

MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Gimnazija Antona Aškerca,
Šolski center Ljubljana

22. julij 2025

1 Kotne funkcije

Section 1

Kotne funkcije

- 1 Kotne funkcije
 - Definicija kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku
 - Računanje vrednosti kotnih funkcij
 - Zveze med kotnimi funkcijami
 - Razširitev pojma kotne funkcije do polnega kota

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Sinus kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in hipotenuzo:

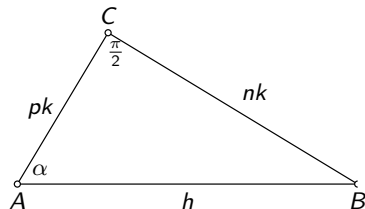
$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Kosinus kota α je količnik med kotu α priležno kateto in hipotenuzo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Tangens kota α je količnik med kotu α nasprotno kateto in priležno kateto:

$$\tan \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}}.$$



Kotangens kota α je količnik med kotu α priležno kateto in nasprotno kateto:

$$\cot \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}}.$$

Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 12 \text{ cm}$ in $b = 5 \text{ cm}$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β .

Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 12 \text{ cm}$ in $b = 5 \text{ cm}$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β .

Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 6 \text{ cm}$ in $b = 5 \text{ cm}$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β .

Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 12 \text{ cm}$ in $b = 5 \text{ cm}$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β .

Naloga

V pravokotnem trikotniku sta dolžini katet $a = 6 \text{ cm}$ in $b = 5 \text{ cm}$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij kota β .

Naloga

V pravokotnem trikotniku je dolžina hipotenuze $c = 10$ in dolžina katete $a = 6$. Natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot α .

Naloga

Načrtajte pravokotni trikotnik $\triangle ABC$, v katerem velja:

- $\sin \alpha = \frac{2}{5}$

- $\cos \alpha = \frac{5}{6}$

- $\tan \alpha = \frac{3}{7}$

- $\cos \beta = \frac{4}{7}$

- $\tan \beta = \frac{0.3}{0.2}$

Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0

Kotne funkcije komplementarnih kotov

Sinus kota je enak kosinusu komplementarnega kota in obratno.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

Tangens kota je enak kotangensu komplementarnega kota in obratno.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varphi$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \tan \varphi$$

Naloga

Na štiri decimalna mesta natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot x .

- $x = 55^\circ$
- $x = 39^\circ$
- $x = 12^\circ$

Naloga

Na štiri decimalna mesta natančno izračunajte vrednosti kotnih funkcij za kot x .

- $x = 55^\circ$
- $x = 39^\circ$
- $x = 12^\circ$

Naloga

Na minuto natančno izračunaj velikost kota, če je:

- $\sin x = 0.25$
- $\cos x = 0.6$
- $\tan x = 3$
- $\sin x = 2$
- $\cos x = \frac{2}{5}$

Naloga

Natančno izračunajte vrednost izraza.

- $\sin 90^\circ + \cos 0^\circ + \tan 45^\circ$

- $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 60^\circ} - \frac{\tan 60^\circ}{\cos 60^\circ}$

- $\tan 30^\circ \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$

- $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

- $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

- $\frac{1 - \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$

- $\frac{\sin 90^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$

- $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ - 3 \tan 30^\circ$

Naloga

V pravokotniku meri stranica $a = 10 \text{ cm}$, diagonal pa 14 cm . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico a in diagonalo na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

V pravokotniku meri stranica $a = 10 \text{ cm}$, diagonalna pa 14 cm . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico a in diagonalno na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico 24 cm , osnovnica pa 14 cm . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

V pravokotniku meri stranica $a = 10 \text{ cm}$, diagonalna pa 14 cm . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico a in diagonalno na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico 24 cm , osnovnica pa 14 cm . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

Enakokraki trapez ima osnovnici dolgi 45 cm in 23 cm , višina pa je 60 cm . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na minuto natančno.

Naloga

V pravokotniku meri stranica $a = 10 \text{ cm}$, diagonalna pa 14 cm . Izračunajte natančno dolžino druge stranice in velikost kota med stranico a in diagonalno na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico 24 cm , osnovnica pa 14 cm . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na dve decimalki stopinje natančno.

Naloga

Enakokraki trapez ima osnovnici dolgi 45 cm in 23 cm , višina pa je 60 cm . Izračunajte dolžino kraka in velikost kota med krakom in osnovnico na minuto natančno.

Naloga

Vrh stolpa vidimo pod kotom 19.17° , če pa se mu približamo za 50 m , ga vidimo pod kotom 34.23° . Izračunajte višino stolpa, če je točka gledišča na višini 1.7 m .

Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom AB v krogu s polmerom 8 cm , če je $|AB| = 6\text{ cm}$? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom AB v krogu s polmerom 8 cm , če je $|AB| = 6\text{ cm}$? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

Naloga

V enakokrakem trapezu z osnovnicama 12 cm in 6 cm kot ob osnovnici meri $\alpha = 73^\circ$. Izračunajte dolžino kraka.

Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom AB v krogu s polmerom 8 cm , če je $|AB| = 6\text{ cm}$? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

Naloga

V enakokrakem trapezu z osnovnicama 12 cm in 6 cm kot ob osnovnici meri $\alpha = 73^\circ$. Izračunajte dolžino kraka.

Naloga

Pravokotnik ima stranici dolgi 5 cm in 6 cm . Na minuto natančno izračunajte kot, ki ga oklepata diagonali v pravokotniku.

Naloga

Koliko meri središčni kot nad lokom AB v krogu s polmerom 8 cm , če je $|AB| = 6\text{ cm}$? Kot izrazite v stopinjah na štiri decimalke natančno.

Naloga

V enakokrakem trapezu z osnovnicama 12 cm in 6 cm kot ob osnovnici meri $\alpha = 73^\circ$. Izračunajte dolžino kraka.

Naloga

Pravokotnik ima stranici dolgi 5 cm in 6 cm . Na minuto natančno izračunajte kot, ki ga oklepata diagonali v pravokotniku.

Naloga

V rombu je dolžina diagonale e dvakrat tolikšna kot dolžina diagonale f . Na minuto natančno izračunajte velikost kota α .

Zveze med kotnimi funkcijami

Naloga

Natančno izračunajte vrednosti preostalih kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku, če je kot α oster in velja:

- $\cos \alpha = 0.1$

- $\sin \alpha = \frac{8}{17}$

- $\tan \alpha = 2$

Naloga

Poenostavite izraze s pomočjo zvez med kotnimi funkcijami.

$$\bullet 1 - \sqrt{(1 - \sin^2 x) \cos^2 x}$$

$$\bullet \tan^2 x - \frac{1}{1 - \sin^2 x}$$

$$\bullet \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

$$\bullet \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \cos x - 1$$

$$\bullet \cos x (1 + \tan^2 x)$$

$$\bullet \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x}$$

$$\bullet \frac{1}{\tan x} + \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$\bullet \sin x + \cos^2 x \cdot \sin^{-1} x$$

$$\bullet \frac{1}{\left(\frac{\tan^{-1} x \cdot \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \right)}$$

$$\bullet \left((\tan x \cos x)^{-2} + \cos^{-2} x \right) \sin^2 x$$

$$\bullet \left(\frac{1}{\cot x} \sin^{-1} x \right)^{-2} + \sin x \tan x \cos x$$

Naloga

Natančno izračunajte brez uporabe računalja.

- $\frac{\cos 15^\circ}{\sin 75^\circ} - 2 \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ}$

- $\sin^2 55^\circ + \cos^2 45^\circ - \frac{\tan 33^\circ}{\sin 57^\circ}$

- $\sin^2 86^\circ \cdot (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ + \tan^2 4^\circ)$

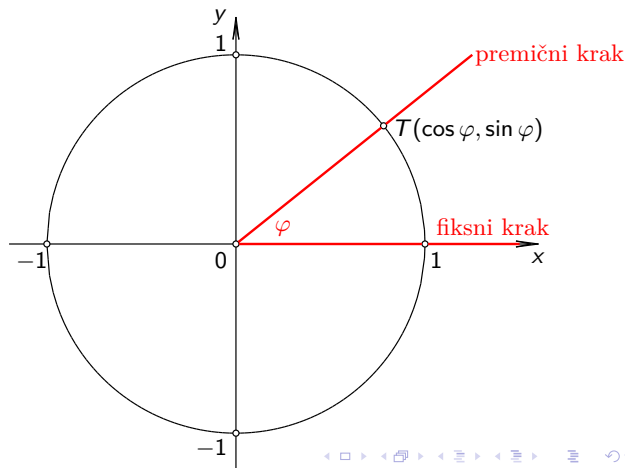
- $\frac{1 - \sin^2 15^\circ}{\sin^2 75^\circ}$

Kotne funkcije v enotskem krogu

Enotska krožnica je krožnica s polmerom ene enote in s središčem v koordinatnem izhodišču.

Kot φ z vrhom v koordinatnem izhodišču:

- prvi (fiksni) krak kota leži na pozitivnem delu abscisne osi;
- drugi (premični) krak določa velikost kota in leži v enem izmed štirih kvadrantov.

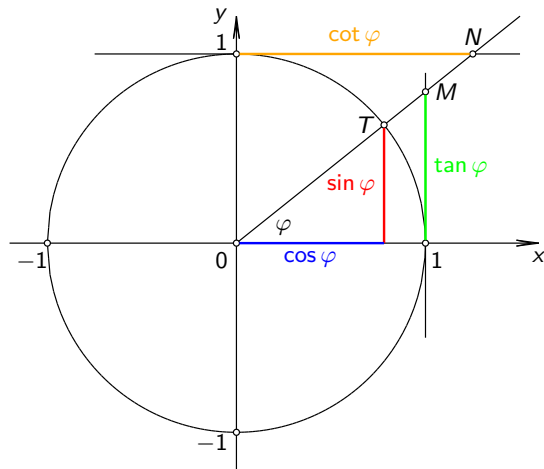


Sinus kota φ je enak ordinati presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Kosinus kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z enotsko krožnico.

Tangens kota φ je enak ordinati presečišča premičnega kraka z navpično tangento enotskega kroga v točki $(1, 0)$.

Kotangens kota φ je enak abscisi presečišča premičnega kraka z vodoravno tangento enotskega kroga v točki $(0, 1)$.



Stopinje in radijani

Radian

Loku na krožnici, ki je enako dolg kot polmer krožnice, pripada središčni kot, velik 1 radian.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57,3^\circ$$

Pretvorba med stopinjami in radiani

Naj bo φ kot podan v radianih, ϕ pa njemu pripadajoči kot podan v stopinjah. Potem velja:

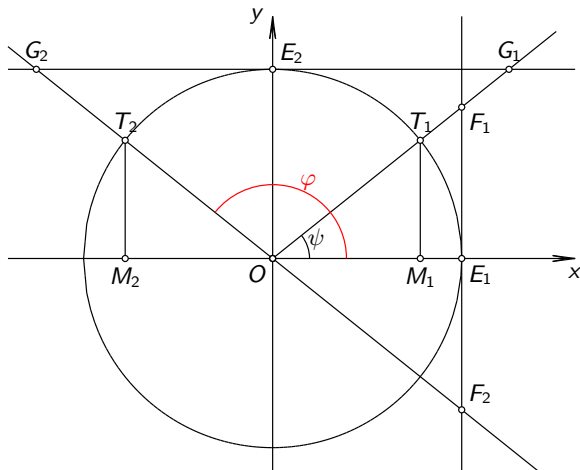
$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \phi$$

in

$$\phi = \frac{180^\circ}{\pi} \varphi.$$

Vrednosti kotnih funkcij nekaterih kotov

φ [rad]	φ [°]	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$
0	0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	/	0
π	180°	0	-1	0	/
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	/	0

Kot med $\frac{\pi}{2}$ in π 

Sinusa supplementarnih kotov sta enaka;
 kosinusa supplementarnih kotov sta
 nasprotno enaka.

$$\sin(\pi - \psi) = \sin \psi$$

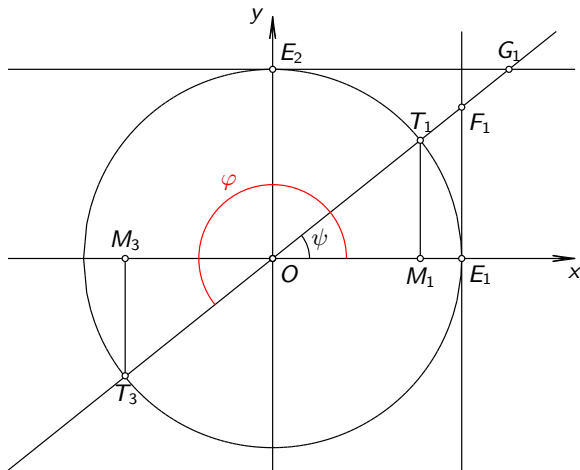
$$\cos(\pi - \psi) = -\cos \psi$$

Tangensa in kotangensa supplementarnih
 kotov sta nasprotno enaka.

$$\tan(\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(\pi - \psi) = -\cot \psi$$

Kot med π in $\frac{3\pi}{2}$



Sinusa in kosinusa kotov, ki se razlikujeta za π , sta nasprotno enaka.

$$\sin(\pi + \psi) = -\sin \psi$$

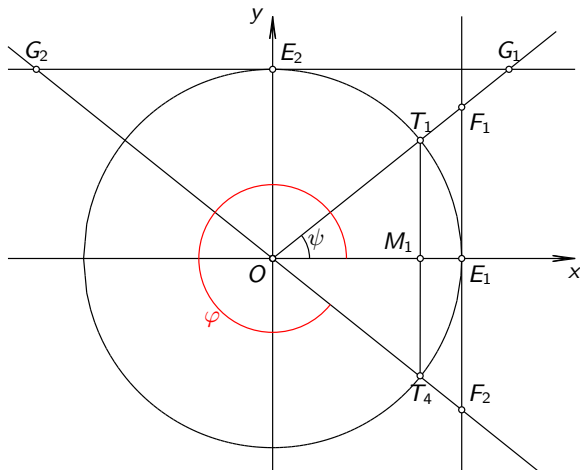
$$\cos(\pi + \psi) = -\cos \psi$$

Tangensa in kotangensa kotov, ki se razlikujeta za π , sta enaka.

$$\tan(\pi + \psi) = \tan \psi$$

$$\cot(\pi + \psi) = \cot \psi$$

Kot med $\frac{3\pi}{2}$ in 2π



$$\sin(2\pi - \psi) = -\sin \psi$$

$$\cos(2\pi - \psi) = \cos \psi$$

$$\tan(2\pi - \psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(2\pi - \psi) = -\cot \psi$$

$$\sin(-\psi) = -\sin \psi$$

$$\cos(-\psi) = \cos \psi$$

$$\tan(-\psi) = -\tan \psi$$

$$\cot(-\psi) = -\cot \psi$$

Kotne funkcije poljubnih kotov