psi\right) = \sin\psi$$

$$\cos\left(\pi-\psi\right)=-\cos\psi$$

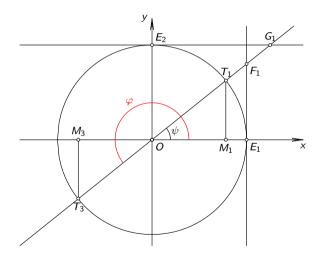
Tangensa in kotangensa suplementarnih kotov sta nasprotno enaka.

$$\tan (\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot (\pi - \psi) = -\cot \psi$$

ロト 4回ト 4 きト 4 き ト うらぐ

## Kot med $\pi$ in $\frac{3\pi}{2}$



Sinusa in kosinusa kotov, ki se razlikujeta za  $\pi$ , sta nasprotno enaka.

$$\sin\left(\pi + \psi\right) = -\sin\psi$$

$$\cos\left(\pi+\psi\right)=-\cos\psi$$

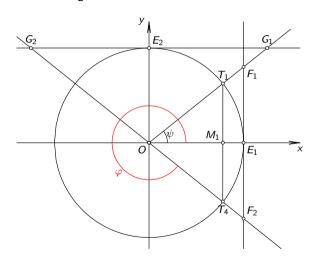
Tangensa in kotangensa kotov, ki se razlikujeta za  $\pi$ , sta enaka.

$$\tan(\pi + \psi) = \tan\psi$$

$$\cot (\pi + \psi) = \cot \psi$$

ロトイタトイミトイミト ミ からぐ

## Kot med $\frac{3\pi}{2}$ in $2\pi$



$$\sin(2\pi - \psi) = -\sin\psi$$
$$\cos(2\pi - \psi) = \cos\psi$$
$$\tan(2\pi - \psi) = -\tan\psi$$
$$\cot(2\pi - \psi) = -\cot\psi$$

$$\sin(-\psi) = -\sin\psi$$
$$\cos(-\psi) = \cos\psi$$
$$\tan(-\psi) = -\tan\psi$$
$$\cot(-\psi) = -\cot\psi$$

13/63

## Kotne funkcije poljubnih kotov

4□ ト 4回 ト 4 三 ト 4 三 り 9 ○ ○

14/63

#### Izrazi s kotnimi funkcijami

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

15 / 63

## Adicijski izreki



16/63

#### Posledice adicijskih izrekov

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 9 < ○</p>

17 / 63

## Grafa funkcij sinus in kosinus

4 D > 4 D > 4 E > 4 E > E 900

22. november 2023

18 / 63

#### Grafa funkcij tangens in kotangens



19/63

## Krožne funkcije

20 / 63

## Trigonometrijske enačbe

4□ > 4回 > 4 直 > 4 直 > 直 9 9 ○

21 / 63

22. november 2023

## Problemske naloge



22 / 63

22. november 2023

#### Naklonski kot premice, kot med dvema premicama

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q Q

23 / 63

#### Section 2

Geometrijski liki



24 / 63

- Motne funkcije
- Geometrijski liki
  - Obseg in ploščina
  - Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika
  - Obseg in ploščina trikotnika
  - Obseg in ploščina paralelograma
  - Obseg in ploščina trapeza in deltoida
  - Obseg in ploščina pravilnega večkotnika
  - Obseg in ploščina kroga
- Geometrijska telesa
- Polinomi in racionalne funkcije
- Stožnice



25 / 63

# Obseg in ploščina

◆ロト ◆団 ト ◆ 豆 ト ◆ 豆 ・ 夕 ♀ ○

26 / 63

#### Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q Q

27 / 63

#### Obseg in ploščina trikotnika

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

28 / 63

#### Obseg in ploščina paralelograma

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B = 900

29 / 63

#### Obseg in ploščina trapeza in deltoida



30 / 63

## Obseg in ploščina pravilnega večkotnika



31 / 63

## Obseg in ploščina kroga

4□ > 4回 > 4 直 > 4 直 > 直 9 9 ○

32 / 63

#### Section 3

Geometrijska telesa



33 / 63

- Motne funkcije
- 2 Geometrijski liki
- Geometrijska telesa
  - Površina in prostornina
  - Pokončna prizma
  - Pokončni valj
  - Pokončna piramida
  - Pokočni krožni stožec
  - Korgla
  - Primerjava pokonnih teles
  - Poševna telesa
  - Prisekana telesa
  - Vrtenine
- Polinomi in racionalne funkcije



34 / 63

## Površina in prostornina

35 / 63

## Pokončna prizma

←□ → ←□ → ← □ → ← □ → □ → □

36 / 63

22. november 2023

MATEMATIKA Jan Kastelic (FMF)

# Pokončni valj

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 22. november 2023
 37/63

# Pokončna piramida

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 22. november 2023
 38/63

#### Pokočni krožni stožec

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

39 / 63

22. november 2023

# Krogla



40 / 63

### Primerjava pokončnih teles

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ へ ○

41/63

#### Poševna telesa



22. november 2023

Jan Kastelic (FMF)

#### Prisekana telesa



43 / 63

#### Vrtenine

22. november 2023

#### Section 4

# Polinomi in racionalne funkcije



45 / 63

- Polinomi in racionalne funkcije
  - Polinomi
  - Računanje s polinomi
  - Ničle polinoma in Hornerjev algoritem
  - Graf polinoma
  - Polinomska neenačba
  - Metoda bisekcije
  - Racionalna funkcija
  - Racionalna neenačba
  - Modeliranje s polinomsko in racionalno funkcijo







22. november 2023

### Polinomi

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

# Računanje s polinomi

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 9 < ○</p>

 Jan Kastelic (FMF)
 MATEMATIKA
 22. november 2023
 48/63

# Ničle polinoma in Hornerjev algoritem

49 / 63

# Graf polinoma

←□ → ←□ → ← = → → ● → → へ○

50 / 63

#### Polinomska neenačba

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > □
900

51/63

# Metoda bisekcije

◆□ ト ◆□ ト ◆ 重 ト ◆ 重 ・ 夕 Q ②

52 / 63

# Racionalna funkcija

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 9 < ○</p>

53 / 63

#### Racionalna neenačba



54 / 63

22. november 2023

# Modeliranje s polinomsko in racionalno funkcijo

55 / 63

### Section 5

### Stožnice



- Kotne funkcije

- Stožnice
  - Krožnica
  - Elipsa
  - Hiperbola

  - Parabola
  - Krivulje drugega reda
  - Iracionalna enačba



57 / 63

Krožnica

### Krožnica



58 / 63

Elipsa

# Elipsa

# Hiperbola



Jan Kastelic (FMF)

### Parabola



61/63

# Krivulje drugega reda



62 / 63

#### Iracionalna enačba



63 / 63