

Analiza 3

Trditev: $A = \text{Int}(B)$ je odprta množica

Dokaz:

1. $A = \text{Int}(B)$
 - = notranjost
 - = $\{\text{notranje točke od } B\}$
 - = $\{\text{točke za katere obstaja odprta krogla ki je vsebovana v } B\}$
 - \Rightarrow odprta krogla za katero velja $d(x, a) < r$
2. za vsak x v A obstaja krogla $K(r, x)$, tako da je $K(r, x) \in A$, t.j. vsaka točka je notranja
3. za nek poljuben y v $K(r, x)$ velja $d(y, x) < r$
4. veljati mora da je $y \in A$
5. y je tudi notranja, zato obstaja $K(e, y)$, kjer je $e > 0$, tako da je $K(e, y) \subseteq B$
6. $K(e, y) \subseteq K(r, x) \subseteq \text{Int}(B)$
7. vzamemo $e = r - d(y, x)$
8. vzamemo poljuben element $z \in K(e, y)$
9. pokažemo da velja $d(z, y) < e$ in $d(z, x) < r$, tako da bo veljalo $z \in K(e, y), K(r, x)$:
$$d(z, y) < e$$
$$\Leftrightarrow d(z, y) < r - d(y, x) \quad d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x)$$
10. uporabimo trikotniško enakost (najdemo spodnjo mejo za $d(z, x)$):
$$d(z, x) < r - d(y, x) + d(y, x)$$
$$d(z, x) < r$$
11. torej $\text{Int}(B)$ je odprta množica \square .

Trditev: $A \cup b(A) = \bar{A} = A \cup A'$

- To je ekvivalentno $A \cup b(A) \subseteq \bar{A} \subseteq A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$
- Ena takška zanka
- Moramo dokazati tri izraze:
 1. $A \cup b(A) \subseteq \bar{A}$
 2. $\bar{A} \subseteq A \cup A'$
 3. $A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$

1. $A \cup b(A) \subseteq \bar{A}$

1. \bar{A} je najmanjša zaprta množica od A in velja $A \subseteq \bar{A}$
2. Ker je zaprta vsebuje vse svoje robne točke oziroma je njen komplement odprta množica, t.j. \bar{A}^C
3. $A \cup b(A) \subseteq \bar{A} \equiv \bar{A}^C \subseteq (A \cup b(A))^C$
4. vzamemo nek $x \in \bar{A}^C$ in dokažemo, da je tudi $x \in (A \cup b(A))^C$
5. ker je \bar{A}^C odprta množica, mora biti x notranja točka
6. to pomeni, da $\exists r > 0$, tako da je $K(r, x) \subseteq \bar{A}^C$
7. $A \subseteq \bar{A} \equiv \bar{A}^C \subseteq A^C$
8. $K(r, x) \subseteq \bar{A}^C \subseteq A^C$
9. to pomeni, da $x \in A^C \Rightarrow x \notin A$

2. $\bar{A} \subseteq A \cup A'$

3. $A \cup A' \subseteq A \cup b(A)$

Eh nedasem pisat