# MATEMATIKA

## 1. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Gimnazija Antona Aškerca,
Šolski center Ljubljana

3. oktober 2024

# Vsebina

1 Naravna in cela števila

# Section 1

## Naravna in cela števila

1. Naravna in cela števila
   - Naravna števila
   - Računanje z naravnimi in celimi števili
   - Izraz, enačba, neenačba
   - Računanje s potencami z naravnimi eksponenti
   - Razčlenjevanje izrazov
   - Razstavljanje izrazov v množici $\mathbb{Z}$
   - Reševanje linearnih in razcepnih enačb v množici $\mathbb{Z}$
   - Reševanje linearnih neenačb v množici $\mathbb{Z}$

# Naravna števila

## Množica naravnih števil

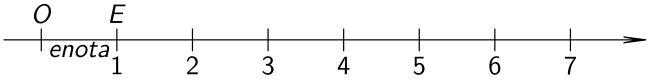
**Naravna števila** so števila s katerimi štejemo.

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}$$

Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

1. Vsako naravno število $n$ ima svojega **naslednika** $n + 1$.
2. Število 1 je naravno število, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.
3. Različni naravni števili imata različna naslednika: $n + 1 \neq m + 1; n \neq m$.
4. Če neka trditev velja z vsakim naravnim številom tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila. (*aksiom/princip popolne indukcije*)

Naravna števila uredimo po velikosti in predstavimo s **točko** na **številski premici**.




Vsako število zapišemo s **številko**. Za zapis številke uporabljamo **števke**. Te so $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Posamezne števke večmestnega števila od desne proti levi predstavljajo: **enice**, **desetice**, **stotice**, **tisočice**, ...

Število, ki je zapisano s črkovnimi oznakami števk označimo s črto nad zapsiom črkovne oznake.

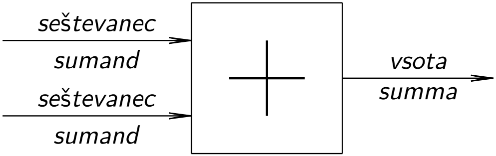
$$\overline{xy} = 10x + y \qquad \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

# Operacije v množici $\mathbb{N}$

## Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma $x$ in $y$ priredimo **vsoto** $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Število $x$ oziroma $y$ imenujemo **seštevanec** ali **sumand** ali **člen**.
Število $x + y$ pa imenujemo **vsota** ali **summa**.

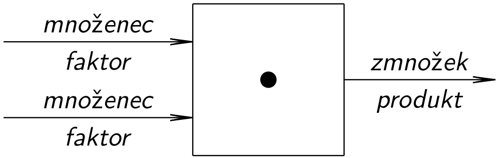



Vsota naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.

## Množenje

Poljubnima naravnima številoma $x$ in $y$ priredimo **produkt** $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Število $x$ oziroma $y$ imenujemo **množenec** ali **faktor**.
Število $x \cdot y$ pa imenujemo **zmnožek** ali **produkt**.



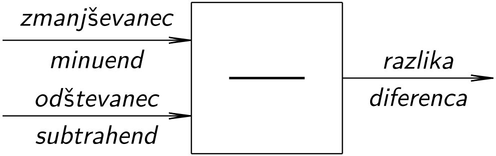

Produkt naravnih števil je naravno število: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$.

Število **1** je **nevtralni element** za mmnoženje: $1 \cdot x = y$.

## Odštevanje

Številoma $x$ in $y$, pri čemer je $y$ večje od $x$ ($x > y$), priredimo **razliko** $\mathbf{x - y}$.

Število $x$ imenujemo **zmanjševanec** ali **minuend**, število $y$ pa imenujemo **odštevanec** ali **subtrahend**.
Številu $x - y$ rečemo **razlika** ali **diferenca**.




Razlika je število, ki ga moramo prišteti številu $y$, da dobimo število $y$.

$$(x - y) + y = x$$

Seštevanje in množenje sta *dvočleni notranji operaciji* v množici naravnih števil $\mathbb{N}$. Odštevanje pa ni notranja operacija v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

## Vrstni red operacij

Prednost pri računanju imajo **oklepaji** (najprej najbolj notranji), nato sledi **množenje**, na koncu pa imamo še **seštevanje** in **odštevanje**.

Kadar v izrazu nastopajo enakovredne računske operacije, računamo od leve proti desni.

Pri množenju količin, ki so označene s črkovnimi oznakami, piko, ki označuje operacijo množenja ponavadi opustimo.

$$x \cdot y = xy$$

# Osnovni računski zakoni

### Komutativnost seštevanja – zakon o zamenjavi členov

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Vsota ni odvisna od vrstnega reda seštevanja.

### Asociativnost seštevanja – zakon o poljubnem združevanju členov

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Vsota več kot dveh sumandov ni odvisna od združevanja po dveh sumandov.

### Komutativnost množenja – zakon o zamenjavi faktorjev

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Produkt ni odvisna od vrstnega reda faktorjev.

### Asociativnost množenja – zakon o poljubnem združevanju faktorjev

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

Produkt več kot dveh sumandov ni odvisen od združevanja faktorjev.

### Distributivnost – zakon o razčlenjevanju

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$$

Če to beremo iz desne proti levi, rečemu tudi *pravilo izpostavljanja skupnega faktorja*.

## Naloga

Izračunajte.

- $(1+2\cdot 7)+3\cdot(2\cdot 2+7)$
- $3\cdot(2+3\cdot 5)\cdot(2+1)$
- $7+(2+6\cdot 3)+(8+4\cdot 5)$
- $11\cdot 4+(12-6)\cdot 5$
- $8+2\cdot(3+7)-15$
- $37-5\cdot(10-3)$

## Naloga

Hitro izračunajte.

- $45 + 37 + 15$
- $108 + 46 - 28$
- $5 \cdot 13 \cdot 8$
- $4 \cdot 7 \cdot 25$
- $(7 + 3) \cdot 2 \cdot 5$
- $15 \cdot (4 + 6) \cdot 2$
- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
- $8 \cdot 12 + 6 \cdot 8$

## Naloga

Zapišite račun glede na besedilo in izračunajte.

- Produktu števil 12 in 27 odštejte razliko števil 19 in 11.
- Vsoti produkta 4 in 12 ter produkta 5 in 16 odštejte 8.
- Vsoto števil 42 in 23 pomnožite z razliko števil 58 in 29.
- Produkt števil 14 in 17 pomnožite z vsoto števil 5 in 16.

## Naloga

Rešite besedilno nalogo.

- V trgovini kupimo tri litre mleka in štiri čokoladne pudinge v prahu. Če stane liter mleka 95 centov, čokoladni puding v prahu pa 24 centov, koliko moramo plačati?
- Manca bo kuhala rižoto za štiri otroke in šest odraslih. Za otroško porcijo rižote zadošča 45 $g$ riža, za odraslo pa 75 $g$. Koliko riža mora dati kuhati za rižoto?

# Cela števila

**Množica celih števil**:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Množica celih števil je definirana kot unija treh množic:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

- množica **pozitivnih celih števil** ($\mathbb{Z}^+$) – naravna števila;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ($\mathbb{Z}^-$) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

**Nasprotno število** števila $a$ je $-a$.

Poleg seštevanja in množenja je kot notranja operacija množice celih števil definirano še **odštevanje**.

## Odštevanje

Poljubnima naravnima številoma $a$ in $b$ priredimo **razliko** $\mathbf{a-b}$.

Odštevanje definiramo kot prištevanje nasprotne vrednosti: $a-b=a+(-b)$

Za odštevanje velja zakon ***distributivnosti***: $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$.

# Računski zakoni

- Komutativnostni zakon:

$$a + b = b + a \text{ in } a \cdot b = b \cdot a$$

- Asociativnostni zakon:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ in } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Zakon o nevtralnem elementu:

$$a + 0 = a \text{ in } a \cdot 1 = a$$

- Zakon o inverznem/nasprotnem elementu:

$$a + (-a) = 0$$

- Distributivnostni zakon:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

# Pravila za računanje s celimi števili

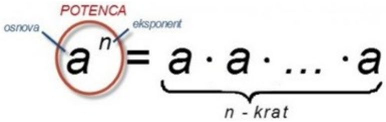
- $-(-a) = a$
- $0 \cdot a = 0$
- $-1 \cdot a = -a$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

# Računanje z naravnimi in celimi števili

# Izraz, enačba, neenačba

# Računanje s potencami z naravnimi eksponenti

Potenca $\mathbf{a^n}$, pri čemer je $n \in \mathbb{N}$, je produkt $n$ faktorjev enakih $a$.




**Pravila za računanje s potencami**:

- $\mathbf{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$ - potenci z enakima eksponentoma zmnožimo tako, da zmnožimo osnovi in prepišemo eksponent
- $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ - potenci z enako osnovo zmnožimo tako, da osnovo prepišemo in seštejemo eksponenta
- $\mathbf{(a^n)^m = a^{nm}}$ - potenco potenciramo tako, da osnovo prepišemo in zmnožimo eksponenta

# Razčlenjevanje izrazov

# Razstavljanje izrazov v množici $\mathbb{Z}$

# Reševanje linearnih in razcepnih enačb v množici $\mathbb{Z}$

# Reševanje linearnih neenačb v množici $\mathbb{Z}$