

Contents

1. Skalarni produkt in paralelogramska identiteta	1
2. Presek zaprtih množic	3
3. Zaprtje množice	4

1. Skalarni produkt in paralelogramska identiteta

Trditev: Norma $\|\cdot\|$ je porojena iz skalarnega produkta \Leftrightarrow Za normo $\|\cdot\|$ velja paralelogramska identiteta.

1.1. Dokaz

Iščemo skalarni produkt, da bo $(x, x) = \|x\|^2$ in $(x + y, x + y) = \|x + y\|^2$. V prostoru realnih števil je edini možni kandidat:

$$(x, y) := \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \quad (1)$$

Predpostavljamo, da velja paralelogramska identiteta. (1) je skalarni produkt, če izpolnjuje 4 lastnosti:

1. pozitivno definitnost, $(x, x) \geq 0$
2. simetričnost, $(x, y) = (y, x)$
3. aditivnost, $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
4. homogenost, $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

1.1.1. Pozitivna definitnost

$$\begin{aligned}(x, x) &\geq 0 \\ \frac{\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2}{4} &\geq 0 \\ \|x + x\|^2 - \|x - x\|^2 &\geq 0 \\ \|2x\|^2 - \|0\|^2 &\geq 0 \\ 2\|x\|^2 &\geq 0 \\ \|x\|^2 &\geq 0 \\ \|x\|\|x\| &\geq \|x\| \geq 0\end{aligned}$$

$\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pa sta po definiciji lastnosti norme, zato pozitivna definitnost velja. ■

1.1.2. Simetričnost

$$(x, y) = (y, x)$$

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \stackrel{\text{simetričnost norme}}{=} \frac{\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2}{4} = (y, x) \quad \blacksquare$$

1.1.3. Aditivnost

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

Uporabimo (1) in vse pomnožimo s 4, da dobimo:

$$\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 = (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) + (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)$$

Definiramo levo in desno stran kot:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &:= \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\ \text{RHS} &:= (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) + (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)\end{aligned}$$

Moramo pokazati torej, da velja LHS = RHS. Začnemo preurejati LHS, in sicer najprej potrebujem člen $\|x + z\|^2$. Preuredim prvi člen od LHS s pomočjo simetričnosti norme:

$$\|x + y + z\|^2 = \|(x + z) + y\|^2$$

Uporabim paralelogramsko identiteto za vektorja $x + z$ in y :

$$\begin{aligned}\|(x + z) + y\|^2 + \|(x + z) - y\|^2 &= 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(x + z) + y\|^2 &= 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x + z) - y\|^2\end{aligned}$$

Vstavim nazaj v LHS:

$$\begin{aligned}\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\ = 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x + z) - y\|^2 - \|x + y - z\|^2\end{aligned}\tag{2}$$

Preuredim še drugi člen LHS, da dobim $\|x - z\|^2$:

$$\|x + y - z\|^2 = \|(x - z) + y\|^2$$

In spet uporabim paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned}\|(x - z) + y\|^2 + \|(x - z) - y\|^2 &= 2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(x - z) + y\|^2 &= 2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x - z) - y\|^2 \\ \|x + y - z\|^2 &= 2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x - z) - y\|^2 \\ -\|x + y - z\|^2 &= -2\|x - z\|^2 - 2\|y\|^2 + \|(x - z) - y\|^2\end{aligned}\tag{3}$$

Vstavim (3) v (2):

$$\begin{aligned}2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x + z) - y\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\ = 2\|x + z\|^2 + \cancel{2\|y\|^2} - \|(x + z) - y\|^2 - 2\|x - z\|^2 - \cancel{2\|y\|^2} + \|(x - z) - y\|^2 \\ = 2\|x + z\|^2 - \|(x + z) - y\|^2 - 2\|x - z\|^2 + \|(x - z) - y\|^2 \\ = 2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - \|(x + z) - y\|^2 + \|(x - z) - y\|^2\end{aligned}\tag{4}$$

Zdaj potrebujem še $\|y + z\|^2$ in $\|y - z\|^2$. Preuredim zeleno normo, da dobim:

$$\|(x + z) - y\|^2 = \|x - (y - z)\|^2 = \|(y - z) - x\|^2$$

Uporabim naslednjo paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned}\|(y - z) + x\|^2 + \|(y - z) - x\|^2 &= 2\|y - z\|^2 + 2\|x\|^2 \\ \|(y - z) - x\|^2 &= 2\|y - z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y - z) + x\|^2 \\ -\|(y - z) - x\|^2 &= -2\|y - z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y - z) + x\|^2 \\ -\|(x + z) - y\|^2 &= -2\|y - z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y - z) + x\|^2\end{aligned}\tag{5}$$

Vstavim (5) v (4):

$$\begin{aligned}2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - \|(x + z) - y\|^2 + \|(x - z) - y\|^2 \\ 2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y - z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y - z) + x\|^2 + \|(x - z) - y\|^2\end{aligned}\tag{6}$$

Preuredim še modri člen:

$$\|(x - z) - y\|^2 = \|x - (z + y)\|^2 = \|(y + z) - x\|^2$$

Še zadnjič uporabim paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned} \|(y + z) + x\|^2 + \|(y + z) - x\|^2 &= 2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2 \\ \|(y + z) - x\|^2 &= 2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y + z) + x\|^2 \\ \|(x - z) - y\|^2 &= 2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y + z) + x\|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Ter vstavim (7) v (6):

$$\begin{aligned} 2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y - z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y - z) + x\|^2 + \|(x - z) - y\|^2 \\ 2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y - z\|^2 - \cancel{2\|x\|^2} + \|(y - z) + x\|^2 + \cancel{2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2} - \|(y + z) + x\|^2 \\ 2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y - z\|^2 + 2\|y + z\|^2 + \|(y - z) + x\|^2 - \|(y + z) + x\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Če preuredim zadnja dva člena:

$$\begin{aligned} \|(y - z) + x\|^2 - \|(y + z) + x\|^2 \\ = \|x + y - z\|^2 - \|x + y + z\|^2 \quad / \cdot (-1) \\ = \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 \end{aligned}$$

dobim točno LHS. Prav tako lahko preuredim ostale člene enačbe (8):

$$\begin{aligned} 2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y - z\|^2 + 2\|y + z\|^2 \\ 2(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y - z\|^2 + \|y + z\|^2) \\ 2((\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) + (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)) \end{aligned}$$

in dobim točno 2 RHS. Enačba (8) zato postane:

$$\begin{aligned} 2[(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) + (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)] - (\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2) \\ 2 \text{ RHS} - \text{LHS} \end{aligned}$$

Ker smo začeli z LHS, to pomeni:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 2 \text{ RHS} - \text{LHS} \\ 2 \text{ LHS} &= 2 \text{ RHS} \\ \text{LHS} &= \text{RHS} \end{aligned}$$

kar pa je točno to, kar je bilo treba dokazati. ■

1.1.4. Homogenost

NEZNAM

2. Presek zaprtih množic

Trditev: $F_n; n \in \mathbb{N}$ so zaprte množice $\Leftrightarrow F = F_1 \cap \dots \cap F_n$ je zaprta množica

2.1. Dokaz

Predpostavim, da so $F_n; n \in \mathbb{N}$ zaprte množice. Množica F je zaprta, če je njen komplement F^c odprta množica.

$$F^c = (F_1 \cap \dots \cap F_n)^c \stackrel{\text{deMorgan}}{=} F_1^c \cup \dots \cup F_n^c$$

Vemo, da je F^\complement odprta takrat, ko je odprta tudi vsaka množica F_n^\complement . Po definiciji pa so vse F_n^\complement odprte, saj so F_n zaprte. F^\complement je odprta množica $\iff F$ je zaprta množica.

□

3. Zaprtje množice

Trditev: $\overline{A} = A \cup b(A) = A \cup A'$

3.1. Dokaz

Moramo pokazati, da velja

$$A \cup b(A) \subseteq \overline{A} \subseteq A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$$

$$\mathbf{3.1.1.} \quad A \cup b(A) \subseteq \overline{A}$$