Ime in priimek:
Vpisna številka:
Smer:

Analiza III

1. KOLOKVIJ

23. november 2016

1. **[6]** Na $\mathbb{R}^3$ definiramo preslikavo s predpisom, $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$,

$$d\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = |x_1 - y_1| + |x_2^3 - y_2^3| + |x_3^5 - y_3^5|.$$

Ali je d metrika na $\mathbb{R}^3$? Odgovor natančno utemeljite.

2. **[5]** Naj bo dano zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$a_n = \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n,\ \frac{1}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n^2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Izračunajte njegovo limito v običajni (Evklidski) metriki.

3. **[8]** Obkrožite katere lastnosti veljajo za vsako od množic v običajni (Evklidski) metriki:

$\mathcal{A} = \{2\} \cup \{2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$	ODPRTA ZAPRTA OMEJENA KOMPAKTNA
$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\} \subset \mathbb{R}^2$	ODPRTA ZAPRTA OMEJENA KOMPAKTNA

Vso odgovori morajo biti natančno utemeljeni.

4. **[6]** Naj bo M poln metrični prostor in naj $d(x, y)$ označuje metriko v tem prostoru. Privzemimo, da obstaja tak $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, da zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadošča

$$d(x_{n+1}, x_n) < \alpha\, d(x_n, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pokažite, da velja $d(x_{n+1}, x_n) < \alpha^n\, d(x_1, x_0)$ in s pomočjo tega pokažite, da je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje.
Ali obstaja tak $\ell \in M$ za katerega velja $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$?

Na razpolago imate 90 minut. Vsi odgovori morajo biti natančno utemeljeni!
Želim vam veliko uspeha!