

**29. Obliczanie całek  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , gdzie  
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  przez  
transformację na kwadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$   
i zastosowanie złożonych kwadratur Simpsona  
ze względu na każdą zmienną.**

Autor: Jan Palmer, nr indeksu 313429

## **Spis treści**

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Opis użytej metody</b>	<b>1</b>
2.1	Wyznaczenie wzoru kwadratury dla całek podwójnych na obszarze prostokąta . . . . .	1
2.2	Transformacja punktów kwadratu na koło . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Weryfikacja numeryczna</b>	<b>3</b>
3.1	Podsumowanie weryfikacji . . . . .	5

# 1 Wstęp

O ile manualne obliczenie całki podwójnej na obszarze koła nie musi być trudne, o tyle przybliżenie jej wartości przy pomocy metod numerycznych stawia pewne specyficzne wyzwania. Zastosowanie bazowej wersji złożonych kwadratur Simpsona ze względu na obie zmienne pozwala na przybliżenie całki podwójnej jedynie na obszarze prostokąta. W celu aproksymacji jej wartości na obszarze koła, należy dodatkowo dokonać transformacji punktów z kwadratu na koło.

W raporcie zbadano dokładność przybliżeń oraz własności kwadratury Simpsona przy wykorzystaniu powyższej metody. Jak wykazały eksperymenty, metoda ta oferuje przybliżenia dokładne często do 10 miejsc po przecinku przy zwiększającej się ilości podprzedziałów, ale nie zachowuje własności kwadratury Simpsona.

## 2 Opis użytej metody

Przybliżenie wartości całki podwójnej  $I(f) = \iint_D f(x, y) dx dy$  na obszarze koła, przy pomocy złożonych kwadratur Simpsona, składa się z dwóch etapów głównych: wyznaczenia wzoru kwadratury dla całek podwójnych na obszarze prostokąta oraz transformacji punktów z kwadratu na punkty zawierające się w kole.

### 2.1 Wyznaczenie wzoru kwadratury dla całek podwójnych na obszarze prostokąta

Wzór złożonej kwadratury Simpsona dla pewnej funkcji jednej zmiennej  $g(x)$ , ilości podprzedziałów  $N$  oraz  $H = \frac{b-a}{N}$  można zapisać następująco:

$$S(g) = \frac{H}{6}(g(a) + g(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} g(a + kH) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} g(a + kH + \frac{H}{2})) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

W tej postaci, kwadratura umożliwia przybliżenie wartości całki funkcji jednej zmiennej.

Niech  $I_P(f) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ , gdzie  $P = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ . Niech  $A$  będzie wektorem współczynników kwadratury dla kolejnych punktów  $x_i$ , czyli  $A = \{1, 4, 2, \dots, 4, 1\}$  lub  $A = \{1, 4, 1\}$  dla kwadratury prostej

( $N = 1$ ) oraz niech  $A_i$  będzie współczynnikiem stojącym przy  $g(x_i)$ . Wtedy

$$S(g) = \frac{H}{6} \sum_{i=0}^{2N+1} A_i g(x_i) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

Stosując kwadraturę Simpsona do  $f(x, y)$  ze względu na zmienną  $x$ , otrzymamy:

$$S(f)(y) = \frac{H_N}{6} \sum_{i=0}^{2N+1} A_i f(x_i, y).$$

Jest to funkcja zależna od zmiennej  $y$ .

Stosując teraz złożoną kwadraturę Simpsona o  $M$  podprzedziałach na  $[c, d]$  oraz o wektorze współczynników  $B$  do  $S(f)(y)$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} S(S(f)) &= \frac{H_M}{6} \sum_{j=0}^{2M+1} B_j \left( \frac{H_N}{6} \sum_{i=0}^{2N+1} A_i f(x_i, y_j) \right) = \\ &= \frac{H_N H_M}{36} \sum_{j=0}^{2M+1} \sum_{i=0}^{2N+1} A_i B_j f(x_i, y_j) \approx \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Podsumowując

$$S_2(f) = \frac{H_N H_M}{36} \sum_{j=0}^{2M+1} \sum_{i=0}^{2N+1} A_i B_j f(x_i, y_j) \approx I_P(f). \quad (1)$$

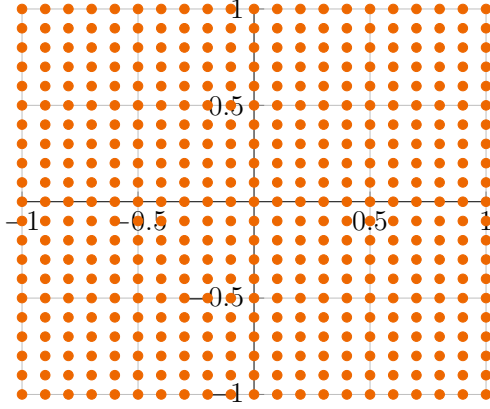
## 2.2 Transformacja punktów kwadratu na koło

By móc skorzystać ze wzoru (1), musimy dokonać transformacji obszaru kwadratu  $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$  na obszar koła  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Przekształcenie ma postać

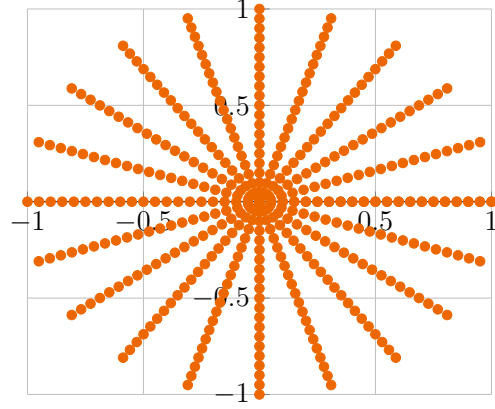
$$D = \{(u, v) : u = \phi(x, y), v = \psi(x, y), (x, y) \in B\},$$

gdzie  $\phi(x, y)$  oraz  $\psi(x, y)$  to dwie funkcje przekształcające

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x+1) \cdot \cos(\pi(y+1)), \quad \psi(x, y) = \frac{1}{2}(x+1) \cdot \sin(\pi(y+1)). \quad (2)$$



(a) Punkty rozłożone równomiernie na kwadracie  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .



(b) Punkty po transformacji funkcjami przekształcającymi (2)

**Rysunek 1:** Rozkład punktów przed i po transformacji obszaru całkowania funkcjami przekształcającymi. Na wykresie (a) liczba podprzedziałów na oś jest równa 10, czyli na długości każdego przedziału znajduje się 21 punktów.

Jakobian tego przekształcenia to funkcja  $|J(x, y)| = \frac{\pi}{4}(x + 1)$ . Postępując według następującego równania

$$\iint_D f(u, v) du dv = \iint_B f(\phi(x, y), \psi(x, y)) |J(x, y)| dx dy,$$

możemy zapisać wzór (1) jako

$$\frac{H_N H_M}{36} \sum_{j=0}^{2M+1} \sum_{i=0}^{2N+1} A_i B_j f(\phi(x_i, y_j), \psi(x_i, y_j)) |J(x, y)| \approx \iint_D f(x, y) dx dy.$$

### 3 Weryfikacja numeryczna

W poniższych tabelach przedstawione są wartości błędu bezwzględnego dla podanych funkcji oraz dla pięciu różnych ilości podprzedziałów na każdą zmienną. Wartości dokładne porównywane są z przybliżeniami otrzymanymi przy pomocy programu.

Funkcje	Liczba podprzedziałów na oś				
	1	10	50	100	500
1	0	2.66e−14	2.43e−13	9.788e−13	2.602e−11
$x$	0	7.105e−15	1.776e−15	1.119e−13	3.73e−13
$x^2 + y^2$	0	2.66e−15	4.44e−15	2.087e−14	1.616e−13
$200 - \pi x^3$	0	2.27e−13	1.319e−11	4.889e−12	3.017e−10
$x^4$	0.5333	5.333e−5	8.533e−8	5.333e−9	8.848e−12
$e^{x+y}$	5.491e−2	6.1309e−6	9.8207e−9	6.138e−10	6.67e−13
$e^{-(x^2+y^2)}$	2.609e−1	4.87e−6	7.81e−9	4.8837e−10	7.749e−13

**Tablica 1:** Wartości błędu bezwzględnego dla całek podwójnych na obszarze kwadratu  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , zależnie od liczby podprzedziałów na każdą zmienną.

Funkcje	Liczba podprzedziałów na oś				
	1	10	50	100	500
1	4.441e−16	1.332e−15	3.553e−15	4.032e−13	4.13e−13
$60x + 3$	41.8879	1.066e−14	3.553e−15	3.908e−14	1.119e−13
$x^2 + y^2$	0	6.66e−16	9.1e−15	4.086e−14	4.678e−13
$200 - \pi x^3$	1.3708	5.684e−13	4.547e−13	3.752e−12	5.23e−12
$x^4$	7.854e−1	4.91e−6	7.854e−9	4.909e−10	7.615e−13
$e^{x+y}$	7.9165e−1	9.889e−7	1.599e−9	1.142e−10	1.53e−11
$e^{-(x^2+y^2)}$	3.049e−2	2.118e−6	4.19e−9	1.022e−9	8.113e−10

**Tablica 2:** Wartości błędu bezwzględnego dla całek podwójnych na obszarze koła  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , zależnie od liczby podprzedziałów na zmienną. By uzyskać jak najdokładniejsze przybliżenie wartości całek dla funkcji  $e^{x+y}$  oraz  $e^{-(x^2+y^2)}$ , skorzystano z funkcji *integral2* programu *MATLAB*, z parametrem tolerancji błędu absolutnego ustawionym na wartość e−15.

### 3.1 Podsumowanie weryfikacji

Pierwsze pięć funkcji sprawdzających przedstawia przykłady wielomianów stopnia kolejno 0, 1, 2, 3 i 4. Na tablicy 1. można zauważyć, że program zwraca wartości kwadratury prostej równe całce dla wielomianów stopnia maksymalnie 3. Wskazuje to na zachowanie rzędu kwadratury Simpsona . Porównując to z wynikami z tablicy 2, widać że kwadratura Simpsona ze względu na obie zmienne nie zachowuje swojego rzędu po transformacji obszaru całkowania na koło.

Dla przykładowych funkcji metoda oferuje dokładność na poziomie przynajmniej 8 zer po przecinku przy podziale obu osi na 100 podprzedziałów, oraz dokładność średnio do 11 miejsc po przecinku przy podziale na 500 podprzedziałów.