

Matematika

Splošna gimnazija

ZAPISKI

17. september 2024

Pred vami so zapiski za predmet Matematika v splošnem gimnazijskem izobraževanju. Sproti bodo nastajali od šolskega leta 2024/2025 naprej. V besedilu so mogoče prisotne še kake napake. Če kakšno opazite, mi javite

Jan Kastelic

Kazalo

1	Osnove logike	1
1.1	Izjave	1
1.1.1	Enostavne in sestavjene izjave	1
1.2	Logične operacije	2
1.2.1	Negacija	2
1.2.2	Konjunkcija	2
1.2.3	Disjunkcija	2
1.2.4	Komutativnost konjunkcije in disjunkcije	3
1.2.5	Asociativnost konjunkcije in disjunkcije	3
1.2.6	Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo	3
1.2.7	De Morganova zakona	3
1.2.8	Implikacija	4
1.2.9	Ekvivalenca	4
1.2.10	Vrstni red operacij	5
1.2.11	Tavtologija in protislovje	5
1.2.12	Kvantifikatorja	5
1.3	Pomen izjav v matematiki	5

Poglavje 1

Osnove logike

1.1 Izjave

Matematična izjava je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo resničnost oziroma pravilnost.

Matematična izjava lahko zavzame dve logični vrednosti:

- izjava je **resnična/pravilna**, oznaka **R/P/1/⊤**;
- izjava je **neresnična/nepravilna**, oznaka **N/0/⊥**.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami ($A, B, C \dots$).

Naloga 1.1. *Ali so naslednje povedi izjave?*

- *Danes sije sonce.*
- *Koliko je ura?*
- *Piramida je geometrijski lik.*
- *Daj mi jabolko.*
- *Število 12 deli število 3.*
- *Število 3 deli število 10.*
- *Ali si pisal matematični test odlično?*
- *Matematični test si pisal odlično.*
- *Ali je 10 dl isto kot 1 l?*
- *Število 41 je praštevilo.*

Naloga 1.2. *Spodnjim izjavam določite logične vrednosti.*

- *A: Najvišja gora v Evropi je Mont Blanc.*
- *B: Število je deljivo s 4 natanko takrat, ko je vsota števk deljiva s 4.*
- *C: Ostanek pri deljenju s 4 je lahko 1, 2 ali 3.*
- *D: Mesec februar ima 28 dni.*
- *E: Vsa praštevila so liha števila.*
- *F: Število 1 je naravno število.*
- *G: Praštevil je neskončno mnogo.*

1.1.1 Enostavne in sestavljene izjave

Izjave delimo med:

- **elementarne/enostavne izjave** – ne moremo jih razstaviti na bolj enostavne;
- **sestavljene izjave** – sestavljene iz elementarnih izjav, ki jih med seboj povezujejo **logične operacije** (imenovane tudi izjavne povezave oziroma logična vezja).

Vrednost sestavljene izjave izračunamo glede na vrednosti elementarnih izjav in izjavnih povezav med njimi.

Pravilnost sestavljenih izjav nazorno prikazujejo **resničnostne/pravilnostne tabele**.

1.2 Logične operacije

1.2.1 Negacija

Negacija izjave A je izjava, ki **trdi nasprotno** kot izjava A . Oznaka: $\neg A$.

$\neg A$ **Ni res**, da velja izjava A .

Če je izjava A pravilna, je $\neg A$ nepravilna in obratno: če je $\neg A$ pravilna, je A nepravilna.

Negacija negacije izjave je potrditev izjave. $\neg(\neg A) = A$

A	$\neg A$
P	N
N	P

Naloga 1.3. Izjavam določite logično vrednost, potem jih zanikajte in določite logično vrednost negacij.

- A : $5 \cdot 8 = 30$
- B : Število 3 je praštevilo.
- C : Največje dvomestno število je 99.
- D : Število 62 je večkratnik števila 4.
- E : Praštevil je neskončno mnogo.
- F : $7 \leq 5$
- G : Naša pisava je cirilica.

1.2.2 Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B nastane tako, da povežemo izjavi A in B z **in hkrati**.

$A \wedge B$ Velja izjava A **in (hkrati)** izjava B .

Če sta izjavi A in B pravilni, je pravilna tudi njuna konjunkcija, če je pa ena od izjav nepravilna, je nepravilna tudi njuna konjunkcija.

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

Naloga 1.4. Določite logično vrednost konjunkcijam.

- Število 28 je večkratnik števila 3 in večkratnik števila 8.
- Število 7 je praštevilo in je deljivo s številom 1.
- Vsakemu celemu številu lahko pripišemo nasprotno število in obratno celo število.
- Ostanki pri deljenju števila s 3 so lahko 0, 1 ali 2, pri deljenju s 5 pa 0, 1, 2, 3 ali 4.
- Število je deljivo s 3, če je vosta števk deljiva s 3, in je deljivo z 9, če je vsota števk deljiva z 9.

1.2.3 Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B nastane s povezavo **ali**.

$A \vee B$ Velja izjava A **ali** izjava B (lahko tudi obe hkrati).

Disjunkcija je nepravilna, če sta nepravilni obe izjavi, ki jo sestavljata, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

Naloga 1.5. Določite logično vrednost disjunkcijam.

- Število 24 je večkratnik števila 3 ali 8.
- Število 35 ni večkratnik števila 7 ali 6.
- Število 5 deli število 16 ali 18.
- Ploščina kvadrata s stranico a je a^2 ali obseg kvadrata je $4a$.
- Ni res, da je vsota notranjih kotov trikotnika 160° , ali ni res, da Pitagorov izrek velja v poljubnem trikotniku.

1.2.4 Komutativnost konjunkcije in disjunkcije

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

1.2.5 Asociativnost konjunkcije in disjunkcije

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

1.2.6 Distributivnost zakona za konjunkcijo in disjunkcijo

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

1.2.7 De Morganova zakona

- negacija konjunkcije je disjunkcija negacij: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- negacija disjunkcije je konjunkcija negacij: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Naloga 1.6. Katere od spodnjih izjav so pravilne in katere nepravilne?

- $(3 \cdot 4 = 12) \wedge (12 : 4 = 3)$
- $(a^3 \cdot a^5 = a^{15}) \vee (a^3 \cdot a^5 = a^8)$
- $(3|30) \wedge (3|26)$
- $(3|30) \vee (3|26)$
- $(2^3 = 9) \vee (3^2 = 9)$
- $((-2)^2 = 4) \wedge \neg(-2^2 = 4)$

1.2.8 Implikacija

Implikacija izjav A in B je sestavljena izjava, ki jo lahko beremo na različne načine.

$A \Rightarrow B$ Če velja izjava A , **potem** velja izjava B . / **Iz** A sledi B .

Izjava A je **pogoj** ali **privzetek**, izjava B pa (**logična**) **posledica** izjave A .

Implikacija je nepravilna, ko je izjava A pravilna, izjava B pa nepravilna, v preostalih treh primerih je pravilna.

A	B	$A \Rightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Naloga 1.7. Določite, ali so izjave pravilne.

- Če je število deljivo s 100, je deljivo tudi s 4.
- Če je štirikotnik pravokotnik, se diagonali razpolavljata.
- Če je štirikotnik kvadrat, se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Če sta števili 2 in 3 lihi števili, potem je produkt teh dveh števil sodo število.
- Če je število 18 deljivo z 9, potem je deljivo s 3.
- Če je 7 večkratnik števila 7, potem 7 deli število 43.
- Če je število deljivo s 4, potem je deljivo z 2.

1.2.9 Ekvivalenca

Ekvivalenca izjavi A in B poveže s **če in samo če** oziroma **natanko tedaj, ko**.

$A \Leftrightarrow B$ Izjava A velja, **če in samo če** velja izjava B ./
Izjava A velja **natanko tedaj, ko** velja izjava B .

Ekvivalenca dveh izjav je pravilna, če imata obe izjavi enako vrednost (ali sta obe pravilni ali obe nepravilni), in nepravilna, če imata izjavi različno vrednost.

Ekvivalentni/enakovredni izjavi pomenita eno in isto, lahko ju nadomestimo drugo z drugo.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Naloga 1.8. Določite, ali so naslednje izjave pravilne.

- Število je deljivo z 12 natanko takrat, ko je deljivo s 3 in 4 hkrati.
- Število je deljivo s 24 natanko takrat, ko je deljivo s 4 in 6 hkrati.
- Število je praštevilo natanko takrat, ko ima natanko dva delitelja.
- Štirikotnik je kvadrat natanko tedaj, ko se diagonali sekata pod pravim kotom.
- Število je sodo natanko tedaj, ko je deljivo z 2.

1.2.10 Vrstni red operacij

Kadar so izjave povezane z več izjavnimi povezavami, pri določanju logične vrednosti upoštevamo oklepaje in naslednji **vrstni red** oziroma **prioriteto izjavnih povezav**:

1. negacija,
2. konjunkcija,
3. disjunkcija,
4. implikacija,
5. ekvivalenca.

Če moramo zapored izvesti več enakih izjavnih povezav, velja pravilo združevanja od leve proti desni.

Naloga 1.9. V sestavljeni izjavi zapišite oklepaje, ki bodo predstavljali vrstni red operacij. Nato tvorite pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo glede na različne logične vrednosti elementarnih izjav.

- $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$
- $A \vee \neg A \Rightarrow \neg B \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- $A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$
- $C \Rightarrow A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge C$
- $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow B \wedge (C \Leftrightarrow \neg A)$

1.2.11 Tautologija in protislovje

Tautologija ali **logično pravilna izjava** je sestavljena izjava, ki je pri vseh naborih vrednosti elementarnih izjav, iz katerih je sestavljena, pravilna.

Protislovje je sestavljena izjava, ki ni nikoli pravilna.

1.2.12 Kvantifikatorja

- \forall (beri 'vsak') – izjava velja za vsak element dane množice
- \exists (beri 'obstaja' ali 'eksistira') – izjava je pravilna za vsaj en element dane množice

1.3 Pomen izjav v matematiki

Aksiomi so najpreprostejše izjave, ki so očitno pravilne in zato njihove pravilnosti ni treba dokazovati.

Izreki ali **teoremi** so izjave, ki so pravilne, vendar pa njihova pravilnost ni očitna. Pravilnost izreka (teorema) moramo potrditi z dokazom, ki temelji na aksiomih in na preprostejših že prej dokazanih izrekih.

Definicije so izjave, s katerimi uvajamo nove pojme. Najpreprostejših pojmov v matematiki ne opisujemo z definicijami (to so pojmi kot npr.: število, premica ipd.); vsak nadaljnji pojem pa moramo definirati, zato da se nedvoumno ve, o čem govorimo.