SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE, STROJNÍCKA FAKULTA

Dimenzovanie nosníka využitím numerických metód

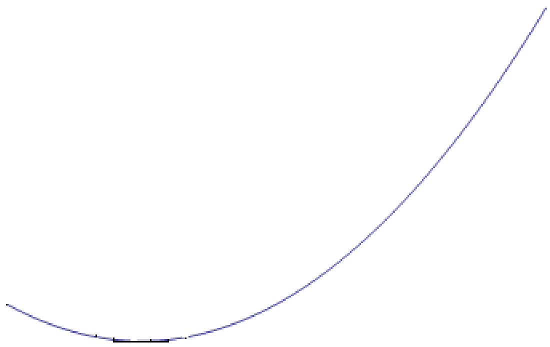
Dobrovoľný projekt

AUTOR: Ján Omasta

Zadanie

Navrhnite nosník pre zákazníka. Zákazník má požiadavku, aby prierezom nosníka bola tenkostenná rúra, ktorej pomer d/D je 0,8 (Obr. 2). Materiálom je oceľ 11 374 (STN 41 1375), ktorej najnižšia medza klzu Re je 225 MPa.

Nosník je na Obr. 1. Je uložený na dvoch podperách. Prvá podpera zľava je pevný kĺb, druhá je posuvný (dilatačný) kĺb, ktorý dovoľuje pohyb nosníka v smere osi x pri pôsobení teplotnej rozťažnosti. Nosník je namáhaný spojitým zaťažením n. Rovnica spojitého zaťaženia n je $n = 100 + \frac{1}{15}(7{,}5 - x)^2$. Nosník je ďalej zaťažený osamelou silou F = 500 N. Dĺžka nosníka je 35m, dĺžka l = 30m.



Obr. 1 – Schéma nosníka

Obr. 2 – Prierez nosníka

Vypracovanie

Jedná sa o rovinnú úlohu. Postup výpočtu je nasledovný:

1.) Vyšetrovaný nosník uvoľním a jeho väzby nahradím reakciami. Tieto reakcie vypočítam z momentovej podmienky.

2.) Metódou mysleného rezu určím rovnicu priebehu ohybového momentu M_o a priečnej sily T v dvoch myslených rezoch.

3.) Graficky znázorním priebehy ohybového momentu M_o a priečnej sily T po celej dĺžke nosníka.

4.) Z grafických priebehov vytipujem miesto maximálneho zaťaženia a vyjadrím ho číselne.

5.) Vypočítam priemer nosníka, ktorý bude vyhovovať zadanému namáhaniu.

1.

Pre sumu ohybových momentov M_o k bodu B platí (pri dodržaní znamienkovej konvencie, t.j. že, horné vlákna nosníka sú namáhané na tlak, spodné vlákna na ťah):

$\Sigma\, M_{o(B)} = 0.$

Predtým potrebujem zistiť x-ovú súradnicu strediska plochy ohraničenou zhora funkciou $n = 100 + \frac{1}{15}(7{,}5 - x)^2$ a zdola osou x. Je to nutné preto, aby som vedel napísať momentovú podmienku k bodu B, t.j. potrebujem vedieť na akom ramene od bodu B otáča plocha okolo tohto bodu.

Pre výpočet x-ovej súradnice stredista plochy platí vzťah:

$A\, x_c = \int x\, dA$

$$x_c \int_0^a y\, dx = \int_0^a xy\, dx$$

$$x_c \int_0^{30} \left[100 + \frac{1}{15}(7{,}5 - x)^2\right] dx = \int_0^{30} x \left[100 + \frac{1}{15}(7{,}5 - x)^2\right] dx$$

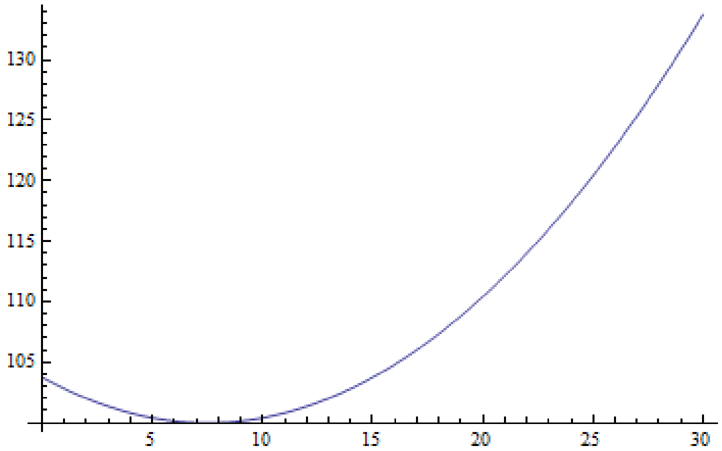
Na výpočet integrálov použijem príkaz Integrate:

```
In[46]:= m[x_] = ((-(x - 7.5))^2) / 15 + 100

Out[46]= 100 + 1/15 (7.5 - x)^2

In[47]:= Plot[m[x], {x, 0, 30}]
```

Out[47]=




```
In[9]:= Integrate[m[x], {x, 0, 30}]

Out[9]= 3262.5

In[37]:= Integrate[x * (((-(x - 7.5))^2) / 15 + 100), {x, 0, 30}]

Out[37]= 51187.5
```

$x_c . 3262{,}5 = 51\,187{,}5$

$x_c = \frac{51\,187{,}5}{3262{,}5} = 15{,}6896\text{m}$

Vzdialenosť od bodu B potom je:

c = 30m – 15,6896m = <u>14,3104m</u>

$\Sigma M_{o(B)} = 0$: $R_A . l + F . \frac{l}{6} - 14{,}3104 . n . l = 0$

po úprave dostávam vzťah väzbovú reakciu v mieste A nosníka:

$$R_A = -\frac{F}{6} + 14{,}3104 . n \qquad (1.1)$$

Cieľom je zistenie funkcií $M_o(x_1)$, $T(x_1)$, $M_o(x_2)$, $T(x_2)$. Počet myslených rezov sa stanovuje z dvoch hľadísk. Podľa zmeny prierezu nosníka alebo zmeny zaťaženia. Keďže vyšetrovaný nosník má mať po celej svojej dĺžke rovnaký prierez, počet myslených rezov – 2, som stanovil na základe zmeny zaťaženia.

Rez prvý:

$x_1 \in <0; l>$

$$M_O(x_1) = R_A . x_1 - n . x_1 . \frac{x_1}{2} \tag{2.1}$$

$$T(x_1) = R_A - n . x_1 \tag{2.2}$$

Dosadením rovnice 1.1 do rovnice 2.1 dostávam:

$$M_O(x_1) = \left(-\frac{F}{6} + 14{,}3104 . n\right) . x_1 - n . \frac{{x_1}^2}{2} =$$

$$= \left\{-\frac{F}{6} + 14{,}3104 . \left[\frac{-(x1-7{,}5)^2}{15} + 100\right]\right\} . x_1 - \left[\frac{-(x1-7{,}5)^2}{15} + 100\right] . \frac{{x_1}^2}{2}$$

Dosadením rovnice 1.1 do rovnice 2.2 dostávam:

$$T(x_1) = R_A - n . x_1 =$$

$$= -\frac{F}{6} + 14{,}3104 . \left[\frac{-(x1-7{,}5)^2}{15} + 100\right] - \left[\frac{-(x1-7{,}5)^2}{15} + 100\right] . x_1$$

Rez druhý:

$x_2 \in <0; \frac{l}{6}>$

$$M_O(x_2) = -F . x_2$$

$$T(x_2) = F$$

3.

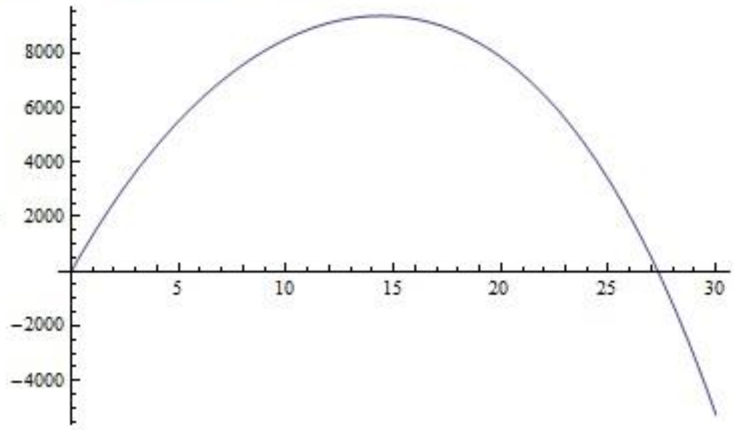
Priebeh ohybového momentu $M_o(x_1)$:

```
In[1]:= Mo[x1_] = ((-500 / 6) + 14.3104 * (((- (x1 - 7.5)) ^2) / 15 + 100)) * x1 - (((- (x1 - 7.5)) ^2) / 15 + 100) * (x1^2) / 2
```

$$\text{Out[1]=} \left(-\frac{250}{3} + 14.3104 \left(100 + \frac{1}{15} (7.5 - x1)^2\right)\right) x1 - \frac{1}{2} \left(100 + \frac{1}{15} (7.5 - x1)^2\right) x1^2$$

```
In[2]:= Plot[Mo[x1], {x1, 0, 30}]
```

Out[2]=



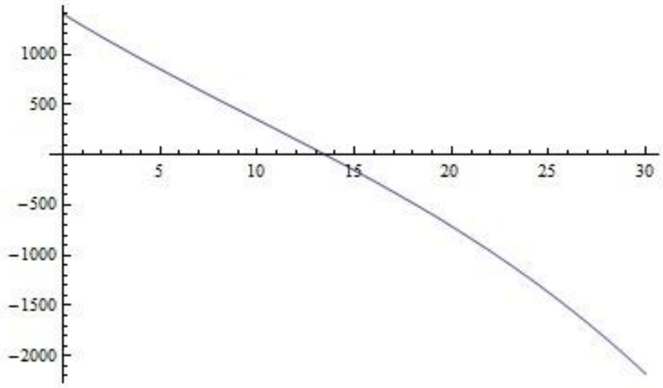
Priebeh priečnej sily $T(x_1)$:

```
In[3]:= T[x1_] = (-500 / 6) + 14.3104 * (((-(x1 - 7.5))^2) / 15 + 100) - (((-(x1 - 7.5))^2) / 15 + 100) * x1
```

Out[3]= $-\frac{250}{3} + 14.3104 \left(100 + \frac{1}{15} (7.5 - x1)^2\right) - \left(100 + \frac{1}{15} (7.5 - x1)^2\right) x1$

```
In[4]:= Plot[T[x1], {x1, 0, 30}]
```

Out[4]=



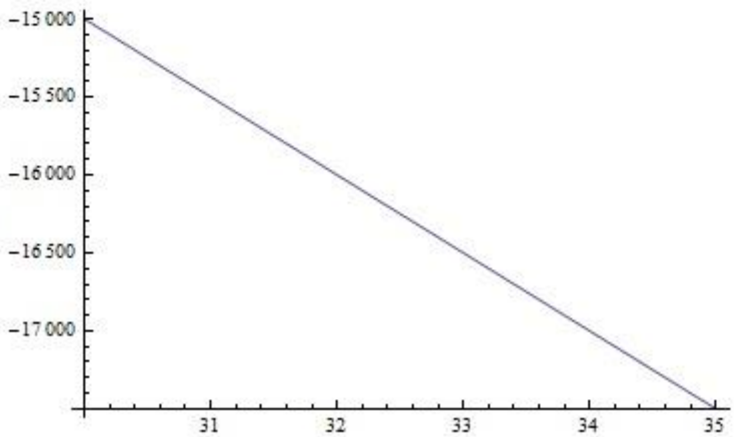
Priebeh ohybového momentu $M_o(x_2)$:

```
In[12]:= Mo[x2_] = -500 * x2
```

Out[12]= $-500\, x2$

```
In[13]:= Plot[Mo[x2], {x2, 30, 35}]
```

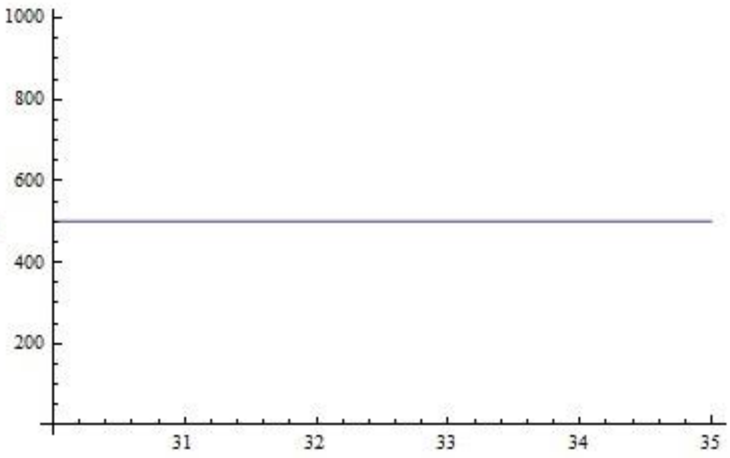
Out[13]=



Priebeh priečnej sily $T(x_2)$:

```
In[14]:= T[x2_] = 500
Out[14]= 500
In[15]:= Plot[T[x2], {x2, 30, 35}]
```

Out[15]=



4.

Miesto maximálneho zaťaženia môže byť v mieste maximálneho ohybového momentu v reze prvom. Maximum ohybového momentu je okolo čísla 15. Túto hodnotu vypočítam presne. Hľadám vlastne minimum funkcie – $Mo(x_1) = f(x_1)$.

```
In[1]:= Mo[x1_] = ((-500 / 6) + 14.3104 * (((- (x1 - 7.5)) ^2) / 15 + 100)) * x1 - (((- (x1 - 7.5)) ^2) / 15 + 100) * (x1^2) / 2
```

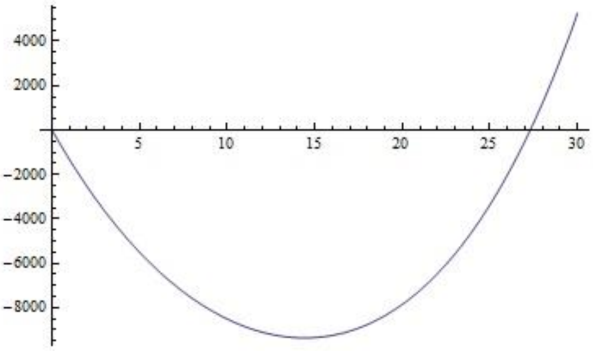
Out[1]= $\left(-\frac{250}{3}+14.3104\left(100+\frac{1}{15}(7.5-x1)^2\right)\right)x1-\frac{1}{2}\left(100+\frac{1}{15}(7.5-x1)^2\right)x1^2$

```
In[16]:= f[x1_] = -(((-500 / 6) + 14.3104 * (((- (x1 - 7.5)) ^2) / 15 + 100)) * x1 - (((- (x1 - 7.5)) ^2) / 15 + 100) * (x1^2) / 2)
```

Out[16]= $-\left(-\frac{250}{3}+14.3104\left(100+\frac{1}{15}(7.5-x1)^2\right)\right)x1+\frac{1}{2}\left(100+\frac{1}{15}(7.5-x1)^2\right)x1^2$

```
In[17]:= Plot[f[x1], {x1, 0, 30}]
```

Out[17]=



Na výpočet použijem metódu zlatého rezu (Golden search) a pre porovnanie i Newtonovu metódu pre hľadanie minima funkcie.

In[34]:=

```
f[x1_] = -(((-500/6) + 14.3104 * (((-(x1 - 7.5))^2) / 15 + 100)) * x1 - (((-(x1 - 7.5))^2) / 15 + 100) * (x1^2) / 2);
pocetopakovani = 25;
tolerancia = 10^(-4);
a[0] = 10;
b[0] = 20;
r = (Sqrt[5] - 1)/2 // N;
Do[
 c[n] = a[n] + (1 - r) (b[n] - a[n]);
 d[n] = b[n] - (1 - r) (b[n] - a[n]);

 If[ f[c[n]] < f[d[n]],

     b[n + 1] = d[n];
     d[n + 1] = c[n];
     c[n + 1] = a[n] + (1 - r) (b[n] - a[n]);
     a[n + 1] = a[n],
  a[n + 1] = c[n];
     c[n + 1] = d[n];
     d[n + 1] = b[n] - (1 - r) (b[n] - a[n]);
     b[n + 1] = b[n]];
 If[Abs[b[n + 1] - a[n + 1]] < tolerancia, Break[]],
 {n, 0, pocetopakovani}]
TableForm[Table[{n, NumberForm[a[n], 10], NumberForm[c[n], 10], NumberForm[d[n], 10], NumberForm[b[n], 10],
                  NumberForm[f[c[n]], 10], NumberForm[f[d[n]], 10]}, {n, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"n", "aₙ", "cₙ", "dₙ", "bₙ", "f(cₙ)", "f(dₙ)"}},
    TableSpacing → {1, 1}]
```

Out[41]//TableForm=

n	a_n	c_n	d_n	b_n	$f(c_n)$
0	10	13.81966011	16.18033989	20	-9348.004726
1	10	12.36067977	13.81966011	16.18033989	-9177.534989
2	12.36067977	13.81966011	14.72135955	16.18033989	-9348.004726
3	13.81966011	14.72135955	15.27864045	16.18033989	-9359.835085
4	13.81966011	14.37694101	14.72135955	15.27864045	-9363.899885
5	13.81966011	14.16407865	14.37694101	14.72135955	-9361.088783
6	14.16407865	14.37694101	14.50849719	14.72135955	-9363.899885
7	14.16407865	14.29563482	14.37694101	14.50849719	-9363.304024
8	14.29563482	14.37694101	14.427191	14.50849719	-9363.899885
9	14.37694101	14.427191	14.4582472	14.50849719	-9363.972007
10	14.37694101	14.40799721	14.427191	14.4582472	-9363.971192
11	14.40799721	14.427191	14.43905341	14.4582472	-9363.972007
12	14.40799721	14.41985963	14.427191	14.43905341	-9363.975598
13	14.40799721	14.41532859	14.41985963	14.427191	-9363.975405
14	14.41532859	14.41985963	14.42265996	14.427191	-9363.975598
15	14.41532859	14.41812892	14.41985963	14.42265996	-9363.975742
16	14.41532859	14.41705929	14.41812892	14.41985963	-9363.975696
17	14.41705929	14.41812892	14.41878999	14.41985963	-9363.975742
18	14.41705929	14.41772036	14.41812892	14.41878999	-9363.975736
19	14.41772036	14.41812892	14.41838143	14.41878999	-9363.975742
20	14.41772036	14.41797287	14.41812892	14.41838143	-9363.975741
21	14.41797287	14.41812892	14.41822537	14.41838143	-9363.975742
22	14.41797287	14.41806931	14.41812892	14.41822537	-9363.975742
23	14.41797287	14.41803247	14.41806931	14.41812892	-9363.975742
24	14.41803247	14.41806931	14.41806931	14.41812892	-9363.975742
25	a[25]	c[25]	d[25]	b[25]	$-\left(-\frac{250}{3} + 14.3104\left(100 + \right.\right.$

Minimum som našiel v bode 14,41803247 a jeho hodnota je -9363,975742. Maximum teda je v bode 14,41803247 a jeho hodnota je 9363,975742 N.m.

Newtonova metóda:

```
In[43]:= f[x1_] = f[x1_] = -(((-500/6) + 14.3104 * (((-(x1 - 7.5))^2) / 15 + 100)) * x1 - (((-(x1 - 7.5))^2) / 15 + 100) * (x1^2) / 2);
         x1[0] = 1;
         pocetopakovani = 10;
         tolerancia = 10^(-4);
         Do[x1[i + 1] = x1[i] - f'[x1[i]] / f''[x1[i]] // N;
          If[Abs[x1[i + 1] - x1[i]] < tolerancia, Break[]],
          {i, 0, pocetopakovani}]

In[48]:= TableForm[Table[{i, NumberForm[x1[i], 10], Abs[x1[i + 1] - x1[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}], TableSpacing → {1, 5}]

Out[48]//TableForm=
         0      1               10.2641
         1      11.26411206     3.22008
         2      14.4841966      0.0660601
         3      14.41813647     0.0000691902
         4      14.41806728     Abs[-14.4181 + x1[5]]
         5      x1[5]           Abs[-x1[5] + x1[6]]
         6      x1[6]           Abs[-x1[6] + x1[7]]
         7      x1[7]           Abs[-x1[7] + x1[8]]
         8      x1[8]           Abs[-x1[8] + x1[9]]
         9      x1[9]           Abs[-x1[9] + x1[10]]
         10     x1[10]          Abs[-x1[10] + x1[11]]

In[52]:= NumberForm[f[x1[4]], 10]

Out[52]//NumberForm=
         -9363.975742
```

Minimum som našiel v bode 14,41806728 a jeho hodnota je -9363,975742. Maximum teda je v bode 14,41806728 a jeho hodnota je 9363,975742 N.m.

Newtonova metóda je výhodnejšia, pretože je rýchlejšia. Výpočet chyby metód som nerealizoval, pretože ako bude uvedené v ďalšom, na presnosti s niekoľkými desatinnými číslami až tak nezáleží, pretože v tejto technickej úlohe sa aj tak uvažuje s predimenzovaním. T.j. musí sa uvažovať vzhľadom na bezpečnosť nosníka aj s 5-násobným zväčšením namáhania (miera bezbečnosti) v nepredvídateľných prípadoch, než je to namáhanie, na aké sa nosník navrhuje.

5.

Vo vypočítanom mieste predpokladám najnepriaznivejšie zaťaženie. V tomto mieste nypočítam priemer nosníka D.

σ_{max} - maximálne napätie

M_{max} - maximálny ohybový moment

J_z - kvadratický moment plochy k osi z

σ_{dov} - dovolené napätie

k – miera bezpečnosti, volím hodnotu k = 5.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{J_z} . \frac{D}{2} = \frac{M_{max}}{\frac{J_z}{\frac{D}{2}}} = \frac{M_{max}}{\frac{\pi . D^3}{32} . (1 - \alpha^4)} \leq \sigma_{dov}$$

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}8$$

$$\sigma_{dov} = \frac{Re}{k} = \frac{225\ MPa}{5} = 45\ MPa$$

Pre vonkajší priemer D nosníka platí:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32. M_{max}}{\pi . (1 - \alpha^4) . \sigma_{dov}}}$$

```
In[54]:= PriemerD = ((32 * 9363.975742) / (π * (1 - 0.8^4) * 225000000 / 5)) ^ (1 / 3)
Out[54]= 0.153121
```

Priemer je 0,153121 m, t.j. <u>15,3121cm</u>.