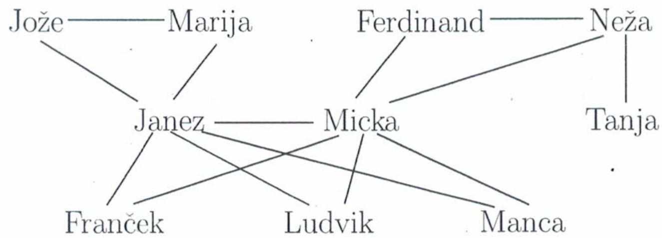
Analiza III - Funkcije več spremenljivk, študijsko leto 2017/2018

1. vaje - 04.10.2017

METRIKA

1. Dana je naslednja mreža poznanstev:



Iz množice ljudi iz zgornje mreže naredimo metrični prostor, in sicer tako, da je razdalja d med dvema človekoma najmanjše število poznanstev, ki so potrebna, da pridemo od enega do drugega. Izračunajte razdalje:

d(Janez, Micka) d(Janez, Janez) d(Franček,Marija)

d(Franček, Manca) d(Franček, Tanja)

in preverite, da d izpolnjuje lastnosti metrike. Določite še diameter metričnega prostora, t.j. največjo razdaljo.

2. Kateri izmed podanih zapisov določajo metriko na $\mathbb{R}$:
   (a) $d(x,y) := 2|x-y|$
   (b) $d(x,y) := \left|x^2 - y^2\right|$
   (c) $d(x,y) := \min\{2, |x-y|\}$
   (d) $d(x,y) := \max\{2, |x-y|\}$

3. Naj bo M poljubna neprazna množica. Definirajmo preslikavo $d : M \times M \to \mathbb{R}$ s predpisom
$$d(x,y) = \begin{cases} 1; & x \neq y \\ 0; & x = y \end{cases}.$$
Ali je preslikava d metrika na M?

4. Naj bo (X,d) metrični prostor. Pokažite, da je $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ tudi metrika na X.

5. V evklidski metriki na $\mathbb{R}^2$ določite množico točk, ki so enako oddaljene od točk $T_1(1,0)$ in $T_2(0,1)$.

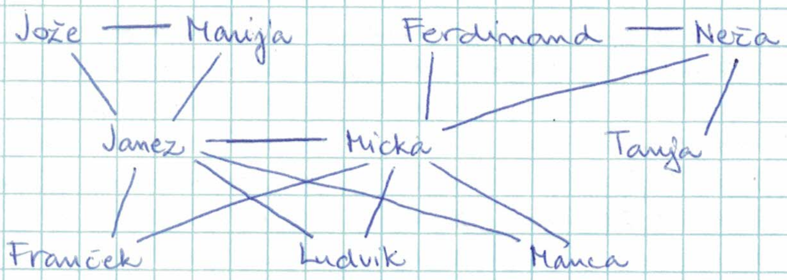
6. V evklidski, manhattanski in maksimum metriki na $\mathbb{R}^2$ poiščite točko na premici $y = 2x + 1$, ki je najbližje izhodišču.

METRIKA

(AKSIOMI) METRIKE :
LASTNOSTI

1.) $d(x,x) = 0$
2.) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$
3.) $d(y,x) = d(x,y)$
4.) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
(trikotniška neenakost)

1.) Dana je naslednja mreža poznanstev:



Iz množice ljudi iz zgornje mreže naredimo metrični prostor, in sicer tako, da je razdalja d med dvema človekoma najmanjše število poznanstev, ki so potrebna, da pridemo od enega do drugega. Izračunajte razdalje:

d(Janez, Micka) = 1

d(Janez, Janez) = 0

d(Franček, Marija) = 2 (preko Janeza)

d(Franček, Manca) = 2 (preko Janeza ali Micke)

d(Franček, Tanja) = 3 (preko Micke in Neže)

in preverite, da d izpolnjuje lastnosti metrike.

ad 1.) Očitna (primer d(Janez, Janez) .. Janezu ni potrebno poznati nikogar)

ad 2.) Očitna (po definiciji d)

ad 3.) Očitna (po definiciji d ... Če mora oseba x poznati najmanj k ljudi da pride do osebe y, mora tudi oseba y poznati teh istih k ljudi, da pride do osebe x)

ad 4.) Kako priti od x do z? Vsekakor lahko gremo tako, da gremo najprej po najkrajši poti od x do y, za kar potrebujemo $d(x,y)$ poznanstev, nato pa od y do z, za kar potrebujemo $d(y,z)$ poznanstev. Obstaja torej pot od x do z, za katero potrebujemo $d(x,y) + d(y,z)$ poznanstev, lahko pa, da je tudi kakšna krajša pot. Zato je $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Določite še diameter metričnega prostora, t.j. največjo razdaljo.

Diameter prostora je 4; to je razdalja med Tanjo in Jožetom ali Marijo.

2.) Kateri izmed podanih predpisov predstavljajo metriko na $\mathbb{R}$:

a) $d(x,y) := 2|x-y|$

1.) $d(x,x) = 2|x-x| = 2 \cdot 0 = 0$

2.) Če $x>y$: $d(x,y) = 2|x-y| = 2(x-y) = 2x-2y > 0$, ker je $x>y$

Če $y>x$: $d(x,y) = 2|x-y| = -2(x-y) = -2x+2y > 0$, ker je $y>x$

Alternativno: Ker je absolutna vrednost vedno nenegativna bo $d(x,y) \geq 0$
Potrebujemo strogo neenakost! Iz $d(x,y)=0$

$2|x-y| = 0$

$|x-y| = 0$

$(x-y)^2 = 0$

$\underline{\underline{x=y}}$

3.) Če je $x-y>0 \Rightarrow x>y$:

$d(x,y) = 2|x-y| = 2(x-y) = 2x-2y$

$\shortparallel \checkmark$

$d(y,x) = 2|y-x| = -2(y-x) = -2y+2x = 2x-2y$

Če je $x-y<0 \Rightarrow x<y$:

$d(x,y) = 2|x-y| = -2(x-y) = -2x+2y$

$\shortparallel \checkmark$

$d(y,x) = 2|y-x| = 2(y-x) = 2y-2x = -2x+2y$

4.) $d(x,z) = 2|x-z| \leq 2(|x-y|+|y-z|) = 2|x-y|+2|y-z| = d(x,y)+d(y,z)$

b) $d(x,y) := |x^2-y^2|$

1.) $d(x,x) = |x^2-x^2| = 0$

2.) Ker je absolutna vrednost vedno nenegativna bo $d(x,y) \geq 0$.
Iz $d(x,y)=0$ dobimo

$|x^2-y^2| = 0$

$(x^2-y^2)^2 = 0$

$x^2 = y^2 \iff |x| = |y|$

Torej to ni metrika, saj je $d(x,-x) = |x^2-(-x)^2| = |x^2-x^2| = 0$.

c) $d(x,y) := \min\{2, |x-y|\}$

1.) $d(x,x) = \min\{2, |x-x|\} = \min\{2, 0\} = 0$

2.) Če je $|x-y| \geq 2 \Rightarrow d(x,y) = 2 > 0$ ✓
Če je $|x-y| < 2$ moramo preveriti, da je $|x-y|>0$. Ker imamo absolutno vrednost bo to zagotovo nenegativno število, da bo tudi strogo večje od 0 (pozitivno) pokažemo kot pri a2)

3.) Če bo $|x-y| = |y-x|$ potem bo tudi $d(x,y) = d(y,x)$.
$|x-y| = |y-x| \Rightarrow (x-y)^2 = (y-x)^2 \Rightarrow x^2-2xy+y^2 = y^2-2yx+x^2$ ✓ $L=D$

4.) Ločimo dva primera:

Če je $|x-y| \leq 2$ in $|y-z| \leq 2$ velja:

$$d(x,z) \leq |x-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$$

Če pa je $|x-y| \geq 2$ ali $|y-z| \geq 2$, potem velja:

$$d(x,z) \leq 2 \leq d(x,y) + d(y,z)$$

d) $d(x,y) := \max\{2, |x-y|\}$

1.) $d(x,x) = \max\{2, |x-x|\} = \max\{2, 0\} = 2$

Ni metrika.

3.) Naj bo M poljubna neprazna množica. Definirajmo preslikavo $d: M \times M \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$d(x,y) = \begin{cases} 1; & x \neq y \\ 0; & x = y \end{cases}$$

Ali je preslikava d metrika na M?

1.) $d(x,x) = 0$ ✓

2.) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1 > 0$ ✓

3.) če $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1 = d(y,x)$ ✓
če $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0 = d(y,x)$ ✓

4.) $d(x,y) \leq 1 \leq 2 = 1+1 \leq d(x,y) + d(y,z)$ ✓

"ZNANE" METRIKE na $\mathbb{R}^n$

- $d_p((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p + \cdots + |x_n-y_n|^p}$ za $p \geq 1$

  Metriki d_1 pravimo tudi MANHATTANSKA (TAXICAB) METRIKA, metriki d_2 pravimo EVKLIDSKA METRIKA

- $d_\infty((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \ldots, |x_n-y_n|\}$

  Tej metriki pravimo tudi MAXIMUM (SUPREMUM) METRIKA.

4.) Naj bo (X, d) metrični prostor. Pokažite, da je $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrika na X.

1.) $d'(x,x) = \frac{d(x,x)}{1+d(x,x)} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

2.) $d(x,y) > 0 \quad / : (1+d(x,y))$

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} > 0$$

$$d'(x,y) > 0$$

3.) $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x)$

4.) $d'(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \overset{*}{\leq} \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$

$$= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

$$= d'(x,y) + d'(y,z)$$

Za $*$; naj bo $d(a,b) \geq d(k,e)$, potem velja

$$d(k,e) \leq d(a,b)$$

$$d(k,e) + d(k,e)\,d(a,b) \leq d(a,b) + d(a,b)\,d(k,e)$$

$$d(k,e)(1+d(a,b)) \leq d(a,b) + (1+d(k,e))$$

$$\frac{d(k,e)}{1+d(k,e)} \leq \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$$

5.) V evklidski ~~in manhattanski~~ metriki na $\mathbb{R}^2$ določite množico točk, ki so enako oddaljene od točk $T_1(1,0)$ in $T_2(0,1)$.

Evklidska metrika: $\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$

$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 - x^2 = y^2 - 2y + 1 - y^2$$

$$-2x = -2y$$

$$x = y$$

Iskana množica je torej simetrala lihih kvadrantov

$\{(x,x) \,;\, x \in \mathbb{R}\}$

6.) V evklidski, manhattanski in maximum metriki na $\mathbb{R}^2$ poiščite točko na premici $y = 2x+1$, ki je najbližje izhodišču.

Evklidska metrika:

$$d_2((x, 2x+1), (0,0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (2x+1-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (2x+1)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + 4x^2 + 4x + 1}$$
$$= \sqrt{5x^2 + 4x + 1}$$

Iščemo torej minimum funkcije $5x^2+4x+1$, za to si pomagamo z odvodom:

$$f'(x) = 10x + 4 = 0$$
$$10x = -4$$
$$x = -\tfrac{4}{10}$$
$$x = -\tfrac{2}{5} \Rightarrow y = 2x+1 = -\tfrac{4}{5} + \tfrac{5}{5} = \tfrac{1}{5} \Rightarrow T(-\tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5})$$

Manhattan metrika:

$$d_1((x, 2x+1), (0,0)) = |x-0| + |2x+1-0|$$
$$= |x| + |2x+1| = \begin{cases} -3x-1 & ; x < -\frac{1}{2} \\ x+1 & ; -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 3x+1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

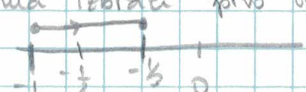
Najmanjšo vrednost bomo torej dobili, ko bo $x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow T(-\frac{1}{2}, 2(-\frac{1}{2})+1) \Rightarrow T(-\frac{1}{2}, 0)$

Maksimum metrika:

$$d_\infty((x, 2x+1), (0,0)) = \max\{|x-0|, |2x+1-0|\}$$
$$= \max\{|x|, |2x+1|\}$$

Najprej preverimo, kdaj bova izbrali prvo oz. drugo možnost, t.j. kdaj je $|x| \geq |2x+1|$



$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq x < 0$	$x \geq 0$
$-x \geq -2x-1$	$-x \geq 2x+1$	$x \geq 2x+1$
$x \geq -1$	$-3x \geq 1$	$-x \geq 1$
	$x \leq -\frac{1}{3}$	$x \leq -1$ ni možno!

Torej se nam izbira "zamenja" pri $x = -1$ in $x = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \max\{|x|, |2x+1|\} = \begin{cases} -2x-1 & ; x \leq -1 \\ -x & ; -1 < x \leq -\frac{1}{3} \\ 2x+1 & ; x > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Najmanjšo vrednost bomo torej dobili, ko bo $x = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow T(-\frac{1}{3}, 2\cdot(-\frac{1}{3})+1) \Rightarrow T(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$