Contents

1. Skalarni produkt in paralelogramska identiteta

Trditev: Norma $\|.\|$ je porojena iz skalarnega produkta $\Longleftrightarrow$ Za normo $\|.\|$ velja paralelogramska identiteta.

1.1. Dokaz

Iščemo skalarni produkt, da bo $(x, x) = \|x\|^2$ in $(x + y, x + y) = \|x + y\|^2$. V prostoru realnih števil je edini možni kandidat:

$$(x, y) := \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \tag{1}$$

Predpostavljamo, da velja paralelogramska identiteta. (1) je skalarni produkt, če izpolnjuje 4 lastnosti:

1. pozitivno definitnost, $(x, x) \geq 0$
2. simetričnost, $(x, y) = (y, x)$
3. aditivnost, $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
4. homogenost, $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

1.1.1. Pozitivna definitnost

$$\begin{aligned} (x, x) &\geq 0 \\ \frac{\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2}{4} &\geq 0 \\ \|x + x\|^2 - \|x - x\|^2 &\geq 0 \\ \|2x\|^2 - \|0\|^2 &\geq 0 \\ 2\|x\|^2 &\geq 0 \\ \|x\|^2 &\geq 0 \\ \|x\|\|x\| &\geq \|x\| \geq 0 \end{aligned}$$

$\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pa sta po definiciji lastnosti norme, zato pozitivna definitnost velja. ■

1.1.2. Simetričnost

$$(x, y) = (y, x)$$

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \overset{\substack{\text{simetričnost} \\ \text{norme}}}{=} \frac{\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2}{4} = (y, x) \quad ■$$

1.1.3. Aditivnost

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

Uporabimo (1) in vse pomnožimo s 4, da dobimo:

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right)$$

Definiramo levo in desno stran kot:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &:= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ \text{RHS} &:= \left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \end{aligned}$$

Moramo pokazati torej, da velja $\text{LHS} = \text{RHS}$. Začnemo preurejati LHS, in sicer najprej potrebujem člen $\|x+z\|^2$. Preuredim prvi člen od LHS s pomočjo simetričnosti norme:

$$\|x+y+z\|^2 = \|(x+z)+y\|^2$$

Uporabim paralelogramsko identiteto za vektorja $x+z$ in y:

$$\begin{aligned} \|(x+z)+y\|^2 + \|(x+z)-y\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(x+z)+y\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 \end{aligned}$$

Vstavim nazaj v LHS:

$$\begin{aligned} &\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - &\|(x+z)-y\|^2 - \|x+y-z\|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Preuredim še drugi člen LHS, da dobim $\|x-z\|^2$:

$$\|x+y-z\|^2 = \|(x-z)+y\|^2$$

In spet uporabim paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned} \|(x-z)+y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(x-z)+y\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x-z)-y\|^2 \\ \|x+y-z\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x-z)-y\|^2 \\ -\|x+y-z\|^2 &= -2\|x-z\|^2 - 2\|y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Vstavim (3) v (2):

$$\begin{aligned} &2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ &= 2\|x+z\|^2 + \cancel{2\|y\|^2} - \|(x+z)-y\|^2 - 2\|x-z\|^2 - \cancel{2\|y\|^2} + \|(x-z)-y\|^2 \\ &= 2\|x+z\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 - 2\|x-z\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \\ &= 2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Zdaj potrebujem še $\|y+z\|^2$ in $\|y-z\|^2$. Preuredim zeleno normo, da dobim:

$$\|(x+z)-y\|^2 = \|x-(y-z)\|^2 = \|(y-z)-x\|^2$$

Uporabim naslednjo paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned} \|(y-z)+x\|^2 + \|(y-z)-x\|^2 &= 2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2 \\ \|(y-z)-x\|^2 &= 2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y-z)+x\|^2 \\ -\|(y-z)-x\|^2 &= -2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 \\ -\|(x+z)-y\|^2 &= -2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Vstavim (5) v (4):

$$\begin{aligned} &2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \\ &2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Preuredim še modri člen:

$$\|(x-z)-y\|^2 = \|x-(z+y)\|^2 = \|(y+z)-x\|^2$$

Še zadnjič uporabim paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned}
\|(y+z)+x\|^2 + \|(y+z)-x\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 \\
\|(y+z)-x\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2 \\
\|(x-z)-y\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2
\end{aligned} \tag{7}$$

Ter vstavim (7) v (6):

$$\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \\
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 - \cancel{2\|x\|^2} + \|(y-z)+x\|^2 + 2\|y+z\|^2 + \cancel{2\|x\|^2} - \|(y+z)+x\|^2 \\
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 + 2\|y+z\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2
\end{aligned} \tag{8}$$

Če preuredim zadnja dva člena:

$$\begin{aligned}
&\|(y-z)+x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2 \\
&= \|x+y-z\|^2 - \|x+y+z\|^2 \quad / \cdot (-1) \\
&= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2
\end{aligned}$$

dobim točno LHS. Prav tako lahko preuredim ostale člene enačbe (8):

$$\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 + 2\|y+z\|^2 \\
&2(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2 + \|y+z\|^2) \\
&2((\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + (\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2))
\end{aligned}$$

in dobim točno 2 RHS. Enačba (8) zato postane:

$$\begin{gathered}
2[(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + (\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2)] - (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2) \\
2 \text{ RHS} - \text{LHS}
\end{gathered}$$

Ker smo začeli z LHS, to pomeni:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= 2 \text{ RHS} - \text{LHS} \\
2 \text{ LHS} &= 2 \text{ RHS} \\
\text{LHS} &= \text{RHS}
\end{aligned}$$

kar pa je točno to, kar je bilo treba dokazati. ■

1.1.4. Homogenost

NEZNAM

2. Presek zaprtih množic

Trditev: $F_n; n \in \mathbb{N}$ so zaprte množice $\Longleftrightarrow F = F_1 \cap \ldots \cap F_n$ je zaprta množica

2.1. Dokaz

Predpostavim, da so $F_n; n \in \mathbb{N}$ zaprte množice. Množica F je zaprta, če je njen komplement $F^\complement$ odprta množica.

$$F^\complement = (F_1 \cap \ldots \cap F_n)^\complement \overset{\text{deMorgan}}{=} F_1^\complement \cup \ldots \cup F_n^\complement$$

Vemo, da je $F^{\complement}$ odprta takrat, ko je odprta tudi vsaka množica $F_n^{\complement}$. Po definiciji pa so vse $F_n^{\complement}$ odprte, saj so F_n zaprte.

$F^{\complement}$ je odprta množica $\Longleftrightarrow$ F je zaprta množica.

□

3. Zaprtje množice

Trditev: $\overline{A} = A \cup b(A) = A \cup A'$

3.1. Dokaz

Moramo pokazati, da velja

$$A \cup b(A) \subseteq \overline{A} \subseteq A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$$

3.1.1. $A \cup b(A) \subseteq \overline{A}$