MATEMATIKA

1. letnik – splošna gimnazija

Jan Kastelic

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

21. marec 2024

Vsebina

Section 1

Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe

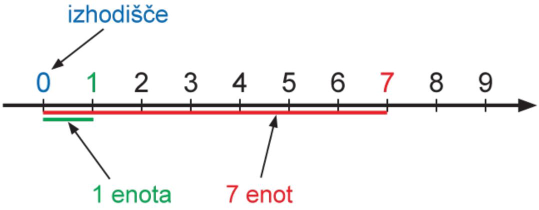
Naravna števila

Množica naravnih števil:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Naravna števila so števila s katerimi štejemo.

Naravna števila lahko predstavimo s **točko** na **številski premici**.



Množico naravnih števil definirajo **Peanovi aksiomi**:

- Vsako naravno število (n) ima svojega naslednika ($n+1$).
- Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- Različni naravni števili imata različna naslednika: ($n+1 \neq m+1; \quad n \neq m$).
- Če neka trditev velja za vsako naravno število in tudi za njegovega naslednika, velja za vsa naravna števila – princip popolne indukcije.

V množici $\mathbb{N}$ sta definirani notranji operaciji: **seštevanje** in **množenje**.

Seštevanje

Poljubnima naravnima številoma a in b priredimo **vsoto** $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Vsota naravnih števil je naravno število: $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \in \mathbb{N}$.

Lastnosti:

- ***komutativnost*** členov/zakon o zamenjavi členov: $a+b=b+a$.
- ***asociativnost*** členov/zakon o združevanju členov: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Množenje

Poljubnima naravnima številoma a in b priredimo **produkt** $\mathbf{a \cdot b}$.

Produkt naravnih števil je naravno število: $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}$.

Lastnosti:

- ***komutativnost*** faktorjev/zakon o zamenjavi faktorjev: $a \cdot b = b \cdot a$.
- ***asociativnost*** faktorjev/zakon o združevanju faktorjev: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- ***distributivnost***/zakon o razčlenjevanju: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- zakon o nevtralnem elementu: $a \cdot 1 = a$.

Cela števila

Množica celih števil:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Množica celih števil je definirana kot unija treh množic:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

- množica **pozitivnih celih števil** ($\mathbb{Z}^+$) – naravna števila;
- **število 0**;
- množica **negativnih celih števil** ($\mathbb{Z}^-$) – nasprotna števila vseh naravnih števil.

Nasprotno število števila a je $-a$.

Poleg seštevanja in množenja je kot notranja operacija množice celih števil definirano še **odštevanje**.

Odštevanje

Poljubnima naravnima številoma a in b priredimo **razliko a − b**.

Odštevanje definiramo kot prištevanje nasprotne vrednosti: $a - b = a + (-b)$

Za odštevanje velja zakon ***distributivnosti***: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Računski zakoni

- Komutativnostni zakon:

$$a + b = b + a \text{ in } a \cdot b = b \cdot a$$

- Asociativnostni zakon:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ in } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Zakon o nevtralnem elementu:

$$a + 0 = a \text{ in } a \cdot 1 = a$$

- Zakon o inverznem/nasprotnem elementu:

$$a + (-a) = 0$$

- Distributivnostni zakon:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Pravila za računanje s celimi števili

- $-(-a) = a$
- $0 \cdot a = 0$
- $-1 \cdot a = -a$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Računanje z naravnimi in celimi števili

Izraz, enačba, neenačba

Računanje s potencami z naravnimi eksponenti

Potenca $\mathbf{a^n}$, pri čemer je $n \in \mathbb{N}$, je produkt n faktorjev enakih a.

Pravila za računanje s potencami:

- $\mathbf{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$ - potenci z enakima eksponentoma zmnožimo tako, da zmnožimo osnovi in prepišemo eksponent
- $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ - potenci z enako osnovo zmnožimo tako, da osnovo prepišemo in seštejemo eksponenta
- $\mathbf{(a^n)^m = a^{nm}}$ - potenco potenciramo tako, da osnovo prepišemo in zmnožimo eksponenta

Razčlenjevanje izrazov

Razstavljanje izrazov v množici $\mathbb{Z}$

Reševanje linearnih in razcepnih enačb v množici $\mathbb{Z}$

Reševanje linearnih neenačb v množici $\mathbb{Z}$

Section 2

Deljivost, izjave, množice

Relacija deljivosti

Pravila za deljivost

Praštevila in sestavljena števila

Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

Osnovni izrek o deljenju

Evklidov algoritem in zveza $Dv = ab$

Številski sestavi

Izjave

Množice

Section 3

Racionalna števila

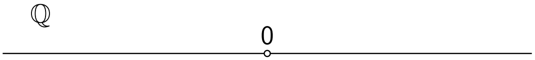
1 Naravna in cela števila, izrazi, enačbe in neenačbe

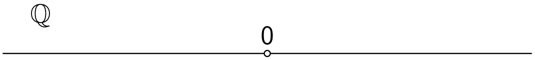
2 Deljivost, izjave, množice

3 Racionalna števila
- Številski ulomki
- Racionalna števila
- Algebrski ulomki
- Računanje z ulomki
- Potence s celimi eksponenti
- Pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti
- Premo in obratno sorazmerje
- Odstotki

Številski ulomki

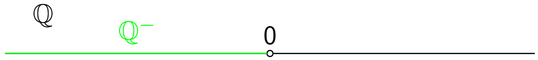
Racionalna števila


$\mathbb{Q}$
0



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

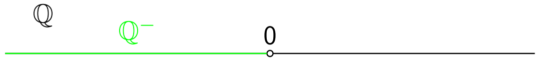
$$\mathbb{Q} =$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^-$,

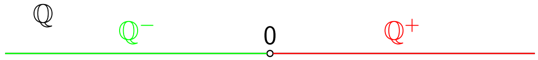
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^-$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^-$,
- množico števila nič: $\{\mathbf{0}\}$ in

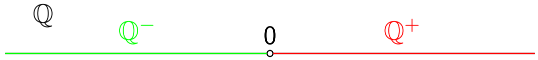
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^-$,
- množico števila nič: $\{\mathbf{0}\}$ in
- množico pozitivnih racionalnih števil: $\mathbb{Q}^+$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$



Glede na predznak razdelimo racionalna števila v tri množice:

- množico negativnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^-$,
- množico števila nič: $\{\mathbf{0}\}$ in
- množico pozitivnih racionalnih števil: $\mathbb{Q}^+$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

Množica racionalnih števil je povsod gosta, saj lahko med poljubnima racionalnima številoma vedno najdemo racionalno število (posledično je med dvema racionalnima številoma neskončno mnogo racionalnih števil).

Urejenost racionalnih števil

Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši* ($<$) oziroma *biti večji* ($>$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ ($b, d \in \mathbb{N}$) velja natanko ena izmed treh možnosti:

Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši* ($<$) oziroma *biti večji* ($>$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \in \mathbb{N})$ velja natanko ena izmed treh možnosti:

1. prvi ulomek je večji od drugega $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad > bc$;

Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši* $(<)$ oziroma *biti večji* $(>)$. Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \in \mathbb{N})$ velja natanko ena izmed treh možnosti:

1. prvi ulomek je večji od drugega $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad > bc$;
2. drugi ulomek je večji od prvega $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad < bc$;

Urejenost racionalnih števil

Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši* ($<$) oziroma *biti večji* ($>$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ ($b, d \in \mathbb{N}$) velja natanko ena izmed treh možnosti:

1. prvi ulomek je večji od drugega $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad > bc$;
2. drugi ulomek je večji od prvega $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad < bc$;
3. ulomka sta enaka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad = bc$.

Urejenost racionalnih števil

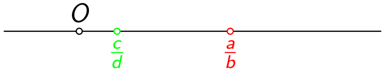
Množica racionalnih števil je **linearno urejena** z relacijo *biti manjši* ($<$) oziroma *biti večji* ($>$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ ($b, d \in \mathbb{N}$) velja natanko ena izmed treh možnosti:

1. prvi ulomek je večji od drugega $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad > bc$;
2. drugi ulomek je večji od prvega $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad < bc$;
3. ulomka sta enaka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad = bc$.

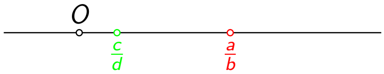
Enaka ulomka predstavljata isto racionalno število.

Slika večjega racionalnega števila $\frac{a}{b}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{c}{d}$.

Slika večjega racionalnega števila $\frac{a}{b}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{c}{d}$.



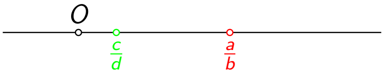
Slika večjega racionalnega števila $\frac{a}{b}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{c}{d}$.



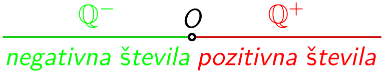
Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.

 Racionalna števila

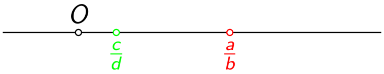
Slika večjega racionalnega števila $\frac{a}{b}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{c}{d}$.



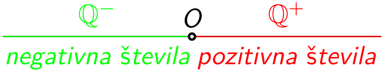
Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



Slika večjega racionalnega števila $\frac{a}{b}$ je na številski premici desno od slike manjšega racionalnega števila $\frac{c}{d}$.



Slike pozitivnih racionalnih števil ležijo desno, slike negativnih racionalnih števil pa levo od koordinatnega izhodišča.



V množci ulomkov velja, da je vsak negativen ulomek manjši od vsakega pozitivnega ulomka.

Lastnosti relacije urejenosti

Lastnosti relacije urejenosti

Monotonost vsote

Lastnosti relacije urejenosti

Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

Lastnosti relacije urejenosti

Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Lastnosti relacije urejenosti

Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Lastnosti relacije urejenosti

Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Tranzitivnost

Lastnosti relacije urejenosti

Monotonost vsote

Če na obeh straneh neenakosti prištejemo isto število, se neenakost ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Tranzitivnost

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\mathbf{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\mathbf{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri prehodu na nasprotno vrednost se neenačaj obrne:

Pri množenju neenakosti s pozitivnim številom se znak neenakosti ohrani.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri množenju neenakosti s negativnim številom se znak neenakosti obrne.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{e}{f} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Pri prehodu na nasprotno vrednost se neenačaj obrne:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad -\frac{a}{b} > -\frac{c}{d}$$

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \in \mathbb{N})$ velja vsaj ena izmed možnosti:

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \in \mathbb{N})$ velja vsaj ena izmed možnosti:

1. prvi ulomek je večji ali enak od drugega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \geq bc$;

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \in \mathbb{N})$ velja vsaj ena izmed možnosti:

1. prvi ulomek je večji ali enak od drugega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \geq bc$;
2. drugi ulomek je večji ali enak od prvega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \leq bc$;

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \in \mathbb{N})$ velja vsaj ena izmed možnosti:

1. prvi ulomek je večji ali enak od drugega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \geq bc$;
2. drugi ulomek je večji ali enak od prvega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \leq bc$;

Za zgornjo relacijo delne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ ($b, d \in \mathbb{N}$) velja vsaj ena izmed možnosti:

1. prvi ulomek je večji ali enak od drugega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \geq bc$;
2. drugi ulomek je večji ali enak od prvega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \leq bc$;

Za zgornjo relacijo delne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

- $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ – **refleksivnost**;

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ ($b, d \in \mathbb{N}$) velja vsaj ena izmed možnosti:

1. prvi ulomek je večji ali enak od drugega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \geq bc$;
2. drugi ulomek je večji ali enak od prvega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \leq bc$;

Za zgornjo relacijo delne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

- $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ – **refleksivnost**;
- $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ – **antisimetričnost** in

Množica racionalnih števil pa je tudi **delno urejena**, in sicer z relacijo *biti manjši ali enak* ($\leq$) oziroma *biti večji ali enak* ($\geq$). Za ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ ($b, d \in \mathbb{N}$) velja vsaj ena izmed možnosti:

1. prvi ulomek je večji ali enak od drugega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \geq bc$;
2. drugi ulomek je večji ali enak od prvega $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad \leq bc$;

Za zgornjo relacijo delne urejenosti veljajo naslednje lastnosti:

- $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ – **refleksivnost**;
- $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ – **antisimetričnost** in
- $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$ – **tranzitivnost**.

Algebrski ulomki

Računanje z ulomki

Potence s celimi eksponenti

Pravila za računanje s celimi eksponenti

Premo in obratno sorazmerje

Odstotki

Section 4

Realna števila, statistika

Realna števila

Kvadratni in kubični koren

Intervali

Absolutna vrednost

Sistem linearnih enačb

Obravnavanje linearnih enačb, neenačb, sistemov

Absolutna in relativna napaka

Sredine

Razpršenost podatkov

Prikazi

Section 5

Pravokotni koordinatni sistem, linearna funkcija

Pravokotni koordinatni sistem

Razdalja med točkama in razpolovišče daljice

Ploščina trikotnika

Osnovno o funkcijah

Linearna funkcija in premica

Oblike enačbe premice

Presešišče premic

Sistem linearnih neenačb

Modeliranje z linearno funkcijo

(i) Linearno programiranje