Trditev: Norma $\|.\|$ je porojena iz skalarnega produkta $\Longleftrightarrow$ Za normo $\|.\|$ velja paralelogramska identiteta.

Dokaz:

Iščemo skalarni produkt, da bo $(x,x) = \|x\|^2$ in $(x+y, x+y) = \|x+y\|^2$. V prostoru realnih števil je edini možni kandidat:

$$(x,y) := \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \tag{1}$$

Predpostavljamo, da velja paralelogramska identiteta. (1) je skalarni produkt, če izpolnjuje 4 lastnosti:

1. pozitivno definitnost, $(x,x) \geq 0$
2. aditivnost, $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
3. homogenost, $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
4. simetričnost, $(x,y) = (y,x)$

1. Aditivnost

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$$

Uporabimo (1) in vse pomnožimo s 4, da dobimo:

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right)$$

Definiramo levo in desno stran kot:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &:= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ \text{RHS} &:= \left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \end{aligned}$$

Moramo pokazati torej, da velja LHS $=$ RHS. Začnemo preurejati LHS, in sicer najprej potrebujem člen $\|x+z\|^2$. Preuredim prvi člen od LHS:

$$\|x+y+z\|^2 = \|(x+z)+y\|^2$$

Uporabim paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned} \|(x+z)+y\|^2 + \|(x+z)-y\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(x+z)+y\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 \end{aligned}$$

Vstavim nazaj v LHS:

$$\begin{aligned} &\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 - \|x+y-z\|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Dobim naslednji člen $\|x-z\|^2$ iz drugega člena LHS. Najprej preuredim:

$$\|x+y-z\|^2 = \|(x-z)+y\|^2$$

In spet uporabim paralelogramsko identiteto:

$$\begin{aligned} \|(x-z)+y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|(x-z)+y\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x-z)-y\|^2 \\ \|x+y-z\|^2 &= 2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x-z)-y\|^2 \\ -\|x+y-z\|^2 &= -2\|x-z\|^2 - 2\|y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

(3) vstavim v enačbo (2):

$$
\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\
&= 2\|x+z\|^2 + \cancel{2\|y\|^2} - \|(x+z)-y\|^2 - 2\|x-z\|^2 - \cancel{2\|y\|^2} + \|(x-z)-y\|^2 \\
&= 2\|x+z\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 - 2\|x-z\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \\
&= 2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2
\end{aligned} \tag{4}
$$

Zdaj potrebujem še $\|y+z\|^2$ in $\|y-z\|^2$. Preuredim zeleno normo, da dobim:

$$\|(x+z)-y\|^2 = \|x-(y-z)\|^2 = \|(y-z)-x\|^2$$

Uporabim naslednjo paralelogramsko identiteto:

$$
\begin{aligned}
\|(y-z)+x\|^2 + \|(y-z)-x\|^2 &= 2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2 \\
\|(y-z)-x\|^2 &= 2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y-z)+x\|^2 \\
-\|(y-z)-x\|^2 &= -2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 \\
-\|(x+z)-y\|^2 &= -2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2
\end{aligned} \tag{5}
$$

Vstavim (5) v enačbo (4):

$$
\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - \|(x+z)-y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \\
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 + \|(x-z)-y\|^2
\end{aligned} \tag{6}
$$

Preuredim še modri člen:

$$\|(x-z)-y\|^2 = \|x-(z+y)\|^2 = \|(y+z)-x\|^2$$

Zadnjič uporabim paralelogramsko identiteto:

$$
\begin{aligned}
\|(y+z)+x\|^2 + \|(y+z)-x\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 \\
\|(y+z)-x\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2 \\
\|(x-z)-y\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ter vstavim (7) v enačbo (6):

$$
\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 - 2\|x\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 \\
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 - \cancel{2\|x\|^2} + \|(y-z)+x\|^2 + 2\|y+z\|^2 + \cancel{2\|x\|^2} - \|(y+z)+x\|^2 \\
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 + 2\|y+z\|^2 + \|(y-z)+x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

Če preuredim zadnja dva člena:

$$
\begin{aligned}
&\|(y-z)+x\|^2 - \|(y+z)+x\|^2 \\
&= \|x+y-z\|^2 - \|x+y+z\|^2 \quad / \cdot (-1) \\
&= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2
\end{aligned}
$$

dobim točno LHS. Prav tako lahko preuredim ostale člene enačbe (8):

$$
\begin{aligned}
&2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 - 2\|y-z\|^2 + 2\|y+z\|^2 \\
&2(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2 + \|y+z\|^2) \\
&2((\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + (\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2))
\end{aligned}
$$

in dobim točno 2 RHS. Enačba (8) zato postane:

$$2[(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + (\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2)] - (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2)$$
$$2 \text{ RHS} - \text{LHS}$$

Ker smo začeli z LHS, to pomeni:

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= 2\ \text{RHS} - \text{LHS} \\
2\ \text{LHS} &= 2\ \text{RHS} \\
\text{LHS} &= \text{RHS}
\end{aligned}
$$

kar pa je točno to, kar je bilo treba dokazati.