Układy równań liniowych

Jan Krawczyk 188793 11.05.2023r.

Wstęp

Celem niniejszego projektu jest implementacja oraz porównanie trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych. Brane pod lupę metody to: metoda Jacobiego, metoda Gauss-Seidlera oraz metoda faktoryzacji LU. W dalszej części opracowania omówię poszczególne metody oraz porównam ich prędkości działania.

Metody Jacobiego i Gaussa-Seidela

Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest jedną z podstawowych metod iteracyjnych rozwiązywania układów równań liniowych. Polega ona na rozłożeniu macierzy współczynników układu na sumę dwóch macierzy: diagonalnej i pozostałych elementów. Następnie iteracyjnie wyznaczana jest kolejna wartość wektora rozwiązań poprzez podstawianie aktualnych wartości z poprzedniej iteracji do równań, które tworzą układ. Metoda kończy się, gdy norma różnicy między kolejnymi wektorami rozwiązań jest mniejsza od zadanej dokładności lub osiągnięto maksymalną liczbę iteracji. Metoda ta jest prostsza niż inne metody iteracyjne, jednak może być wolniejsza w zbieżności.

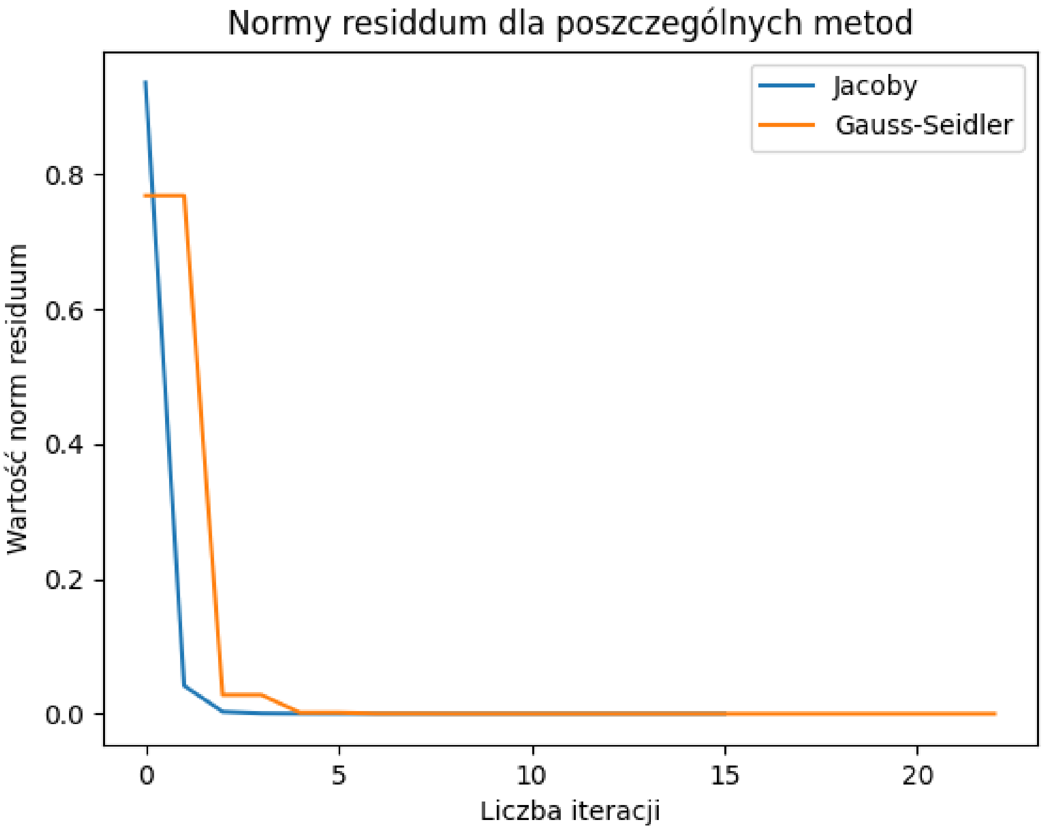
Metoda Gaussa-Seidela

Metoda Gaussa-Seidela jest również metodą iteracyjną do rozwiązywania układów równań liniowych. Podobnie jak w metodzie Jacobiego, macierz współczynników układu jest rozkładana na sumę macierzy diagonalnej i pozostałych elementów. Jednak w metodzie Gaussa-Seidlera nowe wartości wektora rozwiązań są wyznaczane w trakcie samej iteracji, dzięki czemu ta metoda może być szybsza w zbieżności niż metoda Jacobiego. W każdej iteracji kolejne równania są rozwiązywane przy wykorzystaniu już wyznaczonych wartości zmiennych, a nie wartości z poprzedniej iteracji jak w metodzie Jacobiego. Metoda Gaussa-Seidela jest bardziej skomplikowana niż metoda Jacobiego, ale może być bardziej efektywna w przypadku układów o dużych rozmiarach.

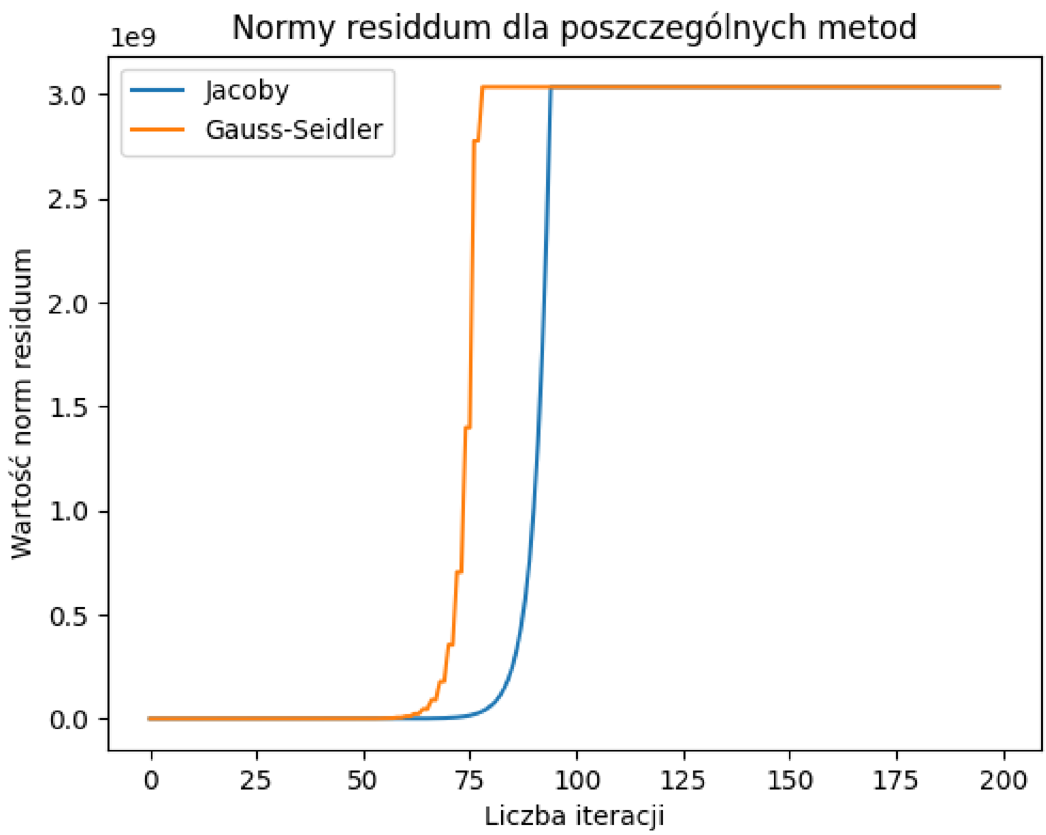
Porównanie

Dla macierzy pasmowej A o rozmiarze 993 oraz wartościach diagonali równych odpowiednio -1, -1, 12, -1, -1. Długości wykonywania oraz ilość iteracji poszczególnych metod przedstawia się następująco:

```
Jacoby iteration = 26, time = 6.121524333953857
Gauss-Seidler itteration = 23, time = 6.46555233001709
```



Jednak gdy zmienimy wartość jednego diagonala z 12 na 3 wartości norm residuum przestają się zbiegać, oznacza to, że dla niektórych przypadków może być konieczne skorzystanie z innych metod rozwiązywania równań:



Metoda faktoryzacji LU

Metoda faktoryzacji LU służy do rozwiązywania układów równań liniowych poprzez faktoryzację macierzy współczynników układu na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnej (L) i górnej (U). W metodzie tej, macierz współczynników układu A jest rozkładana na iloczyn L i U poprzez przeprowadzenie eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementów głównych. Wyznaczenie macierzy L i U umożliwia szybkie rozwiązanie układu równań liniowych Ax = b przez rozwiązanie dwóch układów równań trójkątnych L y =b i U x = y, gdzie y to wektor pomocniczy. Metoda faktoryzacji LU może być bardziej wydajna niż metody bezpośrednie (np. metoda eliminacji Gaussa), szczególnie w przypadku, gdy wiele różnych wektorów b musi zostać rozwiązanych dla tej samej macierzy A. Ponadto, faktoryzacja LU pozwala na łatwe sprawdzenie macierzy A na jej własności np. symetrii, dodatniej określoności itp.

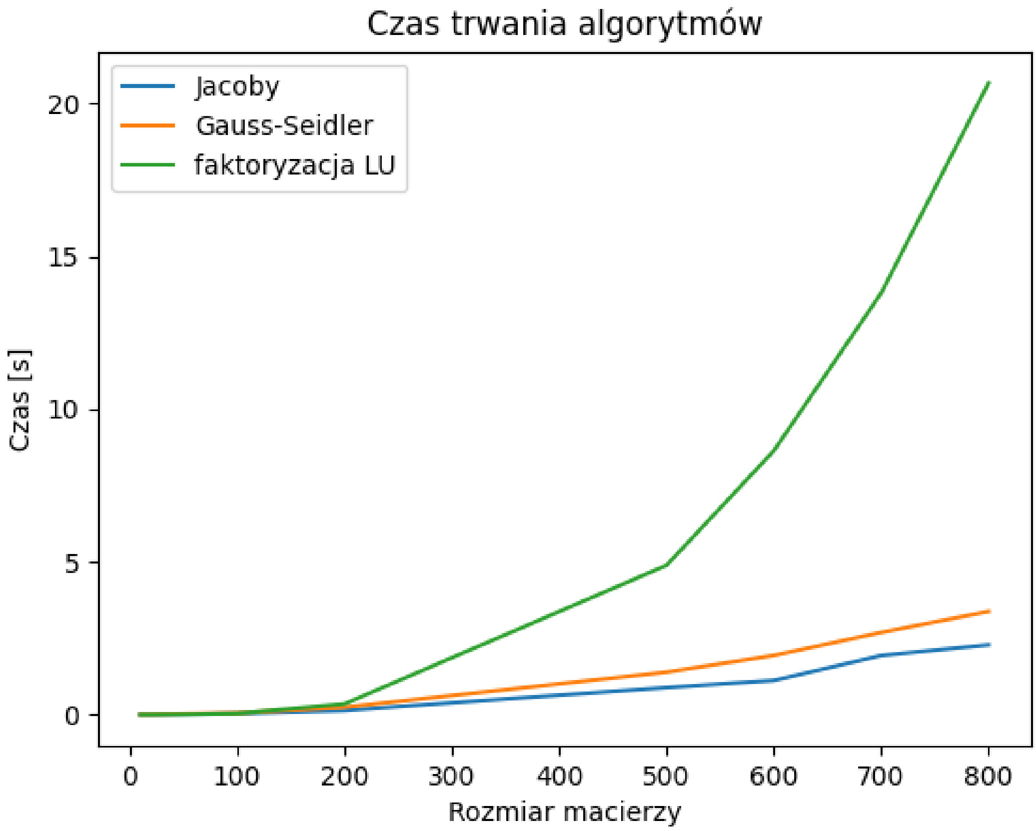
Metoda faktoryzacji LU osiąga bardzo niskie wartości normy residuum, jednak wiąże się to z wysokim kosztem czasu. Dla przykładu, w którym metody iteracyjne zawiodły osiągamy wyniki:

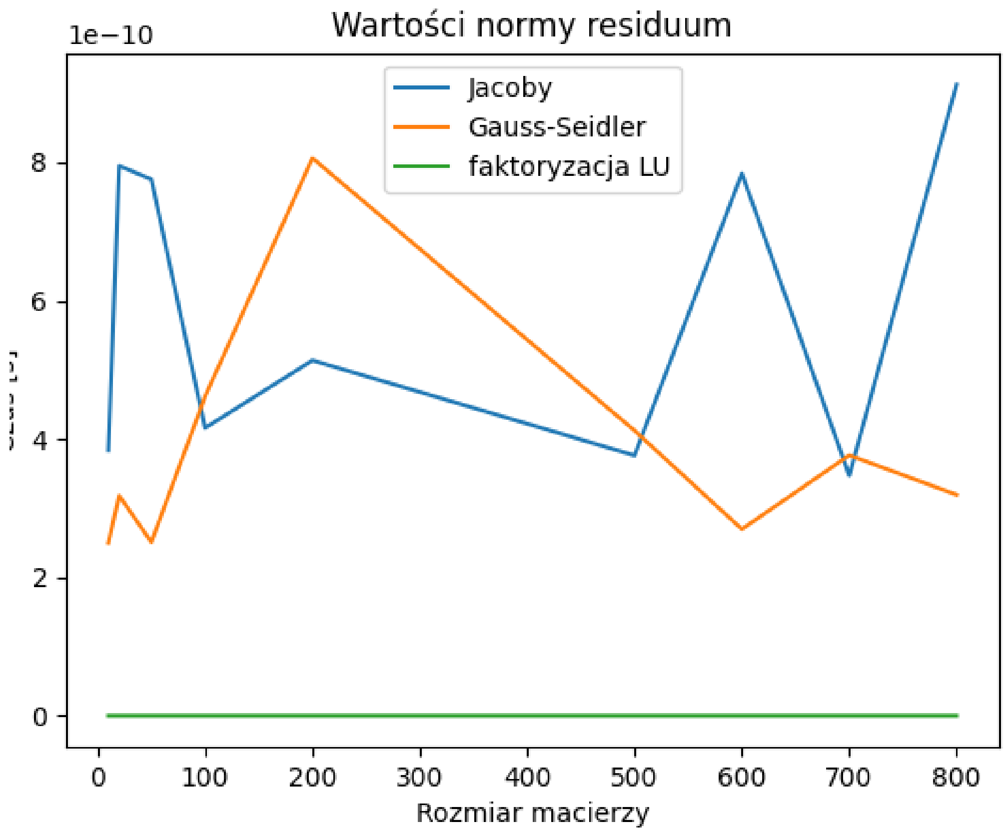
```
LU Residdum = 3.1254127210386655e-15
LU Time = 42.20544219017029
```

Porównanie prędkości algorytmów

Czas wykonania algorytmów rozwiązywania układów równań liniowych jest uzależniony od wielu czynników, takich jak rozmiar macierzy, jej właściwości (np. symetria), stopień skomplikowania obliczeń oraz implementacja algorytmu. W przypadku niewielkich macierzy, metoda eliminacji Gaussa może być najszybsza. W przypadku większych macierzy i gdy wiele układów równań musi zostać rozwiązanych dla tej samej macierzy A, metoda faktoryzacji LU może być szybsza niż metoda eliminacji Gaussa. Metoda Jacobiego jest najprostszą metodą iteracyjną, ale zazwyczaj jest wolniejsza w zbieżności niż metoda Gaussa-Seidlera. W związku z tym, wybór odpowiedniej metody do rozwiązania danego układu równań liniowych zależy od charakterystyki macierzy oraz od wymagań co do dokładności i czasu obliczeń.

Poniższe wykresy popierają przedstawione przeze mnie wnioski:





Podsumowanie

Rozwiązywanie układów równań liniowych jest ważnym problemem matematycznym i inżynierskim, który ma wiele zastosowań w różnych dziedzinach nauki i techniki. Istnieją różne metody rozwiązywania takich układów, takie jak metoda eliminacji Gaussa, metoda faktoryzacji LU oraz metody iteracyjne, takie jak metoda Jacobiego i Gaussa-Seidlera. Każda z tych metod ma swoje wady i zalety oraz różne zastosowania w zależności od charakterystyki układu równań i wymagań co do dokładności i czasu obliczeń. Dlatego ważne jest, aby wybrać odpowiednią metodę do rozwiązania danego problemu, biorąc pod uwagę jego specyfikę i ograniczenia czasowe.