

Asymilacja profilu wysokościowego

Jan Krawczyk 188793, 15.06.2023r.

Wstęp

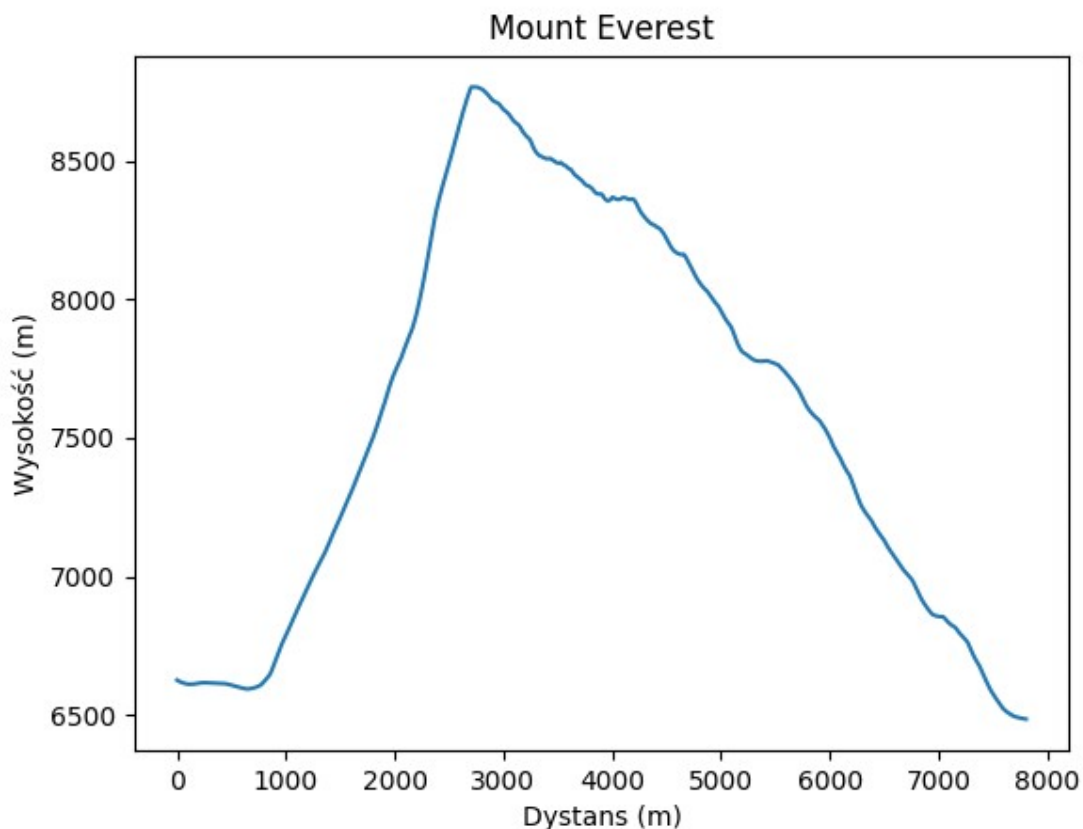
Celem projektu jest implementacja asymilacji profilu wysokościowego za pomocą dwóch metod:

- metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a,
- metody wykorzystującej funkcje sklepane trzeciego stopnia.

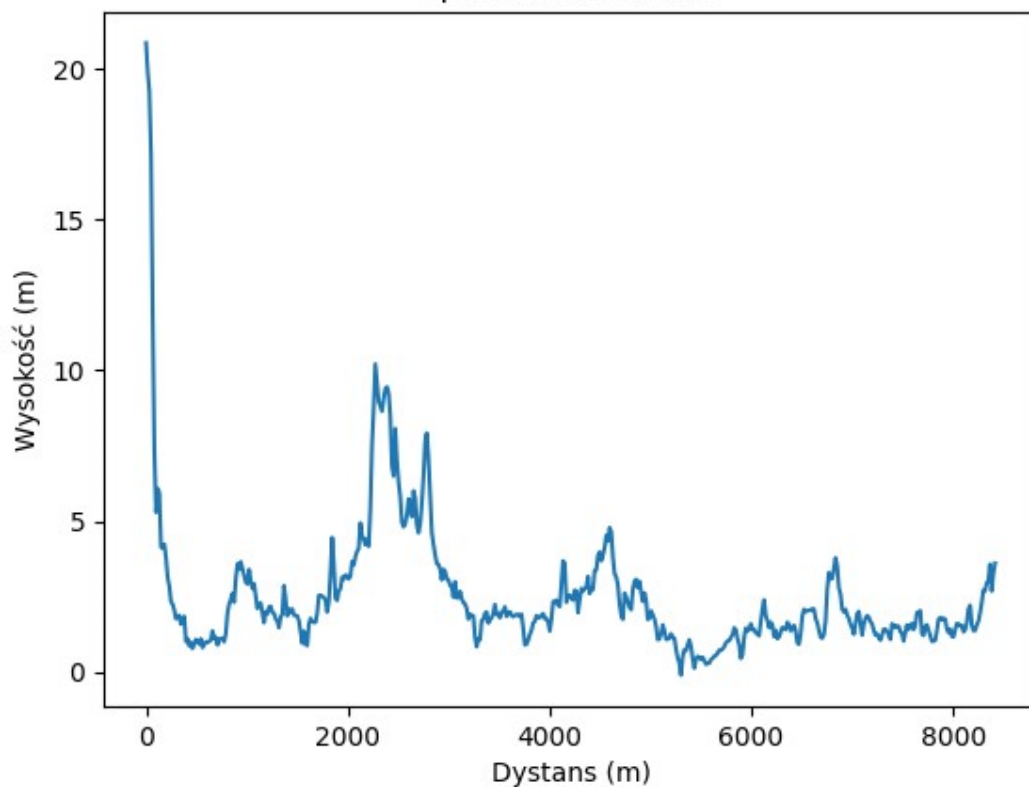
Obie metody zostaną przedstawione dla różnych ilości węzłów rozłożonych zarówno równomiernie, jak i nierównomiernie.

Wybór profili wysokościowych

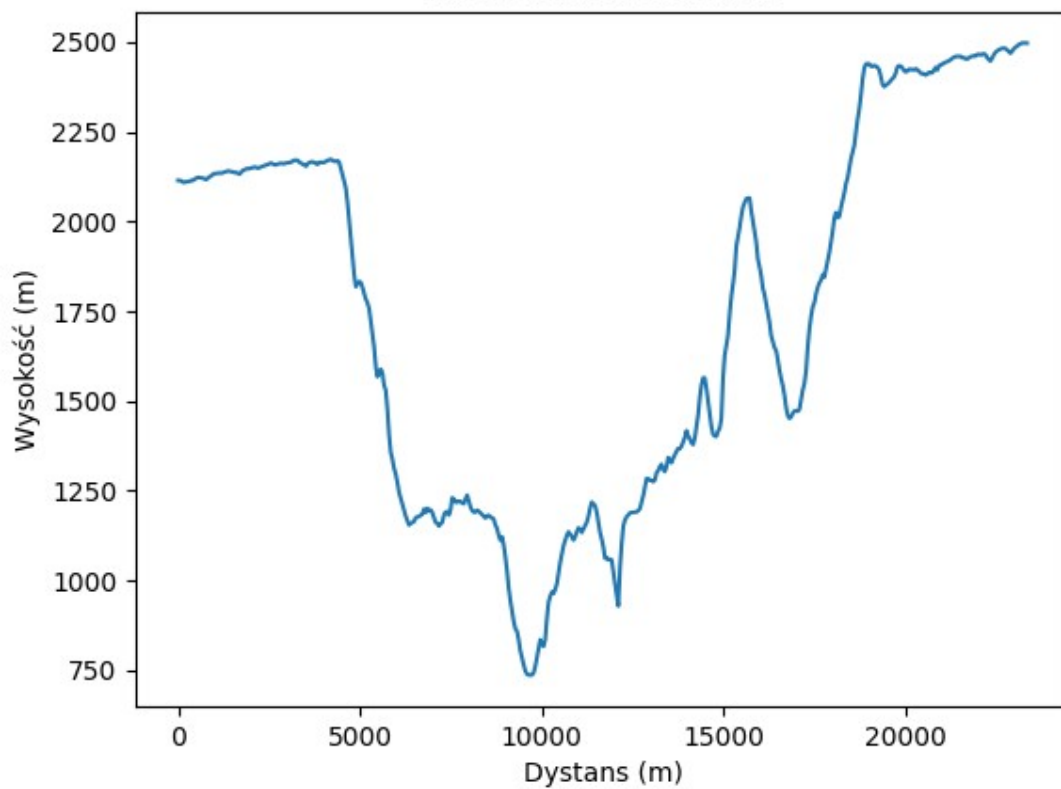
W celu demonstracji metod asymilacji przygotowałem trzy profile wysokościowe, przedstawiające różne rozkłady terenu:



Spacerniak Gdansk



Wielki Kanion Kolorado

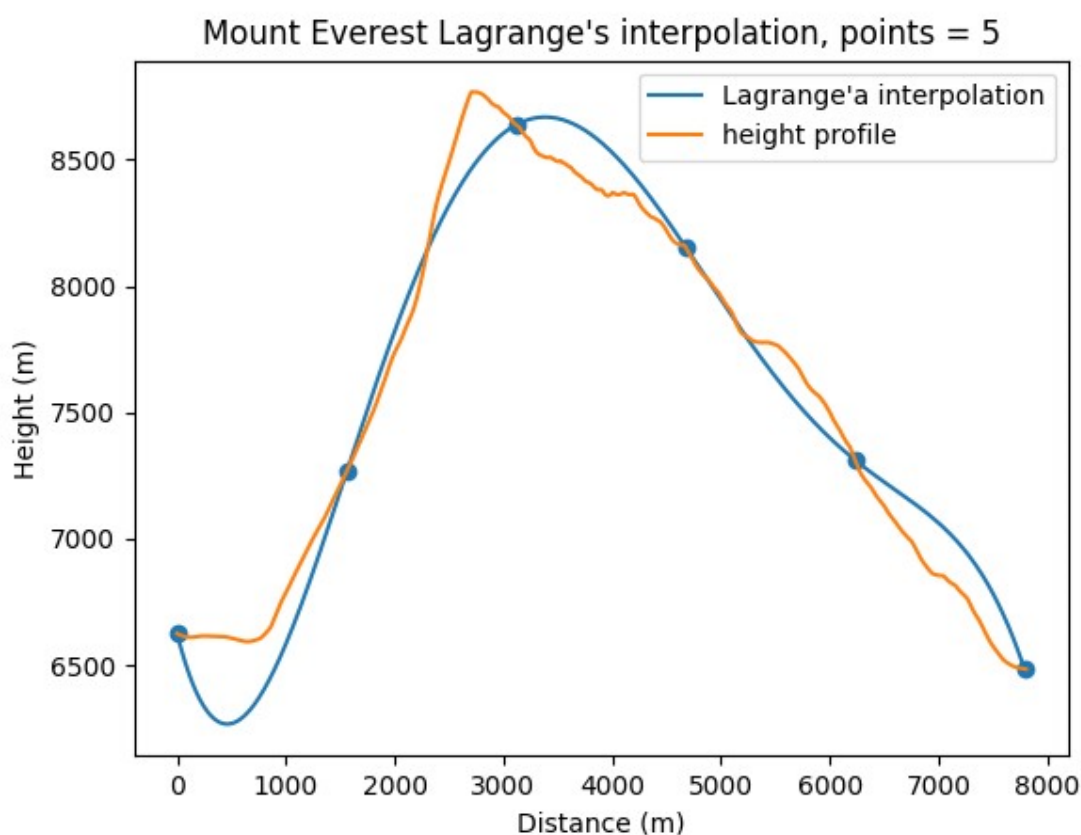


Profile te zostały przeze mnie wybrane ze względu na zróżnicowanie w terenie, który przedstawiają. Mount Everest przedstawia pojedynczą górę, więc teren drastycznie rośnie, a następnie drastycznie maleje. Spacerniak w Gdańsku przedstawia relatywnie małe zmiany wysokości. Wielki Kanion Kolorado przedstawia drastyczny spadek wysokości, następnie małe zmiany wysokości, żeby na końcu przedstawić drastyczny wzrost wysokości.

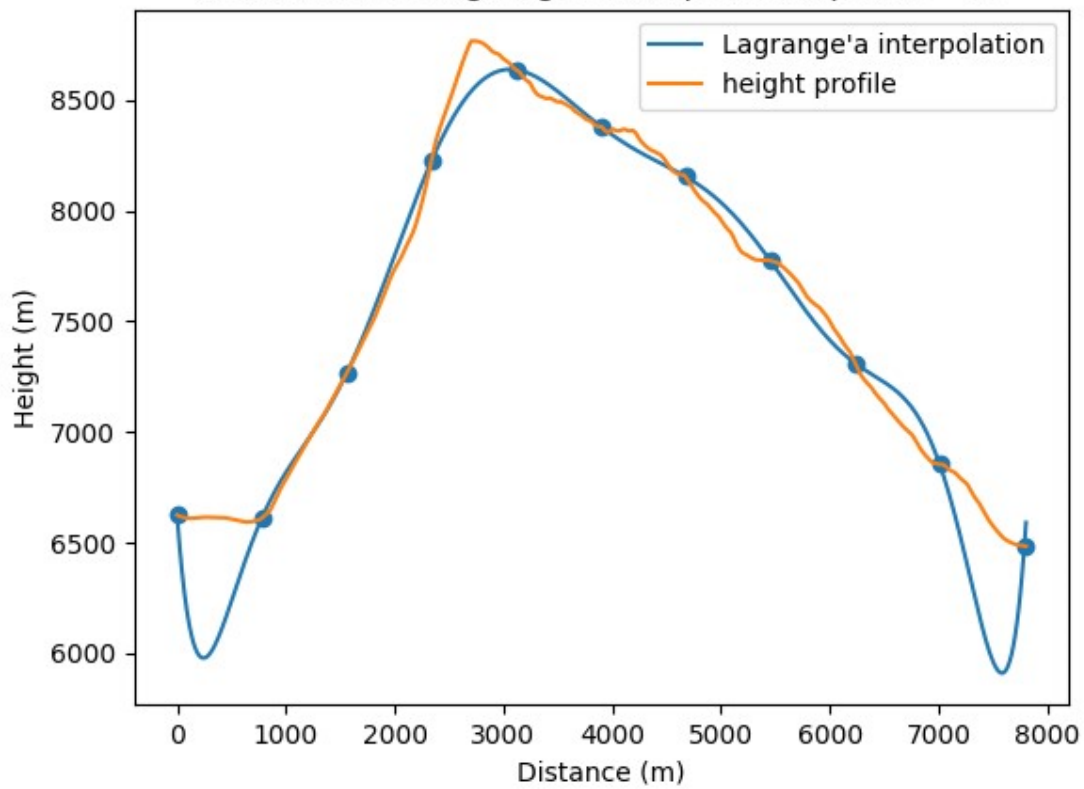
Metoda interpolacji Lagrange'a

Aproksymacja profilu wysokościowego za pomocą wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a jest techniką matematyczną stosowaną w analizie danych przestrzennych. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a jest wielomianem, który przechodzi przez zadane punkty danych i dostarcza estymację wysokości dla innych punktów znajdujących się pomiędzy tymi danymi. W ramach aproksymacji, wielomian ten jest skonstruowany w taki sposób, że przechodzi przez wszystkie punkty danych, minimalizując różnicę między wartościami interpolowanymi a rzeczywistymi. Dzięki temu można oszacować wysokość dla dowolnej lokalizacji na podstawie dostępnych pomiarów, co ma zastosowanie w różnych dziedzinach, takich jak geodezja, kartografia czy analiza terenów górzystych.

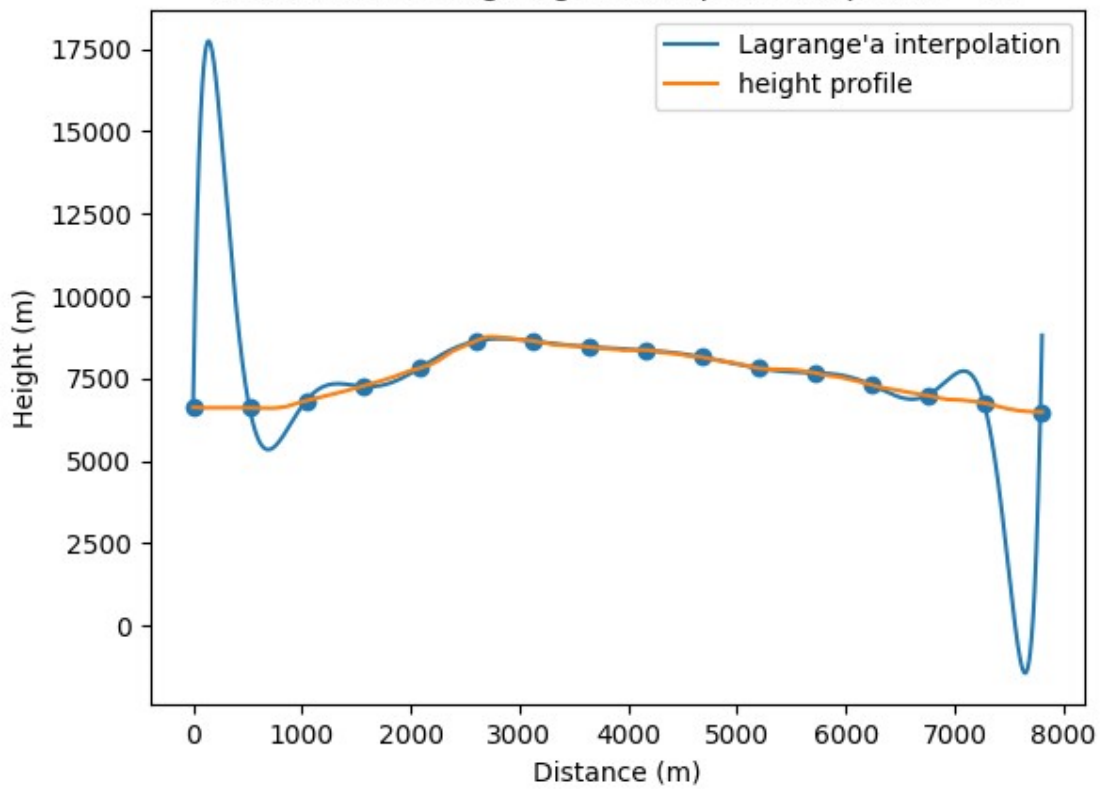
Poniżej przedstawiłem wszystkie trzy profile wysokościowe, każdy z nich z regularnie wybranymi odpowiednio 5, 10, 15 i 20 punktami, na podstawie których została wykonana interpolacja Lagrange'a.

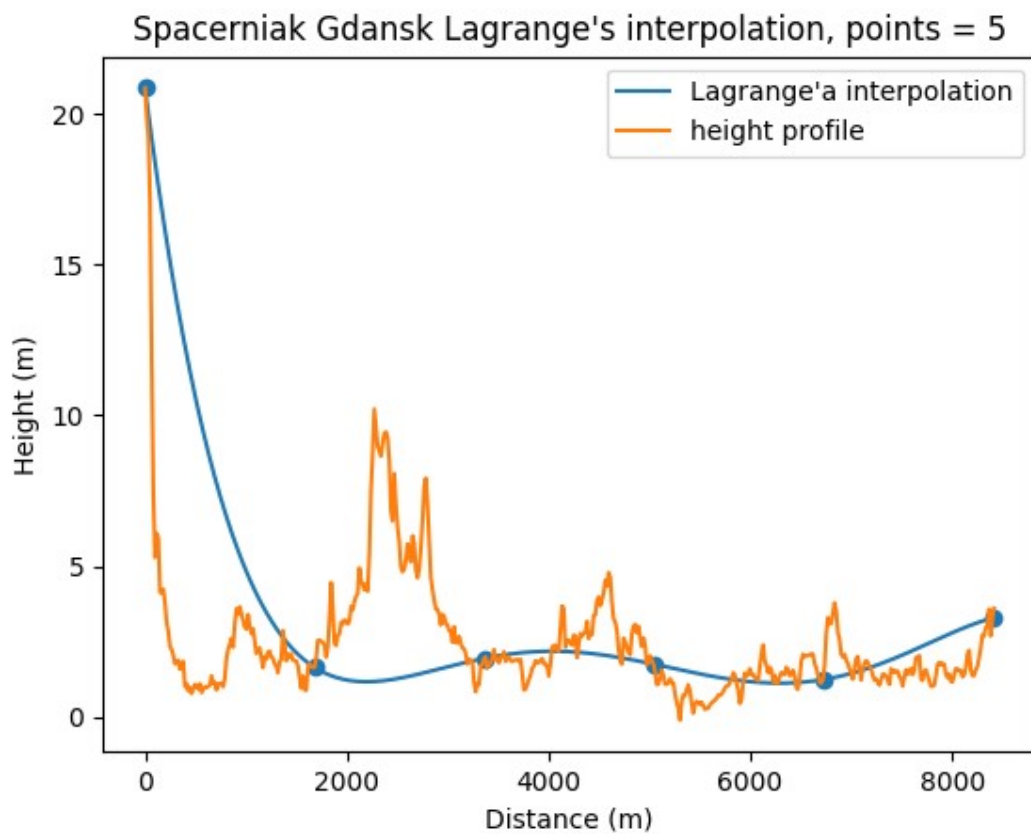
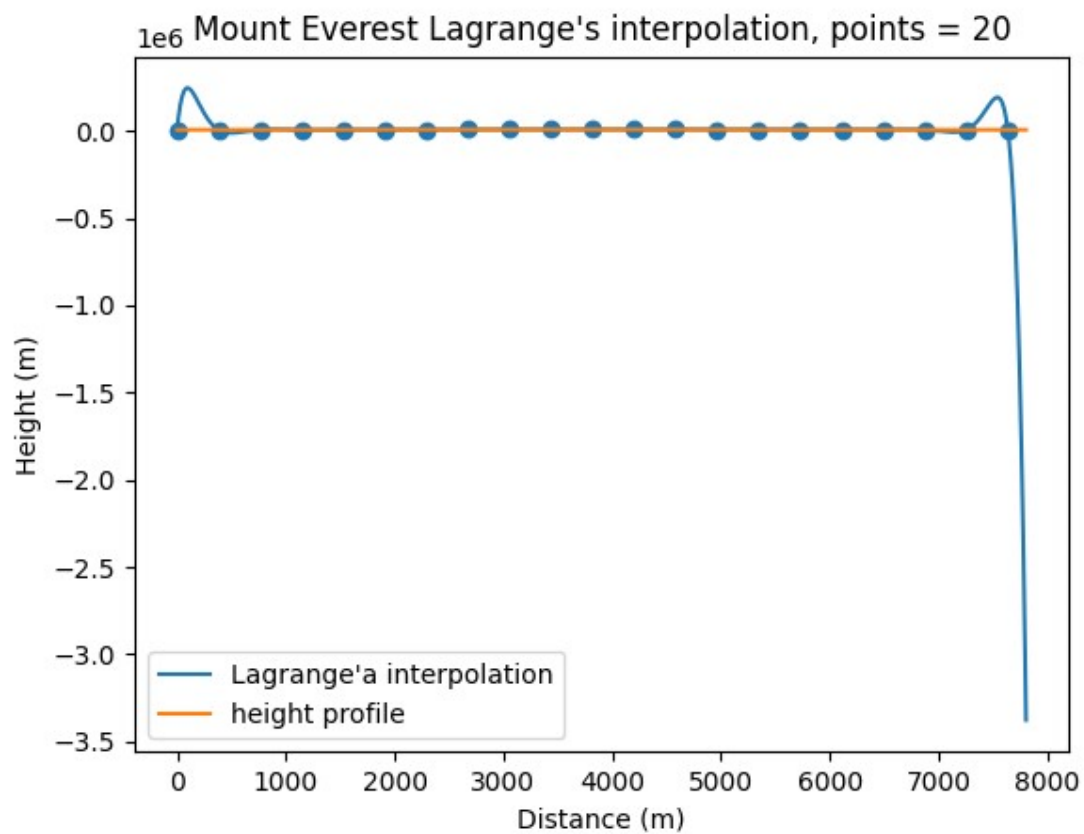


Mount Everest Lagrange's interpolation, points = 10

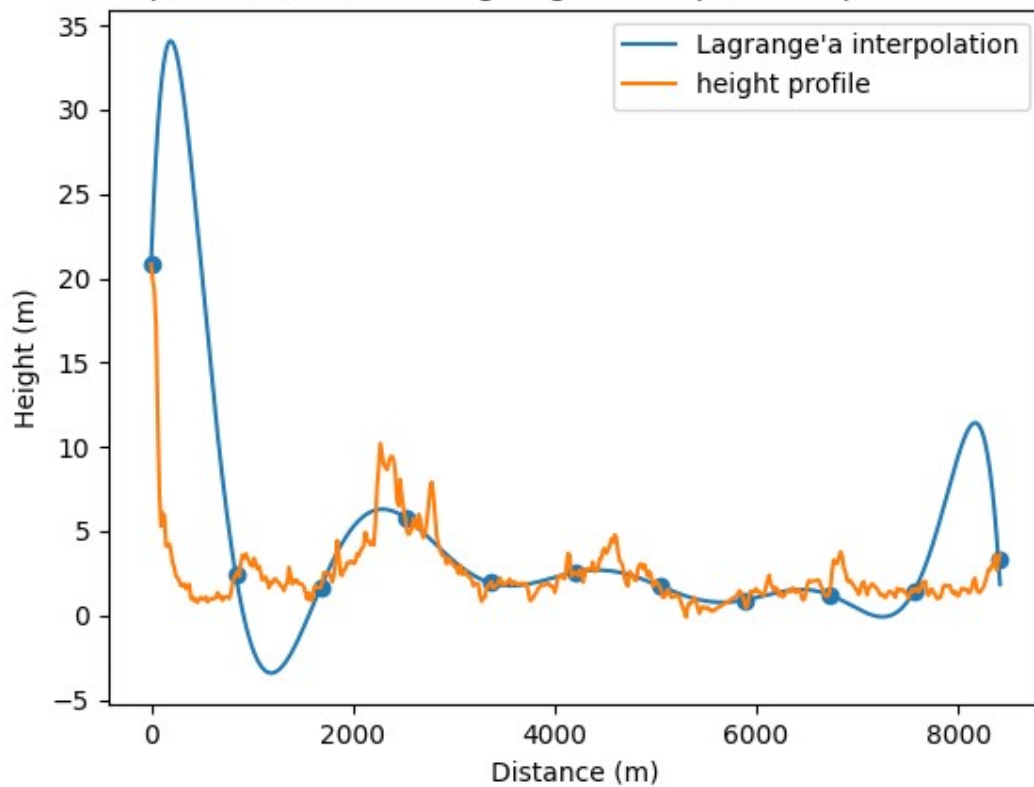


Mount Everest Lagrange's interpolation, points = 15

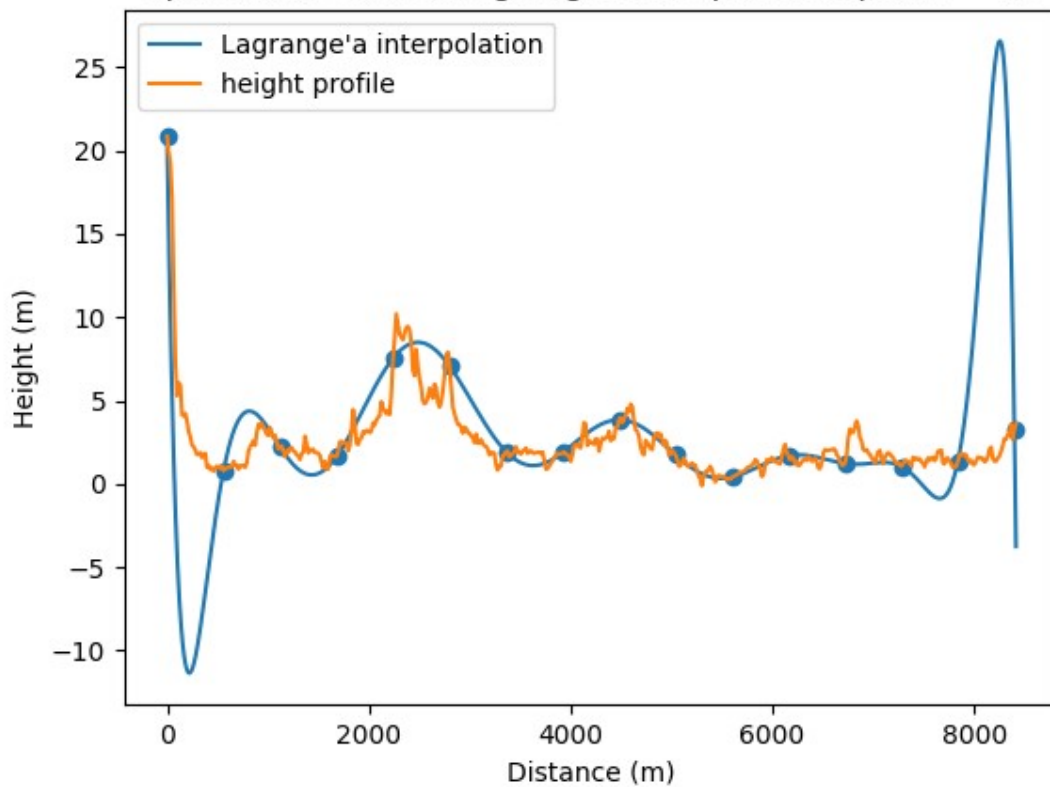




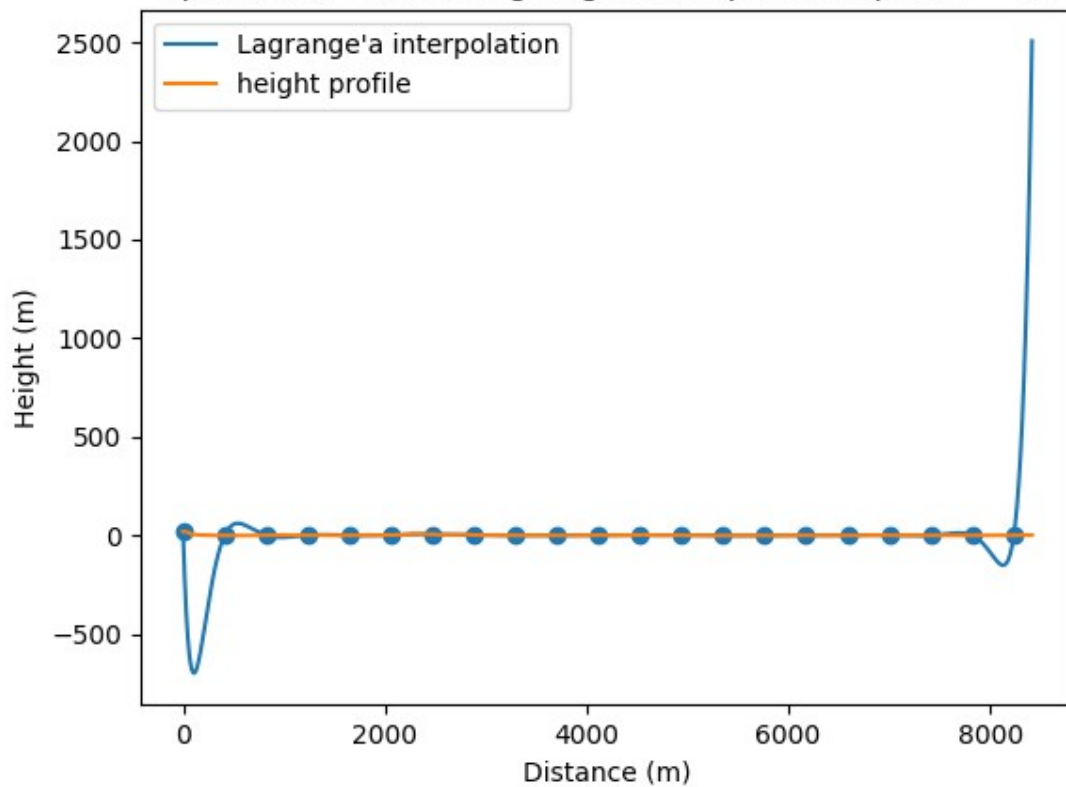
Spacerniak Gdansk Lagrange's interpolation, points = 10



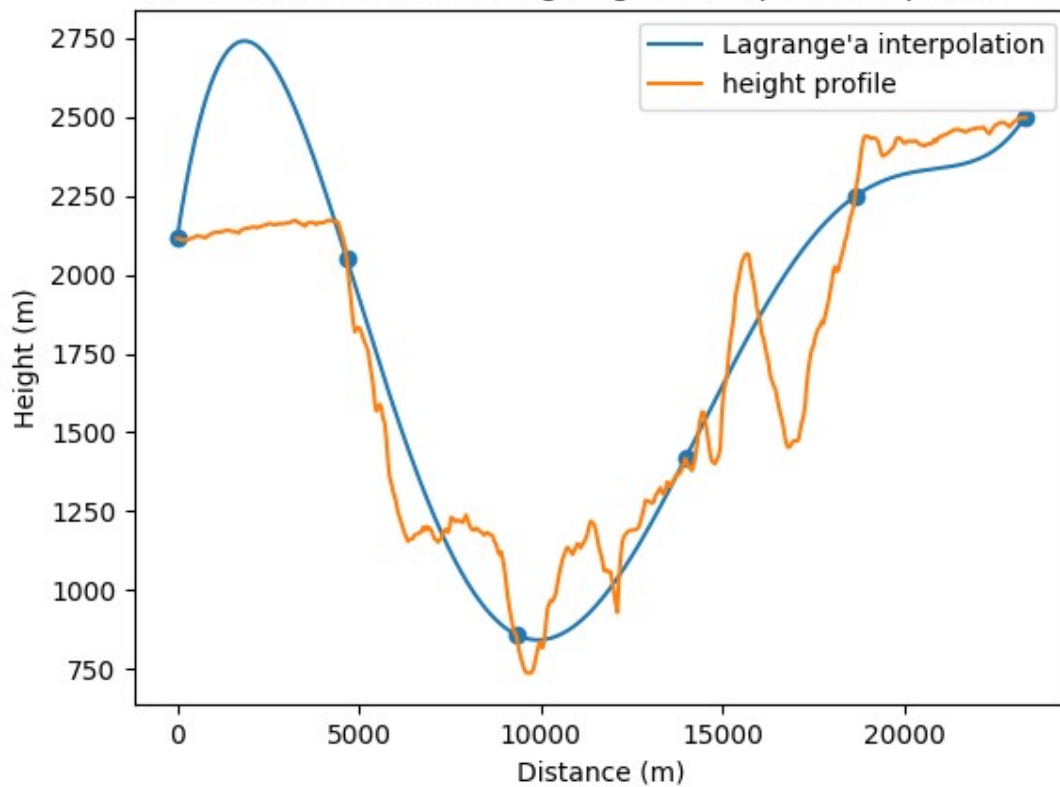
Spacerniak Gdansk Lagrange's interpolation, points = 15



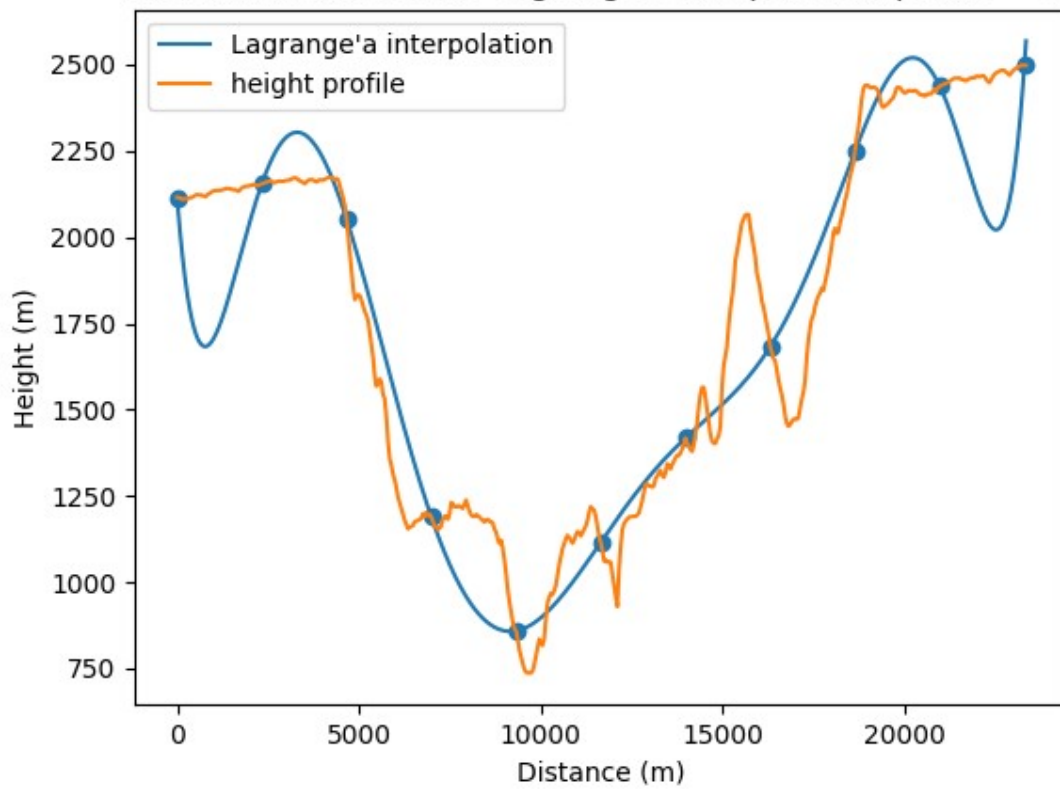
Spacerniak Gdansk Lagrange's interpolation, points = 20



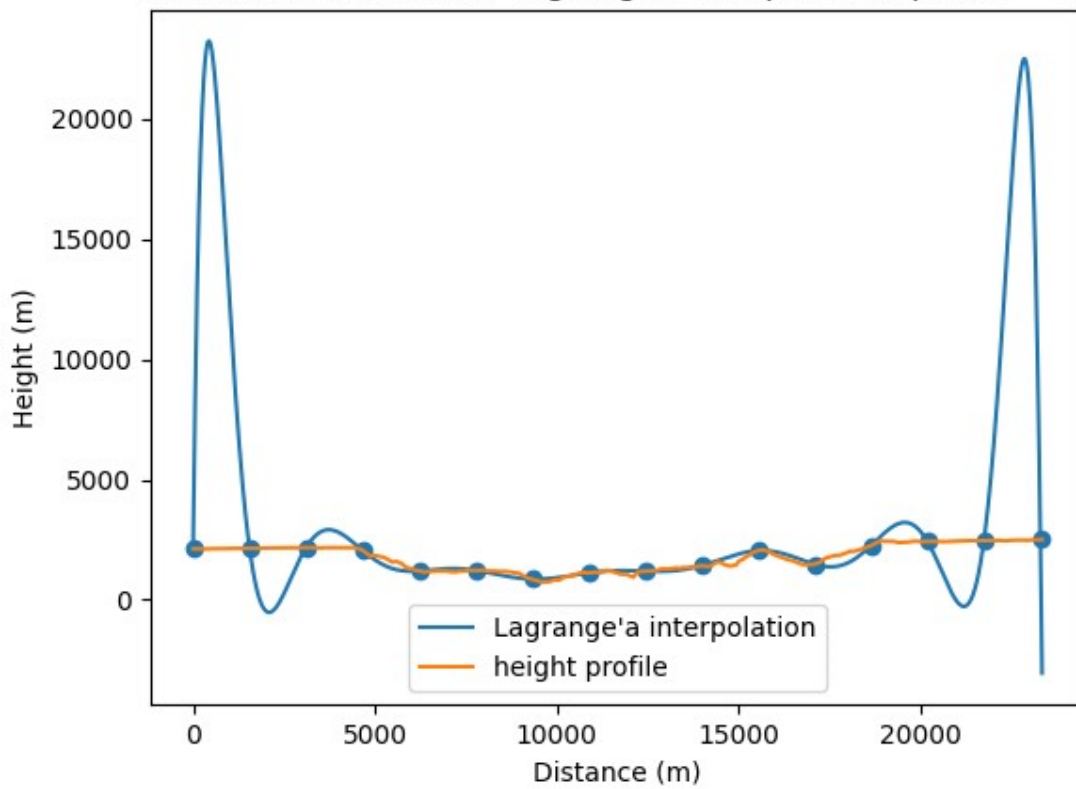
Wielki Kanion Kolorado Lagrange's interpolation, points = 5



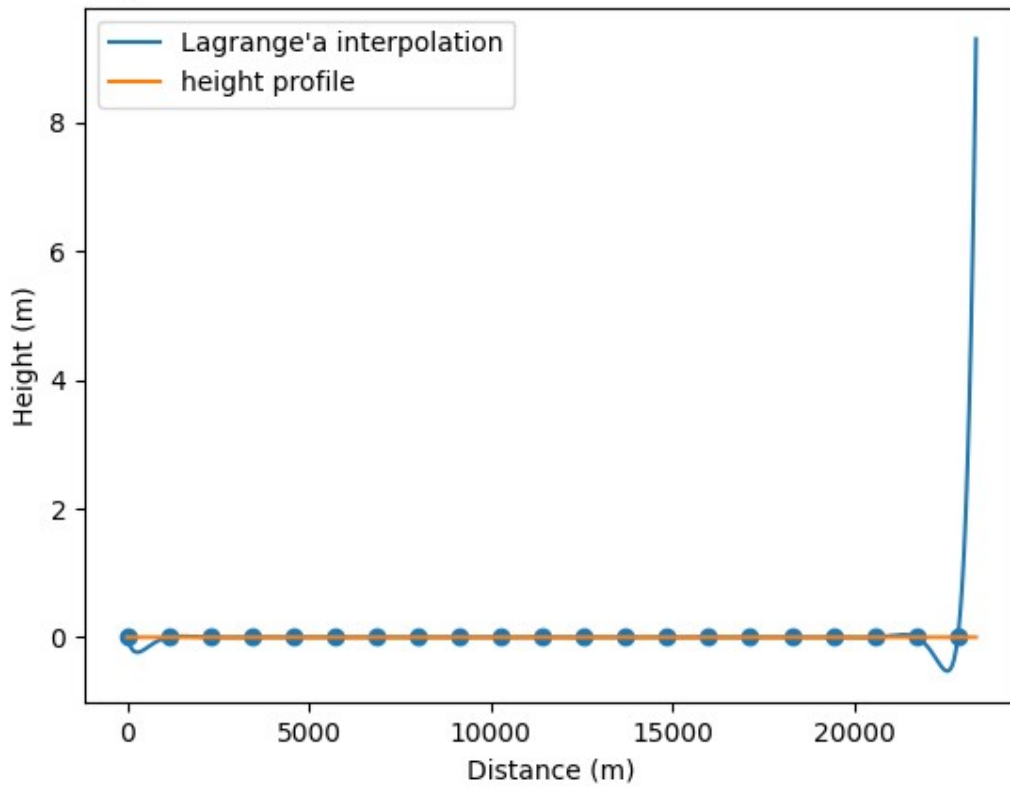
Wielki Kanion Kolorado Lagrange's interpolation, points = 10



Wielki Kanion Kolorado Lagrange's interpolation, points = 15

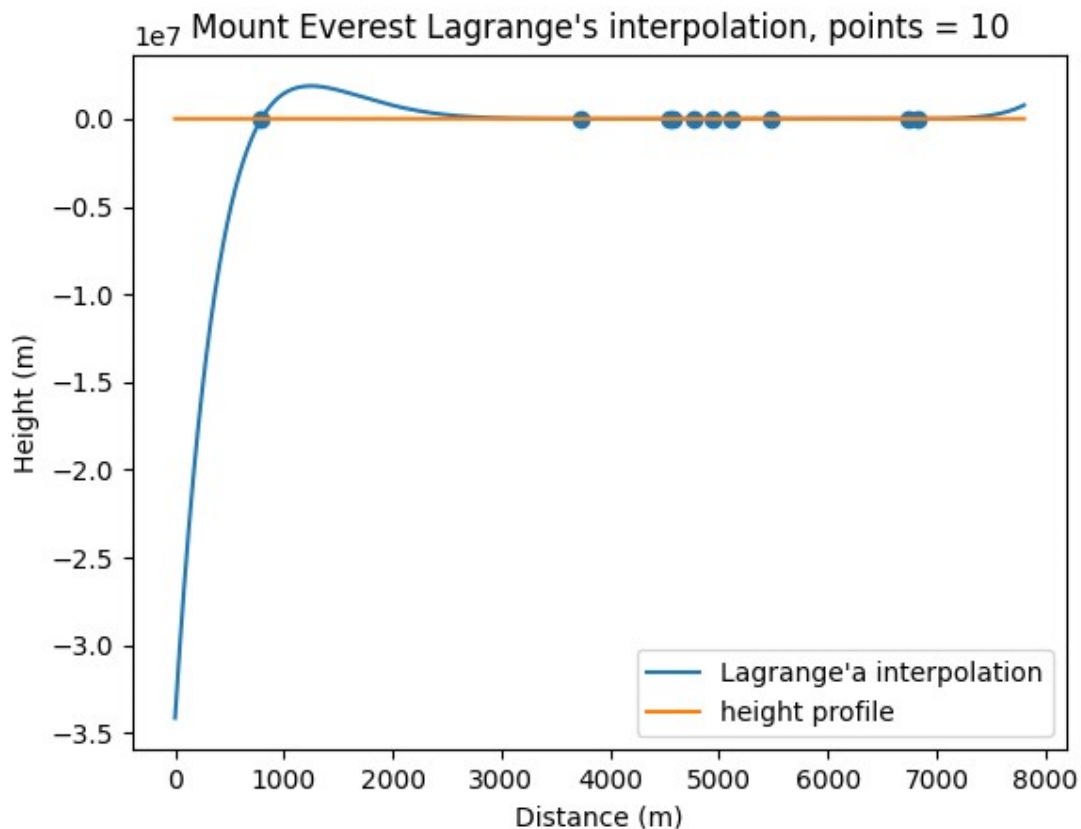


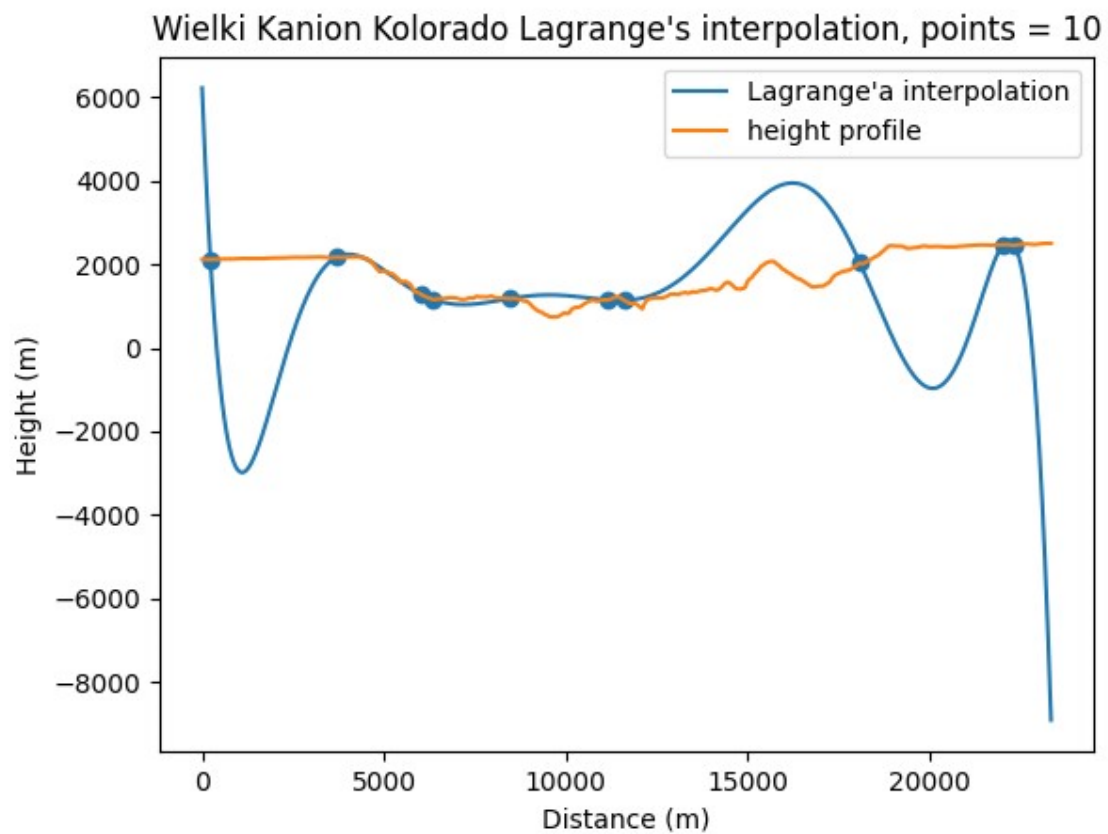
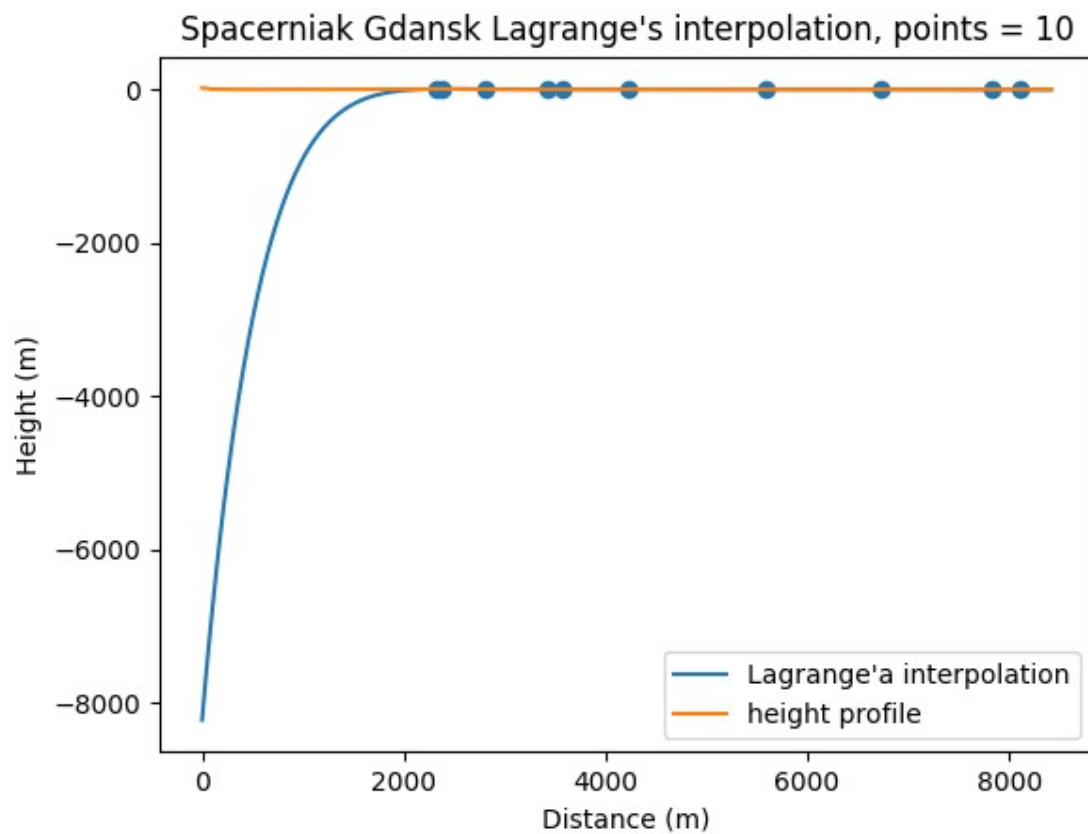
Wielki Kanion Kolorado Lagrange's interpolation, points = 20
1e6



Metoda wykorzystująca interpolację Lagrange'a jest metodą o niskiej złożoności obliczeniowej, a przez to o wysokiej prędkości wykonywania. Jedną z tego powodu często występującym problemem jest występowanie efektu Rungego, który przekłamuje dane na krańcach przedziałów. Z mojego badania wynika, że najlepsze efekty osiągane są dla 10 rozłożonych równomiernie punktów. Dla niższych wartości dokładność nie jest satysfakcjonująca, a dla wyższych wartości pojawia się efekt Rungego, który zwiększa się proporcjonalnie do liczby punktów.

Poniżej przedstawiam podobne wykresy, jednak tym razem z nieregularnymi odstępami między węzłami:





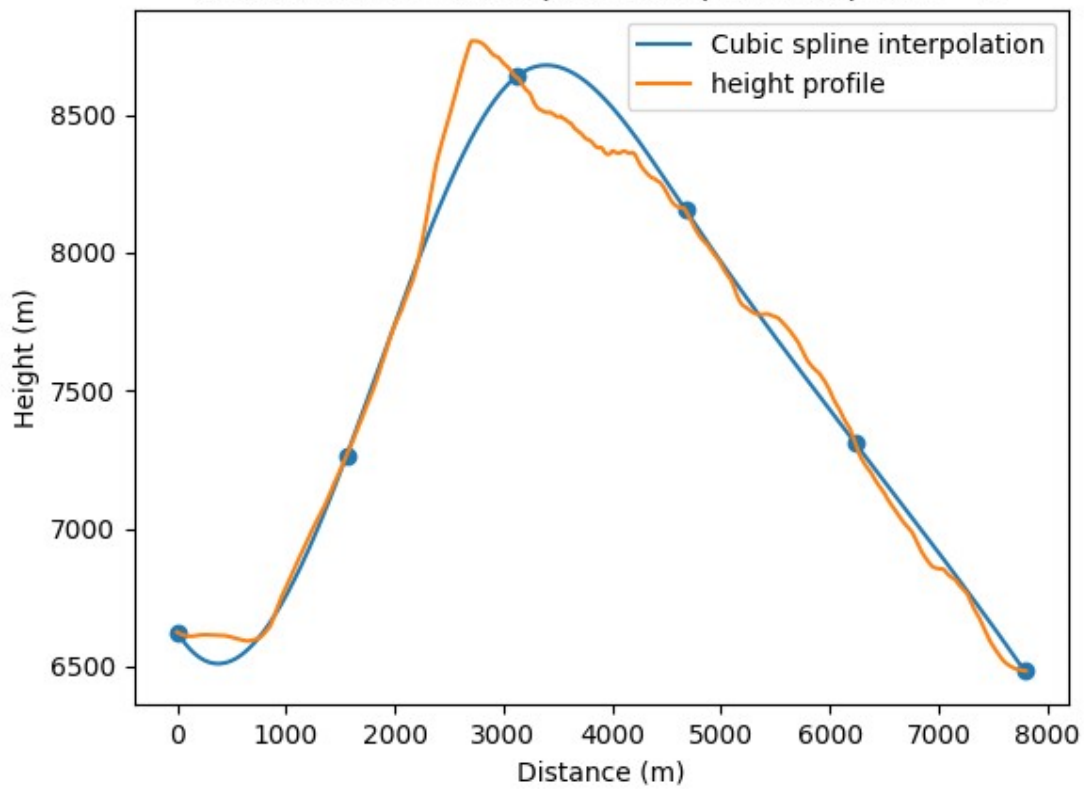
W przypadku nieregularnego rozłożenia węzłów wyniki znacznie odbiegają pod względem jakości, od regularnego rozłożenia, z tego powodu odradzam korzystania z tej metody.

Interpolacja funkcjami sklejanymi

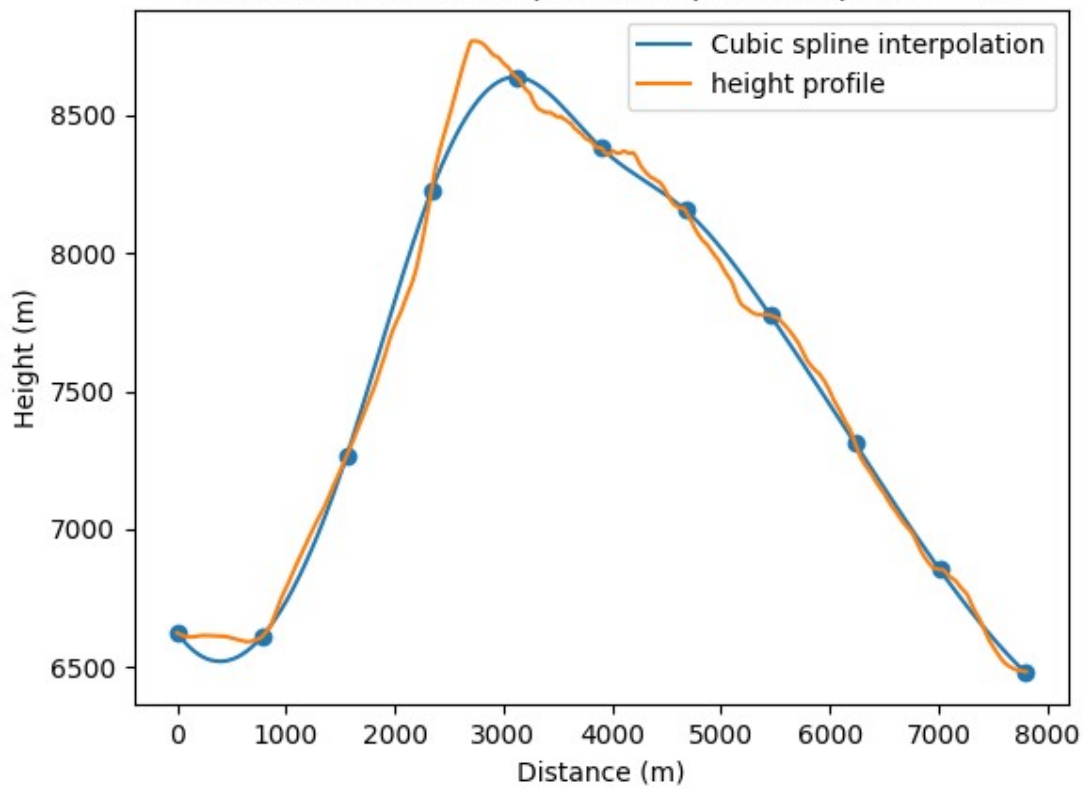
Aproksymacja profilu wysokościowego przy użyciu funkcji sklejanых trzeciego stopnia to metoda matematyczna stosowana w analizie danych przestrzennych. Funkcje sklepane trzeciego stopnia są gładkimi krzywymi interpolującymi zadane punkty danych i umożliwiające płynne przejście między nimi. W ramach aproksymacji, funkcje te są konstruowane w taki sposób, że przechodzą przez wszystkie punkty danych oraz zachowują ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej na granicach przedziałów między punktami. Dzięki temu, aproksymacja przy użyciu funkcji sklejanых trzeciego stopnia pozwala na oszacowanie wysokości dla dowolnej lokalizacji z dokładnością i płynnością, co znajduje zastosowanie w dziedzinach takich jak geodezja, inżynieria lądowa czy modelowanie terenów.

Poniżej przedstawiłem wszystkie trzy profile wysokościowe, każdy z nich z regularnie wybranymi odpowiednio 5, 10, 15 i 20 punktami, na podstawie których została wykonana interpolacja z wykorzystaniem funkcji sklejanых trzeciego stopnia.

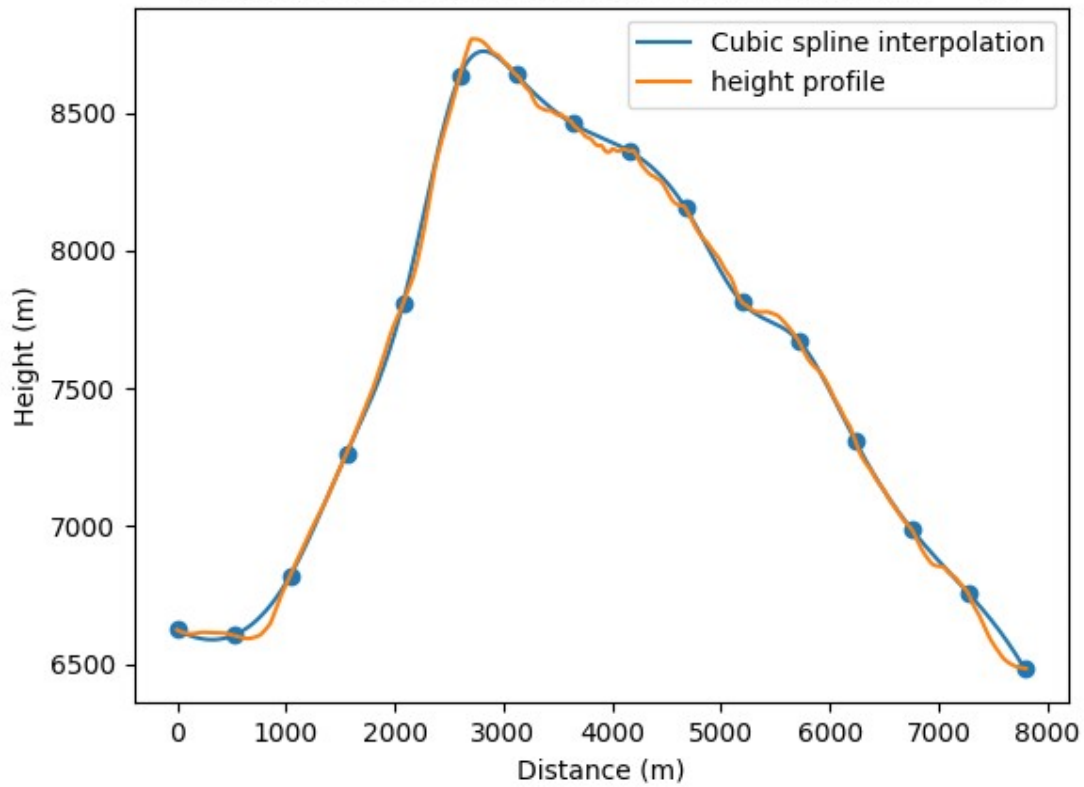
Mount Everest Cubic spline interpolation, points = 5



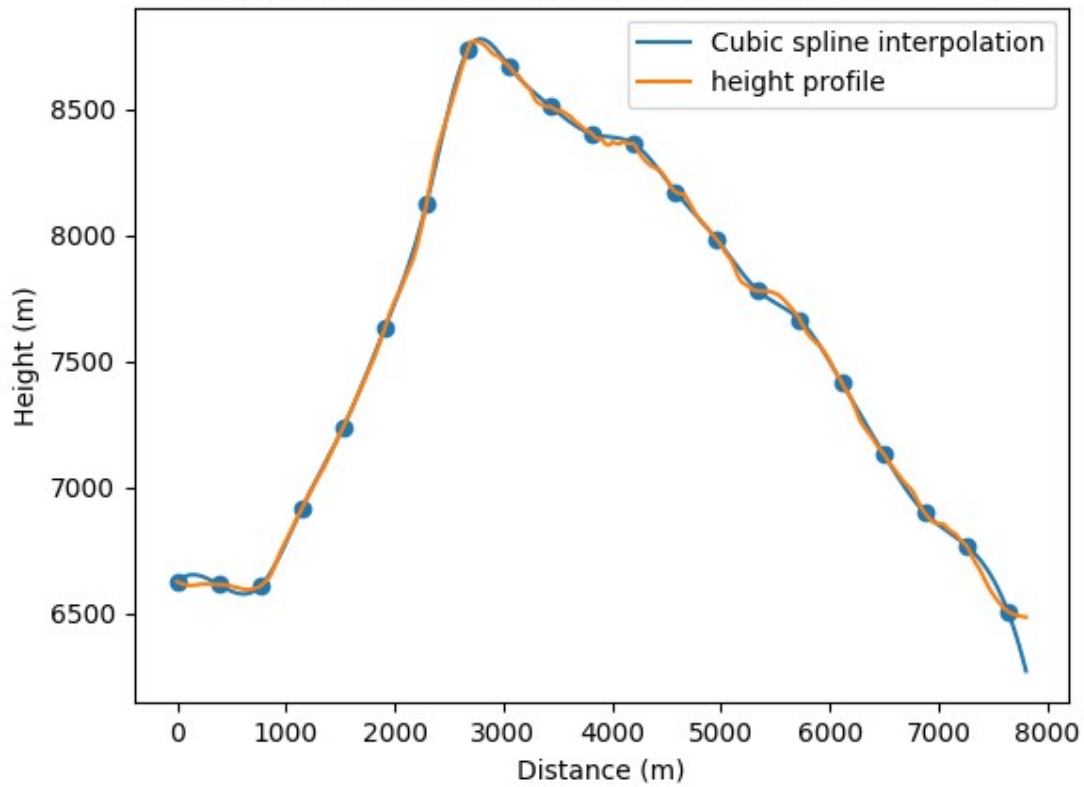
Mount Everest Cubic spline interpolation, points = 10



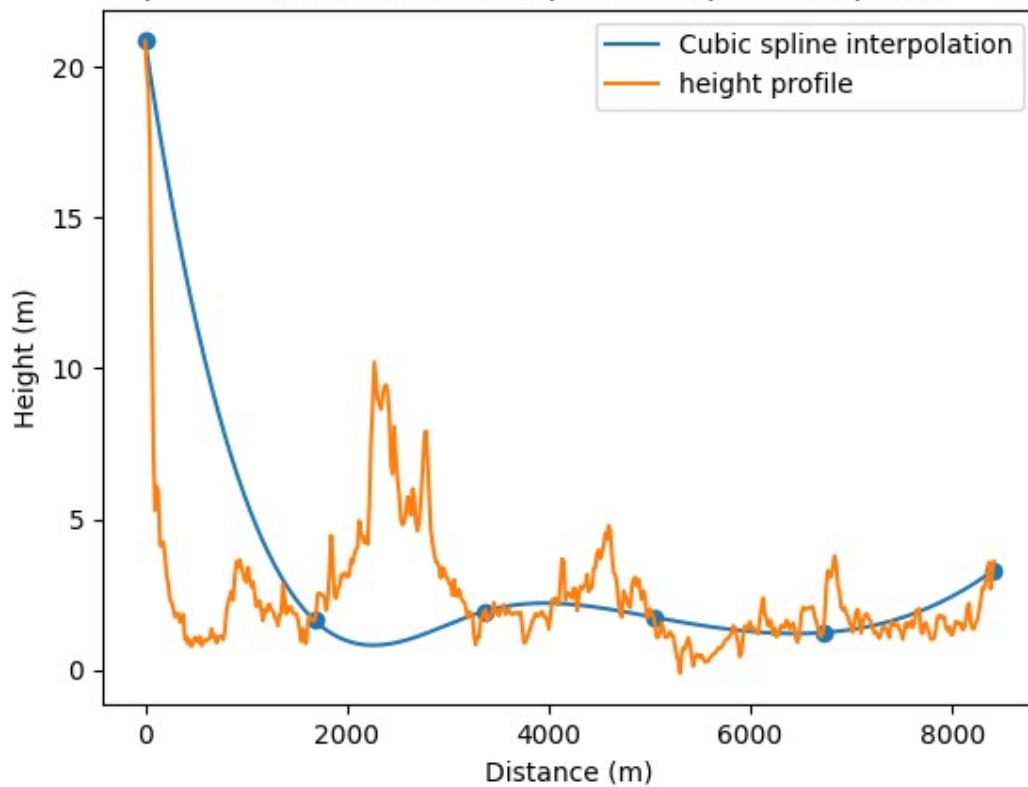
Mount Everest Cubic spline interpolation, points = 15



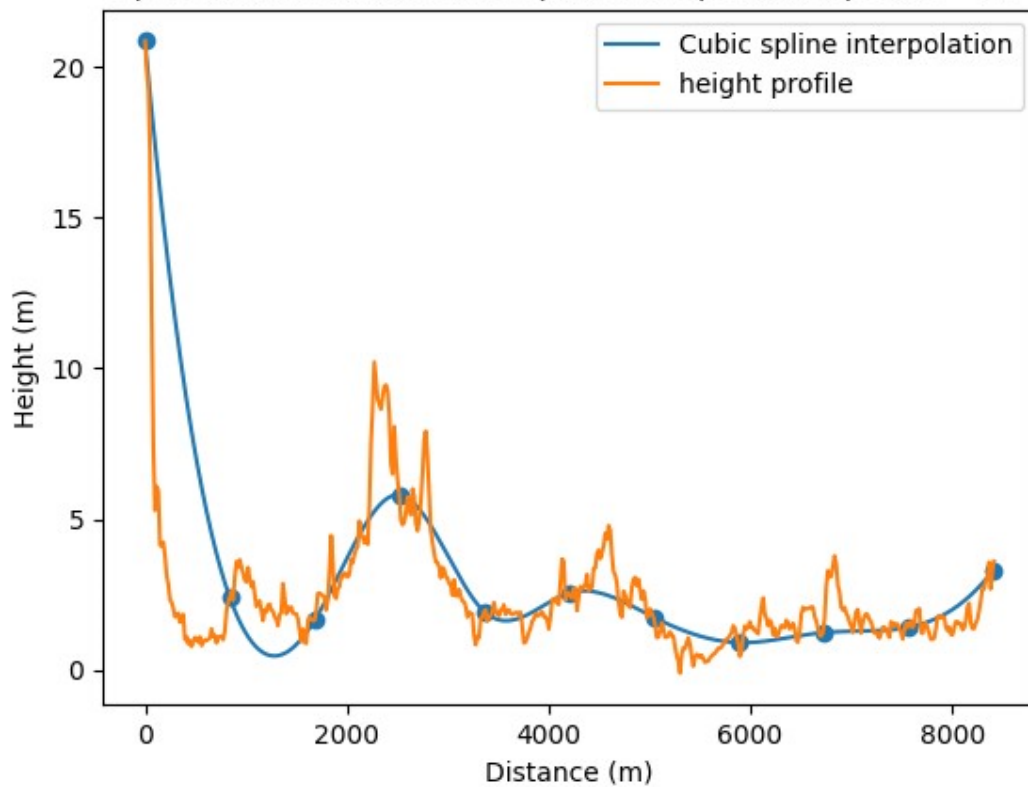
Mount Everest Cubic spline interpolation, points = 20



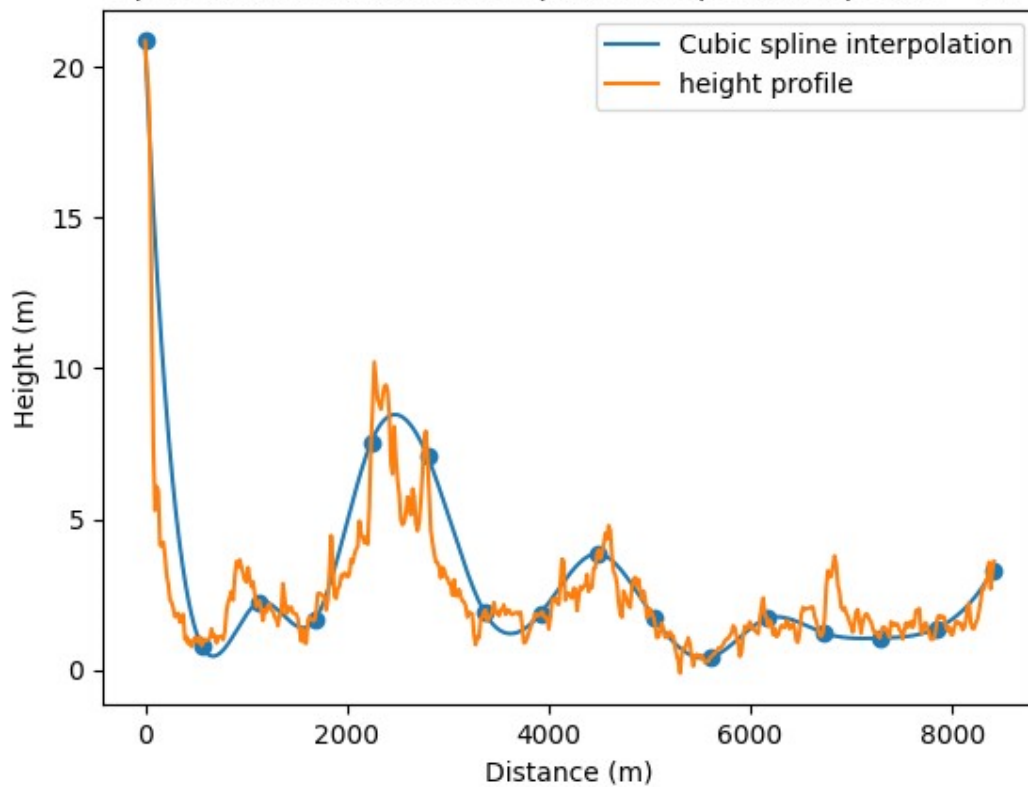
Spacerniak Gdansk Cubic spline interpolation, points = 5



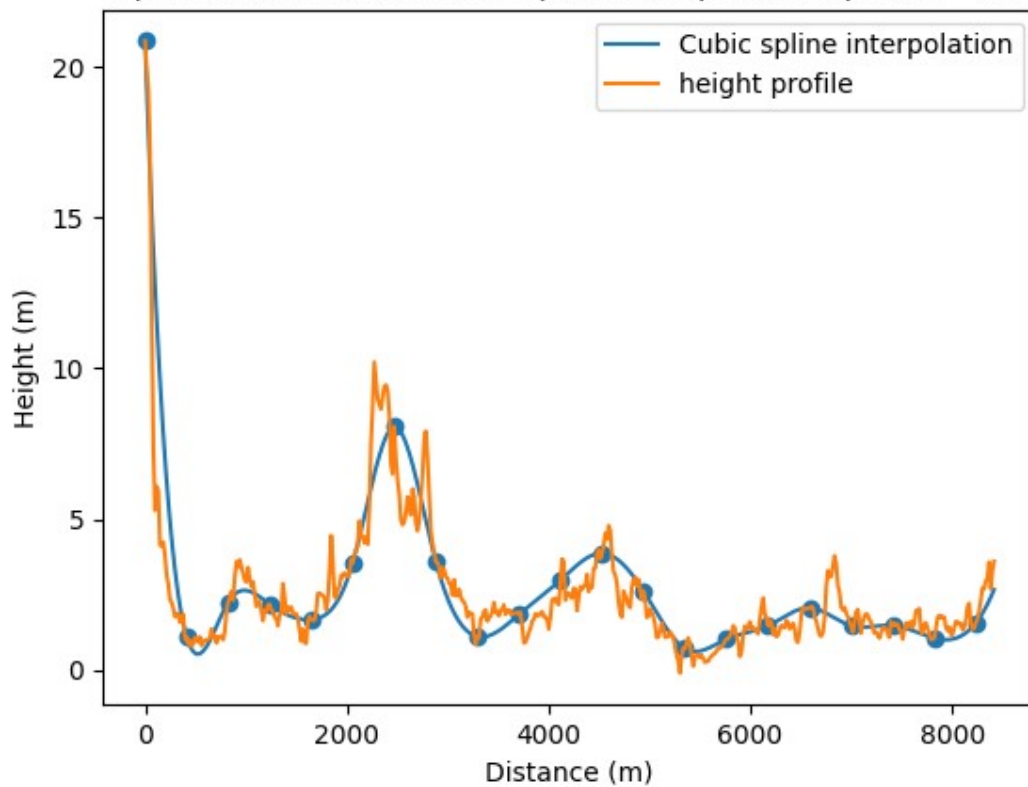
Spacerniak Gdansk Cubic spline interpolation, points = 10



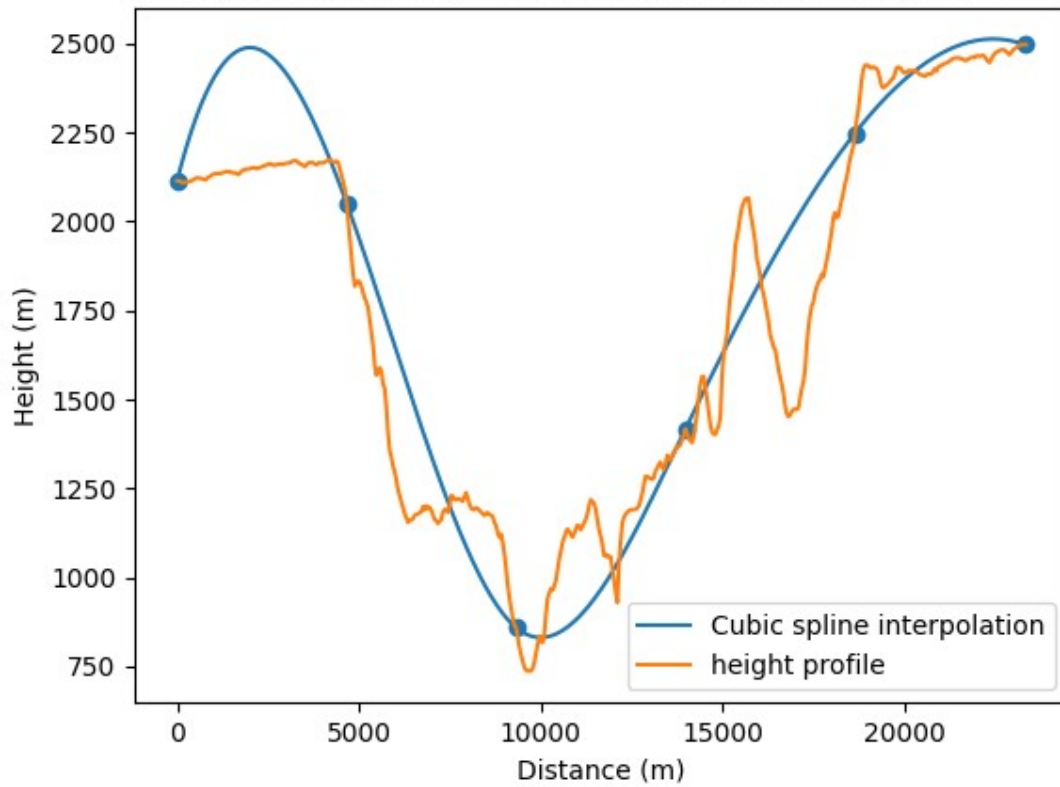
Spacerniak Gdansk Cubic spline interpolation, points = 15



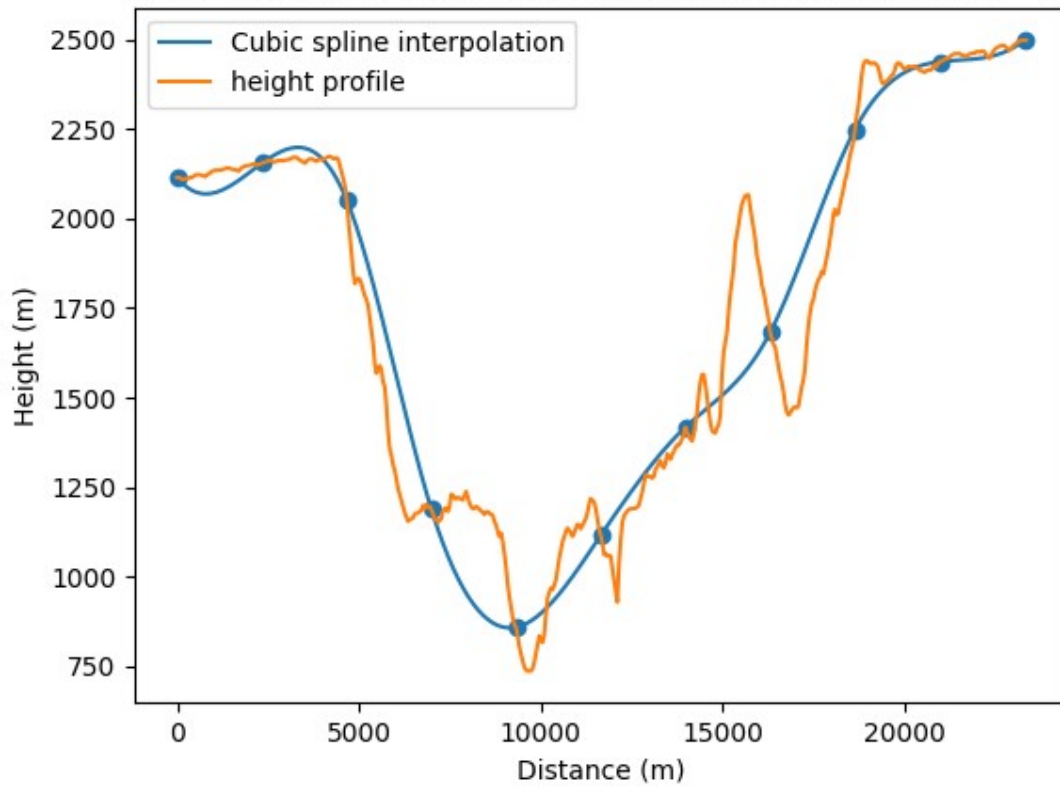
Spacerniak Gdansk Cubic spline interpolation, points = 20



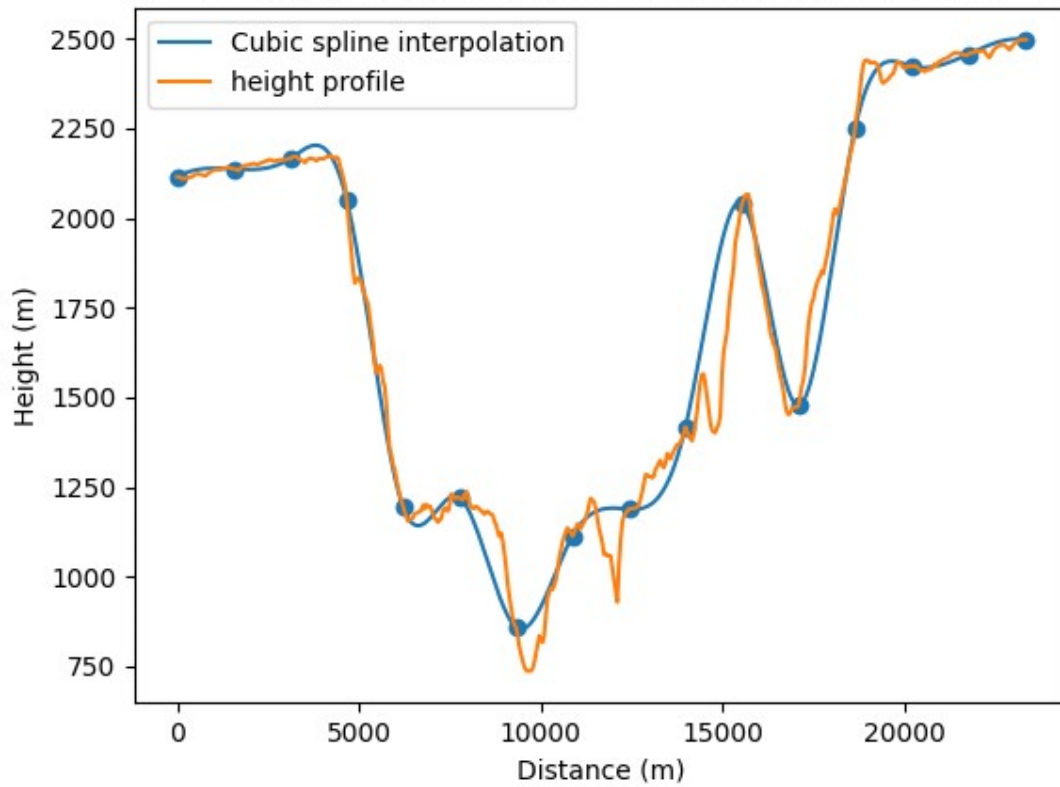
Wielki Kanion Kolorado Cubic spline interpolation, points = 5



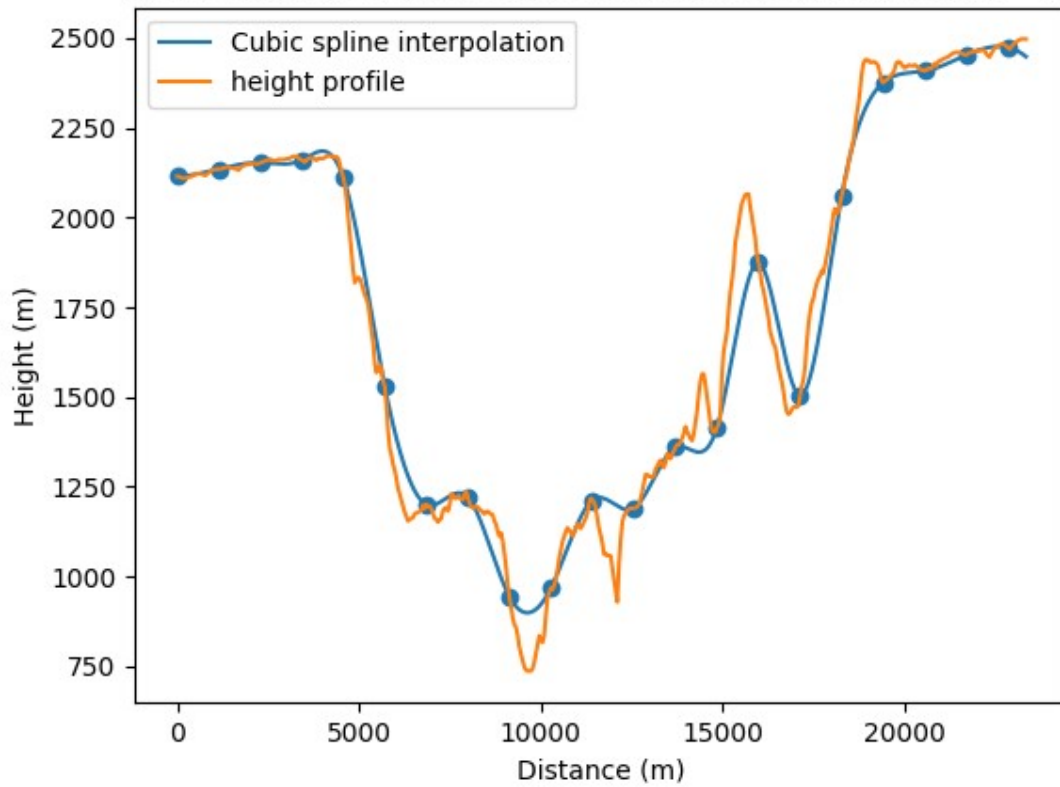
Wielki Kanion Kolorado Cubic spline interpolation, points = 10



Wielki Kanion Kolorado Cubic spline interpolation, points = 15

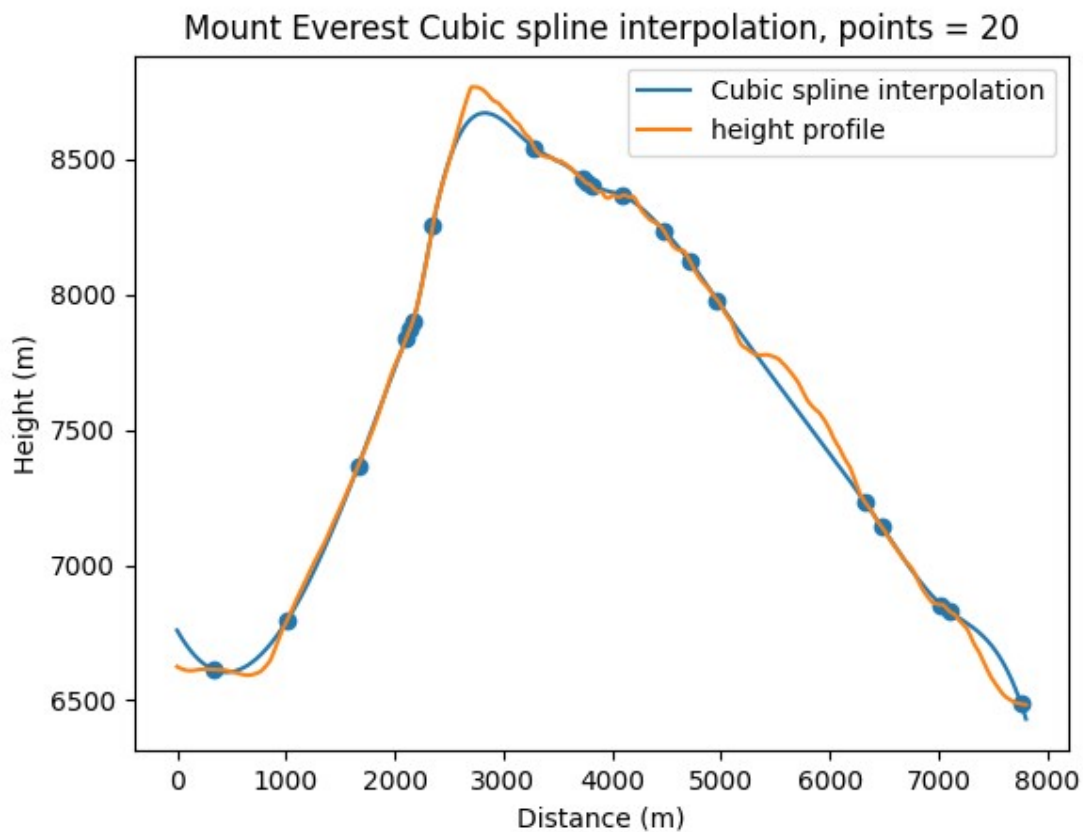


Wielki Kanion Kolorado Cubic spline interpolation, points = 20

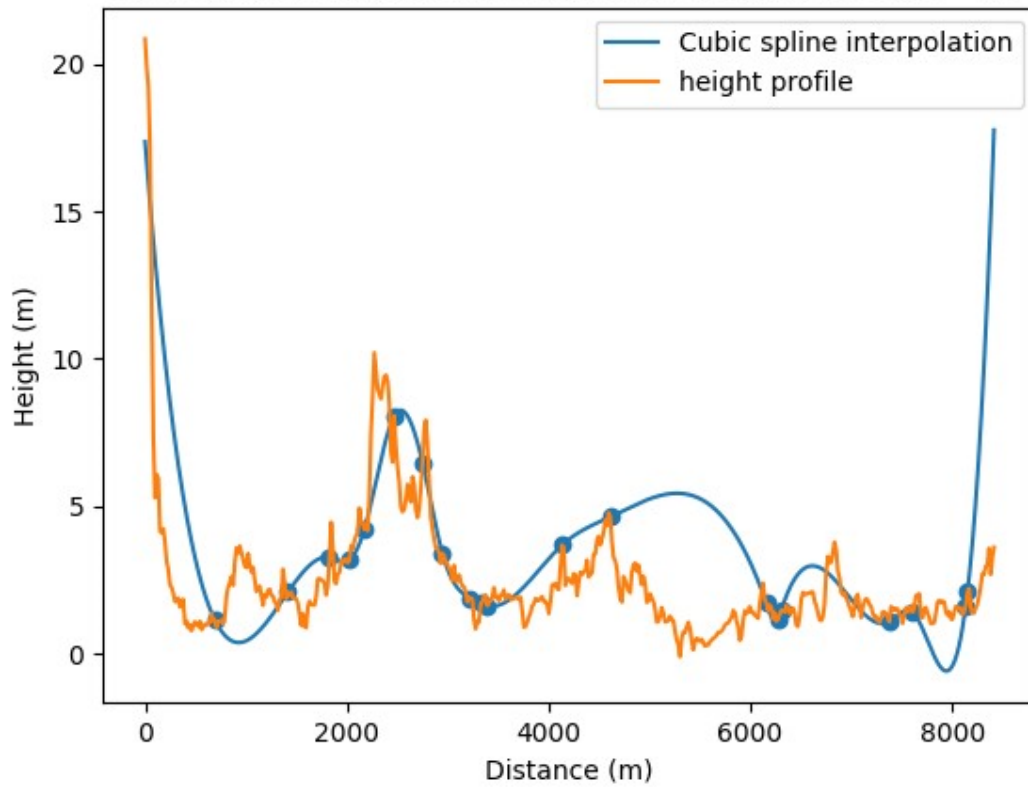


Metoda wykorzystująca aproksymacje z wykorzystaniem metod sklejanych trzeciego stopnia charakteryzuje się dużą złożonością obliczeniową, szczególnie ze względu na wykorzystanie faktoryzacji LU podczas obliczania równań liniowych. Jednak z tego powodu uzyskujemy wysoką dokładność, która rośnie wraz ze wzrostem węzłów. W tym nie występuje efekt Rungego.

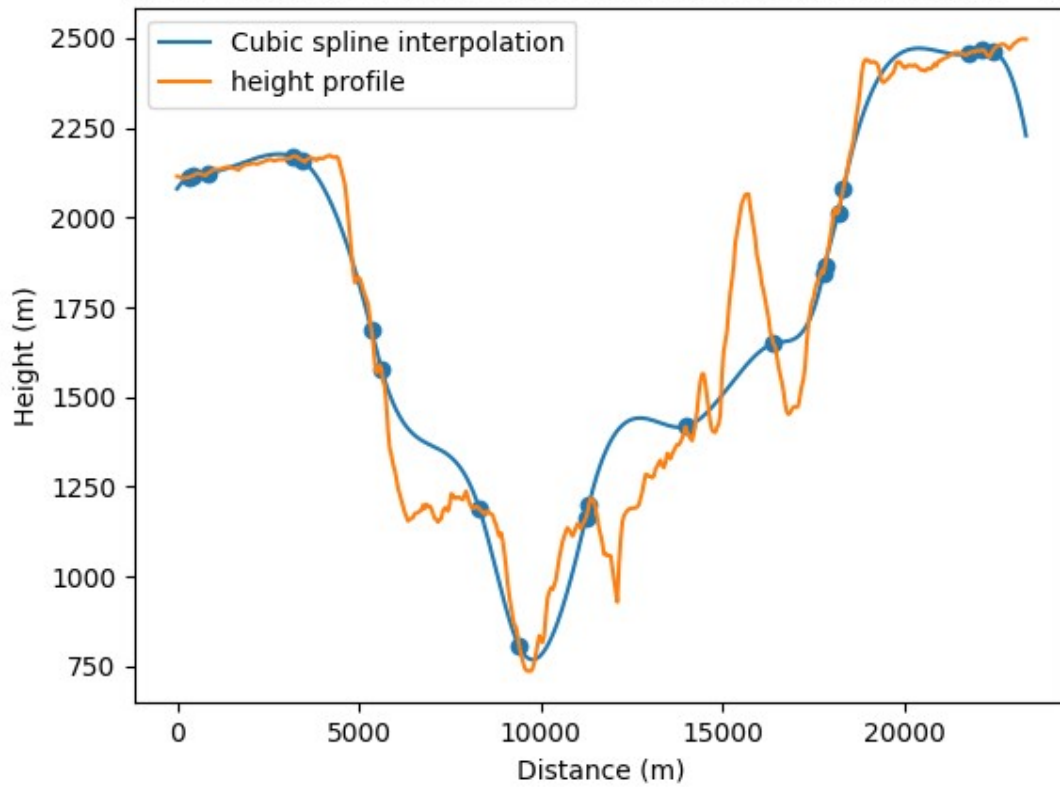
Poniżej przedstawiam podobne wykresy, jednak tym razem z nieregularnymi odstępami między węzłami:



Spacerniak Gdansk Cubic spline interpolation, points = 20



Wielki Kanion Kolorado Cubic spline interpolation, points = 20



W przypadku nieregularnego rozłożenia węzłów wyniki znacznie odbiegają pod względem jakości, od regularnego rozłożenia, z tego powodu odradzam korzystania z tej metody.

Podsumowanie

Podsumowując, każda metoda ma swoje wady i zalety, w zależności od efektu, który chcemy uzyskać. Metoda wykorzystująca interpolację Lagrange'a jest bardzo szybka, jednak niedokładna, podczas gdy metoda interpolacji wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia pomimo wyższej złożoności obliczeniowej osiąga znacznie dokładniejsze wyniki. Dodatkowo przy funkcjach sklepanych nie występuje efekt Rungego, którego obecność jest głównym problemem interpolacji Lagrange'a.

Doszedłem również do wniosku, że najlepszym rozwiązaniem jest korzystanie z regularnego rozłożenia punktów ze względu na większą precyzję i stałą jakość wyników.