(1.4.2) $\boxed{f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)}$

Dokaz: $(\Rightarrow)$

1. $A \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A;\ \forall A\in\mathcal{A}$ (pred.)

2. $f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right);\ \forall A\in\mathcal{A}$ (1)

3. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$ (2)

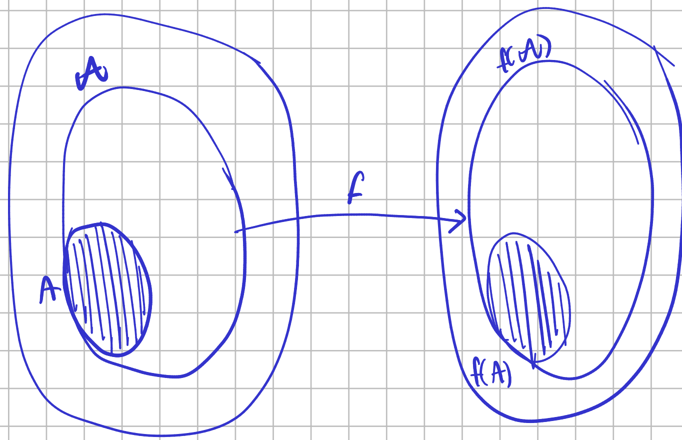
$(\Leftarrow)$

1. $y \in f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$ je nekje tu not

2. $\exists x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A : y = f(x)$ (1)

3. x mora bit del vsaj ene množice v $\mathcal{A}$
naj bo $x\in A'$ in $A'\in\mathcal{A}$ (2)

4. $x\in A'$
$f(x)\in f(A')$
$y \in f(A') \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)$ (1,3)



$f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$

Dokaz: $(\Rightarrow)$

1. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq A;\ \forall A\in\mathcal{A}$ (pred.)

2. $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq f(A);\ \forall A\in\mathcal{A}$ (1)

3. $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$ (2)

$(\Leftarrow)$ Primer zakaj obratno ne velja:

- $X = \{x_1, x_2\}$ $f: X \to Y$
- $Y = \{y\}$

- $f(x_1) = y$
  $f(x_2) = y$

- $A_1 = \{x_1\}$
- $A_2 = \{x_2\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$f(A_1\cap A_2) = \emptyset$

$f(A_1)\cap f(A_2) = \{y\}$

$f(A_1\cap A_2) \neq f(A_1)\cap f(A_2)$!

Problem je tu, ker $f(A_1)\cap f(A_2)$ ni $\emptyset$. Posplošimo lastnost na INJEKTIVNE funkcije in bo v redu.

$f: X\to Y,\quad f(x_1)\neq f(x_2) \Rightarrow x_1\neq x_2$

$\downarrow$

če imata x_1 in x_2 isto sliko, kljub temu, da sta različna, potem ni injektivno.

Če imata različni sliki in sta ista...? Kaj je potem...?

(1.4.3) Naj bo $\mathcal{A}$ družina podmnožic X. Za vse injektivne funkcije naj velja $f: X \to Y$:

$$f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$$

Dokaz: $(\Leftarrow)$ $f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$

1. $y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$ (pred.)

2. $\forall A \in \mathcal{A} : \exists x_A \in A : y = f(x_A)$

3. f je injektivna, zato velja, da so vsi $x_A \in A$ isti elementi (slika vsakega je enaka y samo če so vsi enaki)

   Naj bo to element $x \in A$; $\forall A \in \mathcal{A}$

4. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow f(x) \in f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)$

5. $y = f(x) \Rightarrow y \in f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)$

(1.4.4) Naj bo $f: X \to Y$ in $B \subseteq Y$. Potem velja:

$$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$$
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

Dokaz:

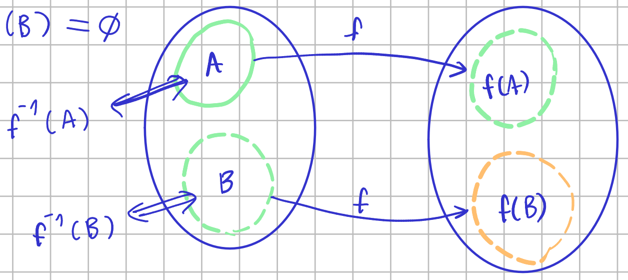
1. $x \in X \wedge x \in f^{-1}(B^c) \Rightarrow f(x) \in B^c$ (pred.)

2. $x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c \Rightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in B^c$ (1)

3. $f^{-1}(B^c) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^c \wedge \left(f^{-1}(B)\right)^c \subseteq f^{-1}(B^c) \Rightarrow f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$

Disjunktnost je tudi ohranjena med inverzi, očitno.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$



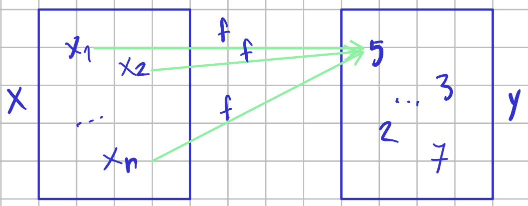
Naj bo $f: X \to Y$ funkcija. f je:

Injektivna: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$; $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1), f(x_2) \in Y$
Različna elementa, različni sliki.

Surjektivna: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$ (vsak y iz desne mn. ima originalni element v levi; y ne more obstajat brez x)

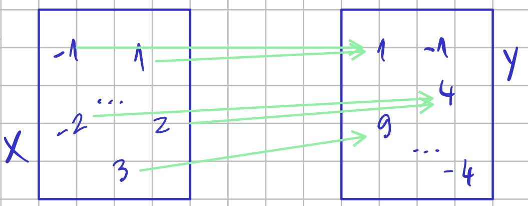
Primeri funkcij, ki niso surjektivne:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 5$



Zdaj NI RES, da za $\forall y \in Y$ obstaja $x \in X$, da je $y = f(x)$.
3, 2, 7, ... nimajo $x \in X$, samo 5 ima (vse).

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$



Vsa negativna števila v Y nimajo originala v X, ker se tako negativni kot pozitivni $x \in X$ slikajo v poz. št. zaradi potence.

$f: X \to Y$ je bijektivna takrat, ko je injektivna in surjektivna, oziroma velja:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : y = f(x)$$

Le v tem primeru lahko definiramo inverz $f^{-1}: Y \to X$, da velja:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

(1.4.5) Če sta $f: X \to Y$ in $g: Y \to X$ bijektivni, je tudi njun kompozitum $g \circ f$ in $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$.