

# Differential Evolution und dichteste Kugelpackung (3D)

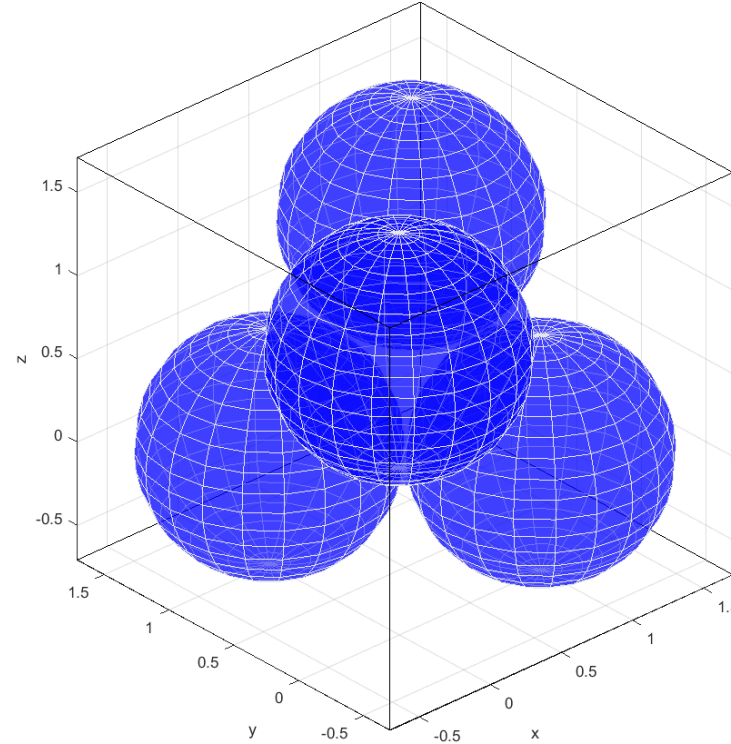
# Inhalt

1. Problemstellung
2. Grundlagen und Konzept
3. Programmstruktur
  - Benutzeroberfläche
  - Initialisierung
  - Optimierung
4. Test und Ergebnisse
5. Demonstration

# 1. Problemstellung

---

- ▶ optimale Anordnung von endlich vielen, gleich großen Kugeln im euklidischen Raum
  - ▶ **dichteste Kugelpackung**



## 2. Grundlagen und Konzept

---

### ► Differential Evolution

#### Allgemeine Funktionsweise

Initialisierung: Startpopulation

Iterationsschritte: Optimieren bis Abbruchkriterium erfüllt ist

Mutation



Rekombination



Selektion



## 2. Grundlagen und Konzept

---

### ► Differential Evolution

#### Allgemeine Funktionsweise

Iterationsschritte: Optimieren bis Abbruchkriterium erfüllt ist

Mutation



$$v_{ij}^t = M_1(x_{ij}^t) = x_{r1,j}^t + F \cdot (x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t)$$

Rekombination



Selektion



## 2. Grundlagen und Konzept

---

### ► Differential Evolution

#### **Allgemeine Funktionsweise**

Iterationsschritte:    Optimieren bis Abbruchkriterium erfüllt ist

Mutation



Rekombination



- Individuum der Parentalgeneration
- Mutiertes Individuum

Selektion



## 2. Grundlagen und Konzept

---

### ► Differential Evolution

#### **Allgemeine Funktionsweise**

Iterationsschritte: Optimieren bis Abbruchkriterium erfüllt ist

Mutation



Rekombination



Selektion



- Vergleich
  - Individuum der Parentalgeneration
  - Mutiertes Individuum
- Individuum mit den besseren Eigenschaften überlebt

## 2. Grundlagen und Konzept

---

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- ▶ Strategie zur Optimierung: **DE/rand/1/bin**
  - ▶ **DE: Differential Evolution**
  - ▶ rand: Zufällige Auswahl der Basisvektoren
  - ▶ 1: Eine Differenzbildung innerhalb der Mutation
  - ▶ bin: Binomial-Schema bei der Rekombination

$$v_{ij}^t = M_1(x_{ij}^t) = x_{r1,j}^t + F \cdot (x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t)$$



## 2. Grundlagen und Konzept

---

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- ▶ Strategie zur Optimierung: **DE/rand/1/bin**
  - ▶ DE: Differential Evolution
  - ▶ **rand: Zufällige Auswahl der Basisvektoren**
  - ▶ 1: Eine Differenzbildung innerhalb der Mutation
  - ▶ bin: Binomial-Schema bei der Rekombination

$$v_{ij}^t = M_1(x_{ij}^t) = x_{r1,j}^t + F \cdot (x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t)$$

## 2. Grundlagen und Konzept

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- ▶ Strategie zur Optimierung: **DE/rand/1/bin**
  - ▶ DE: Differential Evolution
  - ▶ rand: Zufällige Auswahl der Basisvektoren
  - ▶ **1: Eine Differenzbildung innerhalb der Mutation**
  - ▶ bin: Binomial-Schema bei der Rekombination

$$v_{ij}^t = M_1(x_{ij}^t) = x_{r1,j}^t + F \cdot (x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t)$$

## 2. Grundlagen und Konzept

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- ▶ Strategie zur Optimierung: **DE/rand/1/bin**
  - ▶ DE: Differential Evolution
  - ▶ rand: Zufällige Auswahl der Basisvektoren
  - ▶ 1: Eine Differenzbildung innerhalb der Mutation
  - ▶ **bin: Binomial-Schema bei der Rekombination**

$$u_{ij}^t = R_{bin}(v_{ij}^t) = \begin{cases} v_{ij}^t & \text{falls } rand_j[0,1] < CR \\ x_{ij}^t & \text{sonst} \end{cases}$$

## 2. Grundlagen und Konzept

---

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinations- konstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

### ► Annahmen

- Optimiert wird der Durchmesser (~DKP)
- Individuum entspricht einer legalen Anordnung von  $n$  Kugeln
- Gefäß entspricht einem Würfel
- Legalität: Mittelpunkte der Kugeln befinden sich im Einheitswürfel
- Kantenlänge entspricht  $1 \text{ LE} + 2 \cdot \text{Radius}$
- Population: Menge aller Kugelsammlungen
- Addition und Multiplikation bezieht sich auf die Mittelpunkte der Kugeln eines Individuums

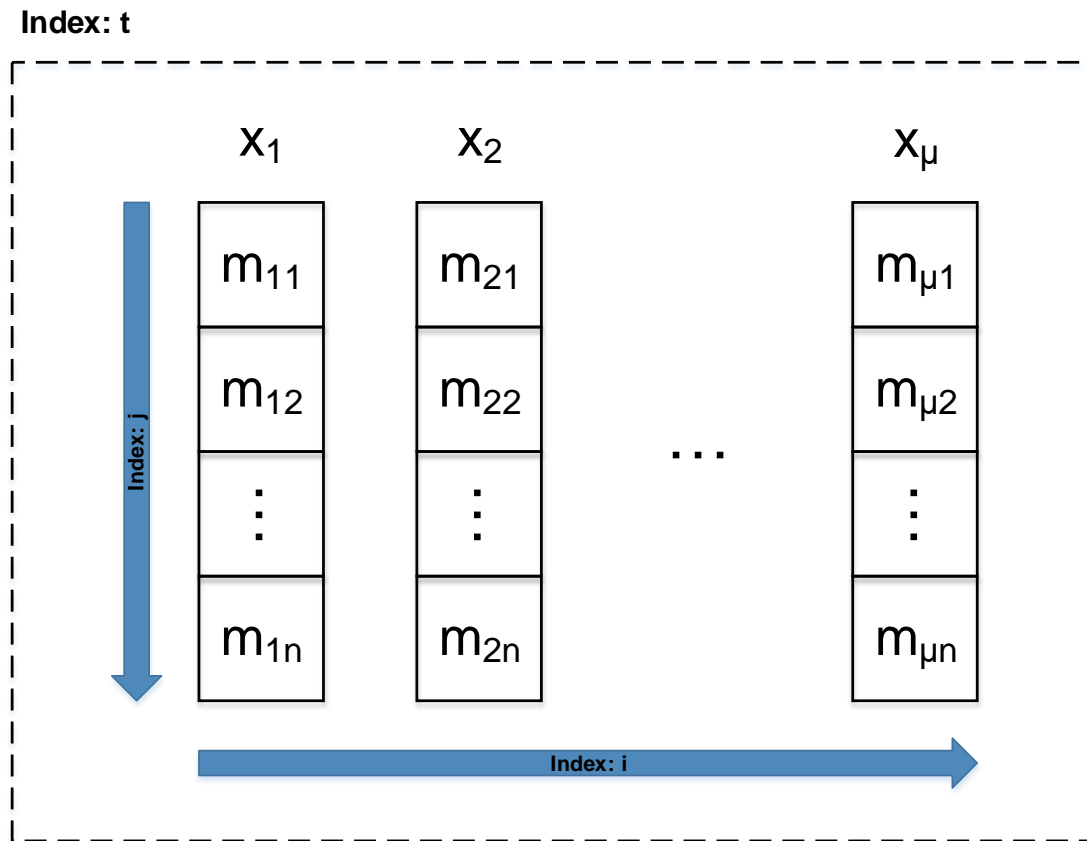
$$V = (1 + d)^3$$

# 3. Programmstruktur

---

### 3. Programmstruktur

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße



schematische Populationsstruktur sowie Softwarenotation für allgemeine Generationsdarstellung

### 3. Programmstruktur

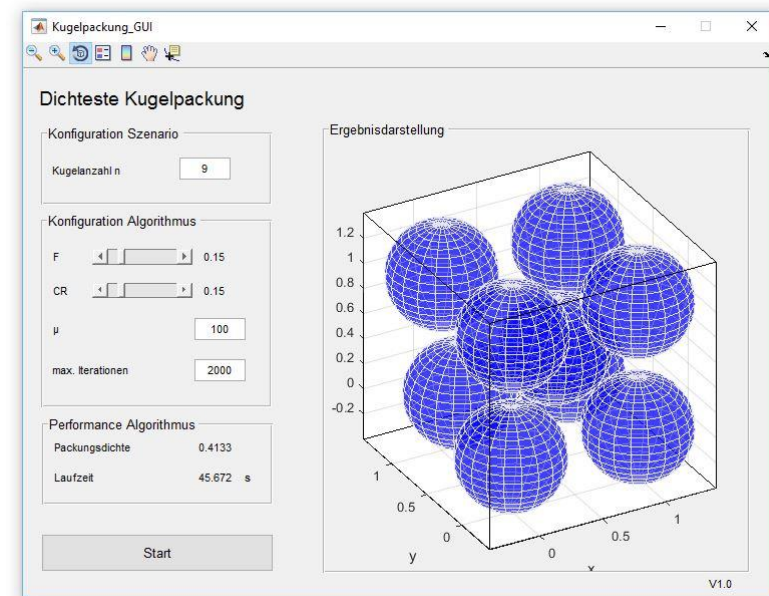
## Benutzeroberfläche

---

### 3. Programmstruktur

# Benutzeroberfläche

---



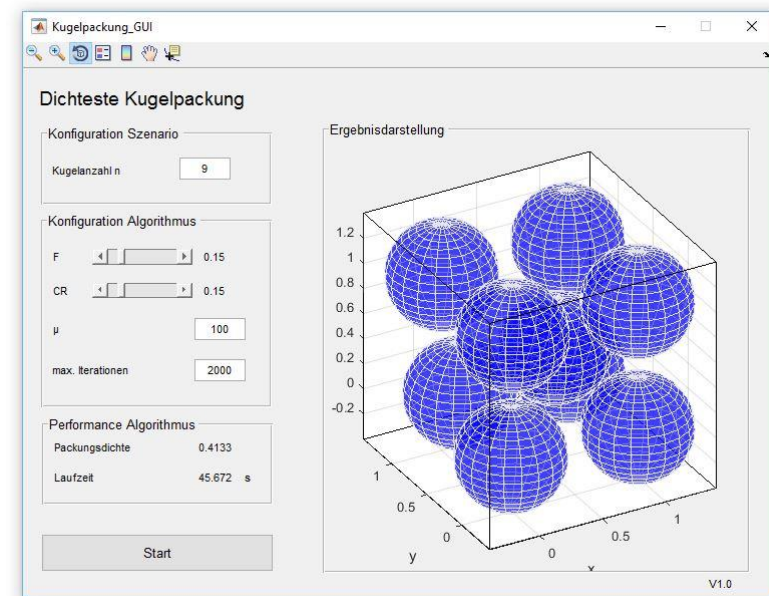
intuitive Benutzeroberfläche zur Konfiguration (Szenario und Algorithmus) sowie zur Darstellung des Ergebnisses in verschiedenen Formen (grafisch, Packungsdichte)



### 3. Programmstruktur

# Benutzeroberfläche

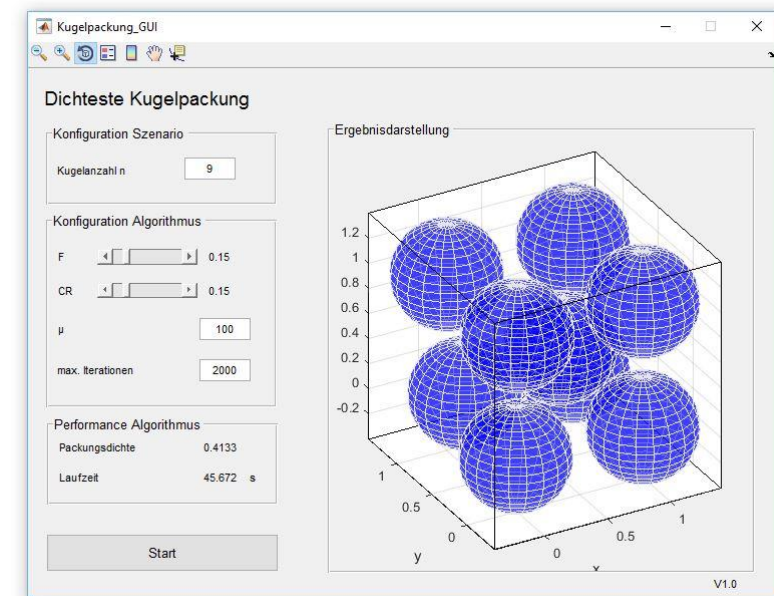
- Konfiguration des Szenarios  
 $1 \leq n$  – (zu packende) Kugelanzahl



intuitive Benutzeroberfläche zur Konfiguration (Szenario und Algorithmus) sowie zur Darstellung des Ergebnisses in verschiedenen Formen (grafisch, Packungsdichte)

### 3. Programmstruktur Benutzeroberfläche

- Konfiguration des Szenarios  
 $1 \leq n$  – (zu packende) Kugelanzahl
- Konfiguration der strategischen Parameter  
 $0 \leq F \leq 1$  – Skalierungsfaktor  
 $0 \leq CR \leq 1$  – Rekombinationskonstante  
 $0 \leq \mu$  – Populationsgröße (initial:  $10n$ )  
 $0 \leq \text{max. Iterationen}$



intuitive Benutzeroberfläche zur Konfiguration (Szenario und Algorithmus) sowie zur Darstellung des Ergebnisses in verschiedenen Formen (grafisch, Packungsdichte)

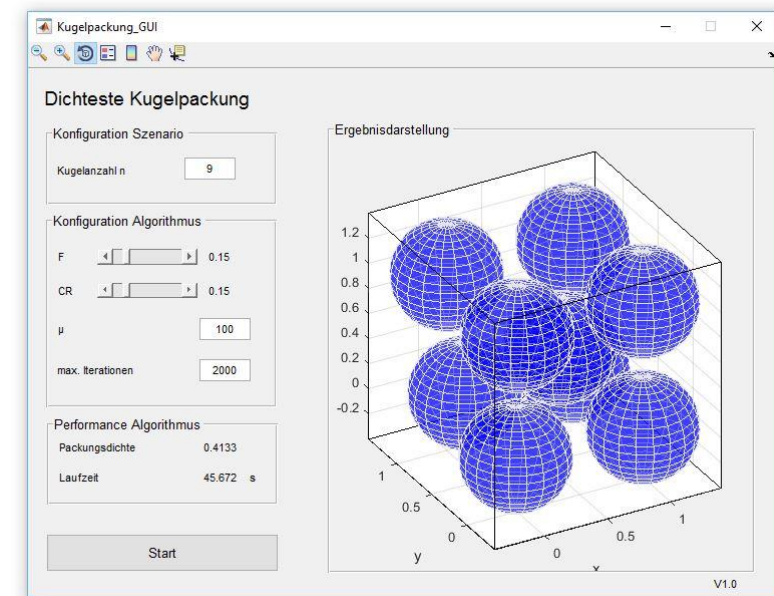
### 3. Programmstruktur Benutzeroberfläche

- Konfiguration des Szenarios  
 $1 \leq n$  – (zu packende) Kugelanzahl
- Konfiguration der strategischen Parameter  
 $0 \leq F \leq 1$  – Skalierungsfaktor  
 $0 \leq CR \leq 1$  – Rekombinationskonstante  
 $0 \leq \mu$  – Populationsgröße (initial:  $10n$ )  
 $0 \leq \text{max. Iterationen}$

- Performance Algorithmus

$$\frac{n \cdot V_{Kugel}}{V_{Würfel}} - \text{Packungsdichte}$$

Laufzeit

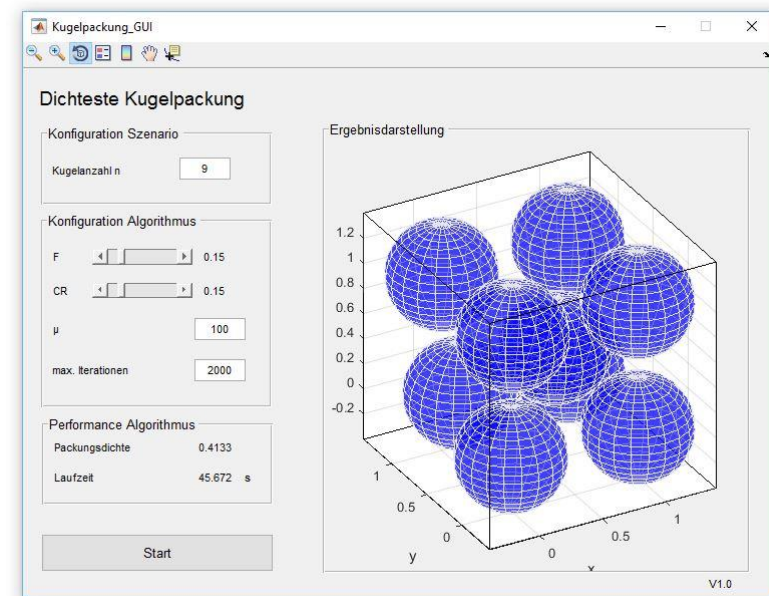


intuitive Benutzeroberfläche zur Konfiguration  
(Szenario und Algorithmus) sowie zur Darstellung  
des Ergebnisses in verschiedenen Formen  
(grafisch, Packungsdichte)

### 3. Programmstruktur

## Benutzeroberfläche

- Konfiguration des Szenarios
  - $1 \leq n$  – (zu packende) Kugelanzahl
- Konfiguration der strategischen Parameter
  - $0 \leq F \leq 1$  – Skalierungsfaktor
  - $0 \leq CR \leq 1$  – Rekombinationskonstante
  - $0 \leq \mu$  – Populationsgröße (initial:  $10n$ )
  - $0 \leq \text{max. Iterationen}$
- Performance Algorithmus
  - $\frac{n \cdot V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Würfel}}}$  – Packungsdichte
  - Laufzeit
- Ergebnisdarstellung
  - grafische Darstellung der dichtesten Kugelpackung



intuitive Benutzeroberfläche zur Konfiguration (Szenario und Algorithmus) sowie zur Darstellung des Ergebnisses in verschiedenen Formen (grafisch, Packungsdichte)

### 3. Programmstruktur

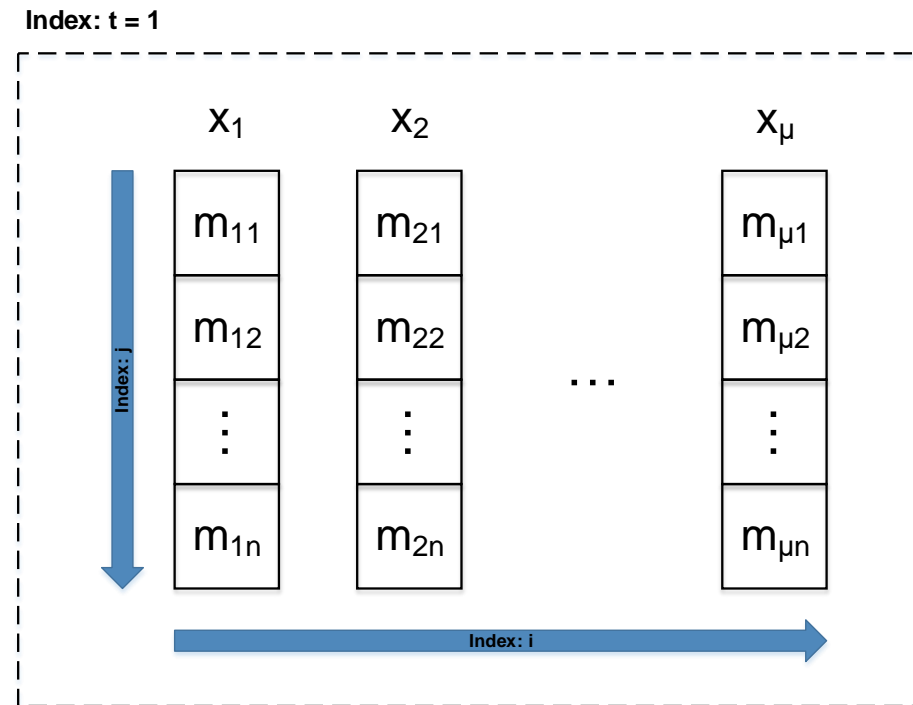
## Initialisierung

---

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinations- konstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

### 3. Programmstruktur Initialisierung

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinations- konstante	<b>μ</b>	Populationsgröße



schematische Populationsstruktur sowie Softwarenotation für  
Parentalgeneration ( $t = 1$ )

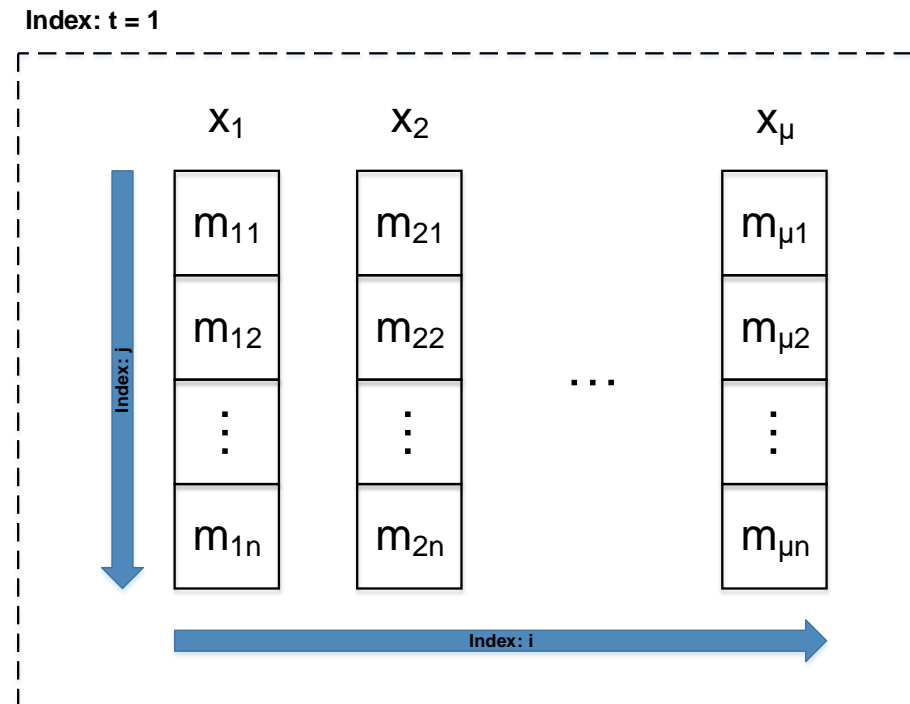
### 3. Programmstruktur

## Initialisierung

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges <b>x</b>
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- Initialisierungsvorschrift

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} rand[0,1] \\ rand[0,1] \\ rand[0,1] \end{pmatrix}$$



schematische Populationsstruktur sowie Softwarenotation für Parentalgeneration (t = 1)

### 3. Programmstruktur

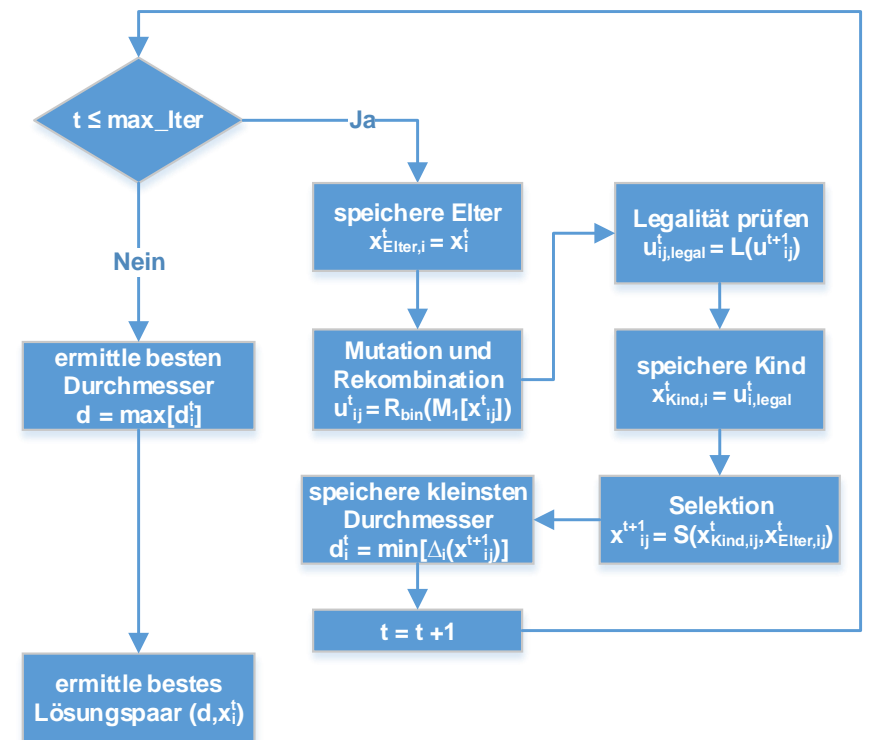
## Optimierung (*DE/rand/1/bin*)

---



### 3. Programmstruktur Optimierung (*DE/rand/1/bin*)

---



schematisches Strukturdiagramm des  
Optimierungskonzeptes/-algorithmus

### 3. Programmstruktur

## Optimierung (*DE/rand/1/bin*)

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges x
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- Mutationsvorschrift

$$v_{ij}^t = M_1(x_{ij}^t) = x_{r1,j}^t + F \cdot (x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t)$$

$$r_1 = \text{rand}[0,1] \cdot \mu$$

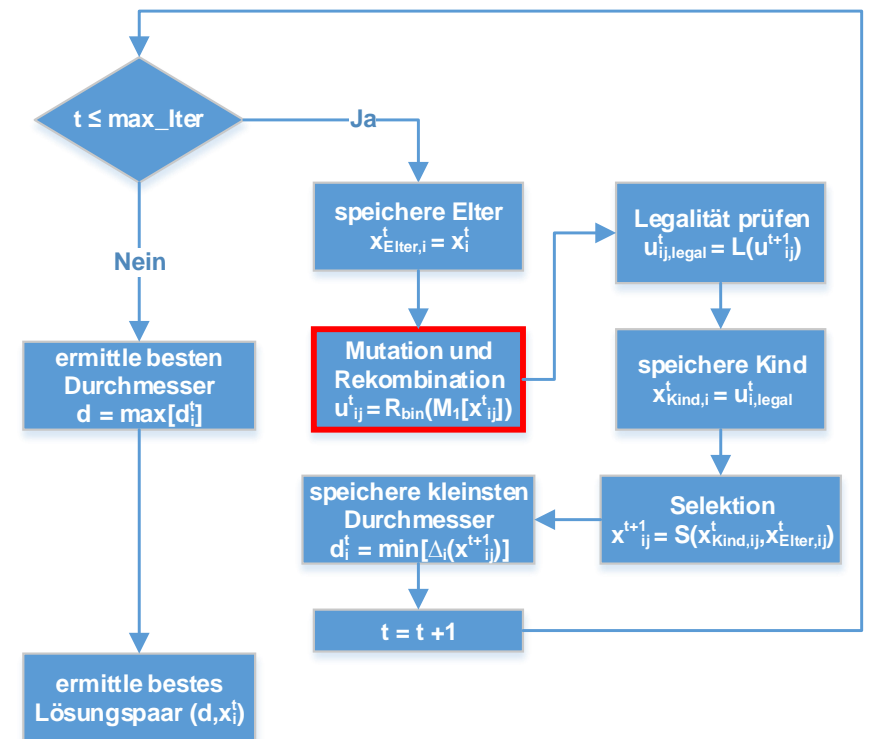
$$r_2 = \text{rand}[0,1] \cdot \mu$$

$$r_3 = \text{rand}[0,1] \cdot \mu$$

$$r_1 \neq r_2 \wedge r_1 \neq r_3 \wedge r_2 \neq r_3$$

- Rekombinationsvorschrift

$$u_{ij}^t = R_{bin}(v_{ij}^t) = \begin{cases} v_{ij}^t & \text{falls } \text{rand}_j[0,1] < CR \\ x_{ij}^t & \text{sonst} \end{cases}$$



schematisches Strukturdiagramm des Optimierungskonzeptes/-algorithmus

### 3. Programmstruktur

## Optimierung (*DE/rand/1/bin*)

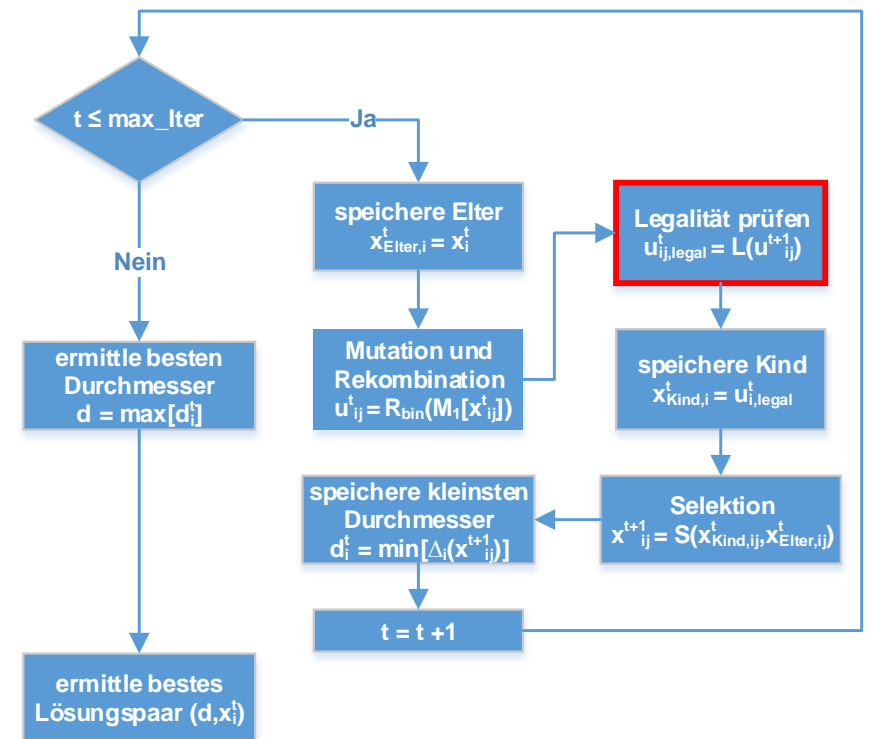
<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges x
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

- Überprüfung der Legalität

$$u_{ij,legal}^t = L(u_{ij}^t) = \begin{cases} \frac{x_{r1,j}^t}{2} & \text{falls } u_{ij}^t < 0 \\ \frac{(x_{r1,j}^t + 1)}{2} & \text{falls } u_{ij}^t > 1 \\ u_{ij}^t & \text{sonst} \end{cases}$$

\*Mutationsvorschrift

$$v_{ij}^t = M_1(x_{ij}^t) = x_{r1,j}^t + F \cdot (x_{r2,j}^t - x_{r3,j}^t)$$



schematisches Strukturdiagramm des Optimierungskonzeptes/-algorithmus

### 3. Programmstruktur

## Optimierung (*DE/rand/1/bin*)

<b>t</b>	Generation	<b>u</b>	Kind
<b>x</b>	Individuum	<b>r</b>	zufälliges x
<b>m</b>	Mittelpunkt	<b>F</b>	Skalierungsfaktor
<b>CR</b>	Rekombinationskonstante	<b>μ</b>	Populationsgröße

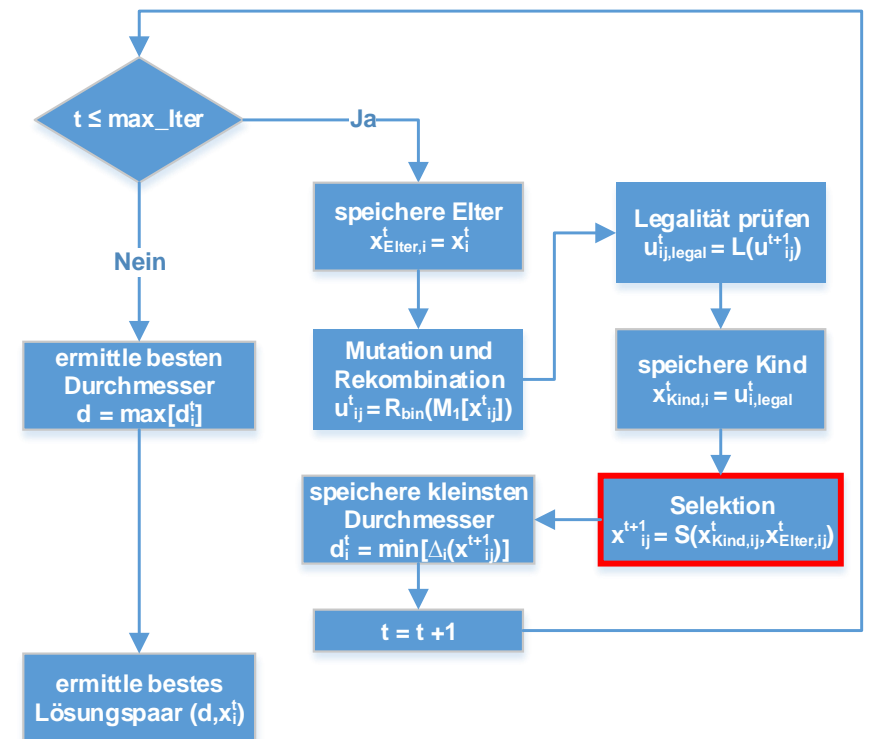
- Selektionsvorschrift

$$x_{ij}^{t+1} = S(u_{ij}^t, legal, x_{ij}^t) = \begin{cases} u_{ij}^t, legal & \text{falls } f(u_{ij}^t, legal) \geq f(x_{ij}^t) \\ x_{ij}^t & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d_i^t = f(u_{ij}^t, legal)$$

$$f(x_{ij}^t) = \min\{\Delta_{lm} \mid l, m = 1, 2, \dots, n; l \neq m\} \text{ mit } l = j$$

$$\Delta_{lm} = \sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2 + (z_l - z_k)^2}$$

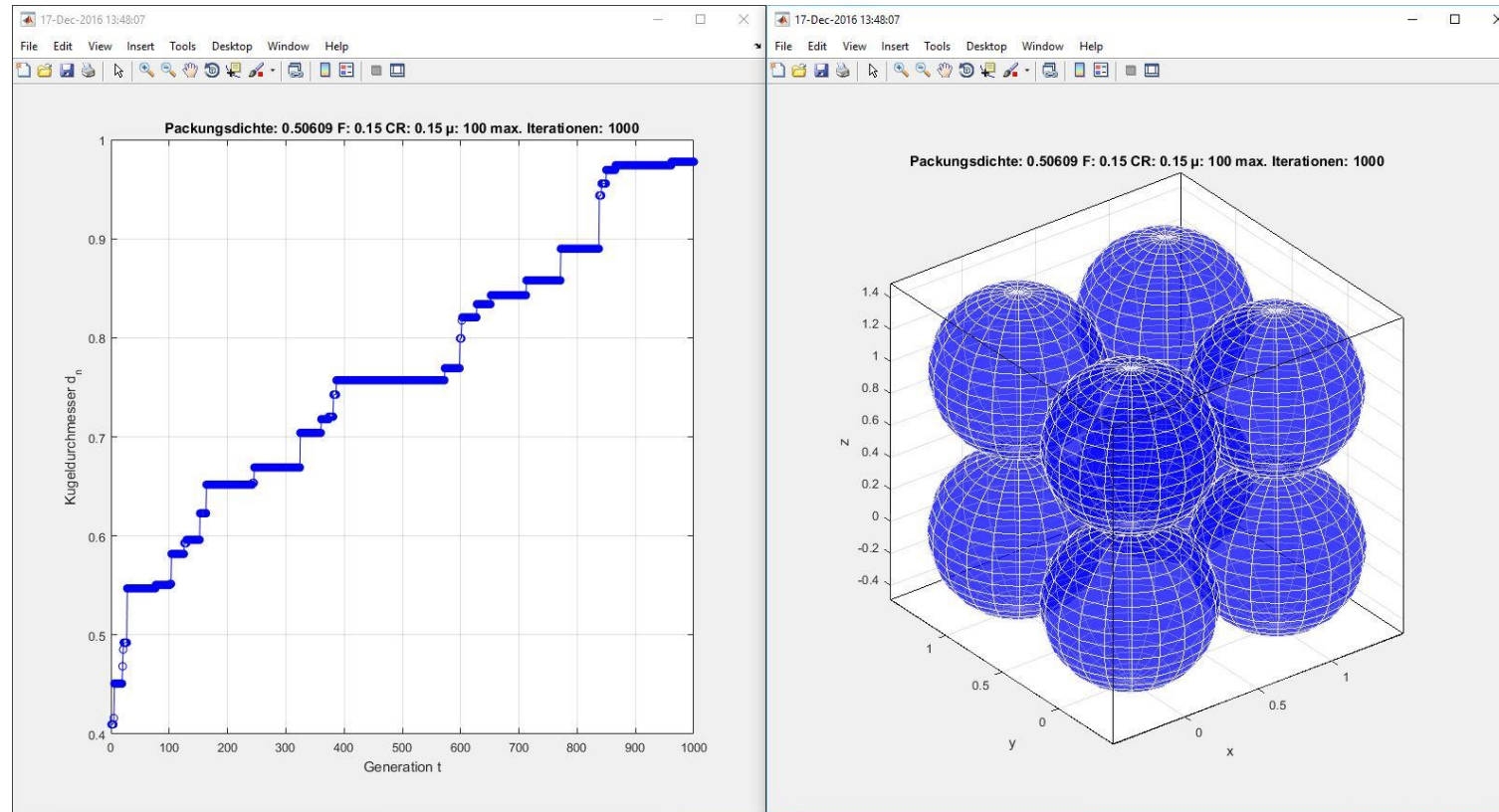


schematisches Strukturdiagramm des Optimierungskonzeptes/-algorithmus

### 3. Programmstruktur

## Optimierung (*DE/rand/1/bin*)

---



Ausgabe des Optimierungsalgorithmus für  $n = 8$ . links: Anpassung des Kugeldurchmessers  $d_n$  über die Generationen  $t$  aufgetragen. rechts: grafische Darstellung des "besten" Individuums.

## 4. Test und Ergebnisse

---

## 4. Test und Ergebnisse

---

- ▶ Bestimmung der strategischen Parameter:
  - ▶ Skalierungsfaktor –  $F$
  - ▶ Rekombinationskonstante –  $CR$
  - ▶ Populationsgröße –  $\mu$
- ▶ Orientierungswerte nach (Kommer 2008)
  - ▶  $F = 0,5$
  - ▶  $CR = 0,9$
  - ▶  $\mu = 10n$

## 4. Test und Ergebnisse

### Parameterbestimmung F und CR (3 Kugeln)

---

Kugelanzahl (n)	F	CR	$\mu$ (10n)	Iterationen	Packungsdichte	Maximaler Durchmesser
3	0,15	0,15	30	200	<b>0,3156</b>	1,4138
	0,15	0,5	30	200	0,3077	1,3825
	0,15	0,9	30	200	0,3077	1,3854
	0,5	0,15	30	200	<b>0,3157</b>	1,4142
	0,5	0,5	30	200	<b>0,3157</b>	1,4142
	0,5	0,9	30	200	<b>0,3157</b>	1,4142
	0,9	0,15	30	200	0,3154	1,4128
	0,9	0,5	30	200	<b>0,3157</b>	1,4142
	0,9	0,9	30	200	<b>0,3157</b>	1,4142



## 4. Test und Ergebnisse

### Parameterbestimmung F und CR (9 Kugeln)

---

Kugelanzahl (n)	F	CR	$\mu$ (10n)	Iterationen	Packungsdichte	Maximaler Durchmesser
9	0,15	0,15	90	2000	<b>0,4703</b>	0,8651
	0,15	0,5	90	2000	0,3288	0,6997
	0,15	0,9	90	2000	0,3223	0,6919
	0,5	0,15	90	2000	<b>0,4707</b>	0,8656
	0,5	0,5	90	3000	<b>0,4707</b>	0,8657
	0,5	0,9	90	3000	0,4648	0,8589
	0,9	0,15	90	4000	0,4047	0,7895
	0,9	0,5	90	4000	0,3220	0,6915
	0,9	0,9	90	4000	0,2207	0,5636

**Beste Kombinationen:**

F = 0,15 / CR = 0,15

F = 0,5 / CR = 0,15

## 4. Test und Ergebnisse

### Abhängigkeit von der Populationsgröße

---

Kugelanzahl (n)	$\mu$	Iterationen	Packungsdichte	Maximaler Durchmesser
9	18	2000	0,2345	0,5818
	36	2000	0,4497	0,8415
	54	2000	0,3631	0,7407
	72	2000	0,4585	0,8516
	90	2000	<b>0,4705</b>	0,8653
	108	2000	<b>0,4708</b>	0,8657
	126	2000	<b>0,4709</b>	0,8658
	144	2000	<b>0,4654</b>	0,8595
	162	2000	<b>0,4513</b>	0,8434
	180	2000	<b>0,4711</b>	0,866

#### Beobachtung:

Ab  $\mu = 10n$  keine wesentliche Änderung bei der Packungsdichte

## 4. Test und Ergebnisse

### Beispielwerte

Kugelanzahl (n)	Packungsdichte	Maximaler Durchmesser
2	0,2659	1,7263
3	0,3006	1,3599
4	0,3801	1,3051
5	0,3629	1,0727
6	0,4080	1,0259
7	0,4581	1,0000
8	0,5236	1,0000
9	0,4682	0,8627
10	0,3721	0,7071
11	0,3929	0,6909
12	0,3587	0,6262
13	0,4793	0,7034
14	0,3983	0,6096
15	0,3967	0,5864
16	0,4099	0,5767

