1 Rozwiązywanie algebraicznych równań liniowych

1.1 Metoda Gaussa

Rozwiązujemy układ n równań liniowych z m prawymi stronami postaci:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{1.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n \\
\boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i = 1,2,3\dots,n; j = 1,2,3\dots,m \\
\boldsymbol{B} &= \{a_{ij}\}, \quad i = 1,2,3\dots,n; \quad j = n+1, n+2, n+3,\dots,n+m
\end{aligned}$$

Układ równań rozwiązujemy w dwóch etapach:

1. Eliminacja

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \tag{1.2}$$

dla

$$\begin{aligned}
k =& 1,2,3,\dots n-1, \\
i =& k+1, k=2, k+3,\dots,n, \\
j =& k+1, k+2, k+3,\dots,k+m
\end{aligned}$$

Po eliminacji macierz układu jest macierzą trójkątną górną.

2. Postępowanie odwrotne.

$$\begin{aligned}
x_{ni} &= \frac{a_{nn+i}^{(n-1)}}{a_{nn}}, \\
&\quad \text{dla } i = 1,2,3,\dots,m \\
x_{ki} &= \frac{a_{kn+i}^{(k-1)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_{ji}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \\
&\quad \text{dla } k = n-1, n-2, n-3,\dots,1, \quad i = 1,2,3,\dots,m
\end{aligned} \tag{1.3}$$

2 Obliczanie macierzy odwrotnej i wyznacznika metodą Gaussa

Szukamy macierzy $\boldsymbol{X} = \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n$ odwrotnej do macierzy $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n$, szukamy więc macierzy spełniającej warunek:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E} \tag{2.4}$$

gdzie $\boldsymbol{E}$ jest macierzą jednostkową. Wystarczy więc rozwiązać metodą Gaussa układ n równań z n prawymi stronami. Prawe strony układu równań są utworzone z kolumn macierzy jednostkowej.

Przekształcenia dokonywane w procesie eliminacji Gaussa (dodawanie wierszy wymnożonych przez stałą) nie zmieniają wyznacznika macierzy, mamy więc

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{n-\mathbf{1}}) \tag{2.5}$$

Macierz $\boldsymbol{A}^{n-\mathbf{1}}$ jest macierzą trójkątną, a wyznacznik takiej macierzy jest iloczynem elementów z przekątnej głównej. Czyli

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}\, a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \tag{2.6}$$

3 Rozkład $\boldsymbol{LL}^T$ - metoda Banachiewicza

Rozwiązujemy układ n równań liniowych postaci

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{3.7}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą symetryczną, czyli $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ i

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n \\ \boldsymbol{x}^T &= \{x_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b}^T &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n; \end{aligned}$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ należy rozłożyć na czynniki trójkątne:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LL}^T \tag{3.8}$$

gdzie $\boldsymbol{L} = \{l_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n$ jest macierzą trójkątną dolną. Dostajemy zatem układ równań postaci:

$$\boldsymbol{L}\,\underbrace{\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x}}_{y} = \boldsymbol{b} \tag{3.9}$$

i, jeżeli uwzględnimy powyższe oznaczenie, to rozwiązanie układu 3.9, co za tym idzie układu 3.7 można sprowadzić do rozwiązania dwóch układów równań o macierzach trójkątnych:

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{y}^T = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{Lx}^T = \boldsymbol{y} \tag{3.11}$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{L}$ można policzyć z wzorów

$$
\begin{aligned}
&l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \qquad i > 1,\\
&l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \qquad 1 < i \leqslant n\\
&l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{ij}}, \qquad i > j\\
&l_{ij} = 0, \qquad i < j.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Rozwiązanie układów (3.10)(3.11) równań otrzymujemy licząc kolejno

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \frac{b_1}{l_{11}},\\
&y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k}{l_{ii}}, \qquad i > 1\\
&x_n = \frac{y_n}{l_{nn}}\\
&x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki}x_k}{l_{ii}}, \qquad i < n
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

4 Rozkład $\boldsymbol{LDL}^T$

Rozwiązujemy układ n równań liniowych postaci

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{4.14}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą symetryczną, czyli $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ i

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n\\
\boldsymbol{x}^T &= \{x_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n\\
\boldsymbol{b}^T &= \{b_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n;
\end{aligned}
$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ rozkładamy na czynniki trójkątno - diagonalne:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDL}^T, \tag{4.15}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} =& \{l_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \text{- macierz trójkątna dolna}\\
l_{ii} =& 1, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n\\
\boldsymbol{D} =& \{d_{ij}\} \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \text{- macierz diagonala}
\end{aligned}
$$

Dostajemy zatem układ równań postaci:

$$\underbrace{\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\underbrace{\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{x}}_{z}}_{y} = \boldsymbol{b} \tag{4.16}$$

i, jeżeli uwzględnimy powyższe oznaczenie, to rozwiązanie układu 4.16, co za tym idzie układu 4.14 można sprowadzić do rozwiązania trzech układów n równań o macierzach trójkątnych lub diagonalnych:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y} \tag{4.19}$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}$ policzymy z wzorów

$$\begin{aligned}
&d_{11} = a_{11}, \qquad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_{11}}, \qquad i > 1,\\
&d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_{kk}, \qquad 1 < i \leqslant n\\
&l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} d_{kk}}{d_{ij}}, \qquad i > j\\
&l_{ij} = 0, \qquad i < j,\\
&l_{ii} = 1, \qquad i > 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Rozwiązanie układów (4.17),(4.18),(4.19) równań otrzymujemy licząc kolejno

$$\begin{aligned}
&y_1 = b_1,\\
&y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, \qquad i > 1\\
&z_i = \frac{y_i}{d_{ii}}, \quad i \geqslant 1,\\
&x_n = z_n\\
&x_i = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k}{l_{ii}}, \qquad i < n
\end{aligned} \tag{4.21}$$

5 Rozkład LU (metoda Choleskiego)

Rozwiązujemy układ n równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5.22}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n \\
\boldsymbol{x}^T &= \{x_i\}, \quad i = 1,2,3\dots,n \\
\boldsymbol{b}^T &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\dots,n;
\end{aligned}
$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ należy rozłożyć na czynniki trójkątne:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} \tag{5.23}$$

gdzie $\boldsymbol{L} = \{l_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n$ jest macierzą trójkątną dolną, a $\boldsymbol{U} = \{u_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\dots,n$ jest macierzą trójkątną górną. Dostajemy zatem układ równań postaci:

$$\boldsymbol{L}\underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}}_{y} = \boldsymbol{b} \tag{5.24}$$

i, jeżeli uwzględnimy powyższe oznaczenie, to rozwiązanie układu 5.24, co za tym idzie układu 5.22 można sprowadzić do rozwiązania dwóch układów równań o macierzach trójkątnych:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{5.26}$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{U}$ można policzyć z wzorów

$$
\begin{aligned}
l_{i1} &= a_{i1}, \qquad i \geqslant 1, \\
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \qquad i \geqslant j > 1 \\
u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \qquad i > 1, \\
u_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}, \qquad i \geqslant j > 1
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

Rozwiązanie układów (5.25)(5.26) równań otrzymujemy licząc kolejno

$$
\begin{aligned}
y_i &= \frac{b_1}{l_{11}}, \\
y_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k}{l_{ii}}, \qquad i > 1 \\
x_n &= y_n \\
x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k, \qquad i < n
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

6 Rozkład $\boldsymbol{LDU}$

Rozwiązujemy układ n równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{6.29}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n \\ \boldsymbol{x}^T &= \{x_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b}^T &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n; \end{aligned}$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ rozkładamy na czynniki trójkątno - diagonalne:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDU}, \tag{6.30}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} =&\{l_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n \quad \text{- macierz trójkątna dolna} \\ &l_{ii} = 1, \quad i = 1,2,3,\ldots,n \\ \boldsymbol{D} =&\{d_{ij}\} \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n \quad \text{- macierz diagonala} \\ \boldsymbol{U} =&\{u_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n \quad \text{- macierz trójkątna górna} \\ &u_{ii} = 1, \quad i = 1,2,3,\ldots,n \end{aligned}$$

Dostajemy zatem układ równań postaci:

$$\boldsymbol{L}\underbrace{\boldsymbol{D}\underbrace{\boldsymbol{Ux}}_{z}}_{y} = \boldsymbol{b} \tag{6.31}$$

i, jeżeli uwzględnimy powyższe oznaczenie, to rozwiązanie układu 6.31, co za tym idzie układu 6.29 można sprowadzić do rozwiązania trzech układów n równań o macierzach trójkątnych lub diagonalnych:

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \tag{6.32}$$

$$\boldsymbol{Dz} = \boldsymbol{y} \tag{6.33}$$

$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} \tag{6.34}$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}$ $\boldsymbol{U}$ policzymy z wzorów

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= a_{11}, \\
d_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki} d_{kk}, \qquad i > 1 \\
l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{d_{11}}, \qquad i \leqslant n \\
l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} d_{kk}}{d_{jj}}, \qquad i > j > 1 \\
u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{d_{11}}, \\
u_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} d_{kk}}{d_{ii}}, \qquad 1 < i < j
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

Rozwiązanie układów (6.32),(6.33),(6.34) równań otrzymujemy licząc kolejno

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_1 \\
y_i &= b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, \qquad i > 1 \\
z_i &= \frac{y_i}{d_{ii}} \\
x_n &= z_n \\
x_i &= z_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k, \qquad i < n
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

7 Metoda iteracji prostej (Jacobiego)

Rozwiązujemy układ n równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{7.37}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \\
\boldsymbol{x}^T &= \{x_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n \\
\boldsymbol{b}^T &= \{b_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n;
\end{aligned}
$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ zapisujemy w postaci sumy trzech macierzy

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U} \tag{7.38}$$

gdzie

$$
l_{ij} = \begin{cases} 0 & i \leqslant j \\ a_{ij} & i > j \end{cases}, \quad d_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{ij} & i = j \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} 0 & i \geqslant j \\ a_{ij} & i < j \end{cases} \tag{7.39}
$$

Uwzględniając powyższe, zapiszmy układ 7.37 w postaci

$$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{7.40}$$

a następnie przekształćmy go do postaci

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \tag{7.41}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}), \quad \boldsymbol{f}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{7.42}$$

równanie 7.41 przyjmuje postać

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f} \tag{7.43}$$

Warto zauważyć, że elementy macierzy $\boldsymbol{C}$ i współrzędne wektora $\boldsymbol{f}$ można policzyć z wzorów

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i\neq j\end{cases}, \quad f_i=\frac{b_i}{a_{ii}} \tag{7.44}$$

Na podstawie wzoru 7.43 budujemy następujący proces iteracyjny

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(i)} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(i-1)}+\boldsymbol{d}, \quad \text{dla} \quad i=1,2,3,\ldots\\ \boldsymbol{x}^{(0)} &- \text{ jest przybliżeniem początkowym}\\ &- \text{ zwykle przyjmuje się } \boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{7.45}$$

Proces iteracyjny można zakończyć jeśli

$$\frac{\left\|\boldsymbol{x}^{(i)}-\boldsymbol{x}^{(i-1)}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}^{(i)}\right\|}<\varepsilon \tag{7.46}$$

gdzie ε jest żądaną dokładnością rozwiązania.

8 Metoda iteracji Gaussa-Seidel'a

Rozwiązujemy układ n równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{8.47}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j=1,2,3,\ldots,n\\ \boldsymbol{x}^T &= \{x_i\}, \quad i=1,2,3\ldots,n\\ \boldsymbol{b}^T &= \{b_i\}, \quad i=1,2,3\ldots,n;\end{aligned}$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ zapisujemy w postaci sumy trzech macierzy

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U} \tag{8.48}$$

gdzie

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & i \leqslant j \\ a_{ij} & i > j \end{cases}, \quad d_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{ij} & i = j \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} 0 & i \geqslant j \\ a_{ij} & i < j \end{cases} \tag{8.49}$$

Zapiszmy układ 8.47 w postaci

$$\boldsymbol{Lx} + \boldsymbol{Ux} + \boldsymbol{Dx} = \boldsymbol{b} \tag{8.50}$$

a następnie przekształćmy go do postaci

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Lx} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Ux} \tag{8.51}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{8.52}$$

równanie 8.51 przyjmuje postać

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Gx} + \boldsymbol{Hx} + \boldsymbol{p} \tag{8.53}$$

Warto zauważyć, że elementy macierzy $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ i współrzędne wektora $\boldsymbol{p}$ można policzyć z wzorów

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & i \leqslant j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i > j \end{cases} \quad h_{ij} = \begin{cases} 0 & i \geqslant j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i < j \end{cases}, \quad p_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \tag{8.54}$$

Na podstawie wzoru 8.53 budujemy następujący proces iteracyjny

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(i)} &= \boldsymbol{Gx}^{(i)} + \boldsymbol{Hx}^{(i-1)} + \boldsymbol{p}, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \\ \boldsymbol{x}^{(0)} &- \text{ jest przybliżeniem początkowym} \\ &- \text{ zwykle przyjmuje się } \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{8.55}$$

Proces iteracyjny można zakończyć jeśli

$$\frac{\left\| \boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)} \right\|}{\left\| \boldsymbol{x}^{(i)} \right\|} < \varepsilon \tag{8.56}$$

gdzie ε jest żądaną dokładnością rozwiązania.