Zapiski za izpit

Analiza 3 2024/25

Jan Panjan

2025-02-07

Contents

Metrični prostori **2**
- Definicija metrike . . . 2
- Definicija metričnega prostora . . . 2
- Norma . . . 2
- Skalarni produkt . . . 3
- Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačba . . . 3
  - Note glede kompleksnih prostorov . . . 4
  - Dokaz trikotniške neenakosti . . . 4
- Paralelogramska identiteta . . . 5
- Ničelni skalarni produkt . . . 5
- Pitagorov izrek . . . 5
- Krogle v metričnih prostorih . . . 6
  - Enotska krogla . . . 6
- Diameter . . . 6
- Odprte in zaprte množice . . . 7
- Kompaktnost in povezanost . . . 7
- Zaporedja v metričnih prostorih . . . 7
- Cauchy-jeva zaporedja in polni prostori . . . 7
- Zveznost in enakomerna zveznost . . . 7
- Lastnosti zveznih preslikav . . . 7

Funkcije več realnih spremenljivk **7**
- Zveznost . . . 7
- Parcialna odvedljivost . . . 7
- Diferencial preslikavce iz Rn v Rmo . . . 7
- Jacobijeva matrika . . . 7
- Verižno pravilo . . . 7

Višji parcialni odvodi **7**
- Taylorjeva formula . . . 7
- Izrek o inverzni in implicitni funkciji . . . 7
- Prosi in vezani ekstremi . . . 7

Dvojni in mnogotermni integrali **7**
- Pogoj za eskistenco . . . 7
- Uvedba novih spremenljivk . . . 7
- Računanje in uporaba . . . 7

Zapiski so večinoma iz knjige “Metrični prostori, Jože Vrabec”

Metrični prostori

Definicija metrike

Naj bo $M \neq \emptyset$. Metrika na M je realna funkcija d dveh spremenljivk na M, ki ustreza pogojem:

a) $d(x,y) \geq 0$
b) $d(x,y) = 0 \implies x = y$
c) $d(x,y) = d(y,x)$
d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

V jeziku teorije množic je metrika preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Slika $d(x,y)$ je razdalja elementov x in y. Neenakost $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ treh točk $x, y, z \in M$ imenujemo **trikotniška neenenakost**. Iz te neenačbe velja tudi $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

Dokaz iz lastnosti (d):

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\
d(x,z) - d(y,z) &\leq d(x,y) \\
-(d(x,z) - d(y,z)) &\leq d(x,y) \\
\implies |d(x,z) - d(y,z)| &\leq d(x,y) \quad \square
\end{aligned}
$$

Definicija metričnega prostora

Množico $M \neq \emptyset$ skupaj z izbrano metriko d na M (torej par (M,d)) imenujemo **metrični prostor**. Če vzamemo neko drugo metriko d' je potem (M,d') nek drug metrični prostor.

Osnovni zgledi metričnega prostora so premice ($\mathbb{R}$), ravnine ($\mathbb{R}^2$) in prostori ($\mathbb{R}^3$) z običajno metriko, definirana:

$d(x,y) = |y - x|$ za $x, y \in \mathbb{R}$

$d(x,y) = \sqrt{((y_1 - y_2) + (x_1 - x_2))}$ za $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

podobno za $\mathbb{R}^3$ ...

Množice $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ so vektorski prostori, zato seštevamo in s skalarjem množimo po komponentah. Iz lastnosti $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ velja:

$$d(x,y) = d(0, y - x)$$

To pomeni, da je razdalja med točkama x in y enaka razdalji od izhodišča do vektorja $y - x$. Metrika za katero velja ta lastnost je popolnoma določena, če za vsako točko navedemo njeno razdaljo od točke 0. To razdaljo bomo v splošnih prostorih s to lastnostjo imenovali...

Norma

Naj bo X nek realen ali kompleksen vektorski prostor. **Norma** na X je funkcija $||.|| : X \to \mathbb{R}$, ki ustreza pogojem:

a) $||x|| \geq 0$
b) $||x|| = 0 \implies x = 0$
c) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Prostor skupaj z normo na njem imenujemo **normiran vektorski prostor** (torej $(X, ||.||)$). Tudi tu je lastnost (d) imenovana trikotniška neenakost in tudi iz nje lahko izpeljemo novo neenakost:

$$|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y||$$

Če je X normiran vektorski prostor, je s formulo $d(x,y) = ||y-x||$ definirana metrika na X. Iz formule sledi lastnost $||x|| = d(0,x)$, zato je formula indentična kot tista od prej (glej Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo za dokaz).

Torej *vsak normiran prostor je metrični prostor*. Prav tako so zgoraj omenjeni prostori $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ tudi normirani prostori. Norme v njih so definirane tako:

$$||x|| = |x|$$
$$||x|| = \sqrt(x_1^2 + x_2^2)$$
$$||x|| = \sqrt(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Očitno je da ustrezajo vsem pogojem, vendar je za $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ težje dokazati trikotniško neenakost. **Poglej si to!!!**

Pri vektorjih lahko računamo dolžine vektorjev s skalarnim produktom. Dolžina vektorja $\vec{v}$ je kvadratni koren skalarnega produkta $\vec{v} \cdot \vec{v}$. To bomo posplošili in pokazali, da vsak skalarni produkt na nekem vektorskem prostoru X porodi normo na X. Obstajajo tudi norme, ki ne izhajajo iz nobenega skalarnega produkta.

Skalarni produkt

Skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru X je funkcija $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$
b) $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
d) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$

Realen vektorski prostor skupaj s skalarnim produktom na njem imenujemo **realen unitaren vektorski prostor*. Lastnost (c) se imenuje **linearnost v prvem faktorju**, lastnost (d) **simetričnost** (ki zagotavlja tudi linearnost v drugem faktorju) ter (a) in (b) **pozitivna definitnost**.

Skalarni produkt na realnem linearnem prostoru X je *pozitivno definiten bilinearen funkcional na X* Preprosto je definiran na prostorih $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$; tu je primer za $\mathbb{R}^3$:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Če je X unitaren prostor, je s formulo $||x|| : \sqrt(\langle x, x \rangle)$ definirana norma na X. Zdaj sta torej definirani zgornji funkciji norme na $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačba

V vsakem unitarnem prostoru velja za poljubna vektorja x in y Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenakost, ki izgleda tako:

$$||\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$
$$||\langle x, y \rangle| \leq \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$$

Neenakost je posplošitev znane neenakosti $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, ki velja za geometrične vektorje. V kolikor sta x in y linearno neodvisna, velja v zgornji neenačbi strogi neenačaj.

Note glede kompleksnih prostorov

Velja lastnost $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Skalarni produkt na kompleksnem prostoru tako ustreza pogojem (a), (b), (c) in namesto (d) tej lastnosti. Primer je naslednja lastnost, ki je komplementarno pogoju (c):

$$\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle$$

To res velja s pomočjo pogojev (c) in (d) iz definicije skalarnega produkta in zgornje lastnosti.

$$\begin{aligned}\langle z, \lambda x + \mu y\rangle &= \overline{\langle \lambda x + \mu y, z\rangle} \\ &= \overline{\lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\overline{\langle x, z\rangle} + \bar{\mu}\overline{\langle y, z\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle \quad \square\end{aligned}$$

Dokaz za Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo: če je $y = 0$, potem je neenakost gotovo pravilna in vektorja x in y sta tudi linearno odvisna ($|\langle x, 0\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle 0, 0\rangle = 0$). Privzamemo, da $y \neq 0$, zato velja $\langle y, y\rangle > 0$ po (a) in (b). Za poljubna skalarja λ in μ velja tedaj:

$$\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle = |\lambda|^2 \cdot \langle x, x\rangle + \lambda\bar{\mu}\langle x, y\rangle + \bar{\lambda}\mu\langle y, x\rangle + |\mu|^2\langle y, y\rangle$$

Zdaj naj bo $\lambda = \langle y, y\rangle$ in $\mu = -\langle x, y\rangle$. Upoštevamo, da je $\lambda = \bar{\lambda}$ in $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$. Na desni strani enačbe dobimo zdaj:

$$\begin{aligned}&\langle y, y\rangle^2 \cdot \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \cdot |\langle x, y\rangle|^2 - \langle y, y\rangle \cdot |\langle x, y\rangle|^2 + |\langle x, y\rangle|^2 \cdot \langle y, y\rangle \\ &\qquad = \langle y, y\rangle \cdot \Big(\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2\Big)\end{aligned}$$

Leva stran prve enakosti je nenegativna zaradi lastnosti (a). V primeru, da sta x y linearno odvisna je pozitivna, saj je $\lambda \neq 0 \implies \lambda x + \mu y \neq 0$, kar dokaže Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo. $\square$

Dokaz trikotniške neenakosti

S pomočjo teh lastnosti lahko zdaj dokažemo lastnost (d) trikotniške neenakosti iz izreka o normi na unitarnem prostoru X. Iz definicije norme in lastnosti (c) iz definicije skalarnega produkta sledi:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + |\langle x, y\rangle| + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|x\| \cdot \|y\| + \|y\| \cdot \|x\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \square\end{aligned}$$

Če sta x in y linearno odvisna velja po definiciji Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbe $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$.

Po tej lemi velja, da **norma v takem prostoru ne izhaja iz skalarnega produkta** in poda potreben pogoj za to, da je norma porojena s skalarnim produktom (torej, za tiste, ki to ne velja, so porojene iz skalarnega produkta?).

Prav tako velja, da v unitarnem prostoru **norma natanko določa skalarni produkt**. V poljubnem unitarnem prostoru nad poljem skalarjev $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ je:

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}{4}; & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}{4} + \frac{\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)}{4}; & \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Leva stran je skalarni produkt, na desni strani ga definira norma, right?

Paralelogramska identiteta

V poljubnem unitarnem prostoru velja za poljubna elementa x in y Paralelogramska identiteta:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$

V paralelogramski identiteti nastopa samo norma, zato ima smisel v nekem normiranem prostoru. Ne velja pa, da je v njem tudi *pravilna*. Spodaj je dokazana samo za primer, ko izhaja iz skalarnega produkta, toda obstajajo normirani prostori, kjer identiteta ne velja.

Iz zgornje trditve sledi, da **ti prostori niso unitarni** in da **njihove norme ne izjajo iz skalarnega produkta**. Ta trditev podaja novi pogoj za to, da je norma porojena s skalarnim produktom.

Ničelni skalarni produkt

Elementa x in y poljubnega unitarnega prostora X imenujemo **pravokotna** oziroma **ortogonalna**, če je $\langle x, y\rangle = 0$ in zato $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = 0$. Ta lastnost implicira obstoj…

Pitagorov izrek

Ker poljubna pravokotna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ležita na katetah pravokotnega trikotnita s hipotenuzo $\vec{a} + \vec{b}$, razlaga Pitagorov izrek zvezo med dolžinami teh vektorjev. Preko norme definirano naslednjo posplošitev:

Če sta x in y pravokotna vektorja poljubnega unitarnega prostora, velja $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dokaz: velja $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, zato:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Krogle v metričnih prostorih

Naj bo M metrični prostor ter točka $a \in M$ in $r > 0$. Ločimo naslednje množice točk:

$$K(a,r) = K_M(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\} \text{ odprta krogla (točke se dotikajo roba krogle)}$$
$$\bar{K}(a,r) = \bar{K}_M(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\} \text{ zaprta krogla (točke se ne dotikajo roba)}$$
$$S(a,r) = S_M(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) = r\} \text{ sfera (samo rob/površina krogle)}$$

Vse imajo središče v točki a in polmer r ter spadajo v metrični prostor M.

Enotska krogla

Če poznamo eno kroglo nekega normiranega prostora X, poznamo vse krogle. To je prikazano z naslednjim primerom:

> Za poljubni točki a in b normiranega prostora X in za poljubni pozitivni števili r in s je preslikava $f : X \to X$, definirana z $f(x) = (s/r)(x - a) + b$, bijekcija ter preslika
>
> - a v b,
> - $K(a,r)$ na $K(b,s)$,
> - $\bar{K}(a,r)$ na $\bar{K}(b,s)$,
> - $S(a,r)$ na $S(b,s)$.
>
> *Dokaz*: Preslikava f je očitno inverzna, saj je bijekcija, zato imamo za poljuben $x \in X$ naslednje ekvivalence:
>
> $$\begin{aligned} x \in S(a,r) &\iff \|x - a\| = r \\ &\iff \|(s/r)(x - a)\| = s \\ &\iff \|f(x) - b\| = s \\ &\iff f(x) \in S(b,s) \quad \square \end{aligned}$$

Podoben sklep velja za odprte in zaprte krogle. Ker ima f čisti "geometrični" pomen, sta si krogli $K(a,r)$ in $K(b,s)$ (in ostale množice) povsem podobni v geometričnem pomenu besede. Velja namreč, da je f sestavljena iz preslikave

- $x \mapsto x - a$ oziroma translacije prostora X za vektor $-a$
- $x \mapsto (s/r)x$ oziroma $(s/r)-$kratne povečave/pomanjšave prostora
- $x \mapsto x + b$ oziroma translacije prostora X za vektor b

Torej res poznamo vse krogle, če poznamo eno in lahko vedno vzamemo enostavno kroglo oziroma tisto "navadno" kroglo, da opišemo ostale. Krogli $K(0,1)$ rečemo **enotska krogla** (lahko je odprta, zaprta ali sfera). Ima izhodišče v točki 0 in polmer 1.

Vseeno v splošnem metričnem prostoru ne velja, da so krogle z istimi središči in različnimi polmeri lahko v čemerkoli podobni.

Diameter

Premer ali diameter neprazne podmnožice A metričnega prostora M je $\text{diam}A = sup\{d(a,b) \mid a,b \in A\}$. Množica A je omejena, če velja eno izmed:

- $A = \emptyset$
- $A < \infty$

to si poglej v zvezku ker vem da maš iz predavanja

Odprte in zaprte množice

Kompaktnost in povezanost

Zaporedja v metričnih prostorih

Cauchy-jeva zaporedja in polni prostori

Zveznost in enakomerna zveznost

Lastnosti zveznih preslikav

Funkcije več realnih spremenljivk

Zveznost

Parcialna odvedljivost

Diferencial preslikavce iz Rn v Rmo

Jacobijeva matrika

Verižno pravilo

Višji parcialni odvodi

Taylorjeva formula

Izrek o inverzni in implicitni funkciji

Prosi in vezani ekstremi

Dvojni in mnogotermni integrali

Pogoj za eskistenco

Uvedba novih spremenljivk

Računanje in uporaba