# CH 2 — THE FOUNDATION OF CALCULUS

## NORMS AND DISTANCES

Trikotniška neenakost:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m: \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (2.1.0)$$

Naj bosta $x = u - w$ in $y = w - v$. Potem je:

$$\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|$$

## CONVERGENCE OF SEQUENCES

(2.1.1) Neko zaporedje $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ konvergira proti $a \in \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0$ (poljubno majhen) obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da za $\forall n \geq N$ velja:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Oziroma:

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N)(|x_n - a| < \varepsilon)$$

Ekvivalentno pišemo:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Torej:

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N)(|x_n - a| < \varepsilon \vee \lim_{n \to \infty} x_n = a)$$

Bolj primerno:

$$(\exists \{x_n\} \subseteq \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N)(|x_n - a| < \varepsilon \vee \lim_{n \to \infty} x_n = a)$$

(2.1.2) (Posplošeno na vektorje) Zaporedje točk $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ konvergira proti $\underline{a} \in \mathbb{R}$, če $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$:

$$\|x_n - \underline{a}\| < \varepsilon \quad \vee \quad \lim_{n \to \infty} x_n = \underline{a}$$

Razdalja med dvema točkama v $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$\to (\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^m, \exists a \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N)(\|x_n - \underline{a}\| < \varepsilon \vee \lim_{n \to \infty} x_n = \underline{a})$$

Da dokažemo, da NE konvergira, moramo najt nek $\varepsilon > 0$, tako da za vsak $N \in \mathbb{N}$ obstaja nek $n \geq N$, tako da $\|x_n - a\| \geq \varepsilon$.

Ekvivalentno:

$$\left(\exists \{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^m, \exists a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N\right)\left(\|x_n - a\| \geq \varepsilon \wedge \lim_{n\to\infty} x_n \neq a\right)$$

(2.1.3) Predpostavimo, da zaporedji $\{x_n\}$ in $\{y_n\}$ konvergirata proti $a$ in $b$. Potem konvergira $\{x_n + y_n\}$ proti $a+b$.

Dokaz: Pokazati moramo, da za $\forall \varepsilon > 0$ vedno $\exists N \in \mathbb{N}$, tako da za $\forall n \geq N$ velja:

$$\|(x_n + y_n) - (a+b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \overset{(2.1.0)}{\leq} \|x_n - a\| + \|y_n - b\| < \varepsilon$$

Ko $x_n$ konvergira proti $a$, po def. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, da velja $\|x_n - a\| < \varepsilon/2$ za $\forall n \geq N_1$. Podobno za $y_n$ in $N_2 \in \mathbb{N}$ velja $\|y_n - b\| < \varepsilon/2$ za $\forall n \geq N_2$.

pač nek poljubno majhen $\varepsilon$ ...

Naj bo $N = \max\{N_1, N_2\}$. Potem za $\forall n \geq N$ velja:

$$\|x_n - a\| + \|y_n - b\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|(x_n + y_n) - (a+b)\| < \varepsilon \quad \square$$

## CONTINUITY

"funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v $a \in \mathbb{R}$, če se $f(x)$ bliža $f(a)$ natanko tedaj, ko se $x$ bliža $a$."

To ni dobra definicija. Definirajmo pomen "bliža".

(2.1.4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v $a \in \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da če je $|x - a| < \delta$, potem je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$\left(\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\right)\left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)$$

Primer nezvezne funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \,; & x \leq 0 \\ 2 \,; & x > 0 \end{cases}$$

Vidimo, da je $f(0) = 1$, ampak točke zelo blizu 0 so enake 2!

Če vzamemo nek $\varepsilon < 1$, potem najdemo točke za nek $\delta > 0$, tako da bodo med 0 in $\delta$, da bo veljalo $f(x) = 2$ in zato:

$$|f(x) - f(a)| = |2 - 1| = 1 > \varepsilon$$

↳ Ni zvezna v točki $a = 1$!

(2.1.5) funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$ če, in samo če, velja za vsa zaporedja $\{x_n\}$, ki konvergirajo proti $a$, izraz:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

Ekvivalentno: "$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$"

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\forall \{x_n\} \subseteq \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N\right)\left(\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)\right)$$

Dokaz: Predpostavimo, da je $f$ zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$ in da

i) velja tudi $\lim(n \to \infty) x_n = a$.

Pokazati moramo, da $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$.
To pomeni, da $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: \|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$.

Ker je $f$ zvezna, po def.:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

velja tudi $\lim(n \to \infty) x_n = a$, torej obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq N$ velja:

$$|x_n - a| < \delta$$

Ker to velja za $\forall n \geq N$, potem velja tudi $\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$.
$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ konvergira proti $f(a)$. ■

ii) Zdaj dokažemo še to, da če je $f$ nezvezna v $a$, potem obstaja vsaj eno zaporedje $\{x_n\}$, ki konvergira v $a$, ampak da $\{f(x_n)\}$ ne konvergira v $f(a)$.

Ker $f$ ni zvezna v $a$, to pomeni ...

$$\neg\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\right)\left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right) \qquad \neg(A \Rightarrow B)$$

$$\left(\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0\right)\left(|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\right) \qquad A \wedge \neg B$$

Ne glede na to kako mali $\delta$ vzamemo, vedno obstaja tak $\varepsilon$, da velja $|x - a| < \delta$, ampak $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Naj bo $\delta = 1/n$. Zdaj obstaja točka $x_n$, tako da velja $|x_n - a| < 1/n$, ampak $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Zaporedje $\{x_n\}$ zato konvergira proti $1/n$, oz. $a$, vendar $\{f(x_n)\}$ ne konvergira proti $f(a)$ (ker je razdalja med $f(x_n)$ in $f(a)$ vedno VSAJ $\varepsilon$). ■

□

(2.1.6) $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $\underline{a}$, če za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tako da velja:

$$\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| F(x) - F(a) \| < \varepsilon$$

$$(\exists x, a \in \mathbb{R}^n)(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0)(\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| F(x) - F(a) \| < \varepsilon)$$

(2.1.7) $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v $a \in \mathbb{R}^n$, če, in samo če, velja za vsa zaporedja $\{x_n\}$, ki konvergirajo proti $a$, izraz:

$$\lim_{k \to \infty} F(x_k) = F(a)$$

(2.1.8) Predpostavimo, da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in da je $a \in A$. $F: A \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $a$, če za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, da velja $\| F(x) - F(a) \| < \varepsilon$, natanko tedaj ko velja $\| x - a \| < \delta$, za $x \in A$.

$$(A \subseteq \mathbb{R}^n, \exists a \in A, \exists x \in A)(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0)(\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| F(x) - F(a) \| < \varepsilon)$$

## ESTIMATES

Pri $\varepsilon$-$\delta$ dokazih iščemo "nek" $\delta > 0$, ki bo opravil svoje delo. Ne iščemo najboljšega. Zaradi tega lahko poenostavimo izračune z uporabo približnih vrednosti namesto natančnih.

Npr., če rečemo "ta faktor ne bo nikoli večji od 10, zato zadošča $\delta = \varepsilon / 10$".

(2.1.9) Predpostavi, da je $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna v $a \in \mathbb{R}$. Naj velja tudi $g(a) \neq 0$. Potem je tudi funkcija $h(x) = 1/g(x)$ zvezna v $a$.

Dokaz: Za nek $\varepsilon > 0$ moramo pokazat, da obstaja $\delta > 0$, tako da velja:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} \right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(a)||g(x)|}$$

Ker $g(x) \to g(a)$, je števec lahko poljubno majhen, tako da vzamemo $x$ dovolj blizu $a$; toda, bližje kot sta, manjši je produkt $|g(x)||g(a)|$ in ulomek postane vse večji! Potem je možno, da ne najdemo vrednost $\varepsilon > 0$...

Ker je $|g(a)|$ konstanten, zaradi $a$, ga z lahkoto prilagodimo, tako da izberemo v redu $a$. Kaj pa $|g(x)|$? Moramo posplošiti na vse $x$... Ker $g(x) \to g(x) \neq 0$, $|g(x)|$ ne sme biti premajhen, ko $x \to a$.

Obstajati mora neka $\delta_1 > 0$, tako da velja:

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| > \frac{|g(a)|}{2}$$

Za $\forall x$, ki ustrezajo $|x-a| < \delta_1$, imamo zdaj:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a)-g(x)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(a)-g(x)|}{\frac{|g(a)|}{2}\,|g(a)|} = \frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)|$$

Kako zdaj spravimo ta izraz pod $\varepsilon$?!

Okej. Očitno je $2/|g(a)|^2$ konstantno, saj imamo fiksiran $a$. To pomeni, da je odvisno od $|g(x)-g(a)|$, če pridemo pod $\varepsilon$.

Mora veljati:
$$\frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)| < \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow \quad |g(a)-g(x)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\varepsilon$$

Ker je $g$ zvezna v $a$, vemo da obstaja nek $\delta_2 > 0$, tako da velja:

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(a)-g(x)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\varepsilon$$

Izberemo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ in dobimo:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| \leq \frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)| \ \ldots$$
$$\downarrow$$
$$|g(a)-g(x)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)| < \frac{\cancel{2}}{\cancel{|g(a)|^2}} \cdot \frac{\cancel{|g(a)|^2}}{\cancel{2}} \cdot \varepsilon$$
$$\frac{2}{|g(a)|^2}|g(a)-g(x)| < \varepsilon$$

$\square$

EXCERCISES FOR SECTION 2.1

1. Pokaži, da če $\{x_n\}$ konvergira proti $a$, potem $\{Mx_n\}$ ($M = const.$) konvergira proti $Ma$.

Zaporedje konvergira: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: \quad |x_n - a| < \varepsilon$
oziroma, ko:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Pokazati moram, da $\{Mx_n\}$ konvergira v $Ma$:

i) $M \neq 0$

$$|Mx_n - Ma| = |M(x_n - a)| = |M||x_n - a|$$

Naj bo $\varepsilon$ zdaj $\varepsilon / |M|$, zato:

$$\cancel{|M|}|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\cancel{|M|}} \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Torej za $\forall \varepsilon$ tak $Mx_n$ konvergira proti $Ma$, ker tudi $\{x_n\}$ konvergira proti $a$...

ii) $M = 0$: $\{Mx_n\} = \{0 \cdot x_n\} = \{0\}$ in $Ma = 0 \cdot a = 0$. Pokažemo, da $\{0\}$ konvergira proti $0$. Za $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$:

$$|0 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \varepsilon$$

Torej tudi zdaj $Mx_n$ konvergira proti $Ma$.

$\square$

2. Predpostavi, da so $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ in $\{z_n\}$ 3 zaporedja $\mathbb{R}$ števil, tako da:

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{za } \forall n \in \mathbb{N}$$

Pokaži, da če $\{x_n\}$ in $\{z_n\}$ konvergirata proti $a \in \mathbb{R}$, potem tudi $\{y_n\}$.

Po definiciji torej za $\forall \varepsilon > 0, \exists N_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_x: \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad (1)$
in za $\forall \varepsilon > 0, \exists N_z \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_z: \quad |z_n - a| < \varepsilon \quad (2)$

$(1) \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (1.2)$
$(2) \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \quad (2.2)$

Naj bo $N = \max\{N_x, N_z\}$, zato za $\forall n \geq N$ veljata $(1.2)$ in $(2.2)$ in tudi $x_n \leq y_n \leq z_n$.

$$\begin{rcases} a - \varepsilon < x_n \leq y_n \Rightarrow a - \varepsilon < y_n \\ y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow y_n < a + \varepsilon \end{rcases} \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$

to pa je natanko $|y_n - a| < \varepsilon$, zato tudi $\{y_n\}$ konvergira proti $a$.

$\square$

3. Uporabi definicijo zveznosti, da pokažeš, da če je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a$, potem je tudi funkcija $g(x) = M f(x)$ $(M = \text{const.})$ zvezna v točki $a$.

$f$ je zvezna $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Da pokažem, da je $g(x)$ zvezna, mora veljati za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |Mf(x) - Mf(a)| < \varepsilon$$
$$|M(f(x) - f(a))| < \varepsilon$$
$$|M|\,|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

i) $M = 0$: $\quad |M|\,|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

ii) $M \neq 0$: $\quad |M|\,|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{|M|}$

ker je $f$ zvezna, velja to za poljubno majhne vrednosti $\varepsilon > 0$. Ker $|M| \neq 0$, $\varepsilon / |M| \neq 0$ in izraz velja.

$g$ je zvezna v $a$. $\Leftarrow$

$\square$

4. Če sta $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezni v $a$, pokaži, da je tudi $f+g$.

$f$ je zvezna v $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Sklepam, da je $f+g = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ...
Pokazati moram torej, da je $f+g$ zvezna $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \varepsilon$$
$$|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$$
$$|(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| < \varepsilon$$

$$|(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$$

Ker sta $f$ in $g$ zvezni v $a$, velja:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$
$$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|(f+g)(x)| < \varepsilon$$

$\square$

pač neka poljubna $\varepsilon > 0$,
zato da se lepo sešteje v $\varepsilon$...

5. a) Če sta $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezni v $a$, pokaži da je potem tudi $fg$.

$fg = (f \cdot g)(x) = f(x)\,g(x)$ Pokažem, da je zvezna, tako da za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |(fg)(x) - (fg)(a)| < \varepsilon$$

$$= |(f(x) \cdot g(x)) - (f(a) \cdot g(a))|$$
$$= |f(x)g(x) - f(a)g(a)|$$
$$= |f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)|$$
$$= |(f(x)g(x) - f(a)g(x)) + (f(a)g(x) - f(a)g(a))|$$
$$\leq |f(x)g(x) - f(a)g(x)| + |f(a)g(x) - f(a)g(a)|$$

$= |g(x)(f(x)-f(a))| + |f(a)(g(x)-g(a))|$

... will speedrun this (od Gemini, ampak mi je jasno, samo nikdi se ne bi spomnil tega...):

- $g$ je zvezna v $a \Leftrightarrow \varepsilon_1 = 1, \exists \delta_1 > 0: |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)-g(a)| < 1$
- $|g(x)| = |g(x)-g(a)+g(a)| \leq |g(x)-g(a)| + |g(a)| < 1 + |g(a)|$
- $M = 1 + |g(a)|$ (konstanta)

- $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |g(x)| \cdot |f(x)-f(a)| + |f(x)| \cdot |g(x)-g(a)|$

- $f$ je zvezna v $a \Leftrightarrow \varepsilon/2M > 0, \exists \delta_2 > 0: |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon/2M$

- $g$ je zvezna v $a \Leftrightarrow \varepsilon/2(|f(a)|+1), \exists \delta_3 > 0: |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon/2(|f(x)|+1)$

- $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$
- $|x-a| < \delta \Rightarrow$ 1. $|g(x)| < M = |g(a)|+1$
  2. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon/2M$
  3. $|g(x)-g(a)| < \varepsilon/2(|f(x)|+1)$

- $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |g(x)| \cdot |f(x)-f(a)| + |f(x)| \cdot |g(x)-g(a)|$
  $< M \cdot \varepsilon/2M + |f(a)| \cdot \varepsilon/2(|f(a)|+1)$
  $= \varepsilon/2 + |f(a)|/|f(a)|+1 \cdot \varepsilon/2$

- $|f(a)| \geq 0,\ |f(a)| \leq |f(a)|+1 \Rightarrow |f(a)|+1 > 0 \Rightarrow |f(a)|/|f(a)|+1 \leq 1$

$= \varepsilon/2 + 1 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ $\square$

b) Uporabi izrek (2.1.9) ter rezultat dela (a), da pokažeš, da je funkcija $f/g$ zvezna v $a$.

Pokazali smo, da je produkt dveh funkcij, npr. $fh$, zvezen v $a$. Izrek (2.1.9) pravi, da je $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna v $a$ in $g(a) \neq 0$, torej je tudi $h(x) = 1/g(x)$ zvezna v $a$.

Pokazati moram, da je $(\frac{f}{g})(a)$ zvezna v $a$. Naj bo $h(x) = 1/g(x)$. $f$ in $h$ sta zvezni, zato je (po (a)) tudi $fh$ zvezna:

$$fh = f \cdot \frac{1}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

zato je tudi $f/g$ zvezna v $a$. $\square$

7. S trikotniško neenakostjo pokaži, da je $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a-b\|$ za $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Naj bo $a = (a-b)+b \Rightarrow \|a\| = \|(a-b)+b\| \leq \|a-b\| + \|b\| \quad / -\|b\|$
$\|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|$

Naj bo $b = (b-a)+a \Rightarrow \|b\| = \|(b-a)+a\| \leq \|b-a\| + \|a\| \quad / -\|a\|$
$\|b\| - \|a\| \leq \|b-a\|$
$= \|-(a-b)\|$
$= |-1| \|a-b\|$
$= \|a-b\|$

Zdaj imamo: $\|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|$ (1)

$\|b\| - \|a\| \leq \|a-b\| \quad \cdot(-1)$

$-(\|b\| - \|a\|) \geq -\|a-b\|$

$\|a\| - \|b\| \geq -\|a-b\|$ (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow -\|a-b\| \leq \|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|$

$\Rightarrow \big| \|a\| - \|b\| \big| \leq \|a-b\|$

$\square$