Zusammengesetzte Funktionen

Jan Kunde

Arten zusammengetzter Funktionen und ihre Ableitungen

Summen

Wenn:
$f(x) = u(x) + v(x)$
Dann gilt:
$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Beispiel:

$f(x) = x^3 + ln(x)$
$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$

Differenzen

Wenn:
$f(x) = u(x) - v(x)$
Dann gilt:
$f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Beispiel:

$f(x) = x^3 - ln(x)$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$

Produkte

Wenn:
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
Dann gilt die Produktregel:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel:

$f(x) = e^x \cdot x^3$
$f'(x) = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$

Quotienten

Wenn:
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
Dann gilt die Quotientenregel:
$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ Alternativ lässt sich eine gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ zu $f(x) = u(x) \cdot v(x)^{-1}$ umformen und mit der Produkt- und Kettenregel ableiten.

Beispiel:

$f(x) = \frac{3x^4}{4x+3}$
$f'(x) = \frac{12x^3 \cdot (4x+3) - 4 \cdot 3x^4}{(4x+3)^2}$
$= \frac{12x^3 \cdot (4x+3-x)}{(4x+3)^2}$
$= \frac{12x^3 \cdot (3x+3)}{(4x+3)^2}$
$= \frac{36x^3 \cdot (x+1)}{(4x+3)^2}$

Verkettete Funktionen

Wenn:
$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$
Dann gilt die Kettenregel:
$f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$

Beispiel:

$f(x) = e^{3x^2} \quad (u(x) = e^x;\ v(x) = 3x^2)$
$f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2}$

Untersuchung zusammengesetzter Funktionen

Bestimmung von Definitionsmengen

Außer bei gebrochenrationalen Funktionen und Funktionen die als Term einen ln oder eine Wurzel enthalten ist die Definitionsmenge aller abiturrelevanten Funktionen: $D = \mathbb{R}$

Definitionsmengen gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen weisen Definitionslücke an den Nullstellen des Nenners auf.

Beispiel:

$f(x) = \frac{3x^5+2x}{x^2-3}$

$x^2 - 3 = 0 \quad | + 3$
$x^2 = 3$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Definitionsmengen bei ln-Funktionen

Der natürliche Logarithmus ist nur für Eingabewerte größer als Null definitiert. Besteht eine Funktion aus einer Verkettung aus natürlichem Logarithmus und einer weiteren Funktion, umfasst die Definitionsmenge nur die X-Werte, für die der innere Teil der Funktion größere Werte als Null annimmt. Zur Bestimmung der Definitionsmenge muss also die Ungleichung $v(x) > 0$ gelöst werden, wobei $v(x)$ der innere Teil der zusammengesetzten ln-Funktion ist.

Beispiel 1:

$f(x) = ln(x + 3)$

$x + 3 > 0 \quad | - 3$
$x > -3$

$D = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$

Beispiel 2:

$f(x) = ln(x^2 - 6)$

$x^2 - 6 = 0 \quad | + 6$
$x^2 = 6 \quad | \sqrt{6}$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$

da $x^2 - 6$ im Interval $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}] \leq 0$ ist, ist die Definitionsmenge
$D = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$.

Definitionsmengen bei Wurzelfunktionen

Bei Wurzelfunktionen in der Form $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Definitionsmenge für alle ungeraden n: $D = \mathbb{R}$. Für alle geraden n muss der Wert unter der Wurzel ≥ 0 sein.

Beispiel:

$f(x) = \sqrt{x - 4}$
$0 \leq x - 4 \quad | + 4$
$4 \leq x$

$D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$

Nullstellen bei zusammengesetzten Funktionen

Nullstellen bei Produktfunktionen

Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist, ist $f(x) = 0$ dann gegeben, wenn mindestens eine der Beiden Funktion $u(x)$ und $v(x)$ gleich Null ist. Daher können zur Findung der Nullenstellen $u(x)$ und $v(x)$ seperat untersucht werden.

Nullstellen bei gebrochenrationalen Funktionen

Wenn $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ist, ist $f(x) = 0$ dann gegeben, wenn $u(x) = 0$, also die im Zähler stehende Funktion gleich Null ist.

Nullstellen bei verketteten Funktionen

Wenn $f(x) = (u \circ v)(x)$ ist, ist $f(x) = 0$ dann gegeben wenn $v(x)$ einen Wert annimmt, für den $u(x)$ den Wert Null annimmt. Ist die äußere Funktion, in diesem Fall $u(x)$ eine Funktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ keine Nullstellen besitzt (z.B. e^x), besitzt $f(x)$ keine Nullenstellen.