Zusammengesetzte Funktionen

Jan Kunde

Im folgenden gilt $x \in \mathbb{R} \, \forall f(x)$

Arten zusammengetzter Funktionen und ihre Ableitungen

Summenfunktionen

Wenn:
$f(x) = u(x) + v(x)$
Dann gilt:
$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Beispiel:

$f(x) = x^3 + ln(x)$
$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$

Differenzfunktionen

Wenn:
$f(x) = u(x) - v(x)$
Dann gilt:
$f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Beispiel:

$f(x) = x^3 - ln(x)$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$

Produktfunktionen

Wenn:
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
Dann gilt:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel:

$f(x) = e^x \cdot x^3$
$f'(x) = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$

Gebrochenrationale Funktionen

Wenn:
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
Dann gilt:
$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v(x)^2}$ Alternativ lässt sich eine gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ zu $f(x) = u(x) \cdot v(x)^{-1}$ umformen und mit Produkt- und Kettenregel ableiten.

Beispiel:

$f(x) = \frac{3x^4}{4x+3}$
$f'(x) = \frac{4 \cdot 3x^4 - (4x+3) \cdot 12x^3}{(4x+3)^2} = \frac{36x^3 \cdot (x+1)}{(4x+3)^2}$

Verkettete Funktionen

Wenn:
$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$
Dann gilt:
$f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$

Beispiel:

$f(x) = e^{3x^2}$
$f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2}$

Untersuchung zusammengesetzte Funktionen

Bestimmung von Definitionsmengen

Außer bei gebrochenrationalen Funktionen und Funktionen die als Term einen ln oder tan enthalten ist die Definitionsmenge aller abiturrelevanten Funktionen: $D = \mathbb{R}$

Definitionsmengen gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen weisen Definitionslücke an den Nullstellen des Nenners auf.

Beispiel:

$f(x) = \frac{3x^5+2x}{x^2-3}$

$x^2 - 3 = 0 \quad | + 3$
$x^2 = 3$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Definitionsmengen bei ln-Funktionen

Der natürliche Logarithmus ist nur für Eingabewerte größer als Null definitiert. Besteht eine Funktion aus einer Verkettung aus natürlichem Logarithmus und einer weiteren Funktion, umfasst die Definitionsmenge nur die X-Werte, für die der innere Teil der Funktion größere Werte als Null annimmt. Zur Bestimmung der Definitionsmenge muss also die Ungleichung $v(x) > 0$ gelöst werden, wobei $v(x)$ der innere Teil der zusammengesetzten ln-Funktion ist.

Beispiel 1:

$f(x) = ln(x + 3)$

$x + 3 > 0 \quad | - 3$
$x > -3$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$

Beispiel 2:

$f(x) = ln(x^2 - 6)$

$x^2 - 6 = 0 \quad | + 6$
$x^2 = 6 \quad |\sqrt{6}$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$

da $f(0) = -6$, und somit < 0 ist, ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$.

Nullstellen bei zusammengesetzten Funktionen

Nullstellen bei Produktfunktionen

Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist, ist $f(x) = 0$ dann gegeben, wenn mindestens eine der Beiden Funktion $u(x)$ und $v(x)$ gleich Null ist. Daher können zur Findung der Nullenstellen $u(x)$ und $v(x)$ seperat untersucht werden.

Nullstellen bei gebrochenrationalen Funktionen

Wenn $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ist, ist $f(x) = 0$ dann gegeben, wenn $u(x) = 0$, also die im Zähler stehende Funktion gleich Null ist.

Nullstellen bei verketteten Funktionen

Wenn $f(x) = (u \circ v)(x)$ ist, ist $f(x) = 0$ dann gegeben wenn $v(x)$ einen Wert annimmt, für den $u(x)$ den Wert Null annimmt. Ist die äußere Funktion, in diesem Fall $u(x)$ eine Funktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ keine Nullstellen besitzt (z.B. e^x), besitzt $f(x)$ keine Nullenstellen.