MATEMATIKA

2. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

13. november 2023

Vsebina

Section 1

Geometrija na ravnini in v prostoru

1. Geometrija na ravnini in v prostoru
    - Osnovni geometrijski pojmi
    - Kot
    - Konstrukcije matematičnih objektov
    - Preslikave na ravnini
    - Trikotnik
    - Krog
    - Štirikotnik
    - Večkotnik
    - Podobnost
    - Podobnost v pravokotnem trikotniku
    - Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 90°
    - Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 160°
2. Vektorji

Osnovni geometrijski pojmi

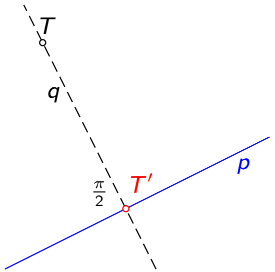
Kot

Konstrukcije matematičnih objektov

Preslikave na ravnini

Pravokotna projekcija

Dani sta točka T in premica p. Naj bo q tista pravokotnica na premico p, ki poteka skozi točko T. Presečišče T' premice q s premico p imenujemo **pravokotna projekcija** točke T na premico p. Točka T' je točki T najbližja točka premice p.



Razdalja točke T od premice p je:

$$d(T, p) = d(T, T') = |TT'|.$$

Pravokotna projekcija daljice AB na premico je daljica $A'B'$, katere krajišči sta pravokotni projekciji točk A in B.

Toge preslikave

Toga preslikava (izometrija) je preslikava v ravnini, ki ohranja razdalje.

$$\tau : A \mapsto A'$$
$$\tau : B \mapsto B'$$
$$d(A, B) = d(A', B')$$

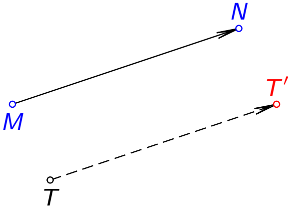
Med toge preslikave spadajo:

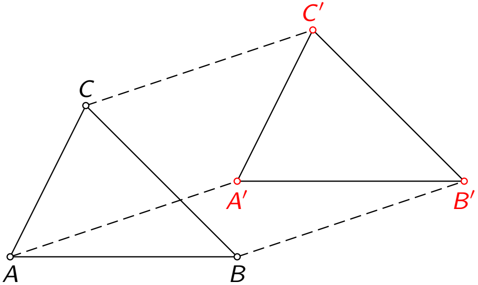
- **vzporedni premiki**;
- **zrcaljenje preko premice**;
- **zrcaljenje preko točke**;
- **rotacija okoli točke**.

Če kombiniramo več togih preslikav, je dobljena preslikava spet toga preslikava.

Vzporedni premik/translacija

Vzporedni premik ali **translacija** za dano usmerjeno daljico $\overrightarrow{MN}$ preslika točko T v tako točko T', da sta daljici TT' in MN enako dolgi, vzporedni in enako usmerjeni.

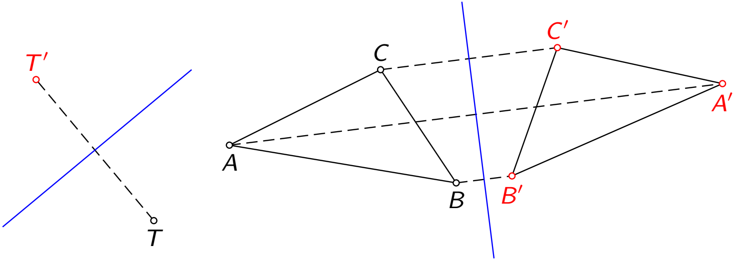




Vzporedni premik ohranja orientacijo likov, daljice preslika v enako dolge vzporedne daljice, ohranja velikost kotov, like preslika v skladne like, nima negibnih točk za $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$.

Zrcaljenje preko premice

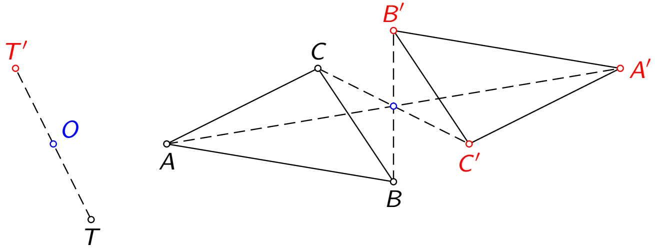
Zrcaljenje čez premico p preslika točko T v tako točko T', da premica p pod pravim kotom razpolavlja daljico TT'.



Zrcaljenje čez premico daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikost kotov, ne ohranja orientacije likov, like preslika v skladne like, premic ne preslika v vzporedne premice.

Zrcaljenje preko točke

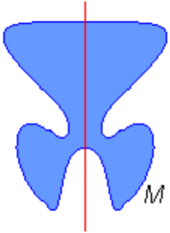
Zrcaljenje čez točko O preslika točko T v tako točko T', da je O razpolovišče daljice TT'. Ta preslikava je enaka vrtenju okrog točke za 180°.



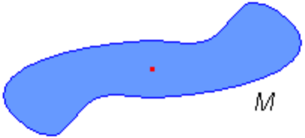
Zrcaljenje čez točko daljice preslika v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premice preslika v vzporedne premice.

Simetrija

Množica točk $\mathcal{M}$ je **simetrična/somerna glede na premico** p, če se pri zrcaljenju čez premico p preslika sama vase. Premico p imenujemo **simetrala**, **somernica**, **simetrijska os** množice $\mathcal{M}$.



Množica točk $\mathcal{M}$ je **središčno simetrična/somerna glede na točko** T, če se pri zrcaljenju čez točko T preslika sama vase. Točko T imenujemo **center simetrije** množice $\mathcal{M}$.



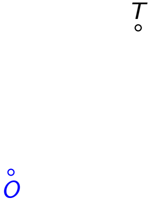
Rotacija/vrtenje okoli točke

Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.

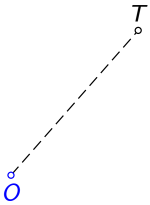
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



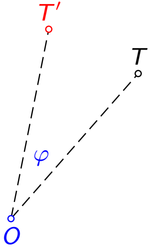
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



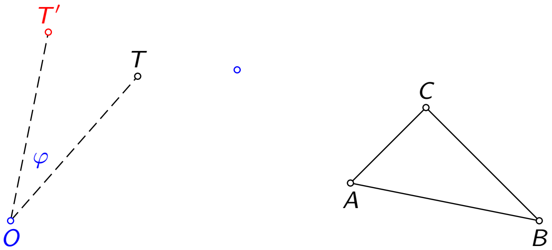
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



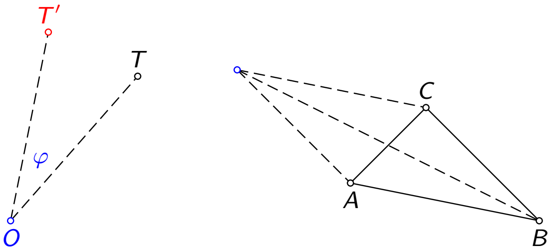
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



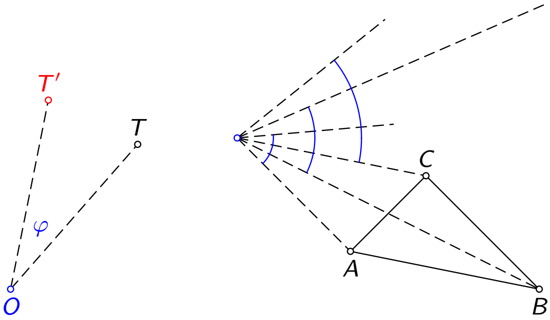
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



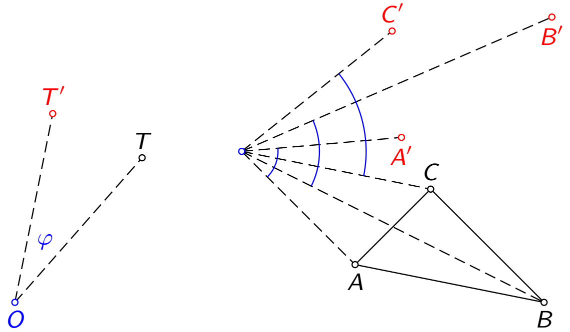
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



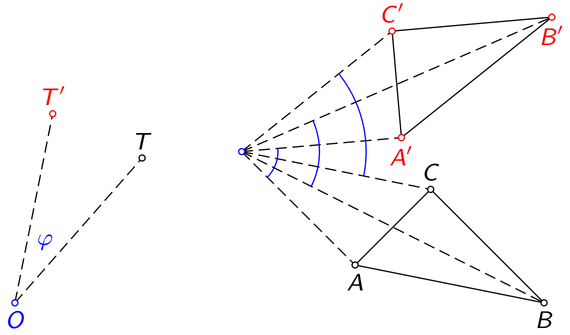
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



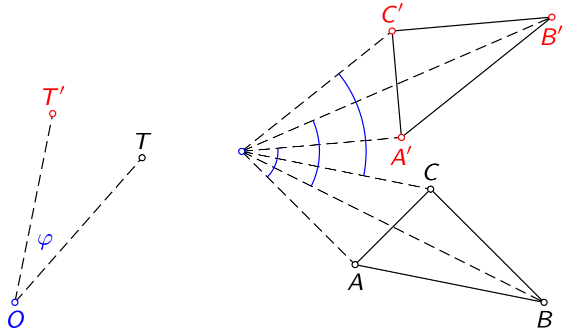
Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



Rotacija/vrtenje okoli točke

Vrtenje ali **zasuk** oziroma **rotacija** za kot φ okrog točke O preslika točko T v točko T', da velja: $|OT| = |OT'|$ in $\angle TOT' = \varphi$.



Vrtenje okoli točke preslika daljice v enako dolge daljice, ohranja velikosti kotov in orientacijo likov, like preslika v skladne like, premic pa ne preslika v vzporedne premice.

Naloga

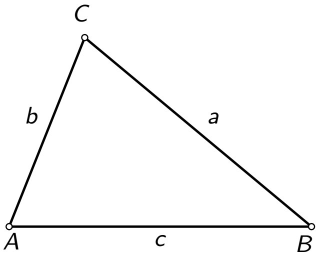
Konstruiraj daljico AB poljubne dolžine. Konstruiraj še:

- točko C, ki jo dobiš tako, da točko B zavrtiš okrog točke A za kot 120°;
- točko D, ki je pravokotna projekcija točke C na nosilko daljice AB;
- zrcalno sliko točke C glede na točko B in dobljeno točko označi C';
- simetralo kota z vrhom v B, katerega kraka potekata skozi C in C'.

Trikotnik

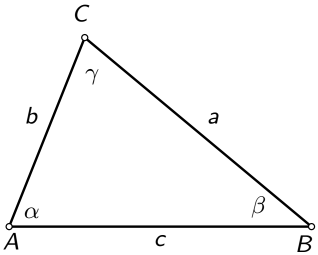
Trikotnik

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



Trikotnik

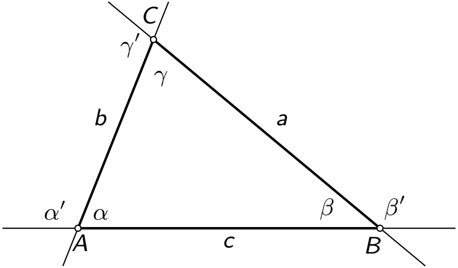
Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**,

Trikotnik

Trikotnik je lik/množica točk v ravnini, omejena s tremi daljicami – **stranice** (a, b, c), ki povezujejo tri nekolinearne točke (A, B, C) v ravnini. Te točke imenujemo **oglišča** trikotnika.



V trikotniku $\triangle ABC$ so α, β in γ **notranji koti**, njihovi sokoti α', β' in γ' pa so **zunanji koti**.

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota notranjih kotov trikotnika je 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Vsota zunanjih kotov trikotnika je 360°:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je $\alpha = 67°13'$ in $\beta' = 133°25'$.

Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je $\alpha = 67°13'$ in $\beta' = 133°25'$.

Naloga 68

Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju $2 : 5 : 11$. V kolikšnem razmerju so velikosti zunanjih kotov tega trikotnika?

Naloga 65

Izračunaj velikosti notranjih in zunanjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je $\alpha = 67°13'$ in $\beta' = 133°25'$.

Naloga 68

Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju $2 : 5 : 11$. V kolikšnem razmerju so velikosti zunanjih kotov tega trikotnika?

Naloga 70

Notranji kot ob oglišču A trikotnika $\triangle ABC$ je za $1°$ manjši od velikosti notranjega kota ob oglišču C. Zunanji kot v oglišču C je za $1°$ večji od dvakratnika velikosti notranjega kota ob oglišču A. Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika $\triangle ABC$.

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Nasproti daljše stranice trikotnika leži večji notranji kot, nasproti krajše stranice pa manjši notranji kot trikotnika.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Trikotniška neenakost

Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Naloga 76

Ali obstaja trikotnik z danimi dolžinami stranic?

1. $a = 4\ cm,\ \ b = 5\ cm,\ \ c = 10\ cm;$
2. $a = 4\ cm,\ \ b = 5\ cm,\ \ c = 8\ cm;$
3. $a = 5\ cm,\ \ b = 12\ cm,\ \ c = 6\ cm.$

Naloga 76

Ali obstaja trikotnik z danimi dolžinami stranic?

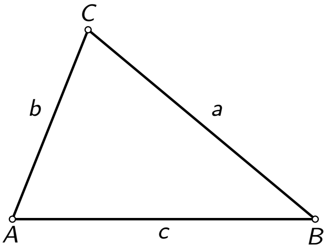
1. $a = 4\ cm,\ \ b = 5\ cm,\ \ c = 10\ cm;$
2. $a = 4\ cm,\ \ b = 5\ cm,\ \ c = 8\ cm;$
3. $a = 5\ cm,\ \ b = 12\ cm,\ \ c = 6\ cm.$

Naloga 77

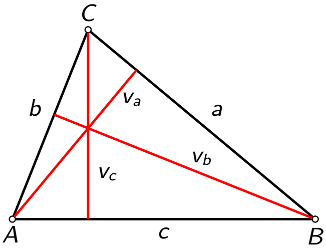
Po velikosti uredi notranje kote trikotnika $\triangle ABC$.

1. $a = 33\ dm,\ \ b = 22\ dm,\ \ c = 28\ dm;$
2. $a = 32\ m,\ \ b = 35\ m,\ \ c = 38\ m;$

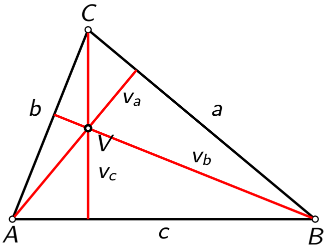
Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.



Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

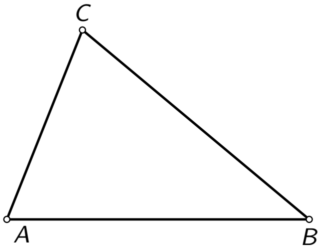


Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje nosilko te stranice z nasprotnim ogliščem in je pravokotna na to nosilko. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice.

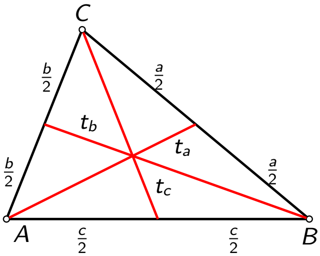


Nosilke vseh treh višin na stranice trikotnika se sekajo v eni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** ali **ortocenter**.

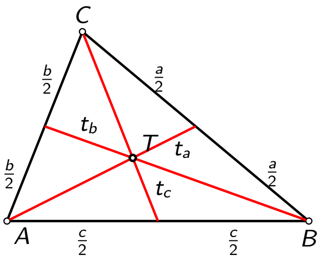
Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje razpolovišče te stranice z nasprotnim ogliščem.



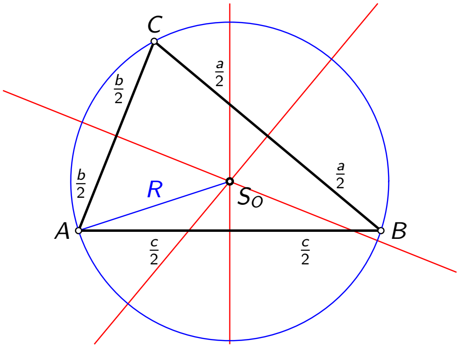
Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki – **težišču** ali **baricentru** trikotnika. Težišče deli težiščnico v razmerju 1 : 2.

Naloga 81

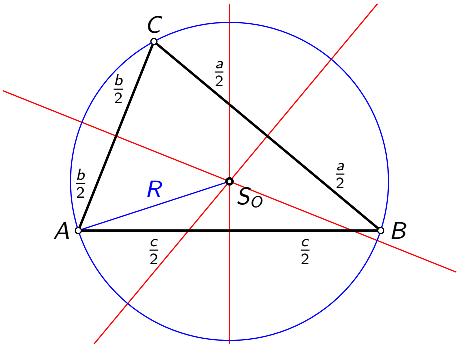
Konstruiraj trikotnik.

- $a = 2\ cm,\ b = 6\ cm,\ c = 5\ cm$;
- $c = 4\ cm,\ \alpha = 60^\circ,\ \beta = 45^\circ$;
- $a = 4\ cm,\ c = 5\ cm,\ \alpha = 45^\circ$;
- $a = 2,5\ cm,\ c = 5\ cm,\ v_c = 2\ cm$;
- $v_c = 3\ cm,\ \alpha = 60^\circ,\ \beta = 75^\circ$;
- $v_a = 2\ cm,\ v_b = 4\ cm,\ \gamma = 45^\circ$;
- $b = 65\ cm,\ t_b = 3,5\ cm,\ \gamma = 60^\circ$;
- $v_a = 3\ cm,\ t_c = 4\ cm,\ \beta = 45^\circ$.

Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.

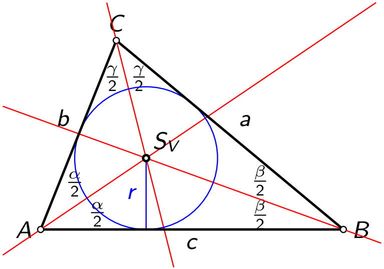


Simetrale vseh treh stranic trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku očrtane krožnice**.

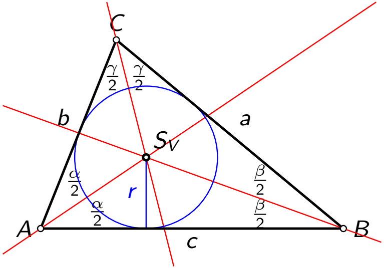


Očrtana krožnica poteka skozi vsa tri oglišča trikotnika. Vse tri stranice trikotnika so tetive te krožnice.

Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v eni točki. Ta točka je **središče trikotniku včrtane krožnice**.



Včrtana krožnica ima vse tri stranice trikotnika za tangente.

Naloga 83

Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $b = 5\ cm$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

1. Konstruiraj trikotnik $\triangle ABC$.
2. Konstruiraj trikotniku $\triangle ABC$ očrtano krožnico.
3. Koliko je velik zunanji kot pri oglišču A?

Naloga 83

Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $b = 5\ cm$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

1. Konstruiraj trikotnik $\triangle ABC$.
2. Konstruiraj trikotniku $\triangle ABC$ očrtano krožnico.
3. Koliko je velik zunanji kot pri oglišču A?

Naloga 84

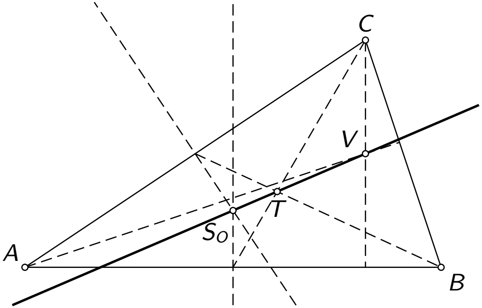
Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $a = 5\ cm$, $c = 4\ cm$, $t_c = 4\ cm$.

1. Konstruiraj trikotnik $\triangle ABC$.
2. Konstruiraj trikotniku $\triangle ABC$ včrtano krožnico.
3. Kateri izmed $\angle BAC$ in $\angle ACB$ je večji? Utemelji (brez merjenja).

Težišče, središče trikotniku očrtane kroznice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

Težišče, središče trikotniku očrtane kroznice, središče trikotniku včrtane krožnice in višinska točka so **znamenite točke trikotnika**.

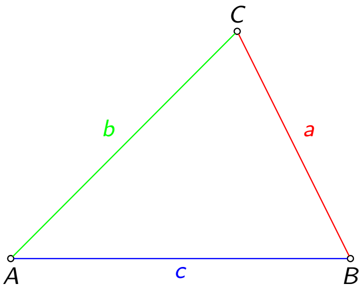
Višinska točka, središče očrtane krožnice in težišče so vedno kolinearne. Premico, ki jih povezuje, imenujemo **Eulerjeva premica**.



Vrste trikotnikov – glede na stranice

Vrste trikotnikov – glede na stranice

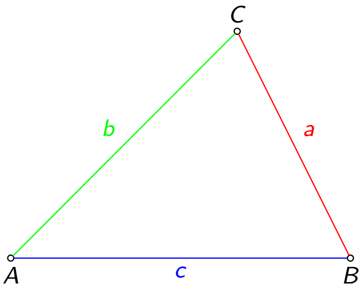
RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



vse tri stranice različno dolge

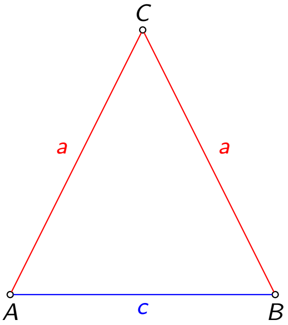
Vrste trikotnikov – glede na stranice

RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



vse tri stranice različno dolge

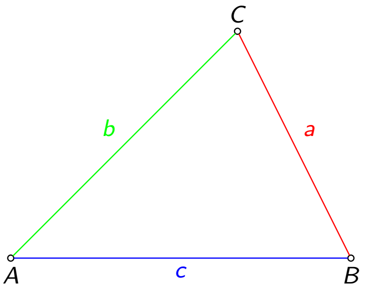
ENAKOKRAKI TRIKOTNIK



dve stranici enako dolgi

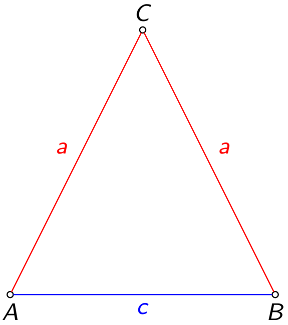
Vrste trikotnikov – glede na stranice

RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIK



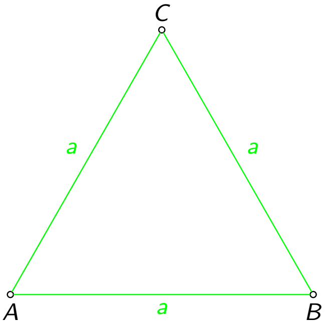
vse tri stranice različno dolge

ENAKOKRAKI TRIKOTNIK



dve stranici enako dolgi

ENAKOSTRANIČNI ali PRAVILNI TRIKOTNIK

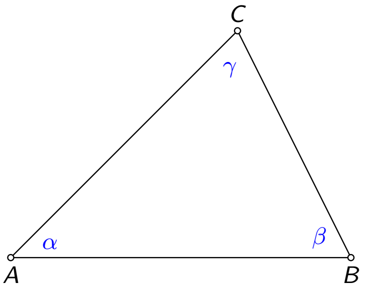


vse tri stranice enako dolge

Vrste trikotnikov – glede na kote

Vrste trikotnikov – glede na kote

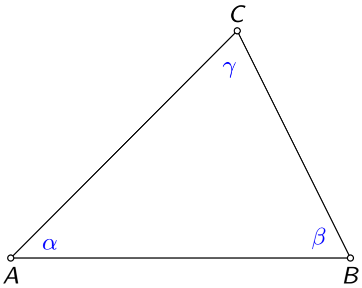
OSTROKOTNI TRIKOTNIK



ima tri ostre notranje kote

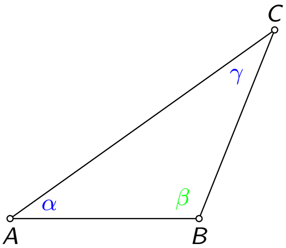
Vrste trikotnikov – glede na kote

OSTROKOTNI TRIKOTNIK



ima tri ostre notranje kote

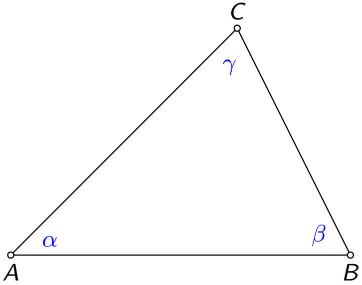
TOPOKOTNI TRIKOTNIK



ima en topi notranji kot, ostala dva kota ostra

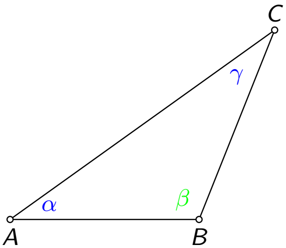
Vrste trikotnikov – glede na kote

OSTROKOTNI TRIKOTNIK



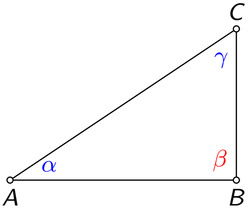
ima tri ostre notranje kote

TOPOKOTNI TRIKOTNIK



ima en topi notranji kot, ostala dva kota ostra

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK



ima en pravi notranji kot, ostala dva kot ostra

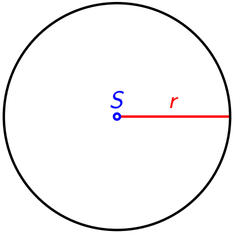
Krog

Krog

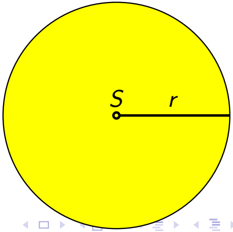
Krožnica je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke S. Točko S imenujemo **središče** krožnice, razdalja r med središčem in poljubno točko na krožnici pa je **polmer** ali **radij** krožnice.

Krog

Krožnica je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke S. Točko S imenujemo **središče** krožnice, razdalja r med središčem in poljubno točko na krožnici pa je **polmer** ali **radij** krožnice.



Krog s središčem S in polmerom r je množica ravninskih točk, katerih oddaljenost od središča je manjša ali enaka r. To pomeni, da je krog del ravnine omejen s krožnico.



Štirikotnik

Večkotnik

Podobnost

Podobnost v pravokotnem trikotniku

Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 90°

Kotne funkcije kotov, velikih od 0° do 360°

Section 2

Vektorji

Vektorske količine

Računanje z vektorji

Linearna kombinacija vektorjev, baza

Skalarni produkt vektorjev

Vektorji v koordinatnem sistemu

Skalarni produkt v koordinatnem sistemu

(i) Vektorski produkt

(i) Premice v prostoru

(i) Ravnine v prostoru

Section 3

Koreni, lastnosti funkcij, potenčna funkcija

Koreni poljubnih stopenj

Potence z racionalnimi eksponenti

Lastnosti funkcij

Transformacije na ravnini

Inverzna funkcija

Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom

Korenska funkcija

Modeliranje s korensko in potenčno funkcijo

Section 4

Kvadratna funkcija, kompleksna števila

Kvadratna enačba

Kvadratna funkcija in parabola

Presečišča parabol

Kvadratna neenačba

Modeliranje s kvadratno funkcijo in ekstremalni problemi

Množica kompleksnih števil

Računanje s kompleksnimi števili

Section 5

Eksponentna in logaritemska funkcija

Eksponentna enačba

Štirje tipi eksponentne enačbe:

1. z enako osnovo:
$$\mathbf{a}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} = \mathbf{a}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$
2. z različno osnovo in enakimi eksponenti:
$$\mathbf{a}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} = \mathbf{b}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})}, a \neq b \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
3. z različno osnovo in različnima eksponentoma:
$$\mathbf{a}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} = \mathbf{c}; c \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{reševanje z logaritmom}$$
4.
$$\mathbf{a}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Rightarrow \text{grafično reševanje}$$

Logaritem

Logaritem z osnovo a števila x je tisti eksponent, pri katerem je potenca z osnovo a enaka x:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

V zapisu $\log_a x$ imenujemo število x **logaritmand**, število a pa **osnova logaritma**. Le-ta je pozitivna in različna od 1.
Logaritem z osnovo e imenujemo **naravni logaritem** in ga označimo z ln: $\log_e x = \ln x$.
Logaritem z osnovo 10 imenujemo **desetiški logaritem** in ga označimo z log: $\log_{10} x = \log x$.

Lastnosti logaritmov

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x, \text{ kjer je } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \text{ kjer je } x > 0$$

Pravila za računanje z logaritmi

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Prehod k novi osnovi

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Logaritemska enačba

Enačba je logaritemska, če v njej nastopa neznanka v osnovi ali v logaritmandu vsaj enega logaritma.

Reševanje logaritemske enačbe:

- z uporabo definicije;
- s pravili za logaritmiranje;
- s prehodom k isti osnovi;
- z uvedbo nove neznanke;
- grafično reševanje.

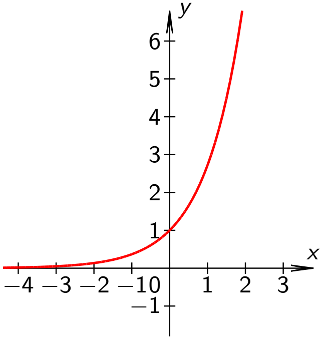
Eksponentna in logaritemska funkcija

Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija je realna funkcija oblike:

$$\mathbf{f(x) = a^x}, \text{ kjer je } a > 0 \wedge a \neq 1.$$

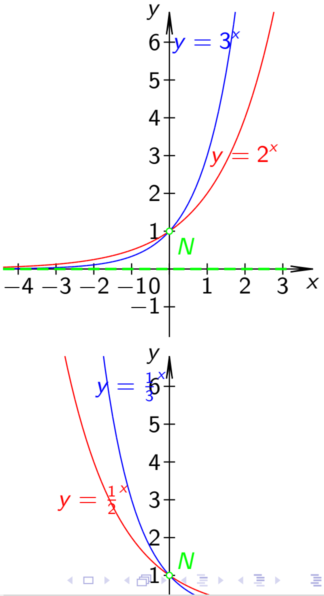
Število a imenujemo **osnova** eksponentne funkcije.



Kot poseben primer eksponentne funkcije velja **naravna eksponentna funkcija** $f(x) = e^x$. To je eksponentna funkcija, ki ima za osnovo Eulerjevo število $e = 2,71828\ldots$.

Lastnosti eksponentne funkcije:

- definicijsko območje predstavljajo vsa realna števila: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti je množica pozitivnih realnih števil: $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$;
- za $a > 1$ je naraščajoča, za $0 < a < 1$ je padajoča;
- je injektivna;
- vodoravna asimptota grafa funkcije je abscisna os: $y = 0$;
- graf funkcije poteka skozi točko $N(0, 1)$.



Modeliranje z eksponentno in logaritemsko funkcijo

Sprememba osnove logaritma

Eksponentna in logaritemska neenačba