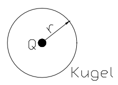
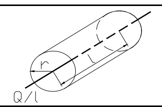
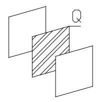
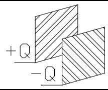
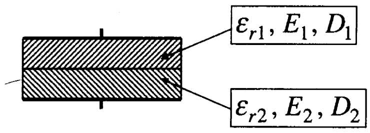
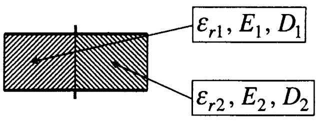
Elektrostatik

Elektrostatisches Feld

$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ Satz von Gauss — Homogenes Feld: $Q = D \cdot A$	**Ladung Q** $[Q] = A \cdot s = C$ (Coulomb)
$U_{21} = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ — Homogenes Feld: $U = E \cdot s$	**Spannung U** $[U] = N \cdot m / A \cdot s = J/C = V$ (Volt)
$D = \varepsilon \cdot E$ $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ $\varepsilon_{r\,Vakuum} = \varepsilon_{r\,Luft} = 1$ $\varepsilon_{r\,Glas} \approx 4$ $\varepsilon_{r\,Hartpapier} \approx 4-6$	**Feldstärke E** (Ursache) $[E] = V/m$ **diel. Flussdichte D** (Wirkung) $[D] = A \cdot s / m^2$ **diel. Leitwert ε** (Permittivität) $[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = A \cdot s / V \cdot m$ ε_r = relative Permittivität $[\varepsilon_r] = 1$ (einheitenlos)

$E = \dfrac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$ 	**Feldstärke E ausserhalb einer Punktladung** r = Abstand vom Ladungsschwerpunkt in m
$E = \dfrac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r \cdot l}$ 	**Feldstärke um eine Linienladung** $[\vec{E}] = V/m$
$E = \dfrac{Q}{2 \cdot \varepsilon \cdot A}$ 	**Feldstärke um eine Flächenladung** E hängt nicht vom Abstand ab, da Feld konstant! (U hingegen schon) A = Plattenfläche in m^2
$E = \dfrac{Q}{\varepsilon \cdot A} = \dfrac{U}{s}$ Ausserhalb: $E = 0$ 	**Feldstärke zwischen 2 Flächenladungen** E hängt nicht vom Abstand ab, da Feld konstant! (U hingegen schon) **entspricht Plattenkondensator**

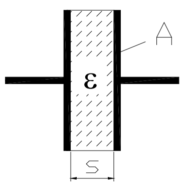
Feldlinien an Grenzflächen

$D_1 = D_2$ $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$ Falls $A_1 \neq A_2$: $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \cdot \dfrac{A_2}{A_1}$ 	**Mehrschichtdielektrikum quergeschichtet** ➔ Serieschaltung von 2 Kondensatoren E = Feldstärke $[\vec{E}] = V/m$ D = dielektrische Flussdichte $[\vec{D}] = A \cdot s / m^2$
$E_1 = E_2$ $\dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$ 	**Mehrschichtdielektrikum längsgeschichtet** ➔ Parallelschaltung von 2 Kondensatoren

Kapazität (dielektrischer Leitwert)

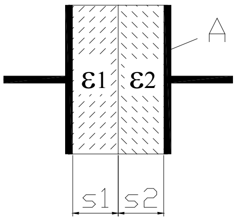
$C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$ — Homogenes Feld: $C = \dfrac{D \cdot A}{E \cdot s} = \dfrac{\varepsilon \cdot A}{s}$	**Kapazität C** $[C] = A \cdot s / V = F$ (Farad)

Felder und Kapazitäten verschiedener geometrischer Anordnungen

$C = \dfrac{\varepsilon \cdot A}{s}$ $E = \dfrac{U}{s}$	 **Platten-Kondensator** s = innerer Plattenabstand in m A = Plattenfläche in m^2 $1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$

$$C = \frac{A}{\frac{s_1}{\varepsilon_1} + \frac{s_2}{\varepsilon_2}} \qquad E_{1(2)} = \frac{U}{\varepsilon_{1(2)} \cdot \left(\frac{s_1}{\varepsilon_1} + \frac{s_2}{\varepsilon_2} \right)}$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \qquad U = E_1 \cdot s_1 + E_2 \cdot s_2$$

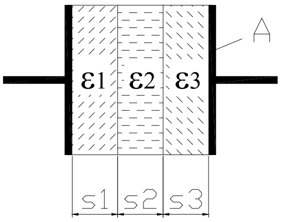


Platten-Kondensator mit zwei Dielektrika

➔ Serieschaltung von 2 Kondensatoren mit gleicher Plattenfläche

$$C = \frac{A}{\frac{s_1}{\varepsilon_1} + \frac{s_2}{\varepsilon_2} + \frac{s_3}{\varepsilon_3}} \qquad U = E_1 \cdot s_1 + E_2 \cdot s_2 + E_3 \cdot s_3$$

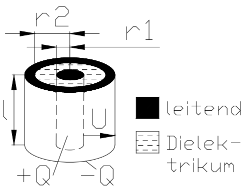
$$E_{1(2)(3)} = \frac{U}{\varepsilon_{1(2)(3)} \cdot \left(\frac{s_1}{\varepsilon_1} + \frac{s_2}{\varepsilon_2} + \frac{s_3}{\varepsilon_3} \right)}$$

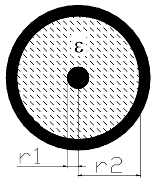


Platten-Kondensator mit drei Dielektrika

➔ Serieschaltung von 3 Kondensatoren mit gleicher Plattenfläche

$$C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}$$



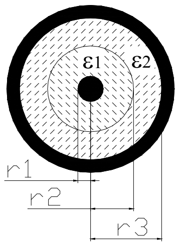


Zylinder-Kondensator

r = Radius des „Standpunktes“ in m
r_1 = Aussenradius des Innenleiters
r_2 = Innenradius des Aussenleiters

$$C = \frac{2\pi \cdot l}{\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}}$$

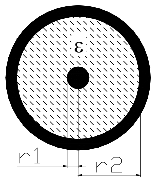
$$E_{1(2)} = \frac{U}{\varepsilon_{1(2)} \cdot r \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} \right)}$$



Zylinder-Kondensator mit zwei Dielektrika

r = Radius des „Standpunktes“ in m
r_1 = Aussenradius des Innenleiters
r_2 = Radius zw. den Dielektrika
r_3 = Innenradius des Aussenleiters

$$C = \frac{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \qquad E = \frac{U \cdot r_2 \cdot r_1}{r^2 \cdot (r_2 - r_1)}$$



Kugel-Kondensator

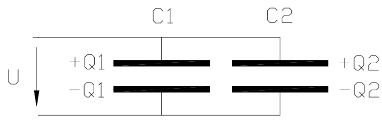
r = Radius des „Standpunktes“ in m
r_1 = Aussenradius des Innenleiters
r_2 = Innenradius des Aussenleiters

Kondensatorschaltungen

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U_q$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n}{U}$$

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$



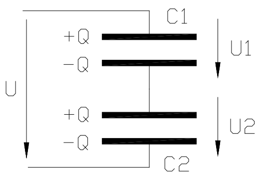
Parallelschaltung

C = Kapazität $\quad [C] = F$
Q = Ladung $\quad [Q] = C$
U = Spannung über beide Kondensatoren

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

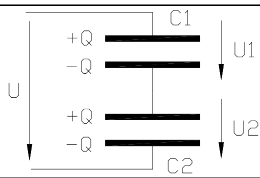
$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$ Für zwei serielle Kondensatoren



Die Kondensatorladungen sind betragsmässig alle gleich gross!

Serieschaltung

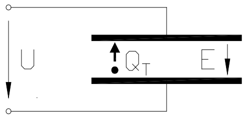
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} \qquad U_2 = \frac{U \cdot C_1}{C_1 + C_2}$$



Kapazitiver Spannungsteiler
(Serieschaltung von 2 Kondensatoren)

Achtung Indizes!

Energie im elektrostatischen Feld

$W_e = C \cdot \int_0^U u \cdot du$ $W_e = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$	**Energie W_e im elektrostatischen Feld** Vergleiche: Energie, um el. Ladung in fremden E-Feld zu verschieben: $W = Q_T * U$ $\quad [W_e] = W \cdot s = J$ (Joule)
$w_e = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot V} = \frac{Q \cdot U}{2 \cdot V} = \frac{Q^2}{2 \cdot C \cdot V}$	**Energiedichte w_e** $\quad [w_e] = \frac{W \cdot s}{m^3}$ V = Volumen des Feldraumes in m^3
Homogenes Feld: $w_e = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon}$ $\quad w_e = \frac{W_e}{V}$	
$\Delta W = Q_T \cdot U$ 	**Verschiebungsarbeit ΔW einer Ladung in einem fremden E-Feld** Merke: ΔW ≠ im Feld gespeicherte Ladung! Dazu: $W_e = U*Q/2$

Kräfte im elektrostatischen Feld

$F = Q \cdot E$	**Kraft F auf Ladung im E-Feld** $\quad [F] = N$ (Newton)
$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot s^2}$	**Kraft zwischen Punktladungen** s = Abstand der Ladungen (Ladungsschwerpunkt)
$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot s \cdot l}$	**Kraft zwischen Linienladungen** s = Abstand der Leiter in m l = Leiterlänge in m $\quad [F] = N = kg \cdot m/s^2$

Kraft zwischen Kondensatorplatten

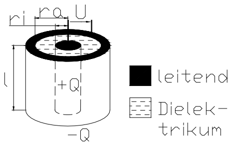
$F = \frac{U^2 \cdot dC}{2 \cdot ds}$	Homogenes Feld (Plattenkondensator): $F = \frac{U^2 \cdot C}{2 \cdot s} = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot A}{2 \cdot s^2}$	**Quelle angeschlossen** ➔ Spannung konstant **F nimmt ab**, je weiter die Platten von einander entfernt sind. Formeln gelten auch bei abgehängter Quelle, wenn Plattenabstand nicht verändert wird.
$F = \frac{U^2 \cdot dC}{2 \cdot ds}$	Homogenes Feld (Plattenkondensator): $F = \frac{U^2 \cdot C}{2 \cdot s} = \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A}$	**Quelle abgehängt** ➔ Ladung konstant **F bleibt konstant** (unabhängig vom Plattenabstand) Formeln gelten auch bei angeschlossener Quelle, wenn Plattenabstand nicht verändert wird.

Strom und Spannung am Kondensator

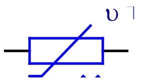
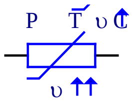
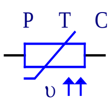
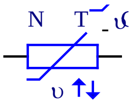
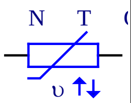
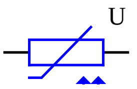
$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	**Differentialform** i = Strom zum Zeitpunkt t
$u = \frac{1}{C} \int_0^{t_f} i \cdot dt + U_0$	**Integralform** u = Spannung zum Zeitpunkt t U_0 = Anfangsspannung

Gleichstromlehre

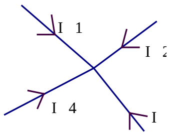
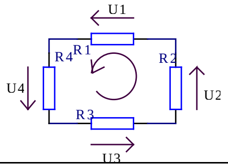
Elektrisches Strömungsfeld

$\vec{E} = dU/d\vec{s}$	Homogenes Feld: $E = U/s$	**Elektrische Feldstärke E**	$[E] = V/m$
$\vec{J} = dI/d\vec{A}$	Homogenes Feld: $J = I/A$	**Stromdichte J**	$[J] = A/m^2$
$\gamma = \vec{J}/\vec{E}$ $\rho = \vec{E}/\vec{J}$ $\rho = 1/\gamma$	$\gamma_{20\,Kupfer} = 56$ $\gamma_{20\,Alu} = 35$ $\gamma_{20\,Silber} = 60$	**Spezifische Leitfähigkeit γ** **Spezifischer Widerstand ρ**	$[\gamma] = \frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega \cdot m}$ $[\rho] = \Omega \cdot m$
$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$	Homogenes Feld: $R = \frac{1}{G} = \frac{l}{\gamma \cdot A} = \frac{\rho \cdot l}{A}$	**Widerstand R eines Leiters** **Leitwert G eines Leiters** l = Leiterlänge in m A = Leiterquerschnitt in m²	$[R] = \Omega$ (Ohm) $[G] = 1/\Omega = S$ (Siemens) 1 cm² = 10^{-4} m²
$G = \frac{2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot l}{\ln(r_a/r_i)}$		**Leitwert eines Hohlzylinders** γ = Leitwert des Zwischenraumes r_i = Aussenradius des Innenleiters r_a = Innenradius des Aussenleiters l = Länge des Zylinders in m	$[G] = S$

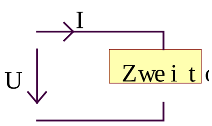
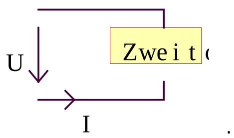
Temperaturabhängigkeit von Widerständen

linear	$R_\vartheta = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta)$ $\Delta R = R_{20} \cdot \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta$ $\Delta\vartheta = \vartheta - 20°C$	Formeln betreffen insbesondere die Metalle	**Lineare Temperaturabhängigkeit** R_{20} = Widerstand bei 20°C R_ϑ = Widerstand bei ϑ („Warmwiderstand“) m = Steigung der Geraden α_{20} = Temperaturkoeffizient bei 20°C $[\alpha_{20}] = 1/°C$ ϑ = Temperatur in °Celsius $[\vartheta] = °C$
nicht linear	$R_T = R_N \cdot e^{\alpha \cdot (T - T_N)}$	 oder 	**PTC** (positive temperature coefficient) ➔ Kaltleiter R_N = Nennwiderstand R_T = Warm/Kaltwiderstand T_N = Nenntemperatur in K oder °C 0°C = 273,16 K α= Temperaturkoeffizient (ist konstant)
	$R_T = R_N \cdot e^{b \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N}\right)}$	 oder 	**NTC** (negative temperature coefficient) ➔ Heissleiter T = Temperatur in Kelvin $[T] = K$ b = Materialkonstante $[b] = K$
	$U = C \cdot I^\beta$ $R = C \cdot I^{(\beta - 1)}$		**VDR** (voltage dependent resistor) C = entspricht Spannungsabfall bei 1A β = Materialkonstante (0.05 – 0.5) Keine Einheitenkontrolle möglich!

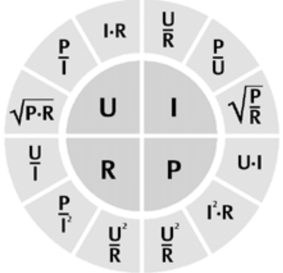
Kirchhoffsche Gesetze

$I_1 + I_2 + ... + I_n = \sum_{k=1}^{n} I_k = 0$ $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$		**Knotenregel** In einem Netzwerkknoten ist die Summe der zufliessenden Ströme gleich der Summe der abfliessenden Ströme. Vorzeichen beachten!
$U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = 0$ $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$		**Maschenregel** In einer Netzwerkmasche ist die Summe aller im Umlauf auftretenden Spannungen gleich Null. Vorzeichen beachten!

Pfeilsysteme

	**Verbraucherpfeilsystem** Spannungs- und Strompfeil gehen vom selben Pol aus. Zweitor arbeitet als Verbraucher, wenn P=U*I positiv.		**Erzeugerpfeilsystem** Spannungs- und Strompfeil gehen **nicht** vom selben Pol aus. Zweitor arbeitet als Quelle, wenn P=U*I positiv.

Energie und Leistung



$$P = U \cdot I$$

$$P = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Leistung P $[P] = V \cdot A = W$ (Watt)

$$W = P \cdot t$$

Energie W $[W] = W \cdot s = J$ (Joule)

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{auf}} \leq 1$$

Wirkungsgrad η $[\eta] = 1$ (einheitenlos)

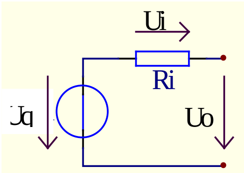
P_{auf} = aufgenommene Leistung
P_{ab} = abgegebene Leistung

Spannungs-/ Stromquellen

$$U = U_q - U_i \quad = U_q - R_i \cdot I$$

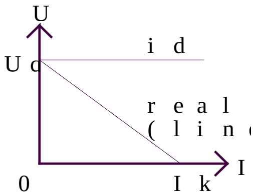
$$U_0 = U_q \cdot I_k \quad U_q / R_i$$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_q}{I_k}$$



Lineare **Spannungsquelle**

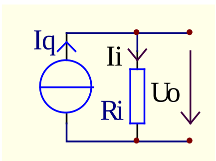
U_q = Quellenspannung (ideal)
U_0 = Lehrlaufspannung
I_k = Kurzschlussstrom
R_i = Innenwiderstand
U_i = Spannungsabfall am R_i
U = Klemmenspannung bei Belastung



$$I = I_q - I_i \quad = I_q - U_0 / R_i$$

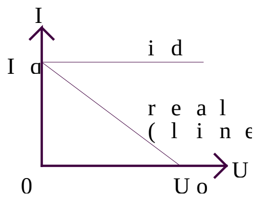
$$I_k = I_q \quad U_0 = I_q \cdot R_i$$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_0}{I_q}$$



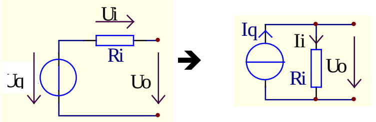
Lineare **Stromquelle**

I_q = Quellenstrom
I_k = Kurzschlussstrom
R_i = Innenwiderstand
U_0 = Lehrlaufspannung
I_i = Strom durch R_i
I = Klemmenstrom bei Belastung



$$I_q = U_q / R_i$$

$$I_q = I_k$$

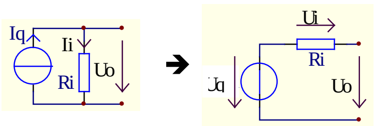


Quellenumwandlung
Spannungsquelle ➔ Stromquelle

Es können nur lineare, keine ideale Quellen umgewandelt werden!

$$U_q = R_i \cdot I_q$$

$$U_q = U_0$$

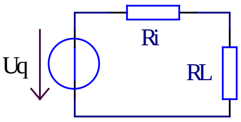


Quellenumwandlung
Stromquelle ➔ Spannungsquelle

Geht nur, wenn ein Widerstand(snetzwerk) ohne Knoten parallel zur Stromquelle liegt (Innenwiderstand)

$$R_L = R_i \qquad \eta = 0.5$$

$$P_{max} = \frac{U_q^2}{4 \cdot R_i}$$



Leistungsanpassung

P_{max} = Leistung am Lastwiderstand bei Anpassung
P_{max} = ½ Quellenleistung

Ersatzwiderstand

$$R_E = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

Serieschaltung von Widerständen

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

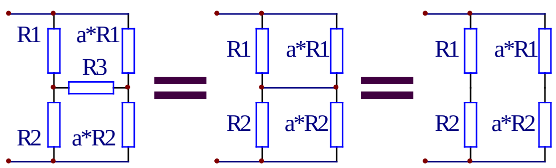
$$G_E = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$$

Für 2 parallele Widerstände:

$$R_E = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Parallelschaltung von Widerständen

R_E = Ersatzwiderstand



Brückenvereinfachungen

Da die Brücke abgeglichen ist, fliesst kein Querstrom (I_3 = 0)

Abgleichbedingung:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a \cdot R_1}{a \cdot R_2}$$

Ähnlichkeitsregel

$$\frac{I_r}{I_a} = \frac{U_{qr}}{U_{qa}} \qquad I_r = I_a \cdot \frac{U_{qr}}{U_{qa}}$$

I_r = Realer Strom
I_a = Angenommener Strom
U_{qr} = Reale Quellenspannung
U_{qa} = Angenommene Quellenspannung

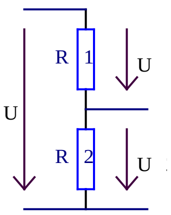
Spannungs- und Stromteiler

$$U_m = U \cdot \frac{R_m}{\sum R}$$

Für 2 Widerstände in Serie:

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



Spannungsteiler

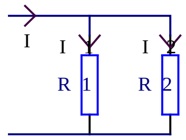
Gilt nicht bei Belastung!

$$I_m = I \cdot \frac{G_m}{\sum G}$$

Für 2 parallele Widerstände:

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 / I_2 = R_2 / R_1$$



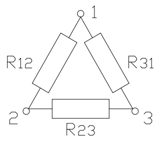
Stromteiler

Achtung Indizes!

Stern-Dreieck-Transformation

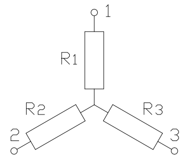
Dreieck Δ:

R_{12} = Widerstand von 1 zu 2
R_{23} = Widerstand von 2 zu 3
R_{31} = Widerstand von 3 zu 1



Stern Y:

R_1 = Widerstand von 1 zur Mitte
R_2 = Widerstand von 2 zur Mitte
R_3 = Widerstand von 3 zur Mitte



Stern ➔ Dreieck **Y ➔ Δ**

$$R_{12} = S/R_3 \qquad R_{23} = S/R_1 \qquad R_{31} = S/R_2$$

$$S = R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1$$

Dreieck ➔ Stern **Δ ➔ Y**

$$R_1 = R_{12} \cdot R_{31}/D \qquad R_2 = R_{23} \cdot R_{12}/D$$

$$R_3 = R_{31} \cdot R_{23}/D \qquad D = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

Δ ➔ Y: $R_Y = \dfrac{R_\Delta}{3}$

Y ➔ Δ $R_\Delta = 3 \cdot R_Y$

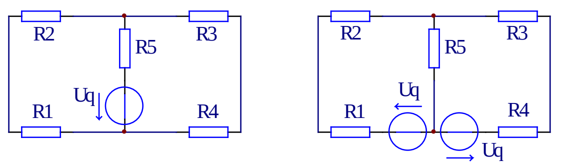
wenn alle 3 Widerstände gleich gross:

R_Δ = Widerstand Dreiecksschaltung
R_Y = Widerstand Sternschaltung

Quellenverschiebung

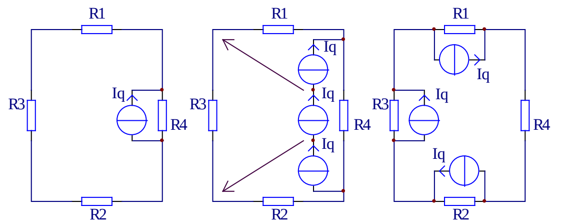
Ideale Spannungsquelle:

- Bei Verschiebung über einen Knoten wird die Quelle vermehrt und in jeden angrenzenden Zweig geschoben
  ➔ Maschengleichungen werden nicht verändert



Ideale Stromquelle:

- Quelle wird zuerst vermehrt und danach umgehängt
  ➔ Knotengleichungen werden nicht verändert



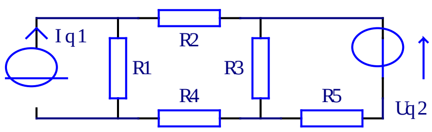
Ersatzspannungsquelle

➔ liefert Strom und Spannung in einem Netzzweig

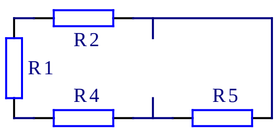
- Widerstand, für den Ersatzquelle bestimmt wird, abhängen
- Innenwiderstand der Ersatzquelle:
  - vorhandene Quellen ausschalten
    - Spannungsquellen kurzschliessen
    - Stromquellen unterbrechen
  - Widerstände zusammenfassen ➔ R_i
- Quellenspannung der Ersatzquelle:
  - I-Quellen in U-Quellen umwandeln
  - Quellen zusammenfassen
  - durch Widerstände in den direkten Klemmenzweigen fliesst kein Strom
    ➔ weglassen
  - Spannung an den Ausgangsklemmen bestimmen ➔ U_0

Beispiel:

Gesucht:
Ersatzspannungsquelle für R3

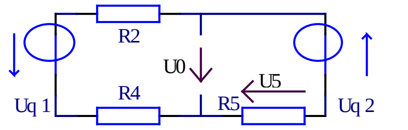


Innenwiderstand R_i:

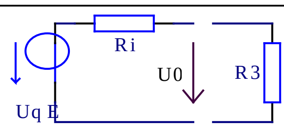


R_i = (R1+R2+R4)||R5

Ersatz-Quellenspannung $U_0 = U_{qE} = U_5 - U_{q2}$



$$U_5 = (U_{q1} + U_{q2}) \cdot \frac{R_5}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}$$



Resultat: Ersatzspannungsquelle, mit welcher nun Strom und Spannung in R3 berechnet werden kann

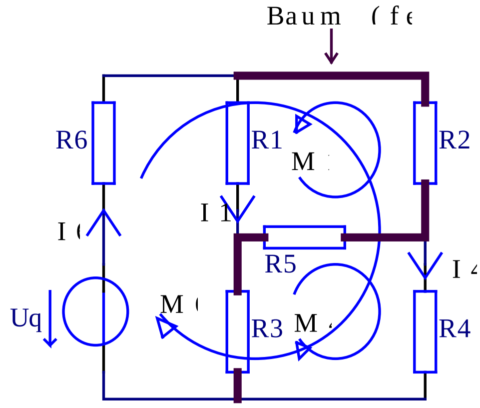
Maschenstrom-Verfahren

➔ liefert Ströme in den Verbindungszweigen

- Reale Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln
- Baum bilden:
  - Ein zusammenhängender Linienzug, der alle Knoten erfasst, aber keinen geschlossenen Umlauf bildet (nicht zwingend ohne Stift abzusetzen)
  - gesuchte Ströme und ideale Stromquellen müssen in Verbindungszweigen (VZ) sein
- Maschen legen:
  - pro Masche nur ein Verbindungszweig
  - Umlaufsinn gemäss Stromrichtung in VZ
  - ergibt so viele Maschen wie VZ
- Widerstandsmatrix (linke Seite):
  - Hauptdiagonale: Summe der Widerstände der entsprechenden Masche
  - andere Elemente: Widerstände, die den entsprechenden Maschen gemeinsam sind
    - **+** bei gleicher Maschenumlaufrichtung
    - **–** bei entgegengesetzter Umlaufrichtung (beim jeweiligen Widerstand betrachtet)

  ➔ Symmetrie der Matrix zur Hauptdiagonalen
- Spannungsmatrix (rechte Seite):
  - Quellenspannungen, die in der entsprechenden Masche erhalten sind
    - **+** bei Spannungsrichtung entgegen Maschenumlaufsinn
    - **–** bei Spannungsrichtung gleich Maschenumlaufsinn
- Berechnung: $[I] = [R]^{-1} * [U]$

Beispiel:



	I_1	I_4	I_6	U
M_1	$R_1+R_2+R_5$	R_5	$-R_2$	0
M_4	R_5	$R_3+R_4+R_5$	R_4	0
M_6	$-R_2$	R_4	$R_2+R_4+R_6$	$+U_q$

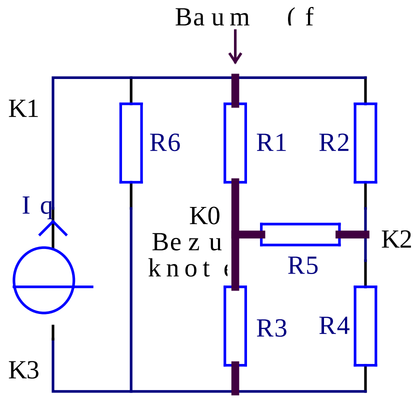
Knotenpotential-Verfahren

➔ liefert Spannung gegenüber dem Bezugsknoten

- Reale Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln
- Baum bilden:
  - Bezugsknoten wählen, Baum sternförmig vom Bezugsknoten aus
  - Ideale Spannungsquellen in Baumzweige legen
- Alle Knoten („Sammelschienen") nummerieren
- Leitwertmatrix (linke Seite):
  - Hauptdiagonale: Summe der Leitwerte, die an den entsprechenden Knoten angrenzen
  - andere Elemente: Leitwerte der direkten VZ, die zwischen den beiden entsprechenden Knoten liegen
    - Vorzeichen immer negativ
    - 0, wenn keine direkte Verbindung oder nur ideale Stromquelle

  ➔ Symmetrie der Matrix zur Hauptdiagonalen
- Strommatrix (rechte Seite):
  - Stromquellen am entsprechenden Knoten
    - **+** wenn Strom dem Knoten zufliesst
    - **–** wenn Strom vom Knoten wegfliesst
- Berechnung: $[U] = [G]^{-1} * [I]$

Beispiel:



	U_{10}	U_{20}	U_{30}	I
K_1	$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}$	$-\frac{1}{R_2}$	$-\frac{1}{R_6}$	$+I_q$
K_2	$-\frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}$	$-\frac{1}{R_4}$	0
K_3	$-\frac{1}{R_6}$	$-\frac{1}{R_4}$	$\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}$	$-I_q$

Magnetismus

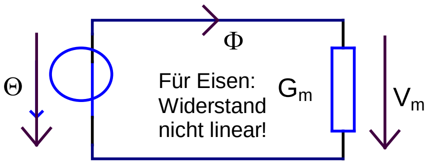
$\Theta = V_m$

$\Phi = \Theta \cdot G_m$

Analogie zum Stromkreis:

$\Theta \equiv U_q$ $V_m \equiv U$

$\Phi \equiv I$ $G_m \equiv G$



Ersatzschaltbild

Θ = magn. Durchflutung (Ursache; Quellenseite) $[\Theta] = A$

V_m = magn. Durchflutung (Verbraucherseite) $[V_m] = A$

Φ = magnetischer Fluss (Wirkung) $[\Phi] = V \cdot s$

G_m = magnetischer Leitwert $[G_m] = H$

$\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I$ Durchflutungsgesetz

$V_m = \int_s \vec{H} \bullet d\vec{s}$

$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

$\Phi = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ *quellenfrei*

Homogenes Feld:

$\Theta = H \cdot s$

$= N \cdot I = \sum I$

$V_m = H \cdot s$

$\Phi = B \cdot A$

magn. **Durchflutung** Θ (Quellenseite) $[\Theta] = A$

magn. **Durchflutung** V_m (Verbraucherseite) $[V_m] = A$

magn. **Fluss** Φ $[\Phi] = V \cdot s = Wb$ (Weber)

I = Strom

N = Windungszahl der Spule

s = Länge des Feldraumes in Richtung von H

$\vec{H} = dV_m / d\vec{s}$

Homogenes Feld:

$H = V_m / s$

magnetische **Feldstärke H** $[H] = A/m$

s = Länge des Feldraumes in Richtung der Feldstärke in m

$\vec{B} = d\Phi / d\vec{A}$

Homogenes Feld:

$B = \Phi / A$

magn. **Flussdichte B** $[B] = V \cdot s/m^2 = T$ (Tesla)

A = Fläche 90° zur Flussdichte in m^2 $1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$

$B = \mu \cdot H$

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}$

$\mu_{r\ Luft} = \mu_{r\ Vakuum} = 1$

$\mu_{r\ Eisen} \approx 10^3 - 10^5$

Permeabilität μ $[\mu] = [\mu_0] = V \cdot s / A \cdot m$

μ_0 = magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 1/\left(c_0^{\ 2} \cdot \varepsilon_0\right)$

μ_r = relative Permeabilität $[\mu_r] = 1$ (einheitenlos)

$$G_m = \frac{\Phi}{V_m} = \frac{\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{H} \cdot d\vec{s}}$$

Homogenes Feld:

$$G_m = \frac{\Phi}{V_m} = \frac{B \cdot A}{H \cdot s} = \frac{\mu \cdot A}{s}$$

magn. **Leitwert G_m** $[G_m] = V \cdot s/A = H$ (Henry)

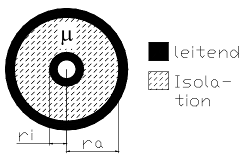
μ = Permeabilität $[\mu] = V \cdot s / A \cdot m$

$$G_m = \frac{\mu \cdot s}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$V_m = \frac{B \cdot s}{\mu}$$

Strom:

Innen und aussen gleich gross, aber entgegengesetzt



Koaxialkabel

G_m = magnetischer Leitwert $[G_m] = H$

s = Länge des Leiters in m

r_i = Radius des Innenleiters

r_a = Radius der Abschirmung

Materie im Magnetfeld

Paarweise geordnete Elektronen hindern das Magnetfeld ➔ kleinere Flussdichte im Material als aussen	**Diamagnetismus**	$\mu_r < 1$	Blei, Kupfer, Wasser, Supraleiter
Elementarmagnete werden durch das Magnetfeld ausgerichtet ➔ grössere Flussdichte im Material als aussen	**Paramagnetismus**	$\mu_r > 1$	Aluminium, Platin, Tantal
Tritt nur in Materialien auf, wo die Elementarmagnete in Weiss'schen Bezirken gleich ausgerichtet sind ➔ mehrfach grössere Flussdichte im Material als aussen	**Ferromagnetismus**	$\mu_r >> 1$	Eisen, Nickel, Kobalt

Gesetz von Biot-Savart

$\vec{H} = \vec{v} \times \vec{D}$

$$\vec{H} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \left(\vec{v} \times \vec{r}\right)$$

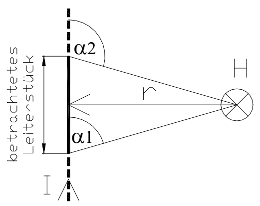
v = Geschwindigkeit der elektrischen Ladung in m/s

r = Abstand zur Ladung in m

D = dielektrische Flussdichte $[D] = A \cdot s/m^2$

Q = elektrische Ladung $[Q] = C$

$$H = \frac{I \cdot \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{4 \cdot \pi \cdot r}$$



Feldstärke eines geraden Leiterabschnittes

Der Leiter darf nicht aus einem ferromagnetischen Material sein!

H = Feldstärke an einem Punkt neben dem Leiter $[H] = A/m$

r = Abstand Leitermitte – Punktmitte (senkrecht) in m

I = Strom durch den Leiter

α = Winkel Punkt – Leiterabschnitt (auf der gleichen Seite!)

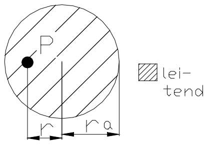
Felder verschiedener geometrischer Anordnungen

Ausserhalb:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Innerhalb:

$$H = \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_a^{\,2}}$$



Feldstärke eines unendlich langen Leiters

r_a = Aussenradius des Leiters
r = Radius des „Standpunktes“ P vom Leitermittelpunkt aus in m

---

Ausserhalb: $r \geq r_a$

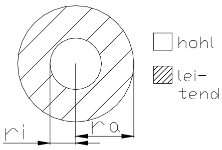
$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_a}$$

Innerhalb: $r \leq r_i$

$$H = 0$$

Mitte: $r_i \leq r \leq r_a$

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{r^2 - r_1^{\,2}}{r_a^{\,2} - r_1^{\,2}}$$



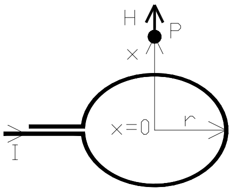
Feldstärke eines unendlich langen Hohlleiters

r_a = Aussenradius des Leiters
r = Radius des „Standpunktes“

$$H = \frac{I \cdot r^2}{2 \cdot (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Falls x = 0:

$$H = \frac{I}{2 \cdot r}$$



Feldstärke einer Leiterschlaufe

H = Feldstärke an einem Punkt P oberhalb des Mittelpunktes der Leiterschlaufe

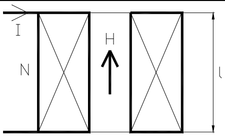
$[H] = A/m$

r = Radius der Leiterschlaufe in m
x = Abstand P zum Kreismittelpunkt in m

Näherung:

$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

Formel ist umso genauer, je länger und dünner die Spule ist



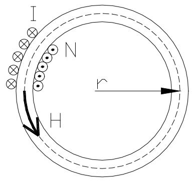
Feldstärke einer Zylinderspule

I = Spulenstrom
N = Windungszahl
l = Länge der Spule in m

Feldlinien gehen innerhalb der Spule vom Süd- zum Nordpol

$$H = \frac{N \cdot I}{s} = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Das Feld ist in der Spule „gefangen“



Feldstärke einer Ringspule (Torus)

s = 2 π r = mittlerer Umfang des Torus in m
I = Spulenstrom
N = Windungszahl
r = mittlerer Radius des Torus in m

Magnetische Kreise

$$H_L = B_L / \mu_0 \qquad V_{mL} = H_L \cdot l_L \qquad \Phi = B_L \cdot A_L$$

$$B_E = \Phi / A_E \xrightarrow{MK} H_E \qquad V_{mE} = H_E \cdot l_E$$

$$\Theta = V_{mL} + V_{mE1} + \ldots + V_{mEx}$$

streuungsfrei

Synthese

geg: B_L ges: $\Theta = I \cdot N$

Index L: Luftspalt
Index E: Eisen
A = Querschnitt in m^2
l = Länge in m

$$\Phi_L = B_L \cdot A_L = \Phi_E = B_E \cdot A_E$$

$$B_{E\ (H_E)} = \frac{\mu_0 \cdot A_L}{A_E \cdot l_L} \cdot \left(\Theta - H_E \cdot l_E\right)$$

$$B_L = B_E \cdot A_E / A_L$$

streuungsfrei;

Eisenquerschnitt überall gleich

Scherungsgerade: Von B_E* nach H_E*

Für $H_E = 0$: $B_E^{\ *} = \mu_0 \cdot A_L / A_E \cdot l_L$

Für $B_E = 0$: $H_E^{\ *} = \Theta / l_E$

Analyse

geg: Θ ges: B_L

$B_E^{\ *}$ und $H_E^{\ *}$: ➔ Scherungsgerade ➔ Arbeitspunkt im 1. Quadranten der Magnetisierungskurve

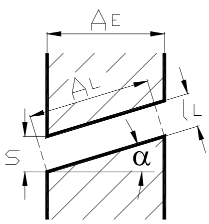
B = Flussdichte	$[B] = T$
Θ = Durchflutung	$[\Theta] = A$
V_m = Durchflutung	$[V_m] = A$
Φ = Fluss	$[\Phi] = V \cdot s$
H = Feldstärke	$[H] = A/m$

$$A_E = A_L \cdot \cos\alpha$$

$$l_L = s \cdot \cos\alpha$$

$$B_{E(H_E)} = \frac{\mu_0 \cdot \left(\Theta - H_E \cdot l_E\right)}{\cos\alpha \cdot l_L}$$

$$B_L = B_E \cdot \cos\alpha$$



Analyse bei schrägem Luftspalt:

A_L = Fläche des Luftspaltes in m^2 $\qquad$ $1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$
A_E = Eisenquerschnitt
l_l = Luftspalt-Länge in m
α = Öffnungswinkel

$$H_L \cdot l_L = -H_D \cdot l_D$$

$$B_L \cdot A_L = B_D \cdot A_D$$

$$B_{D(H_D)} = -H_D \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_L \cdot l_D}{A_D \cdot l_L}$$

Annahme:
Eisenjoch ideal;
streuungsfrei

H_L und H_D sind einander entgegengesetzt gerichtet

Magnetischer Kreis mit **Dauermagnet**

$B_{D(H_D)}$ ➔ Scherungsgerade ➔ Arbeitspunkt im 2. Quadranten der Magnetisierungskurve

H_D = magn. Feldstärke des Dauermagneten
l_D = Länge des Dauermagneten

Induktion

Falls Feld in Bewegung:

$$\vec{E}_i = \vec{B} \times \vec{v}_F$$

$$E_i = B \cdot v \cdot \sin\alpha$$

$$u_q = \int_s \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

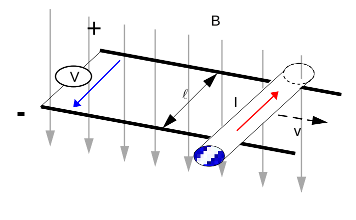
$$u_q = B \cdot v \cdot l$$

Bedingung:
Der Leiter liegt auf $\vec{E}_i$

Falls Leiter in Bewegung:

$$\vec{E}_i = \vec{v}_L \times \vec{B}$$

Pluspol dort, wo $\vec{E}$ hinzeigt



Die Induktivität ist die Fähigkeit, mit einem bestimmten Strom I einen gewissen magnetischen Fluss Φ zu erzeugen.

Rechte Hand-Regel
(Generatorregel)

Lenzsche Regel:
Der durch die Induktionsspannung hervorgerufene Strom ist so gerichtet, dass er der Ursache der Induktion entgegenwirkt.

Bewegungsinduktion (Generator)

E_i = Induziertes Feld $\quad [E] = V/m$

B = Magnetisches Feld $\quad [B] = T$

V_F = Bewegungsgeschwindigkeit des Feldes in m/s

V_L = Bewegungsgeschwindigkeit des Leiters

u_q = Quellenspannung

l = Länge des Leiters in m

α = Winkel zwischen B und v

Bei einem Leiter:

$$u_i = \int_s \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Induktionsgesetz

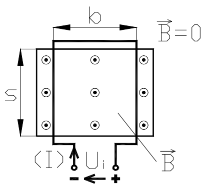
Bei mehreren Leitern:

$$u_i = \frac{N \cdot d\Phi}{dt}$$

Leiterschleife im Eisenjoch-Luftspalt:

$$U_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB \cdot A}{dt} = \frac{dB \cdot b \cdot s}{dt}$$

Nur die von der Leiterschleife eingeschlossene und von B durchflutete Fläche zählt!



Ruheinduktion (Transformator)

E_i = Induziertes Feld

u_i = Induzierte Spannung

N = Windungszahl

dΦ = magnetische Flussänderung $\quad [\Phi] = V \cdot s$

ΔB = magnetische Flussdichtenänderung $\quad [B] = T$

dt = Zeitänderung in s

Selbstinduktion

$$\boxed{u_L = L \cdot \frac{di}{dt}}$$

Für nicht konstantes μ:

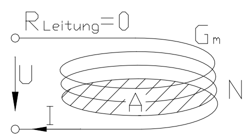
$$L_d = N^2 \cdot \frac{\mu_d \cdot A}{s} \quad \text{mit} \quad \mu_d = \frac{dB}{dH}$$

Für konstantes μ:

$$L = N^2 \cdot G_m$$

$$L = N^2 \cdot \mu \cdot A/s$$

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N \cdot B \cdot A}{I}$$



Vereinfachungen:
- $R_{Cu} = 0$
- Magnetfeld homogen

Selbstinduktion

u_L = Induzierte Spannung an Spule

L = Induktivität $\quad [L] = V \cdot s/A = H$ (Henry)

L_d = Differentielle Induktivität

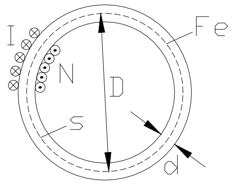
μ_d = Differentielle relative Permeabilität (Steigung der Magnetisierungskurve) $\quad [\mu_d] = V \cdot s/A \cdot m$

s = Länge der Feldlinien in m

A = Querschnittsfläche der Spule in m^2

G_m = magnetischer Leitwert des Feldraumes $\quad [G_m] = H$

N = Windungszahl der Spule



Selbstinduktivität einer Kreisringspule

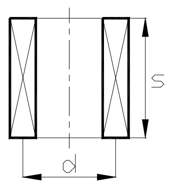
$$L = N^2 \cdot \frac{\mu \cdot d^2}{4 \cdot D}$$

Bedingung: μ konstant !

Selbstinduktivität einer langen Zylinderspule

$$L = N^2 \cdot \frac{\mu \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot s}$$

Bedingung: μ konstant !



$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n$$

Serieschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

Parallelschaltung von Induktivitäten

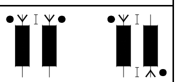
Gegeninduktion

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21} \cdot N_2}{I_1} = \frac{\Psi_{m21}}{I_1}$$

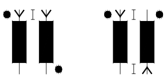
$$L_{12} = \frac{\Phi_{12} \cdot N_1}{I_2} = \frac{\Psi_{m12}}{I_2}$$

$$L_{21} = L_{12}$$

$L_{12} > 0$:



$L_{12} < 0$:



Gegeninduktivität zweier Induktivitäten

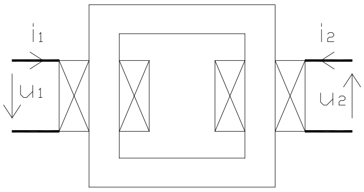
L_{12} = Gegeninduktivität zwischen L_1 und L_2 $\quad [L] = H$

Φ_{12} = Fluss durch Spule 1 verursacht durch Spule 2, wenn Spule 1 ausgeschaltet $\quad [\Phi] = V \cdot s$

$L_{12} > 0$: Gleichsinnige Kopplung (Induktivitäten unterstützen sich)

$L_{12} < 0$: Gegensinnige Kopplung (z.B. Trafo)

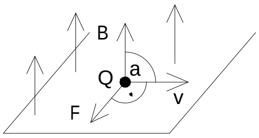
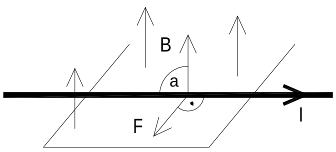
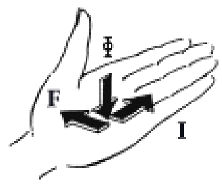
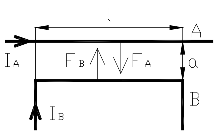
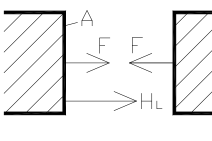
Ψ = verketteter Fluss $\quad \Psi = \Phi \cdot N = L \cdot I \quad [\Psi] = V \cdot s$

$L_{21} = L_{12} = N_1 \cdot N_2 \cdot G_m$ $L_{21} = L_{12} = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ ideal: - G_m konstant - kein Streufluss	**Gegeninduktivität eines Trafos** G_m = Magnetischer Leitwert des Feldraumes $[G_m] = H$ k = Kopplungsfaktor **k ≤ 1**
$L_{21} = L_{12} = N_1 \cdot N_2 \cdot G_m \cdot k$ $L_{21} = L_{12} = \sqrt{L_1 \cdot L_2} \cdot k$ real	
$u_1 = i_1 \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{12} \cdot \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = i_2 \cdot R_2 + L_{21} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$ Wenn $i_2 = 0$ und R_1 vernachlässigt: $u_1/L_1 = u_2/L_{12}$ $(= di_1/dt)$ Wenn k = 1: $u_1/u_2 = N_1/N_2$	R= Kupferwiderstand Index 1: Primärseite Index 2: Sekundärseite L_{12} = Gegeninduktion 
$L_E = L_1 + L_2 + 2 \cdot L_{12}$ Gleichsinnige Kopplung: $L_{12} > 0$ Gegensinnige Kopplung: $L_{12} < 0$	**Serieschaltung von gekoppelten Spulen** L_E = Ersatzinduktivität $[L] = H$

Energie und Leistung im Magnetfeld

$W_m = L \cdot \int_0^I i \cdot di = \frac{L \cdot I^2}{2}$ Hängt nicht von μ ab!	**Energie** W_m = in der Spule gespeicherte Energie $[W_m] = W \cdot s = J$ (Joule)
Bei konstantem μ: $w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{H \cdot B}{2} = \frac{\mu \cdot H^2}{2} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu}$	**Energiedichte** w_m = Energiedichte in der Spule $[w_m] = \frac{W \cdot s}{m^3}$
Bei nicht konstantem μ: $w_m = \int_0^B H \cdot dB$ ➔ Fläche der Magnetisierungskurve	H = magnetische Feldstärke $[H] = A/m$ B = magnetische Flussdichte $[B] = T$
$p_m = \frac{dW_m}{dt} = \frac{\Theta \cdot d\Phi}{dt}$ $p_m = p_{el}$	**Leistung** P_m = magnetische Leistung $[p] = W$ P_{el} = elektrische Leistung

Kräfte im Magnetfeld

$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ $F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$ 	**Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld** Q = Ladung $[Q] = A \cdot s = C$ (Coulomb) B = magn. Flussdichte v = Geschwindigkeit der Ladung in m/s^2 α = Winkel zwischen Geschwindigkeit und Feld
$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$ $F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha$ 	**Kraft auf einen Leiter** *I* = Strom durch Leiter *l* = Länge des Leiters α = Winkel zwischen Leiter und Feld  Linke Hand-Regel (Motorregel)
$F_A = F_B = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi \cdot a} \cdot I_A \cdot I_B$ 	**Kraft zwischen zwei parallelen Leitern** I_A = Strom durch Leiter A I_B = Strom durch Leiter B a = Abstand der Leiter l = gemeinsame Leiterlänge Leiter mit gleicher Stromrichtung ziehen sich an. Leiter mit entgegengesetzter Stromrichtung stossen sich ab.
$F = \frac{H_L \cdot B_L \cdot A}{2} = \frac{\mu_0 \cdot H_L \cdot A}{2}$ $F = \frac{B_L^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} = \frac{H_L \cdot \Phi}{2}$ 	**Kraft auf Polflächen** $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$ H_L = Feldstärke in der Luft $[H] = A/m$ B_L = Flussdichte in der Luft $[B] = T$ Φ = magnetischer Fluss $[\Phi] = V \cdot s$ A = Fläche der Pole in m^2

Wechselstromlehre

Mittelwerte periodischer Grössen

$\overline{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} u \cdot dt$ Reine Wechselgrösse: $\overline{u} = 0$	**Gleichwert** $\overline{u}$ Arithmetischer Mittelwert, Chemische Wirkung t_1 = Anfangszeitpunkt T = Dauer des betrachteten Abschnittes

$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2 \cdot dt}$ **R**oot **M**ean **S**quare (RMS): Zuerst Signal quadrieren, dann den arithmetischen Mittelwert bilden, dann die Wurzel ziehen	**Effektivwert U / U_{eff}** Quadratischer Mittelwert Eine Gleichspannung der Grösse U würde in einem ohmschen Widerstand dieselbe Energie in Wärme umsetzen wie die Wechselspannung mit dem Effektivwert U_{eff}.
Periodische Funktion mit verschieden Abschnitten: $U = \sqrt{\left(U_1^2 \cdot \Delta t_1 + U_2^2 \cdot \Delta t_2 + ...\right) \cdot 1/T}$	U = Effektivwert der gesamten Funktion U_1 = Effektivwert des 1. Abschnittes mit der Zeitdauer Δt_1

Effektivwert eines Sinussignals	Effektivwert eines Dreiecksignals	Effektivwert eines Rechtecks
$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ û = Amplitude	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$ Bedingung: positive = |negative| Spitze. Die Signalform ist egal	$U = \hat{u}$ Bedingung: positive = |negative| Spitze. Das Tastverhältnis ist egal

$U = \sqrt{\underbrace{U_0^2}_{\text{DC-Anteil}} + \underbrace{U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2}_{\text{AC-Anteil}}}$	Effektivwert von Mischgrössen U_0 = Gleichanteil U_1 = Grundschwingung (1. Oberwelle) U_2 = 2. Oberwelle
$U = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{eff\ AC}^2}$ Geometrische Summe der überlagerten Gleichspannung und des reinen AC-Effektivwertes	U_{DC} = Gleichspannungsanteil (konstant) $U_{eff\ AC}$ = Effektivwert des Wechselspannungsanteil

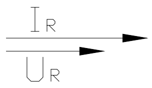
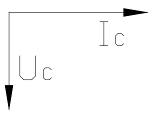
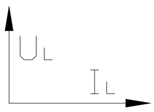
$\overline{\lvert u\rvert} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \lvert u\rvert \cdot dt$ Zuerst Signal gleichrichten, dann den arithmetischen Mittelwert bilden	**Gleichrichtwert** $\overline{\lvert u\rvert}$ Arithmetischer Mittelwert des Betrags

$k_s = \frac{Scheitelwert}{Effektivwert} = \frac{\hat{i}}{I} = \frac{\hat{u}}{U}$ $F = \frac{Effektivwert}{Gleichrichtwert} = \frac{I}{\overline{\lvert i\rvert}} = \frac{U}{\overline{\lvert u\rvert}}$	**Verhältniszahlen** k_s = Scheitelfaktor $[k_s] = 1$ F = Formfaktor $[F] = 1$

Sinusförmige Grössen

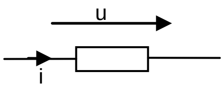
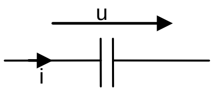
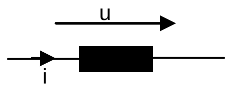
$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$ oder $u = \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$ $\omega = 2\pi \cdot f$ $\omega = 2\pi/T$ $f = 1/T$	u = Momentanwert û = Amplitude $\omega t+\varphi_u$ = Phasenwinkel φ_u = Nullphasenwinkel im Bogenmass ω = Kreisfrequenz $[\omega] = s^{-1}$ (nicht Hertz!) f = Frequenz $[f] = s^{-1} = Hz$ (Hertz) T = Periodendauer in s
$\overline{u} = 0$ $U = \hat{u}/\sqrt{2}$ $\overline{\lvert u\rvert} = \hat{u} \cdot 2/\pi$ $k_s = \sqrt{2}$ $F = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1.111$	$\overline{u}$ = Gleichwert / arithmetischer Mittelwert U = Effektivwert $\overline{\lvert u\rvert}$ = Gleichrichtwert k_s = Scheitelfaktor F = Formfaktor

Netzwerkelemente

$u_R = R \cdot i_R$ 	**Widerstand R** I_R = Strom durch den Widerstand u_R =Spannung über dem Widerstand	Allgemein gültig, unabhängig von der Signalform
$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ $u_C = \left(\frac{1}{C} \cdot \int i_C \cdot dt\right) + U_C(0)$ 	**Kapazität C** i_c = Strom durch die Kapazität u_c = Spannung über der Kapazität $U_c(0)$ = Anfangsspannung Der Strom eilt der Spannung um 90° vor (gilt nur bei sinusförmigen Signalen)	
$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$ $i_L = \left(\frac{1}{L} \cdot \int u_L \cdot dt\right) + I_L(0)$ 	**Induktivität L** i_L = Strom durch die Induktivität u_L = Spannung über der Induktivität $I_c(0)$ = Anfangsstrom Der Strom eilt der Spannung um 90° nach (gilt nur bei sinusförmigen Signalen)	

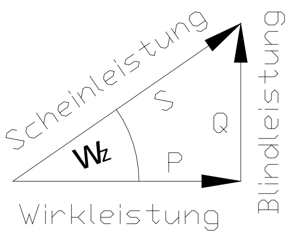
$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$ $\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u$	φ_Z = Phasenwinkel der Impedanz φ_Y = Phasenwinkel der Admittanz φ_U = Phasenwinkel der Spannung φ_I = Phasenwinkel des Stromes

Analyse im Zeitbereich gilt nur für sinusförmige Grössen!

		
$I = U/R$ $\varphi_i = \varphi_u$	$I = \omega \cdot C \cdot U$ $\varphi_i = \varphi_u + \pi/2$	$I = U/(\omega \cdot L)$ $\varphi_i = \varphi_u - \pi/2$
$Z_R = R$ $\quad Y_R = G$	$Z_C = X_C$ $\quad Y_C = B_C$ $Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ $\quad Y_C = \omega \cdot C$	$Z_L = X_L$ $\quad Y_L = B_L$ $Z_L = \omega \cdot L$ $\quad Y_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$
$\varphi_Z = 0$ $\quad \varphi_Y = 0$	$\varphi_Z = -\pi/2$ $\quad \varphi_Y = +\pi/2$	$\varphi_Z = +\pi/2$ $\quad \varphi_Y = -\pi/2$

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ $\quad \tan\varphi_Z = X/R$	**Serieschaltung von Wirk- und Blindwiderstand**
$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ $\quad \tan\varphi_Y = B/G$	**Parallelschaltung von Wirk- und Blindwiderstand**

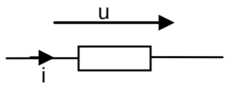
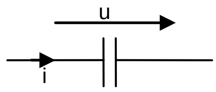
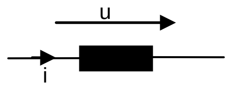
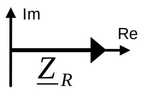
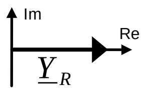
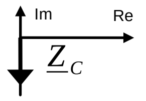
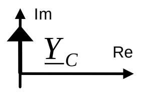
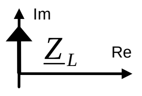
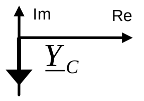
Leistung / Energie

$S = U \cdot I$ $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi_Z$ $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi_Z$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $\lambda = P/S = \cos\varphi_Z$ 		**Leistung** S = Scheinleistung $[S] = VA$ P = Wirkleistung $[P] = W$ Q = Blindleistung $[Q] = \text{var}$ λ = cos φ_Z = Wirkleistungsfaktor sin φ_Z = Blindleistungsfaktor φ_Z = Phasenwinkel der Impedanz
$W_{T_p} = \int_0^{T_p} p(t) \cdot dt$ $p(t) = u(t) \cdot i(t)$	$P = \frac{W_{T_p}}{T_p} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} u(t) \cdot i(t) \cdot dt$ Gilt unabhängig von der Signalform	**Energie / Wirkleistung** W_{Tp} = Energie $[W] = W \cdot s = J$ P = Wirkleistung $[P] = W$ T_P = Periodendauer der Leistung $[T] = s$

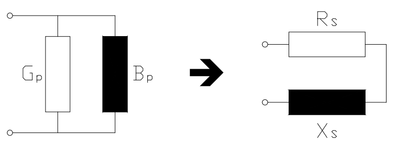
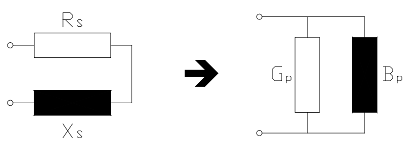
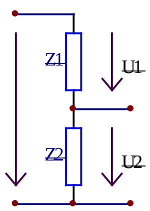
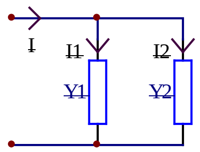
Analyse im Frequenzbereich

gilt nur für sinusförmige Grössen!

$\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$ $\quad \underline{U} = U \angle \varphi_u$	Komplexe **Spannung** $\underline{U}$
$\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$ $\quad \underline{I} = I \angle \varphi_i$	Komplexer **Strom** $\underline{I}$
$\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) + \mathrm{Im}(\underline{Z}) = R + jX$ $\tan \varphi_Z = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})} = \frac{X}{R}$	Komplexe **Impedanz** $\underline{Z}$ Z = Scheinwiderstand / Impedanz $\quad [Z] = \Omega$ R = Wirkwiderstand $\quad [R] = \Omega$ X = Blindwiderstand / Reaktanz $\quad [X] = \Omega$
$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Y}) + \mathrm{Im}(\underline{Y}) = G + jB$ $\tan \varphi_Y = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Y})}{\mathrm{Re}(\underline{Y})} = \frac{B}{G}$ $\quad \varphi_Y = -\varphi_Z$	Komplexe **Admittanz** $\underline{Y}$ Y = 1/Z = Scheinleitwert / Admittanz $\quad [Y] = 1/\Omega = S$ G = 1/R = Wirkleitwert $\quad [G] = S$ (Siemens) B = 1/X = Blindleitwert $\quad [B] = S$

					
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = G$	$\underline{Z}_C = jX_C$	$\underline{Y}_C = jB_C$	$\underline{Z}_L = jX_L$	$\underline{Y}_L = jB_L$
		$\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$	$\underline{Y}_C = j\omega \cdot C$	$\underline{Z}_L = j\omega \cdot L$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L}$
$Z_R = R$	$Y_R = G$	$X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$	$B_C = \omega \cdot C$	$X_L = \omega \cdot L$	$B_L = -\frac{1}{\omega \cdot L}$
$\varphi_Z = 0$	$\varphi_Y = 0$	$\varphi_Z = -\pi/2$	$\varphi_Y = \pi/2$	$\varphi_Z = \pi/2$	$\varphi_Y = -\pi/2$
					

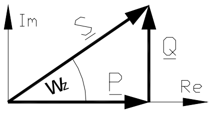
Anwendungen

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + .. = (R_1 + R_2 + ..) + j \cdot (X_1 + X_2 + ..)$	**Serieschaltung von Impedanzen**
$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + .. = (G_1 + G_2 + ..) + j \cdot (B_1 + B_2 + ..)$	**Parallelschaltung von Admittanzen**
$R_S = \frac{G_P}{\lvert \underline{Y} \rvert^2}$ $X_S = -\frac{B_P}{\lvert \underline{Y} \rvert^2}$  Gilt nur bei gleicher Frequenz!	**Umwandlung** **Parallelschaltung ➔ Serieschaltung** R_S = 1/G_p = Wirkwiderstand der Serieschaltung $\quad [R] = \Omega$ X_S = 1/B_p = Blindwiderstand der Serieschaltung $\quad [X] = \Omega$ Y = 1/Z = Admittanz der ganzen Schaltung $\quad [Y] = S$
$G_P = \frac{R_S}{\lvert \underline{Z} \rvert^2}$ $B_P = -\frac{X_S}{\lvert \underline{Z} \rvert^2}$  Gilt nur bei gleicher Frequenz!	**Umwandlung** **Serieschaltung ➔ Parallelschaltung** G_p = 1/ R_S = Wirkwiderstand der Serieschaltung $\quad [G] = S$ B_p = 1/ X_S = Blindwiderstand der Serieschaltung $\quad [B] = S$ Z = 1/ Y = Impedanz der ganzen Schaltung $\quad [Z] = \Omega$
$\underline{U}_m = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_m}{\sum \underline{Z}}$ Für 2 serielle Impedanzen: $\underline{U}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$	 **Spannungsteiler** Gilt nicht bei Belastung!
$\underline{I}_m = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_m}{\sum \underline{Y}}$ Für 2 parallele Admittanzen: $\underline{I}_2 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$ $\underline{I}_1 / \underline{I}_2 = \underline{Y}_1 / \underline{Y}_2$	 **Stromteiler**

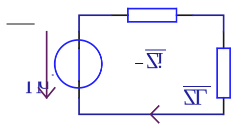
Phasenbedingungen

$\mathrm{Im}(\underline{A}/\underline{B})=0$ $\mathrm{Re}(\underline{A}/\underline{B})>0$	und und	$\mathrm{Im}(\underline{B}/\underline{A})=0$ $\mathrm{Re}(\underline{B}/\underline{A})>0$	**Keine Phasenverschiebung zwischen <u>A</u> und <u>B</u>** ➔ <u>A</u> und <u>B</u> sind in Phase $\varphi_A = \varphi_A$ ➔ $\varphi_{AB} = 0$ <u>A</u> und <u>B</u> können Spannungen und / oder Ströme sein
$\mathrm{Re}(\underline{A}/\underline{B})=0$ $\mathrm{Im}(\underline{A}/\underline{B})>0$	und und	$\mathrm{Re}(\underline{B}/\underline{A})=0$ $\mathrm{Im}(\underline{B}/\underline{A})<0$	**Phasenverschiebung von 90° zwischen <u>A</u> und <u>B</u>** ➔ <u>A</u> eilt <u>B</u> um 90° vor
$\underline{A}/\underline{B}=\mathrm{Re}+j\,\mathrm{Im}$ $\tan\varphi=\mathrm{Im}/\mathrm{Re}$	oder	$\underline{B}/\underline{A}=\mathrm{Re}+j\,\mathrm{Im}$ $\tan(-\varphi)=\mathrm{Im}/\mathrm{Re}$	**Beliebige Phasenverschiebung zw. <u>A</u> und <u>B</u>** ➔ <u>A</u> eilt <u>B</u> vor
$\mathrm{Re}=\mathrm{Im}$			**Spezialfall: 45° Phasenverschiebung**

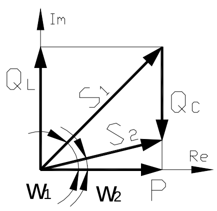
Komplexe Leistung

$\underline{S}=P+jQ=S\angle\varphi_Z$ $S=\sqrt{P^2+Q^2}$		**Komplexe Scheinleistung <u>S</u>** $[S]=VA$ $\underline{I}^*$ = konjugiert komplexer Strom φ_Z = Phasenwinkel der Impedanz	Gilt nur für sinusförmige Grössen!
$\underline{S}=\underline{U}\cdot\underline{I}^*$ $\underline{S}=U^2/\underline{Z}^*$ $\underline{S}=I^2\cdot\underline{Z}$	$\underline{S}=U^2\cdot\underline{Y}^*$ $\underline{S}=I^2/\underline{Y}$	U= Betrag der komplexen Spannung (Effektivwert!) I = Betrag des komplexen Stromes (Effektivwert!) $\underline{Z}^*$ = konjugiert komplexe Impedanz $\underline{Y}^*$ = konjugiert komplexe Admittanz	
Falls U die Quellenspannung ist (die Phasenlage vorgibt): $P=U\cdot\mathrm{Re}(\underline{I})$	$Q=U\cdot\mathrm{Im}(\underline{I})$	Q = Blindleistung $[Q]=\mathrm{var}$ Q > 0: Induktives Verhalten Q < 0. Kapazitives Verhalten	

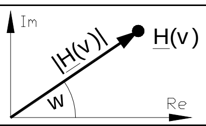
Leistungsanpassung

$I=\dfrac{U_q}{\lvert\underline{Z}_i+\underline{Z}_L\rvert}$ $P_L=\dfrac{U_q^2\cdot R_L}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$		P_L = Leistung an der Last Z_i = Innenimpedanz der Quelle Z_L = Impedanz der Last U_q = Leerlaufspannung der Quelle
Anpassungs-bedingung: $\underline{Z}_L=\underline{Z}_i^*$	$P_L=\dfrac{U_q^2}{4\cdot R_L}=\dfrac{I_q^2}{4\cdot G_L}$ $\quad\eta=0.5$	Maximale Leistung am Verbraucher η = Wirkungsgrad
Anpassungs-bedingung: $R_L=\lvert\underline{Z}_i\rvert$	$P_L\neq\dfrac{U_q^2}{4\cdot R_L}$!!!	Anpassung mit rein ohmsche Last

Blindstromkompensation

$Q_C=-P(\tan\varphi_1-\tan\varphi_2)$ $\lvert Q_C\rvert=P(\tan\varphi_1-\tan\varphi_2)$ $\lvert Q_C\rvert=\dfrac{U_q^{\;2}}{\lvert X_C\rvert}$ $\quad C=\dfrac{\lvert Q_C\rvert}{U_q^{\;2}\cdot\omega}$		S_1 = Scheinleistung von der Kompensation S_2 = Scheinleistung nach der Kompensation Q_L = Zu kompensierende Blindleistung (induktiv) Q_C = Kompensations-Blindleistung (kapazitiv) φ_1 = Phasenlage vor Kompensation φ_2 = Phasenlage nach Kompensation C = Kompensations-Kapazität $[C]=F$ ω = Kreisfrequenz der Schaltung ω = 2 π f

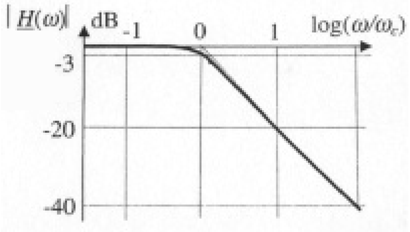
Frequenzgang

$\underline{H}(\omega)=\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$		**Frequenzgang $\underline{H}(\omega)$** $\underline{U}_1$ = komplexe Eingangsspannung $\underline{U}_2$ = komplexe Ausgangsspannung
$\lvert\underline{H}(\omega)\rvert=\dfrac{U_2}{U_1}$	Logarithmisch: $\lvert\underline{H}(\omega)\rvert=20\cdot\log(U_2/U_1)\quad in\ dB$	**Amplitudengang $\lvert H(\omega)\rvert$** U_1 = Betrag der komplexen Eingangsspannung U_2 = Betrag der komplexen Ausgangsspannung
$\varphi(\omega)=(\varphi_2-\varphi_1)$ $\varphi(\omega)=\arctan(\mathrm{Im}(\underline{H})/\mathrm{Re}(\underline{H}))$		**Phasengang $\varphi(\omega)$** φ_1 = Winkel der komplexen Eingangsspannung φ_2 = Winkel der komplexen Ausgangsspannung

Tiefpass

Amplitudengang

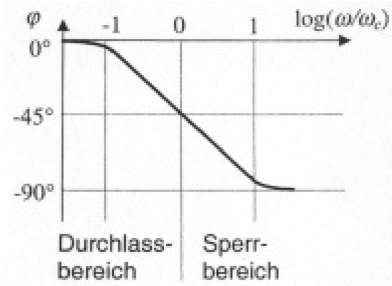
$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_C)^2}}$$

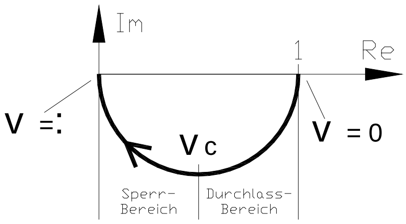


Phasengang

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_C)$$

U_2 eilt nach





Durchlassbereich: $\omega < \omega_C$
Übergang: $\omega = \omega_C$
Sperrbereich: $\omega > \omega_C$
ω_C = Grenzfrequenz bei $H_{(\omega)}$ = -3dB = $1/\sqrt{2}$

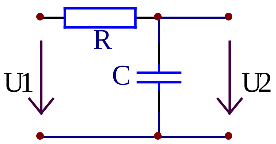
RC-Tiefpass

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+j\cdot\omega\cdot R\cdot C}$$

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot R\cdot C)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\cdot R\cdot C)$$

$$\omega_c = \frac{1}{R\cdot C} \quad dabei\ gilt: \quad |X_c| = R$$



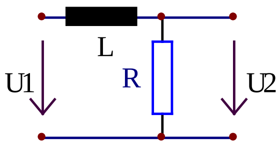
RL-Tiefpass

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+j\cdot\omega\cdot L/R}$$

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\cdot L/R)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\cdot L/R)$$

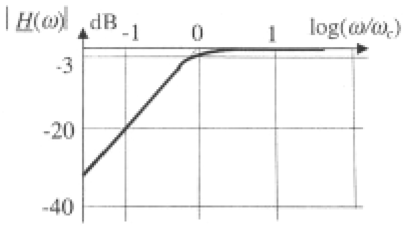
$$\omega_c = \frac{R}{L} \quad dabei\ gilt: \quad |X_L| = R$$



Hochpass

Amplitudengang

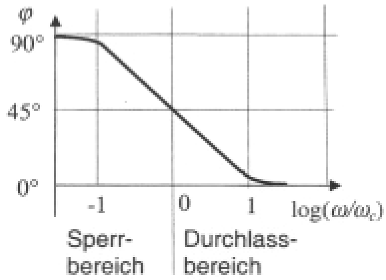
$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_C/\omega)^2}}$$

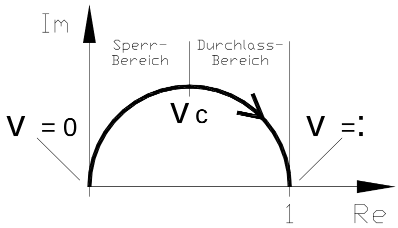


Phasengang

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega_C/\omega)$$

U_2 eilt vor





Durchlassbereich: $\omega > \omega_C$
Übergang: $\omega = \omega_C$
Sperrbereich: $\omega < \omega_C$
ω_C = Grenzfrequenz bei $H_{(\omega)}$ = -3dB = $1/\sqrt{2}$

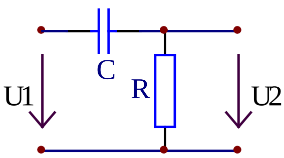
RC-Hochpass

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1-\frac{j}{\omega\cdot R\cdot C}}$$

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega\cdot R\cdot C}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\cdot R\cdot C}\right)$$

$$\omega_c = \frac{1}{R\cdot C} \quad dabei\ gilt: \quad |X_c| = R$$



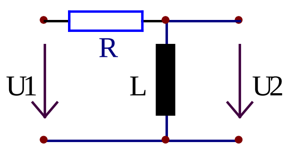
RL-Hochpass

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1-j\cdot\frac{R}{\omega\cdot L}}$$

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega\cdot L}\right)^2}}$$

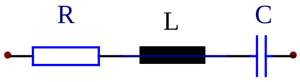
$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{R}{\omega\cdot L}\right)$$

$$\omega_c = \frac{R}{L} \quad dabei\ gilt: \quad |X_L| = R$$



Schwingkreise

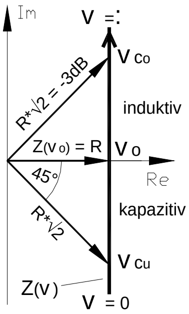
Serie-schwingkreis



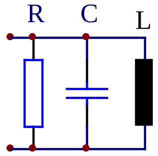
$$\underline{Z} = R + j\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)$$

$$\left|\underline{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

$$\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$



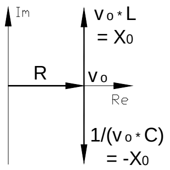
Parallel-schwingkreis



$$\underline{Y} = G + j\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)$$

$$\left|\underline{Y}\right| = \sqrt{G^2 + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2}$$

$$\varphi_Y = \arctan\left(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{R}\right)$$

$\operatorname{Im}(\underline{Z}) = \operatorname{Im}(\underline{Y}) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = R$	**Resonanzfall**
$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	**Resonanz-frequenz ω_o**
$Q = \dfrac{1}{R} \cdot \sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{X_0}{R}$; $Q = \dfrac{1}{G} \cdot \sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{B_0}{G}$	**Güte Q** $[Q] = 1$
$X_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$;  ; $B_0 = \sqrt{\dfrac{C}{L}}$	**Kennwiderstand X_0** (Blindkomponente bei Resonanz)
$\omega_{C_{o,u}} = \omega_0 \left(\pm \dfrac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_{C_o} \cdot \omega_{C_u}}$	**Untere Grenzfr.** ω_{C_u} **Obere Grenzfr.** ω_{C_o} (bei 45° oder -3dB)
$b = \omega_{C_o} - \omega_{C_u} = \omega_0 / Q$	**Bandbreite b**
$d = \dfrac{b}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$	**relative Bandbreite d = Verlustfaktor**
$v = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = \Omega - 1/\Omega$; $\Omega = \omega/\omega_0$	**Verstimmung v**
$v_{C_{o,u}} = \pm 1/Q = \pm d$	**45°- Verstimm.** $v_{C_{o,u}}$

Frequenzabhängigkeit von I und U

Seriekreis an idealer Spannungsquelle	Parallelkreis an idealer Stromquelle
$I(\Omega) = I_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$; $\Omega = \omega/\omega_0$ (bezogene Grösse) $I_0 = U_q / R$; $I_{C_{o,u}} = I_0 / \sqrt{2}$	$U(\Omega) = U_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$ $U_{C_{o,u}} = U_0 / \sqrt{2}$; $U_0 = I_q / G$
$U_R(\Omega) = U_q \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$	$I_G(\Omega) = I_q \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$
$U_L(\Omega) = \dfrac{U_q \cdot Q \cdot \Omega}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$; $\Omega_{L_{\max}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2 \cdot Q^2}}}$	$\Omega_{C_{\max}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2 \cdot Q^2}}}$; $I_C(\Omega) = \dfrac{I_q \cdot Q \cdot \Omega}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$
$U_C(\Omega) = \dfrac{U_q \cdot Q}{\Omega \cdot \sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$; $\Omega_{C_{\max}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2 \cdot Q^2}}$	$\Omega_{L_{\max}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2 \cdot Q^2}}$; $U_L(\Omega) = \dfrac{I_q \cdot Q}{\Omega \cdot \sqrt{1 + Q^2 \cdot (\Omega - 1/\Omega)^2}}$

Ein Maximum tritt nur auf, wenn Q ≥ 1/√2

Drehstrom

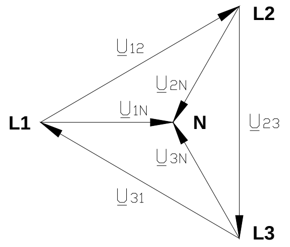
Sternschaltung

$$\underline{U}_{1N} = U_S \angle 0°$$
$$\underline{U}_{2N} = U_S \angle -120°$$
$$\underline{U}_{3N} = U_S \angle 120°$$

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot U_S \angle 30°$$
$$\underline{U}_{23} = \sqrt{3} \cdot U_S \angle -90°$$
$$\underline{U}_{31} = \sqrt{3} \cdot U_S \angle 150°$$

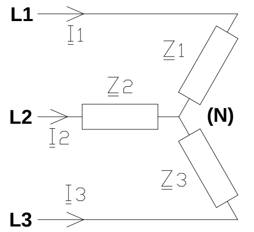
U_S = Stern-/ Strangspannung
$U_S = U_{1N} = U_{2N} = U_{3N}$
$U_S = U_\Delta / \sqrt{3}$

U_Δ = Aussenleiterspannung
$U_\Delta = U_{12} = U_{23} = U_{31}$
$U_\Delta = U_S \bullet \sqrt{3}$



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z \angle \varphi$$
$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$\underline{S} = P + jQ = 3 \cdot U_S \cdot I_S \angle \varphi$$
$$P = 3 \cdot U_S \cdot I_S \cdot \cos\varphi$$
$$Q = 3 \cdot U_S \cdot I_S \cdot \sin\varphi$$



Symmetrische Belastung

I_S = Stern-/ Strangstrom = $I_1 = I_2 = I_3$
φ = Phasenwinkel der Impedanz
(Phasenverschiebung zwischen U und I)
I_N = Neutralleiterstrom

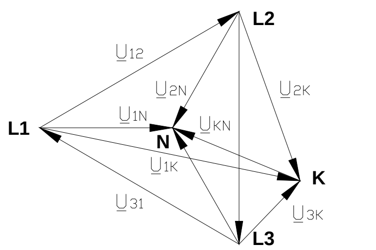
$$\underline{U}_{1K} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{KN}$$
$$\underline{U}_{2K} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{KN}$$
$$\underline{U}_{3K} = \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{KN}$$

Aronschaltung

$$\underline{S} = \underline{U}_{13} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^*$$
$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \cdot \underline{I}_3^*$$
$$\underline{S} = \underline{U}_{21} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_3^*$$

$$\underline{U}_{KN} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{1N} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{2N} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{3N}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Unsymmetrische Belastung im Dreileitersystem



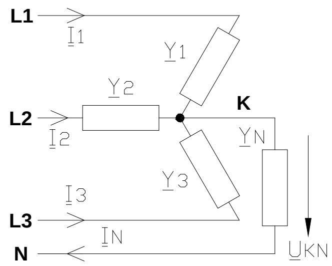
$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \neq 0$$
$$\underline{S} = \underline{U}_{1N} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N} \cdot \underline{I}_3^*$$

ohne Impedanz im Neutralleiter

$$\underline{U}_{KN} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{1N} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{2N} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{3N}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}$$

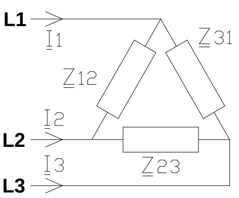
mit einer Admittanz (Y_N) im Neutral-leiter (Bild)

Unsymmetrische Belastung im Vierleitersystem



Dreieckschaltung

$$\underline{U}_{12} = U_\Delta \angle 30°$$
$$\underline{U}_{23} = U_\Delta \angle -90°$$
$$\underline{U}_{31} = U_\Delta \angle 150°$$



U_Δ = Aussenleiter-/ Dreieckspannung (Betrag!)= $U_{12} = U_{23} = U_{31}$

$$I = \sqrt{3} \cdot I_\Delta$$

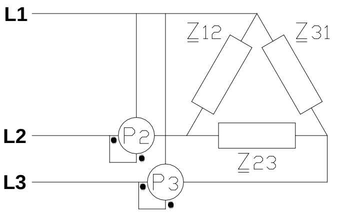
$$\underline{S} = 3 \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \angle \varphi$$
$$\underline{S} = \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I \angle \varphi$$

Symmetrische Belastung

I_Δ = Dreieck-/ Strangstrom = $I_{12} = I_{23} = I_{31}$
I = Aussenleiterstrom

Aronschaltung

$$\underline{S} = \underline{U}_{13} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^*$$
$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \cdot \underline{I}_3^*$$
$$\underline{S} = \underline{U}_{21} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_3^*$$



$$P_{tot} = P_2 + P_3$$

Unsymmetrische Belastung

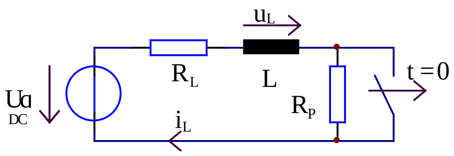
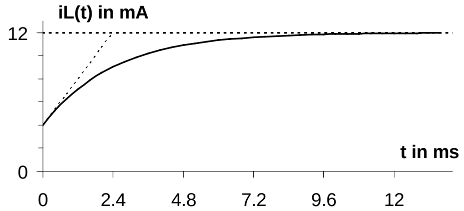
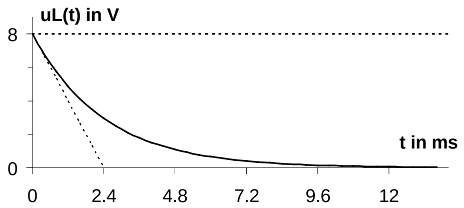
Siehe Kapitel Gleichstromlehre jedoch alles komplex rechnen Ausnahme: Umwandlung funktioniert nicht, wenn Neutralleiter angeschlossen und Strom führt	Stern-Dreieck-Umwandlung

Ausgleichsvorgänge

Zustandsgrössen

Grösse, die den Inhalt den Energiespeichers bestimmt und nicht sprunghaft ändern kann	Zustandsgrösse der Kapazität: $\mathbf{u_C}$ $\quad i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$	Zustandsgrösse der Induktivität: $\mathbf{i_L}$ $\quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

Lösungsstrategie für Ausgleichsvorgänge mit einem Speicher

Einschränkung: Im Netzwerk befinden sich nur Gleichspannungs-/ Gleichstromquellen.	**Beispiel** Bei t = 0 schliesst der Schalter, zuvor ist der Zustand stationär
Vorgehen	 Geg: U_q = 12 V_{DC} R_L = 1 kΩ R_P = 2 kΩ L = 2.4 H Ges: Verlauf von i_L und u_L
1. Analyse Welches ist die Zustandsgrösse?	Zustandgrösse: i_L
2. Zustand vor Schaltzeitpunkt: t = 0.	Zustand ist noch stationär: (Schalter offen) $\quad i_L(0_-) = \frac{U_q}{R_L + R_P} = 4\ mA \quad u_L(0_-) = 0 \quad (di_L/dt = 0)$
3. Zustand nach dem Ausgleichsvorgang: t = ∞ Schaltung ist wieder stationär (in der Praxis: t ≥ 5τ)	Zustand ist wieder stationär: (Schalter geschlossen) $\quad i_L(\infty) = \frac{U_q}{R_L} = 12\ mA \quad u_L(\infty) = 0$
4. Zustand unmittelbar nach dem Schalten: t = 0₊ Die Zustandsgrösse ist gleich wie bei t =0.	(Schalter geschlossen) $\quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 4\ mA$ $u_L(0_+) = U_q - u_{R_L} = U_q - R_L \cdot i_L(0_+) = 8\ V$
5. math. Beschreibung des Ausgleichsvorgang Lösung der DGL: abklingende e-Funktion ➔ y(t) = K • $e^{-t/\tau}$ y(t) = eingeschwungener + flüchtiger Vorgang y(t) = Endwert + (Startwert – Endwert) • $e^{-t/\tau}$	i_L(t) = Endwert + (Startwert – Endwert) • $e^{-t/\tau}$ = 12+(4 – 12) • $e^{-t/\tau}$ = 12+8 • $e^{-t/\tau}$ mA u_L(t) = Endwert + (Startwert – Endwert) • $e^{-t/\tau}$ = 0+(8 – 0) • $e^{-t/\tau}$ = 8 • $e^{-t/\tau}$ V
6. Bestimmung der Zeitkonstanten τ • Aus der DGL: $\tau = \frac{Koeffizient\ der\ Ableitung}{Koeffizient\ der\ Stammfunktion}$ • Aus der Anfangssteigung der Zustandsgrösse bei t = 0₊ : ➢ für die Kapazität: $\tau = C \cdot \frac{u_C(\infty) - u_C(0_+)}{i_C(0_+)}$ ➢ für die Induktivität: $\tau = L \cdot \frac{i_L(\infty) - i_L(0_+)}{u_l(0_+)}$ • aus den Formeln ➢ für die Kapazität: $\tau = R \cdot C$ ➢ für die Induktivität: $\tau = L/R$ Bestimmung von R: Betrachten des Netzwerks von der Kapazität / Induktivität aus (entspricht U-/ I-Quelle). Berechnung von R, indem die anderen U-Quellen des Netzwerks kurzgeschlossen und I-Quellen unterbrochen werden.	$\tau = L \cdot \frac{i_L(\infty) - i_L(0_+)}{u_l(0_+)} = 2.4 \cdot \frac{(12-4) \cdot 10^{-3}}{8} = 2.4\ ms$ oder $\quad \tau = L/R_L = 2.4/10^{-3} = 2.4\ ms$  i_L(t) = 12+8 • $e^{-t/\tau}$ mA  u_L(t) = 8 • $e^{-t/\tau}$ V s