Sprawozdanie

Aproksymacja profilu wysokościowego

Jan Krupiniewicz s193320

Wstęp

1. Profil wysokościowy

Profil wysokościowy (profil topograficzny) **trasy to wykres przedstawiający wysokość bezwzględną w terenie w zależności od odległości punktu od początku tras**y. W niniejszym projekcie wykorzystano dwie techniki interpolacyjne do aproksymacji profilu wysokościowego wybranych tras:

2. Interpolacja wielomianem Lagrange'a

Metoda interpolacji Lagrange'a wykorzystuje wielomian, który przechodzi przez wszystkie dane punkty pomiarowe. Polega ona na tworzeniu wielomianu, który **dokładnie odwzorowuje wartości funkcji w danych punktach**.

3. Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Interpolacja splajnami polega na użyciu kawałków wielomianów trzeciego stopnia (kubicznych), które są połączone ze sobą w sposób gładki na węzłach. Każdy kawałek wielomianu **dokładnie odwzorowuje wartości funkcji w swoim przedziale**, a **połączenia między kawałkami są płynne**, co oznacza, że mają wspólne wartości oraz wspólne pochodne pierwszego i drugiego rzędu na węzłach.

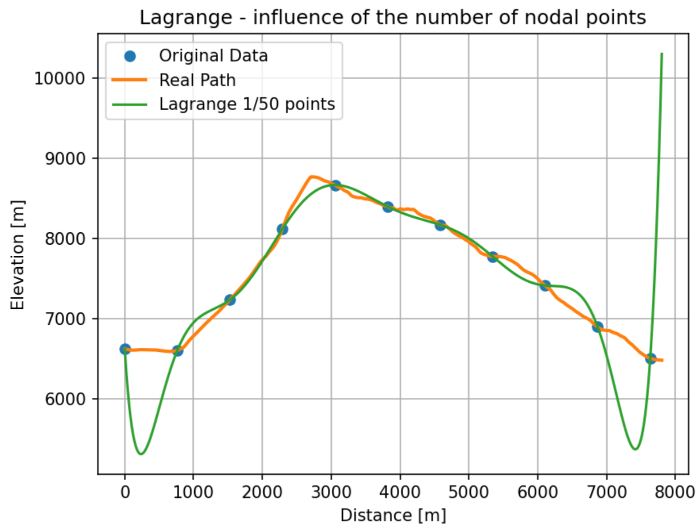
Trasa 1: MountEverest.csv

Jako pierwszą trasę wybrałem **ścieżkę o dość przewidywalnych, tendencyjnych kształtac**h. Trasa ta figuruje jako **pojedyncze wzniesienie z powolnym spadkiem do wartości początkowej**. Nie obserwujemy w niej żadnych znaczących fluktuacji, co czyni ją idealnym kandydatem do analizy podstawowych metod interpolacyjnych.

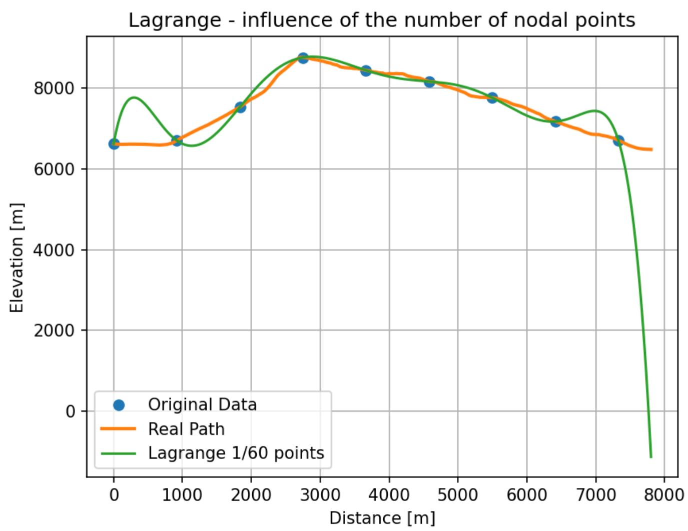
Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej pierwszej trasy (MountEverest.csv)

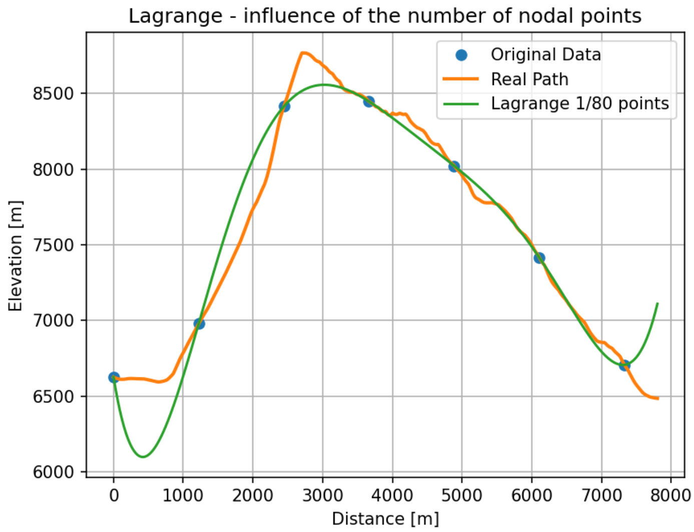
W tej sekcji analizujemy wpływ liczby punktów węzłowych na jakość **interpolacji wielomianowej Lagrange'a**.

Do analizy wybrałem **trzy różne podzbiory punktów** węzłowych - nasze wykresy z**awierają od maksymalnie 11 do minimum 6 punktów**. Zbiory punktów uzyskałem dzieląc po równo daną bazę pomiarową wybierając punkt co zadany interwał. Rezultaty mojej pracy możemy zaobserwować poniżej.



Zwiększając bazę punktów obserwujemy efekt Rungego - czyli pogorszenie jakości interpolacji występująca na krańcach interpolowanej funkcji.



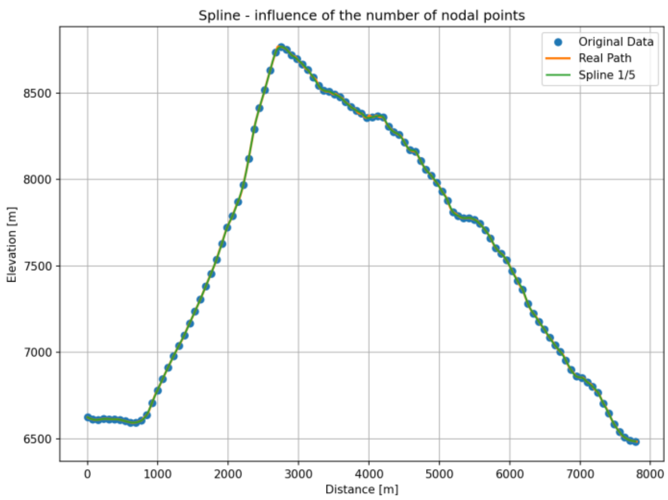


Zauważamy że dla mniejszej liczby znanych punktów, interpolacja ma tendecję do dobrego obrazowania linii trendu profilu wysokościowego.

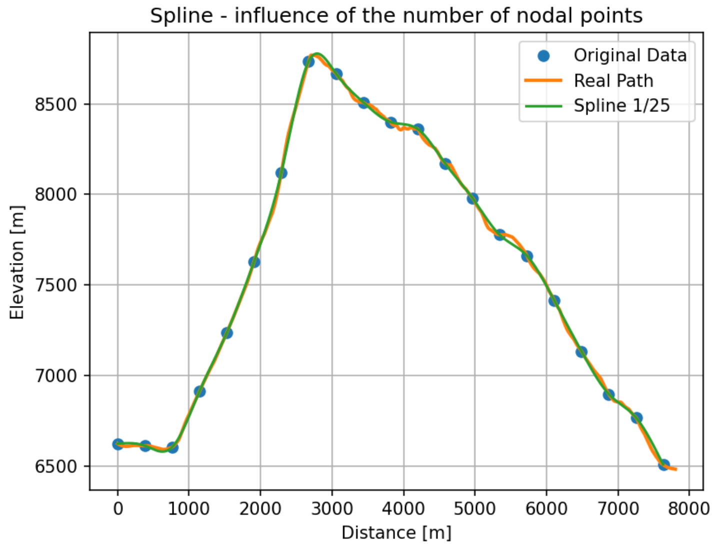
Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy (MountEverest.csv)

W tej sekcji analizujemy wpływ liczby punktów węzłowych na jakość **interpolacji wielomianowej funkcjami sklejanymi** trzeciego stopnia.

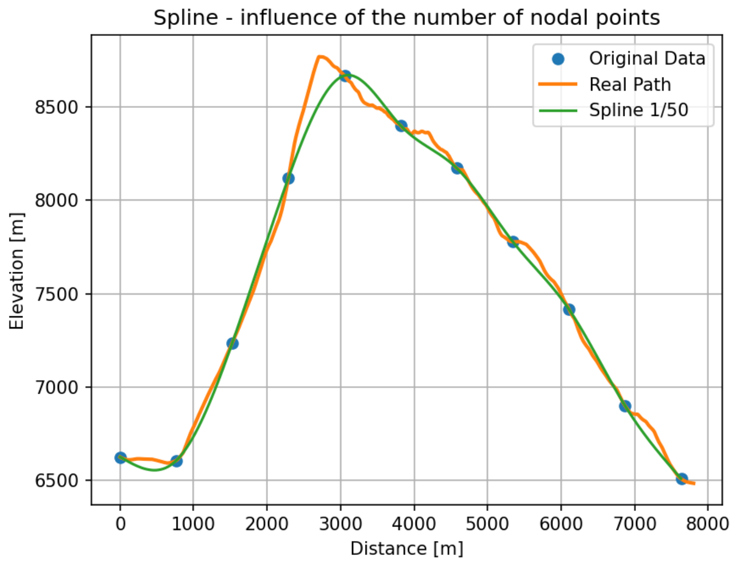
Do analizy wybrałem podobnie jak wcześniej **trzy różne podzbiory punktów węzłowych**. Pierwszy wykres prezentuje linie interpolacji uzyskaną dla wyboru **co piątego punktu z bazy**, **analogicznie kolejne dla co 25 i co 50 punktów**.



Zauważamy poprawne zachowanie funkcji na krańcach przedziału - metoda funkcji sklejanych nie jest podatna na efekt Rungego.



Widoczne rozbieżności względem prawdziwej trasy a interpolowanymi wartościami wyznaczonej funkcji obserwujemy dopiero dla wyboru około 1/25 punktów - jest to bardzo dobry rezultat.



Dla co 50-tego punktu rozbieżności są całkiem spore jednakże ogólna linia trendu została przewidziana poprawnie.

Wnioski z Analizy Trasy MountEverest.csv

Analiza interpolacji trasy MountEverest.csv pokazała wyraźne **różnice** między metodą wielomianową Lagrange'a a metodą splajnów kubicznych.

Podczas gdy **interpolacja Lagrange'a dobrze radzi sobie z mniejszą liczbą punktów**, jej **jakość** drastycznie **spada przy zwiększaniu liczby punktów węzłowych**, **głównie z powodu efektu Rungiego**.

Interpolacja splajnami kubicznymi oferuje stabilne i dokładne wyniki, nawet **przy większej liczbie punktów węzłowych**, minimalizując problemy na krańcach przedziału.

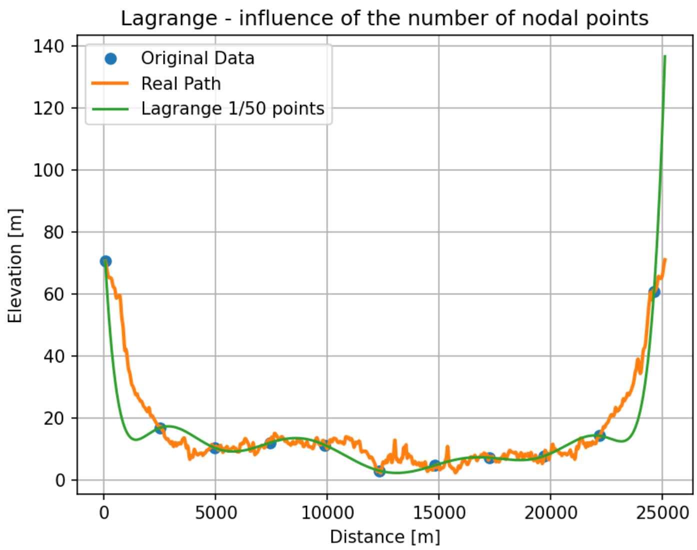
Trasa 2: Obiadek.csv

Druga wybrana przeze mnie trasa jest **znacznie bardziej chaotyczna**. **Linia trasy jest skomplikowana** – z dużą ilością fluktuacji. Analiza tej trasy idealnie badanie jakości interpolacji – tym razem **zwrócimy uwagę jak zachowuje się linia interpolacji w mniej przyjaznych warunkach**.

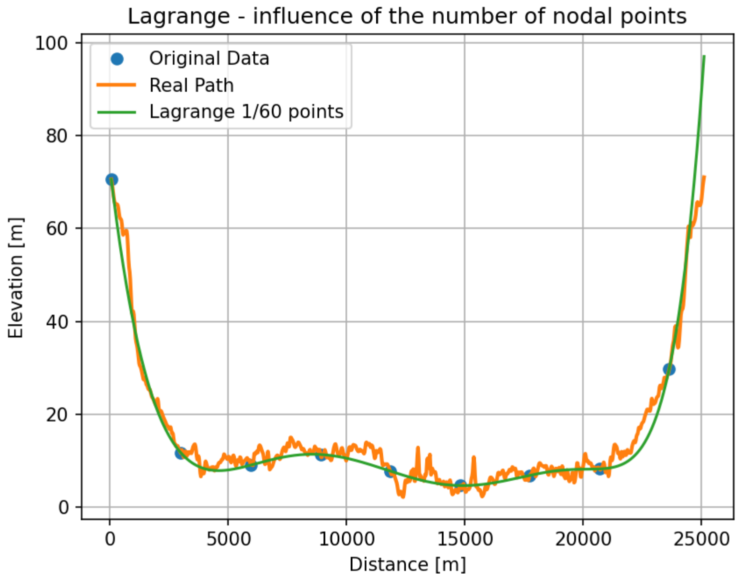
Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej drugiej trasy (Obiadek.csv)

W tej sekcji analizujemy wpływ liczby punktów węzłowych na jakość **interpolacji wielomianowej Lagrange'a**.

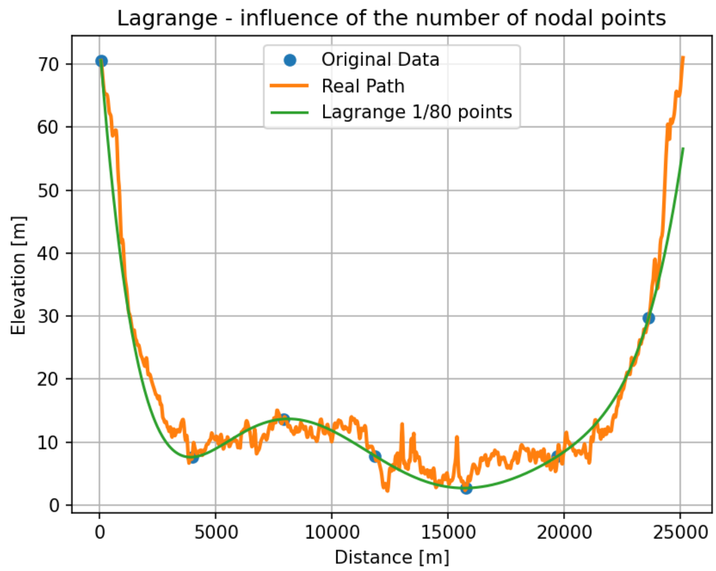
Do analizy wybrałem **trzy podzbiory punktów węzłowych** - analogiczne do tych analizowanych dla trasy MountEverest.csv.



Niestety zauważalny jest efekt Rungego.



Obserwujemy niedokładności w wyznaczaniu trasy.

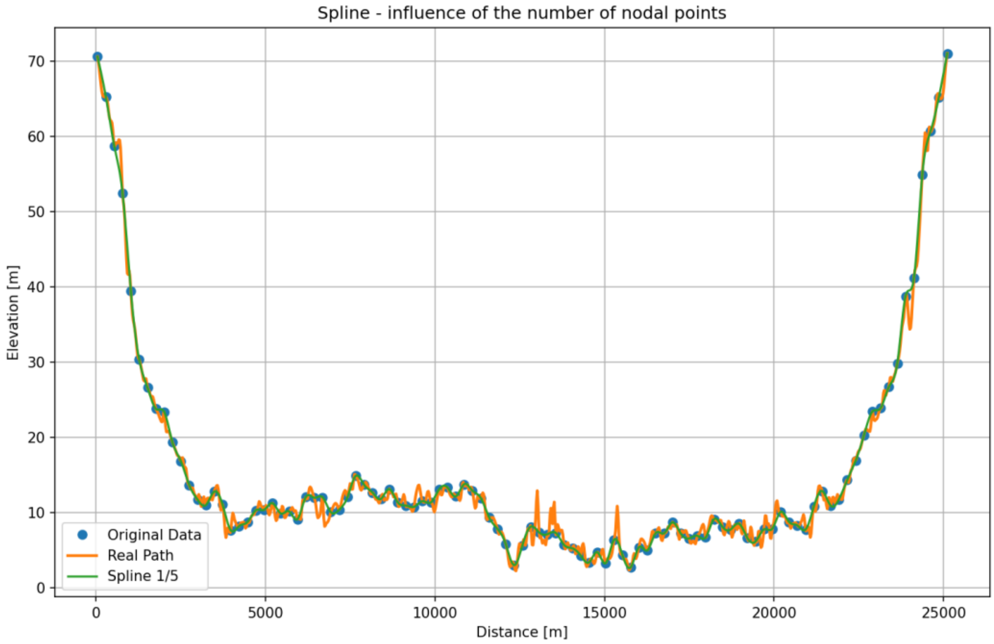


Metoda interpolacji wielomianowej Lagrange'a zawodzi – dla małych stopni wielomianu interpolacja jest niedokładna, a dla dużych występuje efekt Rungego.

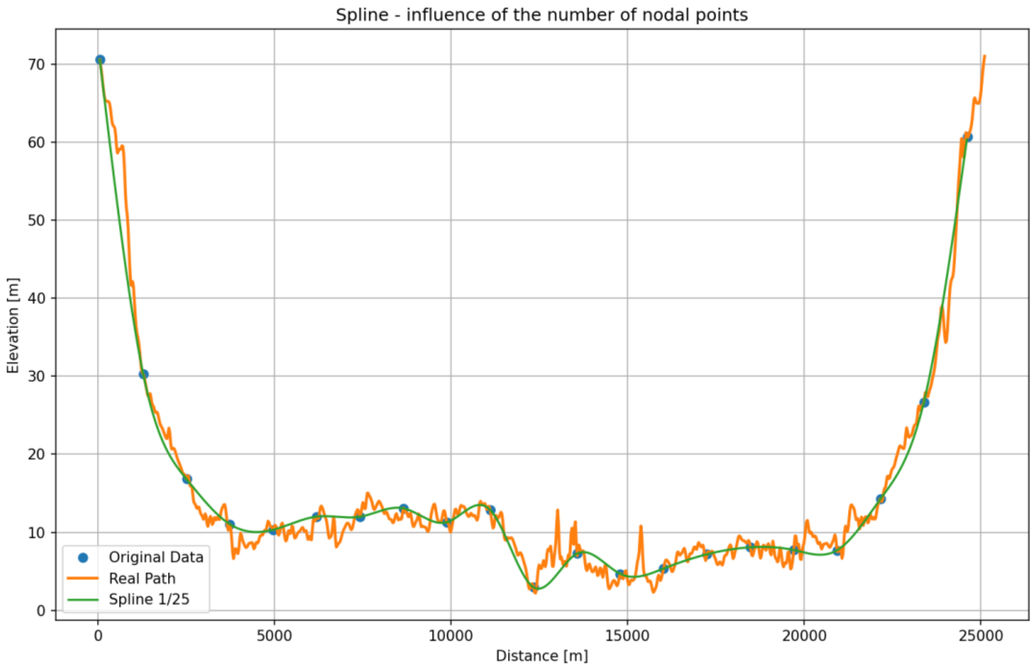
Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy (Obiadek.csv)

W tej sekcji analizujemy wpływ liczby punktów węzłowych na jakość **interpolacji wielomianowej funkcjami sklejanymi** trzeciego stopnia.

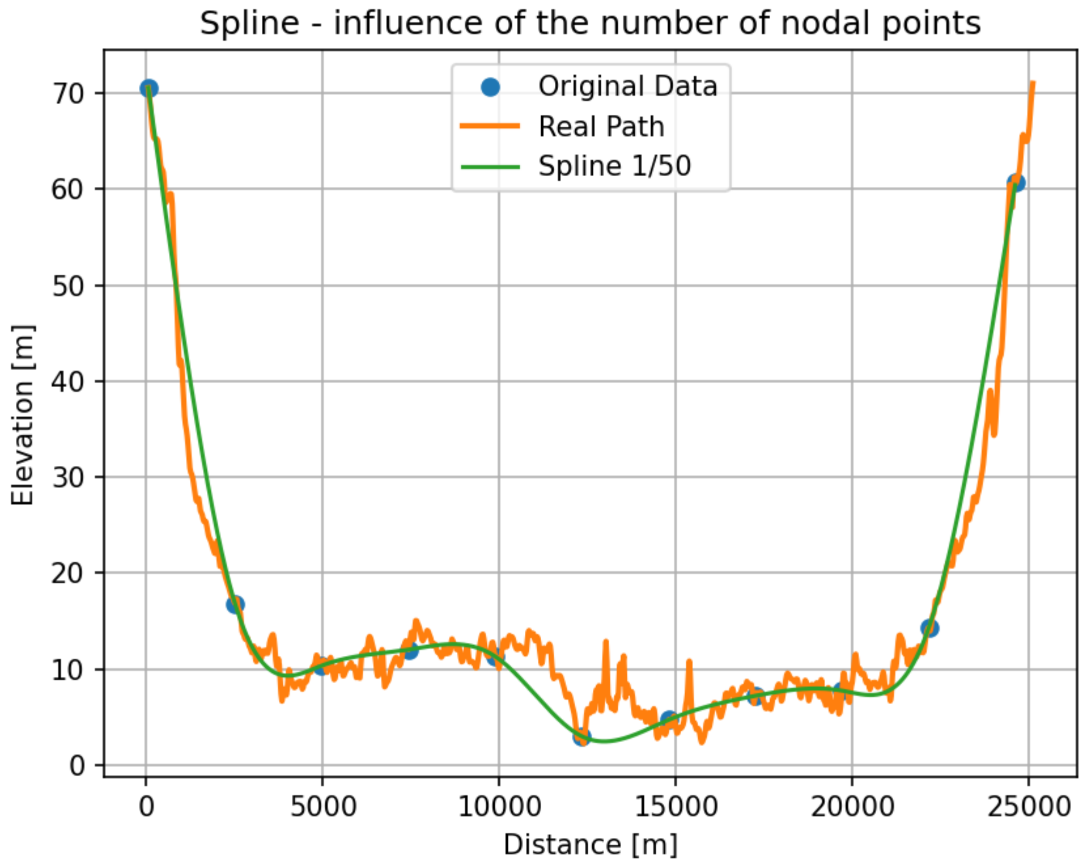
Do analizy wybrałem podobnie jak wcześniej **trzy różne podzbiory punktów węzłowych** rozmieszczone **co 5, 25 i co 50 punktów**.



Dla obrania dużej liczby punktów przewidywana wartość nieznacznie tylko różni się od rzeczywistej wartości.



Przy mniejszej liczbie punktów uzyskana linia podobnie jak dla metody Lagrange'a jedynie przybliża nam trend obierany przez rzeczywistą drogę.



Widzimy że interpolacja Splajnami zadziałała lepiej od poprzedniej metody, mimo braku dokładności przy mniejszej liczbie punktów tutaj nie doświadczamy dodatkowo efektu Rungego.

Wnioski z Analizy Trasy Obiadek.csv

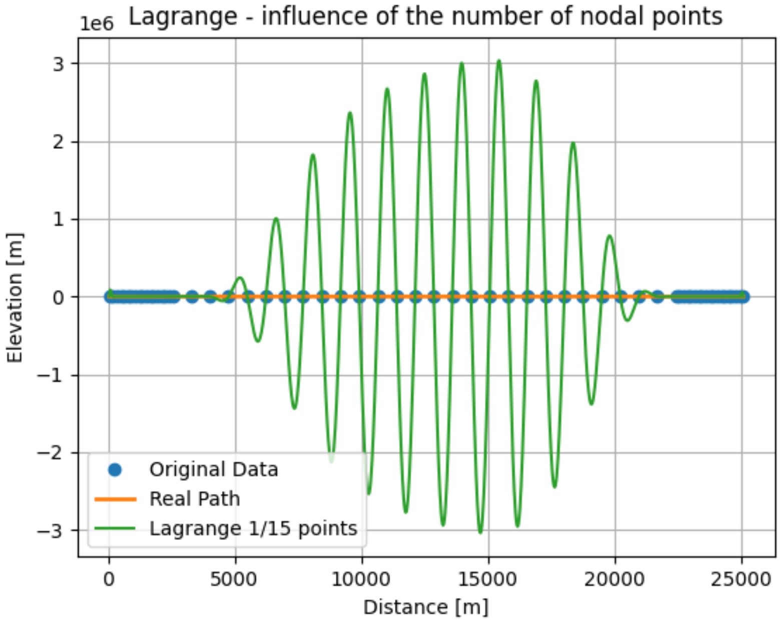
Analiza drugiej trasy (Obiadek.csv) pokazała, że **interpolacja wielomianowa Lagrange'a nie radzi sobie dobrze w przypadku tras o dużej liczbie fluktuacji**. Metoda ta jest **podatna na efekt Rungiego**, co **prowadzi do dużych błędów** na krańcach przedziału.

Z kolei **interpolacja splajnami kubicznymi** okazała się **bardziej stabilna i dokładna**, nawet przy mniejszej liczbie punktów węzłowych. Metoda splajnów **skutecznie radzi sobie z fluktuacjami trasy**, minimalizując błędy i **zapewniając stabilność na krańcach przedziału**.

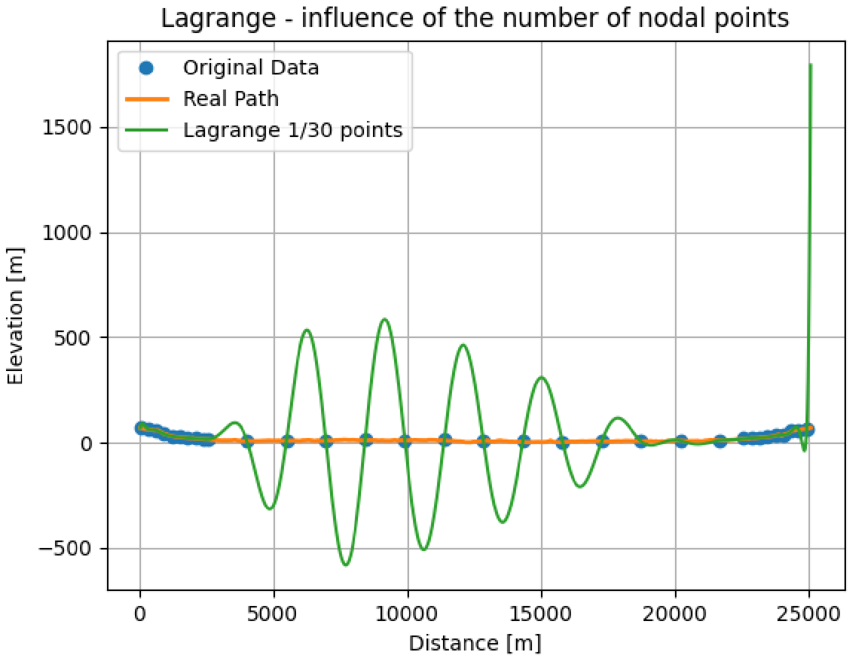
Analiza dodatkowa interpolacji

Przy analizie interpolacji trasy Obiadek.csv, zastosowaliśmy m**etodę Lagrange'a z dodatkowym zagęszczeniem punktów na krańcach funkcji**. Celem było zbadanie, **jak** takie podejście **wpłynie na**

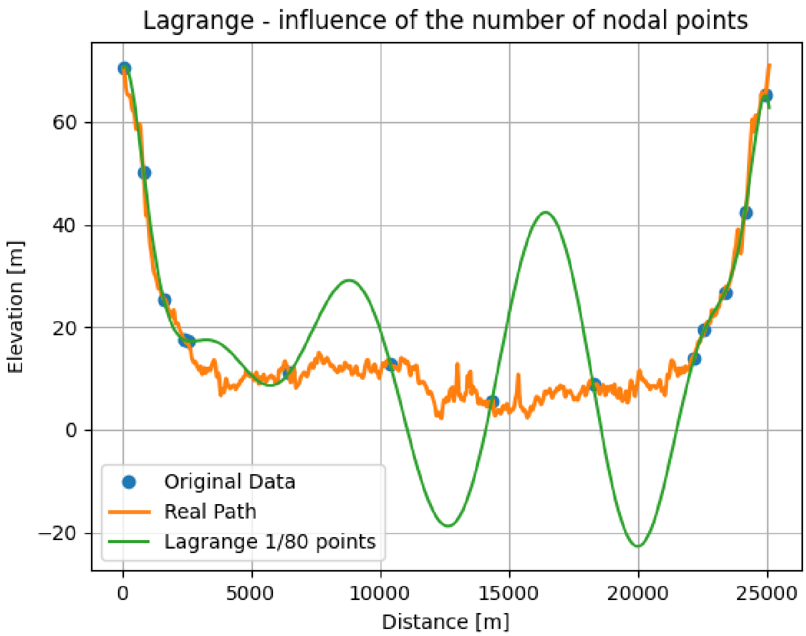
jakość interpolacji, szczególnie **w kontekście efektu Rungego**, który objawia się pogorszeniem jakości interpolacji na krańcach przedziału.



Zastosowanie większej ilości punktów na krańcach funkcji wpłynęło niekorzystnie na interpolację w środku funkcji.



Można zauważyć, że zbyt duża ilość punktów wprowadza oscylacje i błędy interpolacji na krańcach wykresu, mimo że środek funkcji nie pozostaje dobrze odwzorowany.



Zbyt mała liczba punktów wciąż powoduje niedokładność w odwzorowaniu funkcji, a zbyt duża liczba punktów wprowadza bądź efekt Rungego lub duże fluktuacje w środku przedziału.

Wnioski z analizy zagęszczania punktów

1. Poprawa na skrajach funkcji:

Dla dużej liczby punktów, efekt "wybrzuszenia" występuje w środku funkcji i jest bardziej wyraźny niż w przypadku równomiernie rozmieszczonych punktów.

2. Efekt Rungego:

Przy dużej oraz małej ilości punktów, **efekt Rungego jest znacznie zredukowany**. Wykresy pokazują, że interpolacja **nie jest jednak ani bardziej stabilna ani bardziej dokładna**, szczególnie **w obszarach środkowych funkcji**.

Jednakże, **przy pewnym rozmieszczeniu punktów, efekt Rungego zaczyna ponownie występować** na krańcach przedziału.

3. Optymalna Liczba Punktów:

Istnieje **optymalna liczba punktów, przy której interpolacja jest najbardziej efektywn**a. Zbyt mała liczba punktów powoduje niedokładność w odwzorowaniu funkcji, a zbyt duża liczba punktów wprowadza efekt niestabilności w środku przedziału.

Metoda zagęszczenia punktów na krańcach **wykazała się średnią skutecznością w redukcji efektu Rungego** w krańcowej części funkcji. Należy uważać na **zbyt duże zagęszczenie, które może prowadzić do pogorszenia jakości interpolacji w środku funkcji**.

Podsumowanie i wnioski z przeprowadzonej analizy

Wnioski z przeprowadzonej analizy wskazują, że **metoda splajnów kubicznych jest bardziej stabilna i mniej podatna na oscylacje** w porównaniu do wielomianu Lagrange'a, **szczególnie przy dużej liczbie punktów węzłowych**. Jednakże, **w niektórych przypadkach wielomian Lagrange'a może zapewnić równie dobre wyniki przy mniejszej liczbie węzłów**. Rozmieszczenie punktów węzłowych ma znaczący wpływ na wyniki interpolacji, szczególnie dla wielomianu Lagrange'a.

Przeprowadzone analizy sugerują, że **optymalne rozmieszczenie punktów pomiarowych jest kluczowe dla jakości interpolacji wielomianowej Lagrange’a**. Znalezienie balansu między zagęszczeniem punktów na krańcach a ich ilością w środku funkcji jest kluczowe dla uzyskania dokładnych wyników interpolacji.