

Analiza 3

Trditev: $A = \text{Int}(B)$ je odprta množica

Dokaz:

1. $A = \text{Int}(B)$
= notranjost
= {notranje točke od B}
= {točke za katere obstaja odprta kroglja ki je vsebovana v B}
 \Rightarrow odprta kroglja za katero velja $d(x, a) < r$
2. za vsak x v A obstaja kroglja $K(r, x)$, tako da je $K(r, x) \subseteq A$, t.j. vsaka točka je notranja
3. za nek poljuben y v $K(r, x)$ velja $d(y, x) < r$
4. veljati mora da je $y \in A$
5. y je tudi notranja, zato obstaja $K(e, y)$, kjer je $e > 0$, tako da je $K(e, y) \subseteq B$
6. $K(e, y) \subseteq K(r, x) \subseteq \text{Int}(B)$
7. vzamemo $e = r - d(y, x)$
8. vzamemo poljuben element $z \in K(e, y)$
9. pokažemo da velja $d(z, y) < e$ in $d(z, x) < r$, tako da bo veljalo $z \in K(e, y), K(r, x)$:
$$d(z, y) < e$$
$$\Leftrightarrow d(z, y) < r - d(y, x) \quad d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x)$$
10. uporabimo trikotniško enakost (najdemo spodnjo mejo za $d(z, x)$):
$$d(z, x) < r - d(y, x) + d(y, x)$$
$$d(z, x) < r$$
11. torej $\text{Int}(B)$ je odprta množica \square .

$$\text{Trditev: } A \cup b(A) = \bar{A} = A \cup A'$$

- To je ekvivalentno $A \cup b(A) \subseteq \bar{A} \subseteq A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$
- Ena taka zanka
- Moramo dokazati tri izraze:
 1. $A \cup b(A) \subseteq \bar{A}$
 2. $\bar{A} \subseteq A \cup A'$
 3. $A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$

$$\mathbf{1. } A \cup b(A) \subseteq \bar{A}$$

1. \bar{A} je najmanjša zaprta množica od A in velja $A \subseteq \bar{A}$
2. Ker je zaprta vsebuje vse svoje robne točke oziroma je njen komplement odprta množica, t.j. \bar{A}^c
3. $A \cup b(A) \subseteq \bar{A} \equiv \bar{A}^c \subseteq (A \cup b(A))^c$
4. vzamemo nek $x \in \bar{A}^c$ in dokažemo, da je tudi $x \in (A \cup b(A))^c$
5. ker je \bar{A}^c odprta množica, mora biti x notranja točka
6. to pomeni, da $\exists r > 0$, tako da je $K(r, x) \subseteq \bar{A}^c$
7. $A \subseteq \bar{A} \equiv \bar{A}^c \subseteq A^c$
8. $K(r, x) \subseteq \bar{A}^c \subseteq A^c$
9. to pomeni, da $x \in A^c \Rightarrow x \notin A$

$$\mathbf{2. } \bar{A} \subseteq A \cup A'$$

$$\mathbf{3. } A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$$

Eh nedasemi pisat