(1.1.2) $\boxed{f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)}$

Dokaz: $(\Rightarrow)$

1. $A \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A; \ \forall A\in\mathcal{A}$ (pred.)

2. $f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right); \ \forall A\in\mathcal{A}$ (1)

3. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$ (2)

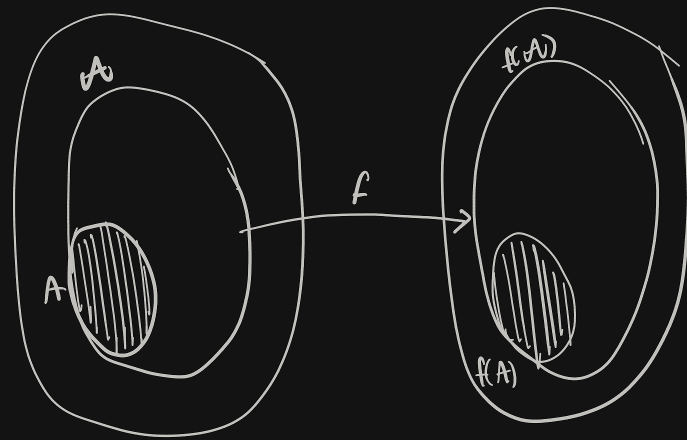
$(\Leftarrow)$

1. $y \in f\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$ je nekje tu not

2. $\exists x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A : \ y = f(x)$ (1)

3. x mora bit del vsaj ene množice v $\mathcal{A}$, naj bo $x\in A'$ in $A'\in\mathcal{A}$ (2)

4. $x\in A'$
   $f(x) \in f(A')$
   $y \in f(A') \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)$ (1,3)



$$f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$$

Dokaz: $(\Rightarrow)$

1. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq A; \ \forall A\in\mathcal{A}$ (pred.)

2. $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq f(A); \ \forall A\in\mathcal{A}$ (1)

3. $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$ (2)

$(\Leftarrow)$ Primer zakaj obratno ne velja:

- $X = \{x_1, x_2\}$
- $Y = \{y\}$

$f: X\to Y$

- $f(x_1) = y$
  $f(x_2) = y$

- $A_1 = \{x_1\}$
- $A_2 = \{x_2\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{y\}$

$f(A_1\cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$!

Problem je tu, ker $f(A_1)\cap f(A_2)$ ni $\emptyset$. Posplošimo lastnost na INJEKTIVNE funkcije in bo v redu.

$f: X\to Y, \quad f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

$\downarrow$

če imata x_1 in x_2 isto sliko, kljub temu, da sta različna, potem ni injektivno.

Če imata različni sliki in sta ista...? Kaj je potem...?

(1.4.3) Naj bo $\mathcal{A}$ družina podmnožic X. Za vse injektivne funkcije naj velja $f: X \to Y$:

$$f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$$

Dokaz: $(\Leftarrow)$ $f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$

1. $y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$ (pred.)

2. $\forall A \in \mathcal{A}: \exists x_A \in A: \quad y = f(x_A)$

3. f je injektivna, zato velja, da so vsi $x_A \in A$ isti elementi (slika vsakega je enaka y samo če so vsi enaki)

   Naj bo to element $x \in A$; $\forall A \in \mathcal{A}$

4. $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \quad \Rightarrow f(x) \in f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)$

5. $y = f(x) \Rightarrow y \in f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)$

(1.4.4) Naj bo $f: X \to Y$ in $B \subseteq Y$. Potem velja:

$$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$$
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

Dokaz:

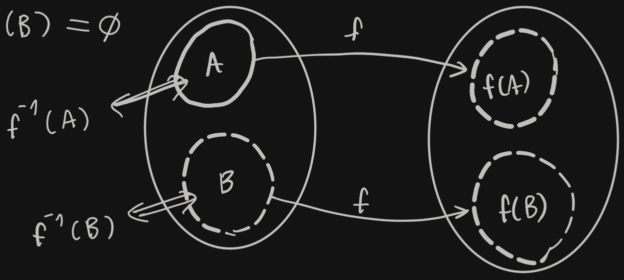
1. $x \in X \ \wedge \ x \in f^{-1}(B^c) \Rightarrow f(x) \in B^c$ (pred.)

2. $x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c \Rightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in B^c$ (1)

3. $f^{-1}(B^c) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^c \wedge \left(f^{-1}(B)\right)^c \subseteq f^{-1}(B^c) \Rightarrow f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$

Disjunktnost je tudi ohranjena med inverzi, očitno.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$



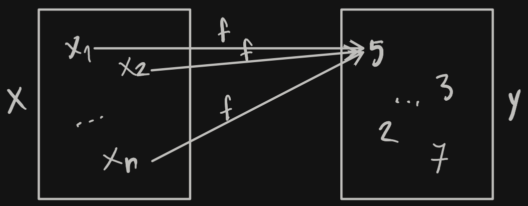
Naj bo $f: X \to Y$ funkcija. f je:

Injektivna: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1), f(x_2) \in Y$
Različna elementa, različni sliki.

Surjektivna: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$ (vsak y iz desne mn. ima originalni element v levi; y ne more obstajat brez x)

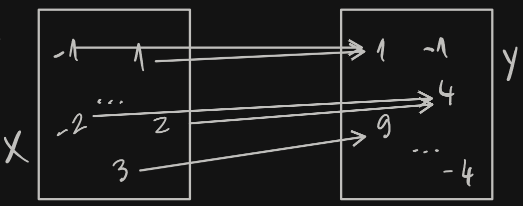
Primeri funkcij, ki niso surjektivne:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 5$



Zdaj NI RES, da za $\forall y \in Y$ obstaja $x \in X$, da je $y = f(x)$.
3, 2, 7, ... nimajo $x \in X$, samo 5 ima (vse).

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$



Vsa negativna števila v Y nimajo originala v X, ker se tako negativni kot pozitivni $x \in X$ slikajo v poz. št. zaradi potence.

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = |x|$

Tako kot x^2 je očitno, da negativni elementi kodomene nimajo originala, ker se vse slika v pozitivne vrednosti.

$f: X \to Y$ je bijektivna takrat, ko je injektivna in surjektivna, oziroma velja:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : y = f(x)$$

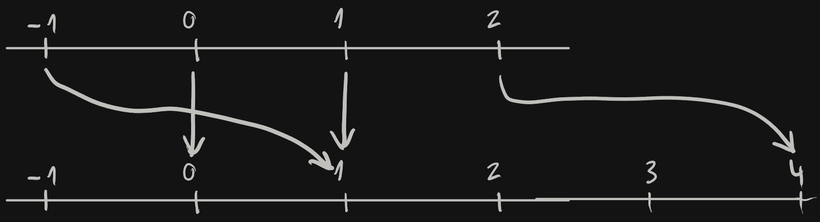
Le v tem primeru lahko definiramo inverz $f^{-1}: Y \to X$, da velja:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

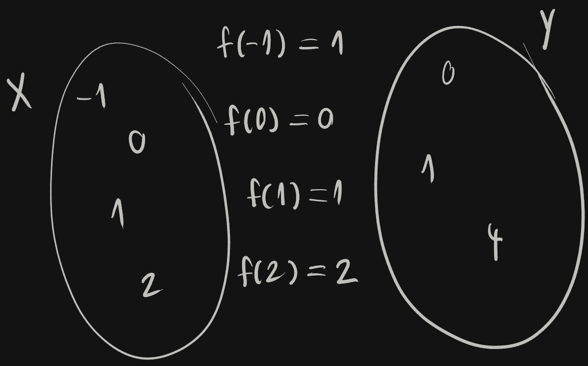
(1.4.5) Če sta $f: X \to Y$ in $g: Y \to X$ bijektivni, je tudi njun kompozitum $g \circ f$ in $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$.

Section 1.4 excercises:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. $f([-1,2]) = ?$, $f^{-1}([-1,2])$?



$$f(0) = 0 \quad f(-1) = 1 \quad f(2) = 4 \Rightarrow f(\underset{\substack{\parallel \\ X}}{[-1,2]}) = \underset{\substack{\parallel \\ Y}}{[0,4]}$$



$f^{-1}(-1) = \sqrt{-1}$ not defined ...?

$f^{-1}([-1,2]) = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \in [-1,2]\}$ definicija inverza

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq f(x) \leq 2$$

$$-1 \leq x^2 \leq 2$$

$-1 \leq x^2$ velja za $\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 \leq 2$

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}([-1,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

2. $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$. $g([-1,1] \times [-1,1])$? $g^{-1}([0,4])$?

$$g([-1,1] \times [-1,1]) = \{g(x,y);\ x, y \in [-1,1]\}$$

$-1 \leq x \leq 1$ in $-1 \leq y \leq 1$ $\Rightarrow$ $x^2, y^2 \in [0,1]$

$0 \leq x^2 \leq 1$ $\quad$ $0 \leq y^2 \leq 1$ $\quad$ $x^2 + y^2 \in [0,2]$

To pomeni $g([-1,1] \times [-1,1]) = [0,2]$.

$$g^{-1}([0,4]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ g(x,y) \in [0,4]\}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 \in [0,4]$$

$$0 \le x^2 + y^2 \le 4$$

velja za $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ zaradi $()^2$

$$x^2 + y^2 \le 4$$

$$\Downarrow$$

$$g^{-1}([0,4]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \le 4\}$$

3. Pokaži, da funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ni surjektivna ali injektivna. Kaj se spremeni, če je $f(x) = x^3$?

i) I. f ni surjektivna, torej ni res, da

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

oz. "ni res, da za vsak y obstaja x oz. original iz domene".

Predpostavim, da je surjektivna. Torej bi to pomenilo, da ima vsaka slika original v domeni.

$f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$

$f(x) = 5$?

$x^2 = 5$

$x \pm \sqrt{5} \Longrightarrow \pm\sqrt{5}$ ni realno število, zato 5 nima originala v domeni in predpostavka ne drži. (iracionalno)

II. f ni injektivna, torej ni res, da velja:

$$x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_1)$$

To ne velja, ko imata različna elementa isto sliko. Predp. da je injektivna. To pomeni, da za $\forall x \in \mathbb{R}$ velja lastnost. Naj bosta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

$f(x_1) = 1^2 = 1$

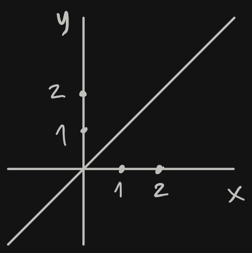
$f(x_2) = (-1)^2 = 1$

$\ast \quad 1 \ne -1 \Rightarrow f(1) = f(-1) \quad \ast$

ii) Kaj se spremeni, če je $f(x) = x^3$?
Postala bi injektivna, vendar ne surjektivna.

4. Show that a strictly increasing function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is injective. Does it have to be surjective?

Primer enostavne naraščajoče funkcije: $f(x) = x$



- Ta funkcija je očitno injektivna in surjektivna.
- Injektivne so torej bolj take zrcalne funkcije? ...
- Naraščajoča in injektivna funkcija (striktno)
  a) $\forall i \in \mathbb{N}, \exists x_i, x_{i+1} : x_i < x_{i+1}$
  (naslednik je vedno večji...)
  $\Leftrightarrow f(x_i) < f(x_{i+1})$
  b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_1)$

Ker $f(x_i) < f(x_{i+1}) \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_{i+1})$, res ne mora bit ne-injektivna!

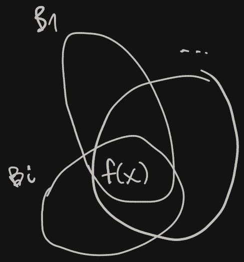
Ali mora bit surjektivna? Ali mora za $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, da je $y = f(x)$? Za vsak x_i obstaja x_{i+1}, tako da velja $x_i < x_{i+1}$.

Ne, ni res, da mora bit surjektivna. Primer je funkcija $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$. Funkcija je očitno injektivna, a ni surjektivna, saj je $Z_f = (0, \infty)$, medtem ko je $D_f = \mathbb{R}$.

5. Proove the proposition (1.4.1) (second one):

$$f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$$

i) $f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right) \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$



1. $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right)$ (pred.)
2. $f(x) \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ (1)
3. $f(x) \in B \; ; \; \forall B \in \mathcal{B}$ (2)
4. $x \in f^{-1}(B) \; ; \; \forall B \in \mathcal{B}$ (3)
5. $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$ (4)
6. $f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right) \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$ (1,5)

ii) Zelo podobno

1. $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$ (pred.)
2. $x \in f^{-1}(B) \; ; \; \forall B \in \mathcal{B}$ (1)
3. $f(x) \in B \; ; \; \forall B \in \mathcal{B}$ (2)
4. $f(x) \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ (3)
5. $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right)$ (4)

6. $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\right)$ (1,5)

6. Najdi funkcijo $f: X \to Y$ in $A \subseteq X$, tako da ne veljata izraza:

$$f(A^c) \subseteq f(A)^c$$

$$f(A)^c \subseteq f(A^c)$$

(1.4.4) Naj bo $f: X \to Y$ in $B \subseteq Y$. Potem velja:

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

Dokaz:

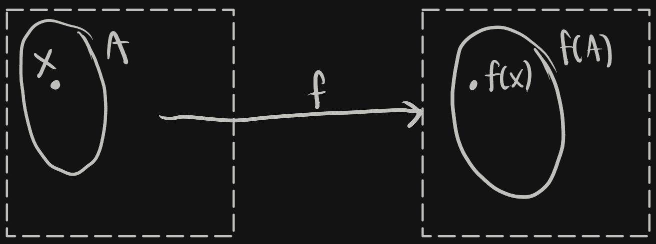
1. $x \in X \wedge x \in f^{-1}(B^c) \Rightarrow f(x) \in B^c$ (pred.)

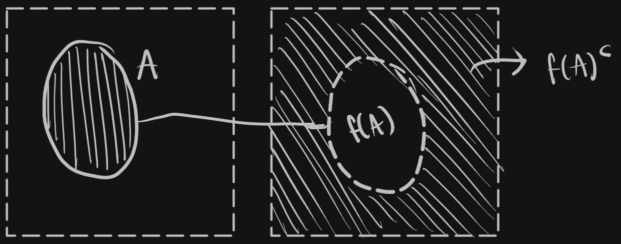
2. $x \in (f^{-1}(B))^c \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in B^c$ (1)

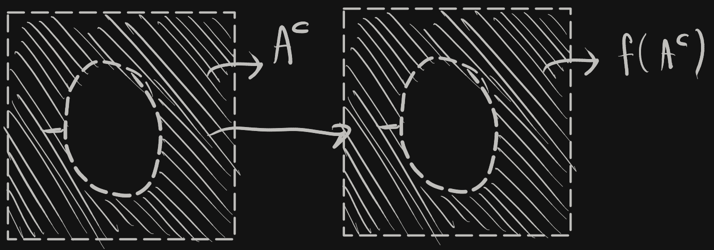
3. $f^{-1}(B^c) \subseteq (f^{-1}(B))^c \wedge (f^{-1}(B))^c \subseteq f^{-1}(B^c) \Rightarrow f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

Kaj sploh pomenita tista izraza...?

$$f(A^c) \subseteq f(A)^c \Rightarrow \exists y, \underset{\exists x \in A,}{} \; y \in f(A^c) \wedge y \in f(A)^c \quad (y = f(x))$$
na sliki







Res je $f(A^c) = f(A)^c$. Jaz pa moram najt funkcijo, za katero to ne drži...

a) Nek $x \in A$ ne sme imet $y \in f(A)^c$
b) Nek $x' \in A^c$ ne sme imet $y \in f(A^c)$

Torej $f(x) \in f(A)$ in $f(x') \in f(A^c)$.

Kok retardirano... Gemini primer:

$f: X \to Y$, $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$

$f(1) = a$ $\quad A \subseteq X$, $A = \{1\}$
$f(2) = b$ $\quad \Downarrow$
$f(3) = a$

$$A^c = \{2,3\}$$

$$f(A^c) = f(\{2,3\}) = \{f(2), f(3)\} = \{b, a\}$$

$$f(A)^c = f(1)^c = \{a\}^c = \{b, c\}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\{b,a\}}{f(A^c)} \not\subseteq \underset{\{b,c\}}{f(A)^c} \quad \text{in} \quad f(A)^c \not\subseteq f(A^c)$$

:3

Ta funkcija ni surjektivna
ali injektivna, podmn. A ima element, ki si deli
sliko z nekim drugim elementom.

Kaj če dodam 4 in d, tako da $f(4) = b$.

$A = \{1\} \Leftrightarrow A^c = \{2,3,4\}$

$$f(A^c) = \{f(2), f(3), f(4)\} = \{b, a, b\}$$

$$f(A)^c = \{f(1)\}^c = \{a\}^c = \{b, c, d\}$$

$$f(A)^c = \{b,c,d\} \not\subseteq \{a,b\} = f(A^c)$$

Interesting... Kaj pa če je $X = \{1,2\}$, Y je isti.

$f(1) = a$ $\quad A = \{1\}$ $\quad A^c = \{2\}$
$f(2) = b$

$$f(A^c) = f(2) = b$$
$$f(A)^c = f(1)^c = \{a\}^c = \{b,c,d\}$$

Zdaj pa ne velja več...

To vse mi smrdi po nekem zaporedju $1, -1, 1, -1, \ldots$
Torej funkcija $f(x) = (-1)^x$?

Naj bo $f: \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$, $f(x) = (-1)^x$

$f(1) = 1$ $\quad A = \{1\}$ $\quad A^c = \{2,3,4,\ldots\}$
$f(2) = -1$
$f(3) = 1$
$f(4) = -1$

$$f(A^c) = \{1, -1, 1, \ldots\}$$

$$f(A)^c = \{1\}^c = \{-1\}$$

Ne to ni vredu, ker imajo vsi iste slike...

7. $X, Y \neq \emptyset$, $f: X \to Y$

a) Pokaži $B \subseteq Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$

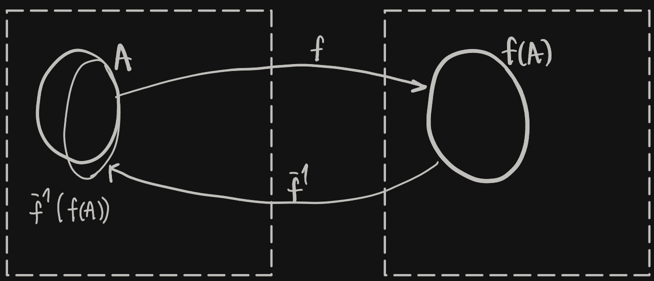
Naj bo nek $y \in f(f^{-1}(B))$. Po definiciji $\exists x \in f^{-1}(B)$, da je $y = f(x)$.

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow y \in B \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B \quad \square$$

b) Pokaži $A \subseteq X \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Naj bo $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \square$

Najdi primer, kjer $f^{-1}(f(A)) \neq A$



$f^{-1}(f(A)) = A$: $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ in $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
dokazali smo desno stran, torej leva ne velja v vseh primerih.
torej neki elementi se ne morejo slikat nazaj v A oz. se slikajo izven A? Če se slikajo v A, ampak ne vsi, potem $A \not\subseteq f^{-1}(f(A))$

$f(x) = x^2$ ... $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$, $f(5) = 25$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$Y = \{\underline{1}, 2, 3, \underline{4}, 5, \ldots, \underline{9}, \ldots, \underline{25}, \ldots\}$

$\Downarrow$

$f^{-1}(1) = 1$ $f^{-1}(2) = \sqrt{2}$
$f^{-1}(4) = 2$ $f^{-1}(3) = \sqrt{3}$
$f^{-1}(9) = 3$ ...
$f^{-1}(25) = 5$

če je torej $X \subseteq \mathbb{N}$ in
$Y \subseteq \mathbb{N}$, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \notin X$!

Naj bo $A \subseteq X$, $f(A) \subseteq Y$: $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $f(A) = \{1, 4, 9, \ldots\}$,
$f^{-1}(f(A)) = \{f^{-1}(1), f^{-1}(2), f^{-1}(4), f^{-1}(9), \ldots\}$
$= \{\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \ldots\}$

Razen če $f(A) = \{1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = \{\sqrt{1} = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \ldots\}$
toda $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \notin \mathbb{N} \Rightarrow \not\in f^{-1}(f(A))$.... idk...

$X \subseteq \mathbb{Z}$, $A = \{-1, 0, 1, 2\} \subseteq X$, $f(A) = \{0, 1, 4\}$,
$f^{-1}(f(A)) = \{0, 1, 2\}$

$\hookrightarrow$ $f^{-1}(f(A)) = \{0, 1, 2\} \subseteq \{-1, 0, 1, 2\} = A$

toda $A = \{-1, 0, 1, 2\} \not\subseteq \{0, 1, 2\} = f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) \neq A$ ---> torej, to velja za funkcije, ki niso surjektivne?

8. $f: X \to Y$ in $g: Y \to Z$

a) f, g sta injektivni funkciji $\Rightarrow g \circ f$ je injektivna funkcija

Naj bo $f: X \to Y$ funkcija. f je:

Injektivna: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1), f(x_2) \in Y$
Različna elementa, različni sliki.

Naj bosta $x_1, x_2 \in X$: $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$$\Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

Ker je g injektivna: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Enako velja za f, zato $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ pa pomeni, da je $(g \circ f)(x)$ injektivna funkcija.

$\square$

b) f, g sta surjektivni $\Rightarrow g \circ f$ je surjektivna

Surjektivna: $\forall y \in Y, \exists x \in X: y = f(x)$ (vsak y iz desne mn. ima originalni element v levi; y ne more obstajat brez x)

Naj bo nek $z \in Z$. Ker je $g: Y \to Z$ surjektivna, to pomeni da za $\forall z \in Z, \exists y \in Y$, da je $z = g(y)$.

Ker je tudi f surjektivna, za $\forall y \in Y, \exists x \in X: y = f(x)$.

$$x \in X \xrightarrow{f} y \in Y \xrightarrow{g} z \in Z$$

$$y = f(x) \text{ in } z = g(y) \Rightarrow z = g(f(x))$$

Za $\forall z \in Z, \exists x \in X: z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, kar pa je definicija surjektivnosti.

$\square$

c) Pojasni: f, g sta bijektivni $\Rightarrow g \circ f$ je bijektivna

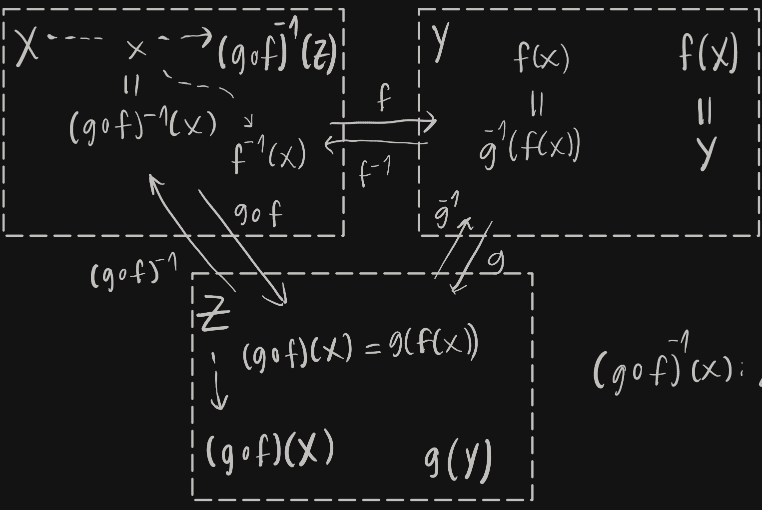
Bijektivna = injektivna $\wedge$ surjektivna

$$\underbrace{\text{vemo iz (a)} \quad \text{vemo iz (b)}}_{g \circ f \text{ je bijektivna}}$$

Pokaži, da velja $(g\circ f)^{-1} = (f^{-1})\circ(g^{-1})$

$f: X\to Y$ in $g: Y\to Z$, zato $g\circ f: X\to Z$

Najprej se prepričajmo, da imata enako domeno in kodomeno.
Domena $(g\circ f)^{-1}$ je kodomena $g\circ f = Z$.
Kodomena $(g\circ f)^{-1}$ je domena $g\circ f = X$



$(g\circ f)^{-1}(x): Z\to X$

Domena f^{-1} je kodomena $f = Y$
Kodomena f^{-1} je domena $f = X$ $\Rightarrow f^{-1}: Y\to X$

Domena g^{-1} je kodomena $g = Z$
Kodomena g^{-1} je domena $g = Y$ $\Rightarrow g^{-1}: Z\to Y$

Domena $g^{-1}\circ f^{-1} = g^{-1}(f^{-1})$ je domena $g^{-1} = Z$
Kodomena $g^{-1}\circ f^{-1} = g^{-1}(f^{-1})$ je kodomena $f^{-1} = X$

$g^{-1}\circ f^{-1}: Z\to X$ in $g\circ f: Z\to X$ ✓

Zdaj se prepričamo še o enakosti preslikav.

i) $(g\circ f)^{-1} \subseteq g^{-1}\circ f^{-1}$

Ker je g bijektivna: $\forall z\in Z, \exists! y\in Y: z = g(y) \Leftrightarrow g^{-1}(z) = y$.

Ker je f bijektivna: $\forall y\in Y, \exists! x\in X: y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z \Rightarrow (g\circ f)(x) = z$ in
$x = (g\circ f)^{-1}(z)$

$(f^{-1}\circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow (f^{-1}\circ g^{-1})(z) = x$ $\square$

$\Rightarrow (g\circ f)^{-1}(z) = (f^{-1}\circ g^{-1})(z)$ (enako v obratno smer)

9. Given a set Z, let $id_Z : Z \to Z$ be the identity map $id_Z(z) = z$ for all $z \in Z$.

a) if $f: X \to Y$ is bijective with inverse function $g: Y \to X$, then $g \circ f = id_X$ and $f \circ g = id_Y$.

f je bijektivna, zato za $\forall y \in Y, \exists! x \in X$, da velja $y = f(x)$ in $x = g(y)$ (kjer $g = f^{-1}$).

$x = f^{-1}(x)$

i) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = id_X$, $id_X : X \to X$.

Za $\forall y \in Y, \exists! x \in X$, da je $y = f(x)$. Za $\forall x \in X, \exists! y \in Y$, da je $x = g(y)$

$x = g(f(x)) \Leftrightarrow id_X(x) = x$

ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = id_Y$, $id_Y : Y \to Y$.

Za $\forall x \in X, \exists! y \in Y$, da je $x = g(y)$

Za $\forall y \in Y, \exists! x \in X$, da je $y = f(x) = f(g(y)) \Leftrightarrow y = id_Y$

b) $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, $g \circ f = id_X$ and $f \circ g = id_Y$. Show that f and g are bijective and that $g = f^{-1}$.

- f, g are bijective $\Leftrightarrow$ f, g are injective and surjective
- f, g are injective $\Leftrightarrow$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ and
  $y_1 \neq y_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$
- f, g are surjective $\Leftrightarrow$ ...

Za $\forall y \in Y, \exists! x \in X$: $y = f(x)$

Za $\forall x \in X, \exists! y \in Y$: $x = g(y)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = id_X$ and $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = id_Y$

i) Naj bosta neka $x_1, x_2 \in X$:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
g(f(x_1)) &= g(f(x_2)) \\
(g \circ f)(x_1) &= (g \circ f)(x_2) \\
id_X(x_1) &= id_X(x_2) \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Naj bosta neka $y_1, y_2 \in Y$:

$$
\begin{aligned}
g(y_1) &= g(y_2) \\
f(g(y_1)) &= f(g(y_2)) \\
(f \circ g)(y_1) &= (f \circ g)(y_2) \\
id_Y(y_1) &= id_Y(y_2) \\
y_1 &= y_2
\end{aligned}
$$

$\square$

ii) Naj bo $y \in Y$. $f(g(y)) = id_Y \Rightarrow f(g(y)) = y$, torej smo našli $x = g(y) \in X$, tako da je $f(x) = y$

Naj bo $x \in X$. Obstaja natančno en $y \in Y$, da je $g(f(x)) = id_X$, zato $(g \circ f)(x) = x$ in $y = f(x)$, tako da $g(y) = x$.

$\square$

SKIPPING SET THEORY IN CANTOR'S DIAG. ARGUMENT, AMPAK BI SE RAD ENKRAT VRNIL NAZAJ SEM (str. 21)