Analiza III - Funkcije več spremenljivk, študijsko leto 2017/2018

3. vaje - 25.10.2017

METRIKA

1. Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ definirajmo $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

   (a) Pokažite, da je $(\mathbb{R}, d)$ metrični prostor.

   (b) Skicirajte krogli $K_2(0)$ in $K_{\frac{\pi}{4}}(0)$

2. Naj bo X prostor vseh realnih zaporedij. Za zaporedji $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ in $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ definirajmo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} sign|x_n - y_n|.$$

   (a) Pokažite, da je (X, d) metrični prostor.

   (b) Določite tista zaporedja , ki ležijo v kroglah $\overline{K_1(\mathbf{0})}$ in $\overline{K_{\frac{1}{8}}(\mathbf{0})}$, kjer je $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ ničelno zaporedje.

3. Dano imamo množico $X = \{a, b, c, d, e\}$ in družino podmnožic $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$.

   (a) Pokažite, da ima družina τ naslednje lastnosti:

      i. Unija poljubno mnogo elementov iz τ je v τ.

      ii. Presek končno mnogo elementov iz τ je v τ.

   (b) Elementi iz τ so odprte množice v množici X. Poiščite vse zaprte množice v množici X.

   (c) Poiščite zaprtje vseh dvoelementnih podmnožic iz množice X.

4. Ugotovite, ali so naslednje podmnožice množice $\mathbb{C}$ odprte, zaprte ali nič od tega:

   (a) množica vseh kompleksnih števil z za katera velja $|z| < 1$ odprta

   (b) množica vseh kompleksnih števil z za katera velja $|z| \leq 1$ zaprta

   (c) $\mathbb{Z}$ zaprta

   (d) $\mathbb{C}$ odprta in zaprta

   (e) interval (a, b) z $a, b \in \mathbb{R}$ nič

   (f) množica vseh kompleksnih števil oblike $x + i$ z $x \in \mathbb{R}$ zaprta

   (g) množica vseh kompleksnih števil z za katera velja $|Re\, z| < 1$ in $|Im\, z| < 1$ odprta

Nal.: Za poljubni realni števili $x, y \in \mathbb{R}$ definiramo $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$

a) Dokaži, da je $(\mathbb{R}, d)$ metrični prostor. (D.N.)

b) Skiciraj krogli $K_2(0)$ in $K_{\frac{\pi}{4}}(0)$.

c) Dokaži, da je zaporedje $x_n = n$; $n \in \mathbb{N}$ Cauchyjevo v prostoru $(\mathbb{R}, d)$, vendar ni konvergentno.

a) 1) $d(x,y) \geq 0$ ✓

$d(x,y) = 0 \iff |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| = 0 \iff \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(y) \iff x = y$ ✓

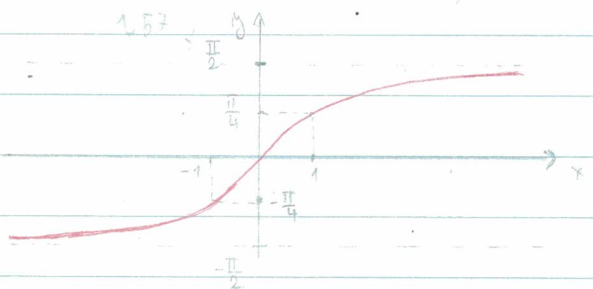
2) $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$|\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| \leq |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)| + |\operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(y)|$

$|\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z) + \operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(y)| \leq |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)| + |\operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(y)|$ ✓

b) $K_2(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,0) < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |\operatorname{arctg}(x) - 0| < 2\} = \mathbb{R}$



$K_{\frac{\pi}{4}}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,0) < \frac{\pi}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |\operatorname{arctg}(x)| < \frac{\pi}{4}\} = (-1, 1)$

Nal.: Naj bo X prostor vseh realnih zaporedij. Za zaporedji $x=(x_1, x_2, \dots)$ in $y=(y_1, y_2, \dots)$ definiramo $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sign}|x_n-y_n|$

a) Dokaži, da je (X,d) metrični prostor. D.N.

b) Opiši katera zaporedja ležijo v zaprtih kroglah $\overline{K}_1(0)$ in $\overline{K}_{\frac{1}{8}}(0)$, kjer je $0=(0,0,\dots)$ ničelno zaporedje.

a) 1) $d(x,y)\geq 0$ ✓

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \\ -1 & ; x<0 \end{cases}$$

$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x_n=y_n \ \forall n \Leftrightarrow x=y$ ✓

2) $d(x,y)=d(y,x)$ ✓

3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$$\sum 2^{-n} \operatorname{sign}\underbrace{|x_n-z_n|}_{|x_n-y_n+y_n-z_n|} \leq \sum 2^{-n} \operatorname{sign}(|x_n-y_n|+|y_n-z_n|)$$
$$\leq \sum 2^{-n} \operatorname{sign}|x_n-y_n| + \sum 2^{-n} \operatorname{sign}|y_n-z_n| \checkmark$$

b) I) $\overline{K}_1(0)=\{x\in X \mid d(x,0)\leq 1\}=\{x\in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sign}|x_n|\leq 1\}$

Kdaj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sign}|x_n|$ doseže svoj maksimum?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sign}|x_n| = \frac{1}{2}\cdot a_1 + \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{8} a_3 + \frac{1}{16} a_4 + \dots$ a_i je bodisi 0 bodisi 1

Maksimum $\Leftrightarrow a_i=1 \ \forall i\in\mathbb{N}$ (vsi $x_n\neq 0$)

Sedaj: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, $q=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je geometrijska, če so a_i členi geometrijskega zaporedja $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}=q=\text{konst.}\right)$

$a_i=a_1\cdot q^{i-1}$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1}=\frac{a_1}{1-q}$, če $|q|<1$

Torej $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sign}|x_n|\leq 1 \quad \forall x\in X \Rightarrow \overline{K}_1(0)=X$

II) $\overline{K}_{\frac{1}{8}}(0) = \{x \in X \mid d(x,0) \leq \frac{1}{8}\}$

$\frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{8} a_3 + \frac{1}{16} a_4 + \frac{1}{32} \cdot a_5 + \ldots$

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}_{\frac{7}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots}_{\frac{1}{8}} = 1$

Veljati mora: 1) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 =$ poljuben, $a_4 = a_5 = \ldots = 0$

3) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4, a_5 \ldots$ poljubni

Torej: V $\overline{K}_{\frac{1}{8}}(0)$ ležijo vsa zaporedja oblike: $(0, 0, x_3, 0, 0, \ldots)$

$(0, 0, 0, x_4, x_5, x_6, \ldots)$

x_i poljubni.

$X = \{a,b,c,d,e\}$

open sets: $X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}$

Def 1.1.6. ~~A set~~ (X,d) metric space. A set $U \subset X$ is closed if $X \setminus U$ is open.

Closed sets: $X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}$

Zaprtje
||
najm. zap.
podmn. ki
vsebuje
dano mn.

Closures:

$\overline{\{a,b\}} = \{a,b,e\}$	$\overline{\{b,c\}} = \{b,c,d,e\}$
$\overline{\{a,c\}} = X$	$\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$
$\overline{\{a,d\}} = X$	$\overline{\{b,e\}} = \cancel{\{b,c,d,e\}}\ \{b,e\}$
$\overline{\{a,e\}} = \{a,b,e\}$	$\overline{\{c,d\}} = \{b,c,d,e\}$
	$\overline{\{c,e\}} = \{b,c,d,e\}$
	$\overline{\{d,e\}} = \{b,c,d,e\}$

~~toh) A = {a,b,c b,c,d}~~ ~~$X = \{a,b,c,d,e\}$~~

3. vaje

4. nal.

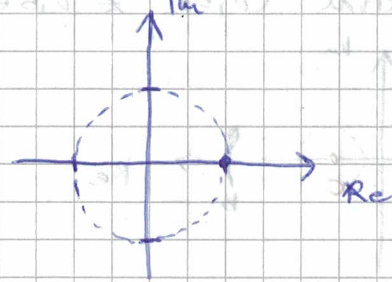
a) $A = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| < 1 \}$

$|z| < 1$

$z = a + bi$

$\sqrt{a^2 + b^2} < 1 \quad /^2$

$a^2 + b^2 < 1$



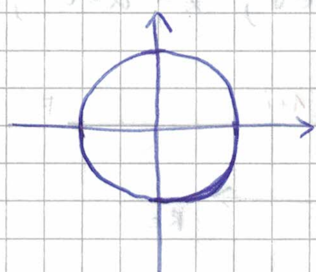
$A = K_1(0) \Rightarrow$ A je odprta

A ni zaprta, saj $z = 1 + 0i \notin A$ toda $z = 1 + 0i \in \partial A$
ker $A \neq \mathring{A} \cup \partial A$

b) $B = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1 \}$

$z = a + bi$

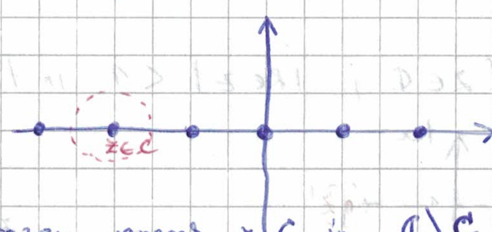
$a^2 + b^2 \leq 1$



$B = \overline{K_1(0)} \Rightarrow$ B je zaprta

B ni odprta, ker $B \neq \mathring{B}$, saj $z = 1 + 0i \in \partial B$
toda $z \in \partial B$.

c) $C = \{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \in \mathbb{Z} \}$



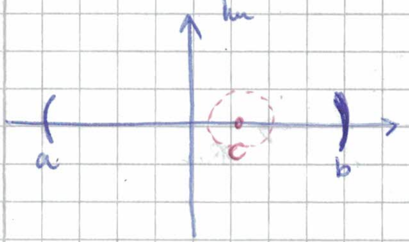
$(\forall z \in C)$: $K_\varepsilon(z)$ neprazen presek z C in $\mathbb{C} \setminus C$ $\forall \varepsilon$

$\Rightarrow z \in C \in \partial C \Rightarrow$ C je zaprta

Ker je $\mathring{C} = \emptyset \rightarrow$ C ni odprta.

d) $\mathbb{C}$ je zaprta in odprta, saj je to cela množica

e) interval (a,b) ž $a,b \in \mathbb{R}$ $E = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b;\ a,b \in \mathbb{R}\}$



$a \notin E \Rightarrow a \notin \mathring{E}$

toda $K_\varepsilon(a) \cap E \neq \emptyset$

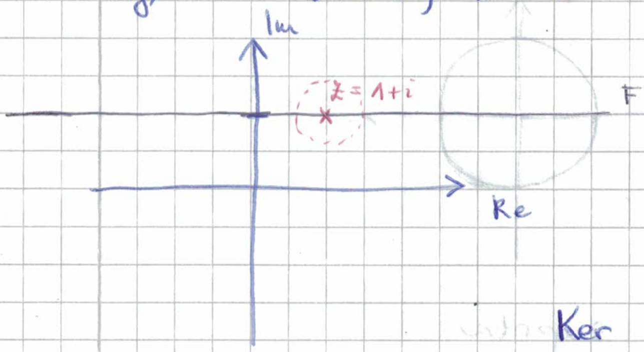
in $K_\varepsilon(a) \cap \mathbb{C} \setminus E \neq \emptyset$ $\Big\}\ a \in \partial E$

$\Rightarrow E$ ni zaprta, saj $E = \mathring{E} \cup \partial E$

$c \in (a,b) \Rightarrow c \in E$ toda $B_\varepsilon(c) \cap \mathbb{C} \setminus F \neq \emptyset \Rightarrow c \notin \mathring{E}$

$\Rightarrow E$ ni odprta

f) $F = \{z \in \mathbb{C};\ z = a + i,\ a \in \mathbb{R}\}$



$z \in F$ toda

$K_\varepsilon(z) \cap \mathbb{C} \setminus F \neq \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow z \notin \mathring{F}$

$\Downarrow$

F ni odprta

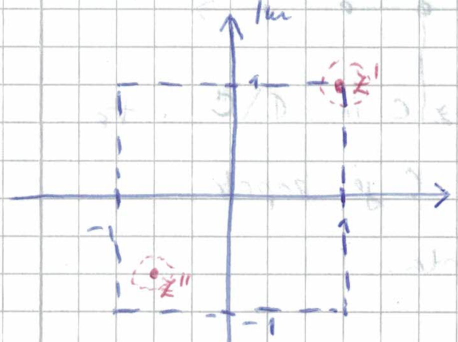
Ker za vsak $z' \in F$ velja

$K_\varepsilon(z') \cap F \neq \emptyset$ in $K_\varepsilon(z') \cap \mathbb{C} \setminus F \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall z' \in \partial F$

$\Rightarrow$ F je zaprta

g) $G = \{z \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Re}\, z| < 1$ in $|\mathrm{Im}\, z| < 1\}$



$z' \notin G$ toda

$K_\varepsilon(z') \cap G \neq \emptyset$

in $K_\varepsilon(z') \cap \mathbb{C} \setminus G \neq \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow z' \in \partial G$

$\Downarrow$

G ni zaprta

$(\forall z'' \in G)(\exists \varepsilon > 0):\ K_\varepsilon(z'') \subseteq G \Rightarrow G$ je odprta