Analiza III - Funkcije več spremenljivk, študijsko leto 2019/2020

5. vaje - 14.11.2019

METRIKA

1. Dano je zaporedje funkcij $f_n(x) = \frac{nx}{2nx+1}$. Ali je to zaporedje konvergentno/Cauchyjevo

   (c) v prostoru zveznih funkcij na $[0, 1]$ opremljenim z maximum metriko: $d_\infty(f, g) = \max\limits_{a \leq x \leq b}\{|f(x) - g(x)|\}$?

2. Kateri od naslednjih podprostorov prostora $(\mathbb{R}, d)$ so polni?

   (a) $A = \{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
   (b) $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$
   (c) $C = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

3. Katere od naslednjih množic predstavljajo kompaktne podmnožice množice $\mathbb{R}$ oz. $\mathbb{R}^2$?

   (a) $[0, 1)$
   (b) $[0, \infty)$
   (c) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$
   (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$
   (g) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

4. Pokažite, da če $X \subseteq \mathbb{R}$ ni kompaktna, potem obstaja zvezna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, ki je omejena, vendar njene vrednosti nikoli ne dosežejo meje.

Dano je zaporedje funkcij $f_n(x)=\frac{nx}{2nx+1}$.

Ali je to zaporedje konvergentno / Cauchyjevo?

c) v prostoru zveznih funkcij na $[0,1]$, opremljenim z max metriko?

$$d_\infty(f,g)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$$

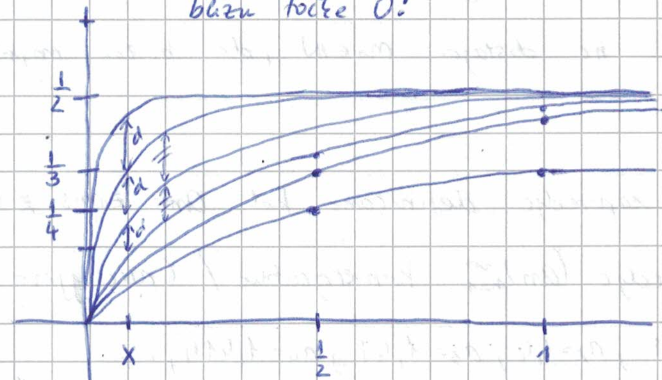
Limita?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{2nx+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}; & 0<x\le 1\\ 0; & x=0\end{cases}$$

Zaporedje ni konvergentno! (Če bi bilo konvergentno, bi moralo biti konvergentno po točkah!)

V našem primeru pa 0 ostane v 0, vse ostale vrednosti pa konvergirajo k ½.

Cauchyjevo? → Intuicija: večji kot bo n, bolj "strma" bo naša funkcija blizu točke 0!



$f_1(1)=\frac{1}{3}$

$f_1(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$f_2(1)=0.4$

$f_2(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$

$f_3(1)\doteq 0,43$

$f_3(\frac{1}{2})\doteq 0,37$

torej se bo že razdalja med dvema zaporednima n-jema večala!

Račun: Za $m>n$ je

$$d_\infty(f_m,f_n)=\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{mx}{2mx+1}-\frac{nx}{2nx+1}\right|=\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{mx(2nx+1)-nx(2mx+1)}{(2mx+1)(2nx+1)}\right|$$

$$=\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{\cancel{2mnx^2}+mx-\cancel{2mnx^2}-nx}{4mnx^2+2mx+2nx+1}\right|$$

$$=\max_{0\le x\le 1}\frac{(m-n)x}{4mnx^2+2mx+2nx+1}$$

ODVOD: $$\frac{(m-n)(4mnx^2+2mx+2nx+1)-(mx-nx)(8mnx+2m+2n)}{(4mnx^2+2mx+2nx+1)^2}$$

$$\Rightarrow (m-n)(4mnx^2+\cancel{2mx}+\cancel{2nx}+1-8mnx^2-\cancel{2mx}-\cancel{2nx})$$

$$=(m-n)(1-4mnx^2)$$

$$1-4mnx^2=0 \iff 4mnx^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{4mn}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{4mn}}$$

Ker $x\in[0,1]\Rightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{mn}}$

Ker se z večanjem "n"-ja razdalja veča (ker je $d = \max \dots$)

bo

$$d_\infty(f_m, f_n) \geq \frac{(m-n)\frac{1}{\sqrt{4mn}}}{\cancel{4mn}\cdot\frac{1}{\cancel{(\sqrt{4mn})^2}} + 2m\cdot\frac{1}{\sqrt{4mn}} + 2n\cdot\frac{1}{\sqrt{4mn}} + 1}$$

$$= \frac{\frac{m-n}{\sqrt{4mn}}}{\frac{2m + 2n + 2\sqrt{4mn}}{\sqrt{4mn}}}$$

$$= \frac{(m-n)\sqrt{4mn}}{(2m+2n+2\sqrt{4mn})\sqrt{4mn}} = \frac{m-n}{2(m+n+2\sqrt{mn})}$$

Konkretno npr. za $m = 4n$ dobimo:

$$d_\infty(f_{4n}, f_n) \geq \frac{4n-n}{2(4n+n+2\sqrt{4n\cdot n})} = \frac{3n}{2(5n+4n)} = \frac{3\cancel{n}}{18\cancel{n}} = \frac{1}{6}$$

kar je neodvisno od "poznosti" n-ja.

$\Rightarrow$ zaporedje ni Cauchyjevo.

(za $\varepsilon < \frac{1}{6}$ ne obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da bi za $m, n > n_0$ veljalo $d(f_m, f_n) < \varepsilon$)

–) Naj bo $(a_n)_{n=1}^\infty$ zaporedje definirano kot a_n = zapis z $(n-1)$ decimalnimi mesti števila $\sqrt{2}$.

Ali je zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergentno / Cauchyjevo v $(\mathbb{Q}, d_2)$
↳ Evklidska metrika

$a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}4$, $a_3 = 1{,}41$, $a_4 = 1{,}414$, ...

$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|^2} = |x-y|$$

Limita?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \quad \text{(po definiciji zaporedja)}$$

vendar $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ zaporedje ni konvergentno!

Cauchyjevo?

$$d_2(a_n, \sqrt{2}) = |a_n - \sqrt{2}| \xrightarrow{\quad} 0, \text{ ker gre } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n=1}^\infty$ je Cauchyjevo.

Metrični prostor je POLN, če je v njem vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno.

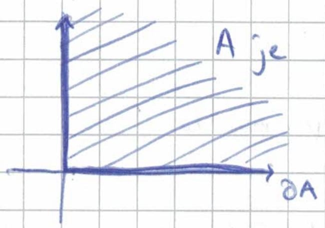
op. 1) $(\mathbb{R}^2, d)$ je poln m.p. 2) Zaprt podprostor polnega prostora je zaprt.

~~-) Katera od naslednjih podmnožic~~ $\cancel{\mathbb{R}^2}$

-) Kateri od naslednjih podprostorov prostora $(\mathbb{R}^2, d)$ so polni?
↳ ~~evkl. metrike~~ stand. metrike

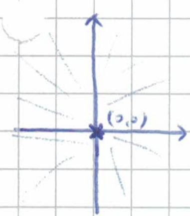
(A, d), kjer je

a) $A = \{(x,y);\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$



A je zaprta množica $\Rightarrow$ (A, d) poln

b) (B, d), kjer je $B = \{(x,y);\ x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$



Ni poln, npr. zaporedje $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ konvergira k $(0,0) \notin B$.

c) (C, d), kjer je $C = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Primer je soroden prejšnjemu, če uspemo dobiti zaporedje iz C, ki konvergira npr. k $(0,0)$ $\Rightarrow$ (C, d) ni poln.

Tako zaporedje je npr. $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

Def: Metrični prostor (M, d) je KOMPAKTEN, če za vsako odprto pokritje prostora M obstaja končno podpokritje.

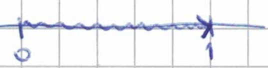
Izrek: (Bolzano – Weierstrass)

Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ je kompaktna $\Leftrightarrow$ A je zaprta in omejena.

Množica $A \subseteq M$ je v (M, d) OMEJENA, če $\exists r > 0$ in $\exists m \in M$, da $\forall a \in A$ velja $a \in K_r(m)$.

Katere od naslednjih množic predstavljajo kompaktne podmnožice množice $\mathbb{R}$ oz $\mathbb{R}^2$?

a) $A = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$



$1 \notin A$ toda $1 \in \partial A$ $\Rightarrow$ A ni zaprta

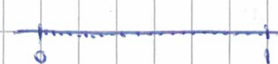
$\Rightarrow$ A ni kompaktna

b) $B = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$

B ni omejena

$\Rightarrow$ B ni kompaktna

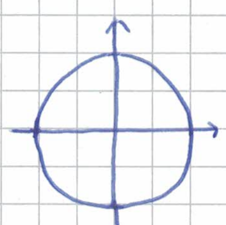
c) $C = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$



C ni zaprta
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \in \partial C \text{ in } \frac{1}{\sqrt{2}} \notin C\right)$

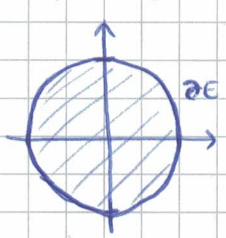
$\Rightarrow$ C ni kompaktna

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$\forall d_1 \in D$ velja $d_1 \in \partial D$
in $\forall d_2 \notin D$ $\exists r > 0$, da
$K_r(d_2) \cap D = \emptyset$ $\Rightarrow$ D zaprta
$D \subset K_{1+\varepsilon}(0, 0)$ $\Rightarrow$ D omejena
$\Rightarrow$ D je kompaktna

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

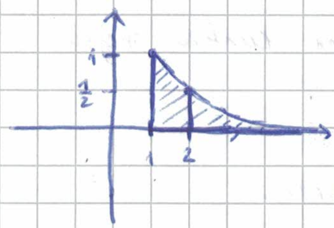


E je zaprta $\quad (\forall e \notin E\ \exists r > 0$, da $K_r(e) \cap E = \emptyset)$

E je omejena $\quad E \subset K_{1+\varepsilon}(0, 0)$

$\Rightarrow$ E je kompaktna

f) $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 1,\ 0\leq y\leq \frac{1}{x}\}\subseteq\mathbb{R}^2$



F ni omejena (za $\forall n\in\mathbb{N}$ je $(n,\frac{1}{n})\in F$)

$\Rightarrow$ F ni kompaktna.

g) $G=\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\subseteq\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall g_1\in G \text{ velja } g_1\in\partial G\\ \forall g_2\notin G\ \cancel{\text{velja, da}}\ \exists r>0, \text{ da je } K_r(g_2)\cap G=\emptyset\end{array}\right\}\Rightarrow G \text{ je zaprta}$$

Op! Če ne bi imeli 0 v G potem G ne bi bila zaprta!

G je omejena, saj je $G\subset K_{1+\varepsilon}(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ G je kompaktna

–) Pokažite, da če sta A in B kompaktni podmnožici prostora (M,d), potem je kompaktna tudi množica $A\cup B$.

Če je A kompaktna možica, potem zanjo velja, da $\exists$ odprto pokritje mn. A, za katerega obstaja končno podpokritje $\mathcal{U}_A$, ki pokrije A. Podobno $\exists$ končno ~~odp.~~ podpokritje $\mathcal{U}_B$, ki pokrije B.

Potem je $\mathcal{U}:=\mathcal{U}_A\cup\mathcal{U}_B$ končno podpokritje, ki pokrije $A\cup B$

$\Rightarrow$ $A\cup B$ je kompaktna.

–)

-) Pokažite, da če $X \subseteq \mathbb{R}$ ni kompaktna, potem obstaja zvezna funkcija $f: X \to \mathbb{R}$, ki je omejena vendar njena vrednost ni enaka meji.

Če X ni kompaktna potem X ni omejena ali ni zaprta.

Predpostavimo najprej, da X ni omejena.

Naj bo $f: X \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

Potem je $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ toda $f(x) > 0 \ \forall x \in X$.

Predpostavimo sedaj, da X ni zaprta in naj bo $c \in \partial X$

Naj bo $f: X \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $f(x) = |x - c|$.

Potem je $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (saj za poljuben $\delta > 0$ obstaja $x \in X$, da bo $|x - c| < \delta$)

toda $f(x) > 0 \ \forall x \in X$.