Zapiski za izpit

Analiza 3 2024/25

Jan Panjan

2025-04-12

Contents

Zapiski so večinoma iz knjige "Metrični prostori, Jože Vrabec"

Metrični prostori

Definicija metrike

Naj bo $M \neq \emptyset$. Metrika na M je realna funkcija d dveh spremenljivk na M, ki ustreza pogojem:

a) $d(x, y) \geq 0$
b) $d(x, y) = 0 \implies x = y$
c) $d(x, y) = d(y, x)$
d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

V jeziku teorije množic je metrika preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Slika $d(x, y)$ je razdalja elementov x in y. Neenakost $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ treh točk $x, y, z \in M$ imenujemo **trikotniška neenakost**. Iz te neenačbe velja tudi $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Dokaz iz lastnosti (d):

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ d(x,z) - d(y,z) &\leq d(x,y) \\ -(d(x,z) - d(y,z)) &\leq d(x,y) \\ \implies |d(x,z) - d(y,z)| &\leq d(x,y) \quad \square \end{aligned}$$

Definicija metričnega prostora

Množico $M \neq \emptyset$ skupaj z izbrano metriko d na M (torej par (M, d)) imenujemo **metrični prostor**. Če vzamemo neko drugo metriko d' je potem (M, d') nek drug metrični prostor.

Osnovni zgledi metričnega prostora so premice ($\mathbb{R}$), ravnine ($\mathbb{R}^2$) in prostori ($\mathbb{R}^3$) z običajno metriko, definirana:

$d(x, y) = |y - x|$ za $x, y \in \mathbb{R}$

$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)}$ za $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

podobno za $\mathbb{R}^3$ ...

Množice $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ so vektorski prostori, zato seštevamo in s skalarjem množimo po komponentah. Iz lastnosti $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ velja:

$$d(x,y) = d(0, y-x)$$

To pomeni, da je razdalja med točkama x in y enaka razdalji od izhodišča do vektorja $y-x$. Metrika za katero velja ta lastnost je popolnoma določena, če za vsako točko navedemo njeno razdaljo od točke 0. To razdaljo bomo v splošnih prostorih s to lastnostjo imenovali…

Norma

Naj bo X nek realen ali kompleksen vektorski prostor. **Norma** na X je funkcija $||.|| : X \to \mathbb{R}$, ki ustreza pogojem:

a) $||x|| \geq 0$
b) $||x|| = 0 \implies x = 0$
c) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
d) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Prostor skupaj z normo na njem imenujemo **normiran vektorski prostor** (torej $(X, ||.||)$). Tudi tu je lastnost (d) imenovana trikotniška neenakost in tudi iz nje lahko izpeljemo novo neenakost:

$$|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x-y||$$

Če je X normiran vektorski prostor, je s formulo $d(x,y) = ||y-x||$ definirana metrika na X. Iz formule sledi lastnost $||x|| = d(0,x)$, zato je formula identična kot tista od prej (glej Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo za dokaz).

Torej *vsak normiran prostor je metrični prostor*. Prav tako so zgoraj omenjeni prostori $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ tudi normirani prostori. Norme v njih so definirane tako:

$$||x|| = \|x\|$$
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Očitno je da ustrezajo vsem pogojem, vendar je za $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ težje dokazati trikotniško neenakost. **Poglej si to!!!**

Pri vektorjih lahko računamo dolžine vektorjev s skalarnim produktom. Dolžina vektorja $\vec{v}$ je kvadratni koren skalarnega produkta $\vec{v} \cdot \vec{v}$. To bomo posplošili in pokazali, da vsak skalarni produkt na nekem vektorskem prostoru X porodi normo na X. Obstajajo tudi norme, ki ne izhajajo iz nobenega skalarnega produkta.

Skalarni produkt

Skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru X je funkcija $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$
b) $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
d) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$

Realen vektorski prostor skupaj s skalarnim produktom na njem imenujemo **realen unitaren vektorski prostor**. Lastnost (c) se imenuje **linearnost v prvem faktorju**, lastnost (d) **simetričnost** (ki zagotavlja tudi linearnost v drugem faktorju) ter (a) in (b) **pozitivna definitnost**.

Skalarni produkt na realnem linearnem prostoru X je *pozitivno definiten bilinearen funkcional na X* Preprosto je definiran na prostorih $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$; tu je primer za $\mathbb{R}^3$:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Če je X unitaren prostor, je s formulo $||x|| : \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definirana norma na X. Zdaj so definirane zgornje funkcije norme na $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$
$$||x|| = \sqrt{\langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle}$$
$$||x|| = \sqrt{\langle x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3\rangle}$$

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačba

V vsakem unitarnem prostoru velja za poljubna vektorja x in y Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenakost, ki zgleda tako:

$$\begin{gathered}
\|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \\
\|\langle x, y\rangle| \leq \langle x\rangle \cdot \langle y\rangle
\end{gathered}$$

Neenakost je posplošitev znane neenakosti $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, ki velja za geometrične vektorje. V kolikor sta x in y linearno neodvisna, velja v zgornji neenačbi strogi neenačaj.

Note glede kompleksnih prostorov

Velja lastnost $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Skalarni produkt na kompleksnem prostoru tako ustreza pogojem (a), (b), (c) in namesto (d) tej lastnosti. Primer je naslednja lastnost, ki je komplementarno pogoju (c):

$$\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle$$

To res velja s pomočjo pogojev (c) in (d) iz definicije skalarnega produkta in zgornje lastnosti.

$$\begin{aligned}
\langle z, \lambda x + \mu y\rangle &= \overline{\langle \lambda x + \mu y, z\rangle} \\
&= \overline{\lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle} \\
&= \bar{\lambda}\overline{\langle x, z\rangle} + \bar{\mu}\overline{\langle y, z\rangle} \\
&= \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle \quad \square
\end{aligned}$$

Dokaz za Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo: če je $y = 0$, potem je neenakost gotovo pravilna in vektorja x in y sta tudi linearno odvisna ($|\langle x, 0\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle 0, 0\rangle = 0$). Privzamemo, da $y \neq 0$, zato velja $\langle y, y\rangle > 0$ po (a) in (b). Za poljubna skalarja λ in μ velja tedaj:

$$\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle = |\lambda|^2 \cdot \langle x, x\rangle + \lambda\bar{\mu}\langle x, y\rangle + \bar{\lambda}\mu\langle y, x\rangle + |\mu|^2\langle y, y\rangle$$

Zdaj naj bo $\lambda = \langle y, y\rangle$ in $\mu = -\langle x, y\rangle$. Upoštevamo, da je $\lambda = \bar{\lambda}$ in $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$. Na desni strani enačbe dobimo zdaj:

$$\begin{aligned}
\langle y, y\rangle^2 \cdot \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \cdot |\langle x, y\rangle|^2 - \langle y, y\rangle \cdot |\langle x, y\rangle|^2 + |\langle x, y\rangle|^2 \cdot \langle y, y\rangle \\
= \langle y, y\rangle \cdot \left(\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2\right)
\end{aligned}$$

Leva stran prve enakosti je nenegativna zaradi lastnosti (a). V primeru, da sta x y linearno odvisna je pozitivna, saj je $\lambda \neq 0 \implies \lambda x + \mu y \neq 0$, kar dokaže Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo. $\square$

Dokaz trikotniške neenakosti

S pomočjo teh lastnosti lahko zdaj dokažemo lastnost (d) trikotniške neenakosti iz izreka o normi na unitarnem prostoru X. Iz definicije norme in lastnosti (c) iz definicije skalarnega produkta sledi:

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + |\langle x,y\rangle| + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|x\|\cdot\|y\| + \|y\|\cdot\|x\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \square
\end{aligned}$$

Če sta x in y linearno odvisna velja po definiciji Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbe $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

Po tej lemi velja, da **norma v takem prostoru ne izhaja iz skalarnega produkta** in poda potreben pogoj za to, da je norma porojena s skalarnim produktom (torej, za tiste, ki to ne velja, so porojene iz skalarnega produkta?).

Prav tako velja, da v unitarnem prostoru **norma natanko določa skalarni produkt**. V poljubnem unitarnem prostoru nad poljem skalarjev $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ je:

$$\langle x,y\rangle = \begin{cases} \frac{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}{4}; & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}{4} + \frac{\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)}{4}; & \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Leva stran je skalarni produkt, na desni strani ga definira norma, right?

Paralelogramska identiteta

V poljubnem unitarnem prostoru velja za poljubna elementa x in y Paralelogramska identiteta:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)
\end{aligned}$$

V paralelogramski identiteti nastopa samo norma, zato ima smisel v nekem normiranem prostoru. Ne velja pa, da je v njem tudi *pravilna*. Spodaj je dokazana samo za primer, ko izhaja iz skalarnega produkta, toda obstajajo normirani prostori, kjer identiteta ne velja.

Iz zgornje trditve sledi, da **ti prostori niso unitarni** in da **njihove norme ne izjajo iz skalarnega produkta**. Ta trditev podaja novi pogoj za to, da je norma porojena s skalarnim produktom.

Ničelni skalarni produkt

Elementa x in y poljubnega unitarnega prostora X imenujemo **pravokotna** oziroma **ortogonalna**, če je $\langle x,y\rangle = 0$ in zato $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = 0$. Ta lastnost implicira obstoj...

Pitagorov izrek

Ker poljubna pravokotna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ležita na katetah pravokotnega trikotnita s hipotenuzo $\vec{a}+\vec{b}$, razlaga Pitagorov izrek zvezo med dolžinami teh vektorjev. Preko norme definirano naslednjo posplošitev:

Če sta x in y pravokotna vektorja poljubnega unitarnega prostora, velja $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dokaz: velja $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, zato:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \square\end{aligned}$$

Zgledi unitarnih, normiranih, metričnih prostorov

Evklidska (standardna) metrika

Definicijo skalarnega produkta z lahkoto posplošimo na n-dimenzijske prostore. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo skalarni produkt poljubnih vektorjev (ali točk) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ definiran z:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Pripadajoča norma in metrika na $\mathbb{R}^n$ sta podani z:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}, \qquad d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2\right)^{1/2}$$

To normo in metriko imenujemo *običajna* v prostoru $\mathbb{R}^1$ (na premici), *evklidska* za prostora $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ (običajna metrika v evklidski ravnini oziroma evklidskem 3-razsežnem prostoru) ter *sferična* za prostor $\mathbb{R}^n$, saj je v obliki krogle.

Maksimum (kubična) metrika

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bosta norma in metrika poljubnih vektorjev (ali točk) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ definirani z:

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \qquad d(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\}$$

Kako izgleda enotska krogla $K(0,1)$ v $\mathbb{R}^n$ za to normo: očitno velja, da je vsak x manjši ali enak polmeru krogle, torej $\|x\| \leq 1$, kar ekvivalentno velja za vsak vmesni x_j, torej $|x_j| \leq 1$ za $j = 1, \ldots, n$. Zaradi absolutne vrednosti to pomeni $|x_j| \in [-1, 1]$, zato je $\bar{K}(0^n, 1) = [-1, 1]^n$.

Za $n = 2$ si lahko enotsko kroglo predstavljamo kot kvadrat v ravnini s središčem v $(0, 0)$ in stranicami dolžine 2, vzporednimi s koordinatnima osema.

Taksi (oktaedrska) metrika

Naslednjo normo v $\mathbb{R}^n$ (ali C^n) dobimo s poenostanovitvijo formule za sferično normo. Za poljuben vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ naj bo:

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

Ne ustreza paralelogramski identiteti, zato ne izhaja iz skalarnega produkta. V prostoru $\mathbb{R}$ se ujema z običajno metriko, v $\mathbb{R}^2$ je geometrično podobna diamantu, za $\mathbb{R}^3$ pa oktaedru, zato metriko in normo imenujemo *oktaedrska*. Pogosto jo označimo s simbolom $\| \ \|_1$.

Za $\mathbb{R}^2$ ima nazorno interpretacijo: v mestu v katerem sta vsaki dve ulici vzporedni ali pravokotni, je sferična razdalja med dvema točkama enaka razdalji v zračni črti (ki je razmeroma nezanimiva). "Pravo" oziroma "efektivno" razdaljo pa nam da oktaedrska metrika, zato jo imenujemo tudi *taksi (taxicab) metrika*.

Integralne metrike

Na vektorskem prostoru zveznih funkcij na intervalu $I = [a, b]$, t.j. $C(I)$, obstajajo tudi normam oblike $\| \ \|_p$ $(1 \leq p < \infty)$ analogne.

Sferična in oktaedrska norma imata skupno posplošitev; vzemimo neko realno število $p \geq 1$. Za nek vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{C}^n$ naj bo:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Za $p = 2$ je to res sferična in edina inducirana s skalarnim produktom, ter za $p = 1$ oktaedrska.

Vsoto moramo nadomestiti z integralom, zato naj bo za neko funkcijo $f \in C(I)$ definirana *integralna norma* kot:

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

in *integralna metrika*:

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Diskretna metrika

Na vsaki neprazni množici M je možno definirati *diskretno* metriko:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \ ; x = y \\ 1 \ ; x \neq y \end{cases}$$

Diskretna, saj so točke ločene ena od druge

Krogle v metričnih prostorih

Naj bo M metrični prostor ter točka $a \in M$ in $r > 0$. Ločimo naslednje množice točk:

$K(a, r) = K_M(a, r) = \{x \in M \ | d(a, x) < r\}$ odprta krogla (točke se ne dotikajo roba krogle)
$\bar{K}(a, r) = \bar{K}_M(a, r) = \{x \in M \ | d(a, x) \leq r\}$ zaprta krogla (točke se dotikajo roba)
$S(a, r) = S_M(a, r) = \{x \in M \ | d(a, x) = r\}$ sfera (samo rob/površina krogle)

Vse imajo središče v točki a in polmer r ter spadajo v metrični prostor M.

Enotska krogla

Če poznamo eno kroglo nekega normiranega prostora X, poznamo vse krogle. To je prikazano z naslednjim primerom:

> Za poljubni točki a in b normiranega prostora X in za poljubni pozitivni števili r in s je preslikava $f : X \to X$, definirana z $f(x) = (s/r)(x - a) + b$, bijekcija ter preslika
>
> - a v b,
> - $K(a, r)$ na $K(b, s)$,
> - $\bar{K}(a, r)$ na $\bar{K}(b, s)$,
> - $S(a, r)$ na $S(b, s)$.
>
> *Dokaz*: Preslikava f je očitno inverzna, saj je bijekcija, zato imamo za poljuben $x \in X$ naslednje ekvivalence:
>
> $$\begin{aligned} x \in S(a,r) &\iff \|x - a\| = r \\ &\iff \|(s/r)(x-a)\| = s \\ &\iff \|f(x) - b\| = s \\ &\iff f(x) \in S(b,s) \quad \square \end{aligned}$$

Podoben sklep velja za odprte in zaprte krogle. Ker ima f čisti "geometrični" pomen, sta si krogli $K(a, r)$ in $K(b, s)$ (in ostale množice) povsem podobni v geometričnem pomenu besede. Velja namreč, da je f sestavljena iz preslikave

- $x \mapsto x - a$ oziroma translacije prostora X za vektor $-a$
- $x \mapsto (s/r)x$ oziroma $(s/r)-$kratne povečave/pomanjšave prostora
- $x \mapsto x + b$ oziroma translacije prostora X za vektor b

Torej res poznamo vse krogle, če poznamo eno in lahko vedno vzamemo enostavno kroglo oziroma tisto "navadno" kroglo, da opišemo ostale. Krogli $K(0, 1)$ rečemo **enotska krogla** (lahko je odprta, zaprta ali sfera). Ima izhodišče v točki 0 in polmer 1.

Vseeno v splošnem metričnem prostoru ne velja, da so krogle z istimi središči in različnimi polmeri lahko v čemerkoli podobni.

Diameter

Premer ali diameter neprazne podmnožice A metričnega prostora M je $\text{diam}A = sup\{d(a,b) \mid a, b \in A\}$. Množica A je omejena, če velja eno izmed:

- $A = \emptyset$
- $A < \infty$

Torej v kolikor množica A ni prazna, je omejena takrat, ko je njen diameter $\text{diam}A$ manjši od ∞. Ta definicija velja tudi za *nepravo podmnožico* $M \subset M$. Namesto, da je prostor M omejen, lahko rečemo, da je **njegova metrika omejena**, saj je zahteva $\text{diam}M < \infty$ identična z zahtevo po omejenosti realne funkcije d na množici $M \times M$.

> Po definiciji je $\text{diam}A = sup\{d(a,b) \mid a, b \in A\}$, torej supremum oziroma najmanjšo zgornjo mejo. To predstavlja največja možna razdalja znotraj A, kar je takrat, ko sta a in b čimbolj *oddaljena*, vendar sta omejena z elementi množice A. Največja razdalja je, ko je eden izmed njiju najmanjši element A, drugi pa največji možen. Torej je res funkcija d omejena na množici $A \times A$.

Velja, da so za poljubno podmnožico A poljubnega metričnega prostora M naslednje trditve ekvivalentne:

a) A je omejena
b) za nek $x \in M$ in nek $r > 0$ je $A \subset \bar{K}_M(x, r)$
c) za vsak $x \in M$ obstaja tak $r > 0$, da je $A \subset K_M(x, r)$

Rekli smo, da je $\bar{K}$ krogla z notranjostjo in robom oziroma zaprta krogla, medtem ko je K krogla brez roba oziroma odprta krogla. Lasnost (b) pove torej, da je A pomnožica neke zaprte krogle $\bar{K}(x, r)$, torej obstajata točno določena x in r, za katera to velja.

Po drugi strani govori lastnost (c) o tem, da ne glede na to kateri x vzamemo, za vsakega obstaja nek r, tako da je A zagotovo podmnožica odprte krogle $K(x, r)$.

Dokaz:

(a) $\implies$ (c): izberemo nek $x \in M$ in $b \in A$ ter označimo $r = 1 + d(x, b) + \mathrm{diam}A$. Za neko poljubno točko $a \in A$ velja

$$
\begin{aligned}
d(x,a) &\leq d(x,b) + d(b,a) \quad \text{(trikotniška neenakost)} \\
&\leq d(x,b) + \mathrm{diam}A \\
&< 1 + d(x,b) + \mathrm{diam}A = r
\end{aligned}
$$

Torej je res $A \subset K_M(x, r) \quad \square$.

(b) $\Rightarrow (a)$: naj bo $A \subset \bar{K}_M(x, r)$. Za neki točki $a, b \in A$ velja:

$$
\begin{aligned}
d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\
&\leq 2r
\end{aligned}
$$

zato je A $\leq 2r\ldots$ **idk why**.

(c) $\implies (b)$: očitno.

A je torej omejena z neko kroglo, bodisi zaprto ali odprto.

Podmnožice metričnih prostorov

Naj bo M nek metrični prostor in $A \subset M$ poljubna podmnožica. Točka $x \in M$ je za množico A:

- **notranja**, če obstaja tak $r > 0$, da je $K_r(x) \subseteq A$
- **zunanja**, če obstaja tak $r > 0$, da $K_r(x) \subseteq M - A = \overline{A}$
- **robna**, če za vsak $r > 0$ velja $K_r(x) \cap A \neq \emptyset$ in $K_r(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

Množico vseh notranjih točk množice A imenujemo **notranjost** množice A in jo označevali z $\mathrm{Int}_M(A)$ ali $\mathrm{Int}_M A$. Množico vseh zunanjih točk množice A imenujemo **zunanjost** množice A in jo označevali z $\mathrm{Ext}_M(A)$ ali $\mathrm{Ext}_M A$. Množico vseh robnih točk množice A imenujemo **rob** množice A in jo označevali z $b_M(A)$.

Točka y je zunanja, x notranja in z robna za množico A. Vsaka točka pripada natanko eni od treh skupin. Notranjost, zunanjost in rob množice A so disjunktne množice in skupaj pokrivajo ves prostor M.

Ker robne lahko pripadajo tako A kot $M - A$, je A v bistvu unija (disjunktnih) množic $\mathrm{Int}_M(A)$ in $A \cap b_M(A)$.

Primer: Naj bo D daljica s krajiščema a, b. Kaj je njena notranjost in kaj rob? Moramo vedeti v kakšnem metričnem prostoru opazujemo daljico - naj D leži na premici P, ta pa v ravnini R.

- $b_P(D) = \{a, b\}$
- $\mathrm{Int}_P(D) = D - \{a, b\}$
- $b_R(D) = D$
- $\mathrm{Int}_R(D) = \emptyset$

V vsakem metričnem prostoru M za podmnožici $M, \emptyset \in M$ velja sledeče:

$\mathrm{Int}M = M$

$b(M) = \emptyset$

$\mathrm{Int}\emptyset = b(\emptyset) = \emptyset$

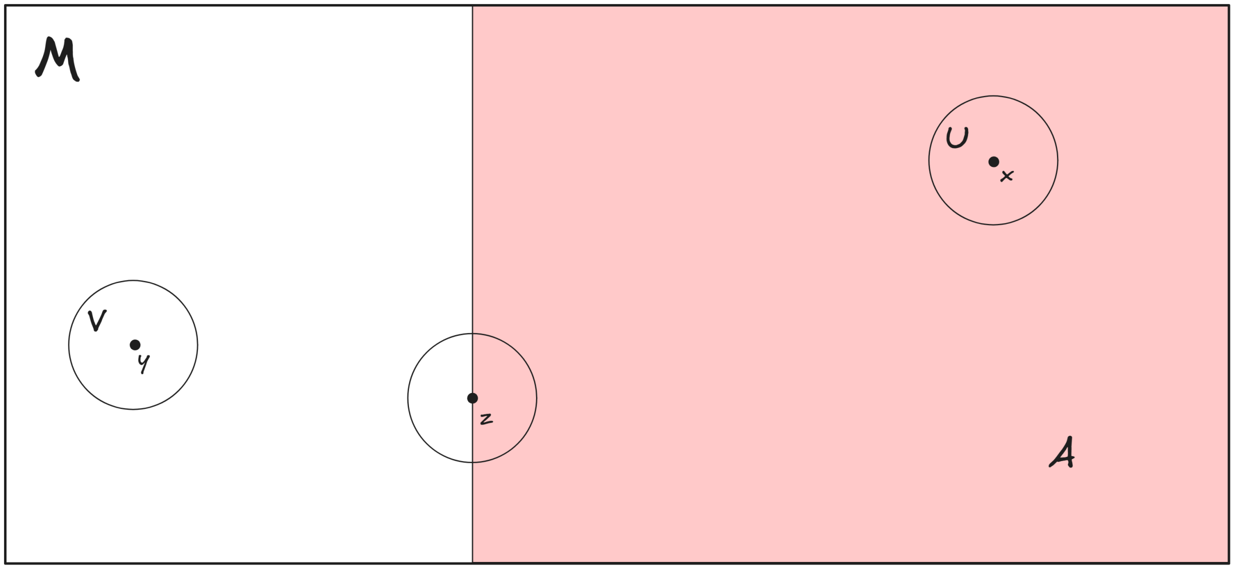

Figure 1: podmnožice

Odprte in zaprte množice

Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval med točkama a in b. Če je $b_{\mathbb{R}}(I) = \{a, b\} \subset I$, pravimo, da je interval **zaprt**. Če $a, b \notin I$, je I **odprt** interval. Podobno se izražamo pri krogih. Zaprt krog je (poln) krog z mejno (robno) krožnico. Odprt krog sestoji samo iz notranjih točk, torej je krog brez robne krožnice. Podobno definiramo tudi zaprtost in odprtost množice v nekem metričnem prostoru.

Naj bo M nek metrični prostor in $A \subset M$. A je **odprta** v M, če je vsaka njena točka notranja, t.j. $A \subset \mathrm{Int}_M(A)$. Ker je vedno $\mathrm{Int}_M(A) = A$, lahko zahtevamo tudi $A = \mathrm{Int}_M(A)$. Ekvivalentno je tudi $A \cap b_M(A) = \emptyset$. Množica A je **zaprta** v M, če je $\mathrm{Int}_M(A) \subset A$.

V nekem metričnem prostoru M je za vsako točko $x \in M$ in vsak $r > 0$ odprta krogla $K(a, r)$ odprta množica, zaprta krogla $\bar{K}(a, r)$ pa zaprta množica. Vsaka množica pa ni bodisi odprta bodisi zaprta, tako kot obstajajo polodprti intervali ipd. Definiciji odprte in zaprte krogle nimata nič skupnega z definicijami odprte in zaprte množice!

> Naj bo $x \in K(a, r)$ in $\epsilon = r - d(a, x) > 0$. Za vsak $y \in K(x, \epsilon)$ je $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \epsilon = r$, torej je tudi $y \in K(a, r)$ (ker je $d(a, y) < r$, je y notranja točka oziroma je del odprte krogle). Ker je x obdana s kroglo, ki cela leži v $K(a, r)$ (ker je $x \in K(a, r)$ in $r = \epsilon + d(a, x)$ ali $d(a, x) = r - \epsilon$), je $x \in \mathrm{Int}(K(a, r)) \implies$ krogla $K(a, r)$ je res odprta (vsaka točka je notranja).
>
> Vzemimo zdaj $x \in M$ za katero $d(a, x) > r$. Naj bo $\epsilon = d(a, x) - r$. Za vsak $y \in K(x, \epsilon)$ velja $d(a, y) > r$, torej $K(x, \epsilon)$ leži v $M - \bar{K}(a, r)$. To pomeni, da je x zunanja točka za $\bar{K}(a, r)$ in zato ni robna točka. Če $d(a, x) > r$, potem $x \notin b(\bar{K}(a, r))$, kar ekvivaletno pomeni, če $x \in b(\bar{K}(a, r))$, potem $d(a, x) \leq r$ ali $b(\bar{K}(a, r)) \subset \bar{K}(a, r) \implies$ krogla $\bar{K}(a, r)$ je zaprta množica.

Odprtost in zaprtost se ne izključujeta (ni tako kot pri vratih, ki so zaprta, če niso odprta in so odprta če niso zaprta).

V poljubnem metričem protoru M za vsako podmn. $A \subset M$ velja, da je $\mathrm{Int}(A)$ unija vseh odprtih množic, ki ležijo v A oziroma, da je **največja med odprtimi množicami** v M, ki ležijo v A. **Zaprtje** množice A v metričnem prostoru M pa je množica $\mathrm{Cl}_M(A)$, ki je presek vseh zaprtih množic v M, ki vsebujejo A oziroma je **najmanjša med temi zaprtimi množicami** ($\mathrm{Cl}_M(A) = \overline{A}$)

Posledično, za poljubno podmnožico A poljubnega metričnega prostora M velja:

- množica A je odprta $\iff$ $\mathrm{Int}(A) = A$
- množica A je zaprta $\iff$ $\overline{A} = A$

Naslednje množice so enake zaprtju $\overline{A}$:

- $A \cup b(A)$
- limite vseh konvergentnih zaporedij iz A v M
- $A \cup \{\text{stekališča množice } A\}$

Stekališče množice

Stekališče množice je nasprotje izolirane točke.

Izolirane točke

Točka a je izolirana točka množice $A \subset M$ tedaj in le tedaj, ko je $\{a\}$ odprta podmnožica metričnega prostora A.

Ekvivalentno, točka a je izolirana točka množice $A \subset M$, če ima v M tako okolico U, da je $U \cap A = \{a\}$. To pomeni v smislu odprte krogle (verjetno) za nek $r > 0$ $K(a, r) \cap A = a$, torej da je samo ona sama del svoje okolice za nek $r > 0$.

> *Dokaz*: nadaljujem to kar sem povedal o odprti krogli. $K(a, r) = \{a\} \iff K(a, r) \subset \{a\}$. Množica $\{a\}$ vsebuje hkrati z vsako svojo točko še kako kroglo okoli te točke. To je ekvivalentno odprtosti množice, torej točka a je izolirana točka množice $A \subset M$. $\square$

Točka s metričnega prostora M je stekališče ali **limitna točka** množice $A \subset M$, če je s stekališče (ali limita) kakega zaporedja točk iz $A - \{s\}$. Pri tem je lahko $s \in A$ ali $s \in M - A$. Bistveno je to, da zaporedje v celoti leži v množici $A - \{s\}$, saj je vsaka točka $s \in A$ limita zaporedja $(s, s, s, ...)$.

Ekvivalentne trditve:

a) točka s je stekališče množice A
b) vsaka okolica točke s vsebuje vsaj eno točko iz množice $A - \{s\}$
c) točka s ni izolirana točka množice A

Množica vseh stekališč množice A nekega metričnega prostora M je zaprta množica.

Zveznost metričnih prostorov

Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora. Preslikava $f : M \to M'$ je zvezna v točki $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$d'(f(a), f(b)) < \epsilon \implies d'(a, x) < \delta$$

Preslikava f je **zvezna na** M, če je zvezna v vsaki točki M. Množico vseh takih preslikav označimo s $C(M, M')$.

Če označimo $K = K_M$ in $K' = K_{M'}$, lahko pogoj za zveznost v točki a opišemo tudi s pomočjo krogel. Za vsak $\epsilon > 0$ mora obstajati tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in K(a, \delta)$ leži $f(x)$ v $K'(f(a), \epsilon)$, oziroma $f(K(a, \delta)) \subset K'(f(a), \epsilon)$.

Enakomerna zveznost

Zgornja preslikava f je **enakomerno zvezna** na podprostoru $N \subset M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ za vsak par točk $x, y \in N$, ki ustrezata pogoju $d(x, y) < \delta$.

V primeru, da je preslikava enakomerno zvezna na vsem prostoru M, bomo rekli, da je enakomerno zvezna.

Lipschitzov pogoj za enakomerno zveznost

Vsaka preslikava, ki zadošča Lipschitzovemu pogoju, je enakomerno zvezna. Lipschitzovemu pogoju ustreza, če obstaja tak $t \geq 0$, da za nek par točk $x, y \in M$ velja *ocena* $d'(f(x), f(y)) \leq t \cdot d(x, y)$.

Pogoj za t je ekvivalenten zahtevi, da je t zgornja meja množice

$$E = \{\frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)} \; | x, y \in M, x \neq y\}$$

Preslikava je Lipschitzova preslikava natanko tedaj, ko je množica E navzgor omejena. Najmanjše med števili t oziroma $\sup E$ bomo imenovali *raztezni koeficient preslikave f*.

Lastnosti zveznih preslikav

Osnovni zgledi zveznih in enakomerno zveznih preslikav so zvezne in enakomerno zvezne realne funkcije ene spremenljivke. Vendar to ne velja nujno za preslikave na metrčnih prostorih. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval, ki ga vzamemo za definicijsko območje. Vsaka injektivna zvezna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je

- striktno monotona,
- I bijektivno preslika spet na nek interval $J \subset \mathbb{R}$,
- njena inverzna funkcija $f^{-1} : J \to I$ je avtomatično zvezna (bijekcija).

Za vsako zvezno bijektivno preslikavo metričnih prostorov ne velja, da je inverzna preslikava zvezna, kar ne velja tudi za navadne funkcije, če definicijsko območje ni interval.

Primer: Funkcija $f : [-1, 0) \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ je definirana tako:

$$f(x) = \begin{cases} x \; ; & x \in [-1, 0) \\ x - 1 \; ; & x \in [1, 2] \end{cases}$$

f je zvezna in preslika interval $[-1, 0) \cup [1, 2]$ bijektivno na interval $[-1, 1]$. Inverzna funkcija $f^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 0) \cup [1, 2]$ pa ni zvezna v točki 0!

Naj bo M nek metrični prostor. Če izberemo poljubno točko $a \in M$, lahko definiramo realno funkcijo na M s predpisom $x \mapsto d(a, x)$. To funkcijo je smiselno označiti z $d(a, \;)$ ali $d(a, -)$, saj njeno vrednost v poljubni točki $x \in M$ dobimo tako, da x postavimo na *prazno* mesto v predpisu.

> Podobno kot označimo s $\surd$ funkcijo, katere vrednost pri nekem $x \geq 0$ dobimo tako, da vstavimo x pod znak $\surd$, torej $\sqrt{x}$.

Za vsak $a \in M$ je funkcija $d(a, -) : M \to \mathbb{R}$ enakomerno zvezna. Druga trikotniška neenakost, $|d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y)$ (glej #Norma), nam pove, da je preslikava Lipschitzova. Prav tako je za nek normiran prostor X norma $\| \; \| = d(0, \;) : X \to \mathbb{R}$ enakomerno zvezna funkcija na X. Funkcija $d(a, -)$ ima naravno posplošitev, to je **razdalja od dane podmnožice v** M.

Razdalja točke od množice

Naj bo M nek metrični prostor ter A in B neki njegovi neprazni podmnožici. *Razdalja točke* $x \in M$ od množice A je definirana kot:

$$d(x, A) = d(A, x) = \inf\{d(x, a) \ |a \in A\}$$

Razdalja množic A in B je definirana kot:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \inf\{d(a, B) \mid a \in A\} \\ &= \inf\{d(A, b) \mid b \in B\} \end{aligned}$$

Torej najmanjši možni razdalji med nekima točkama iz obeh množic.

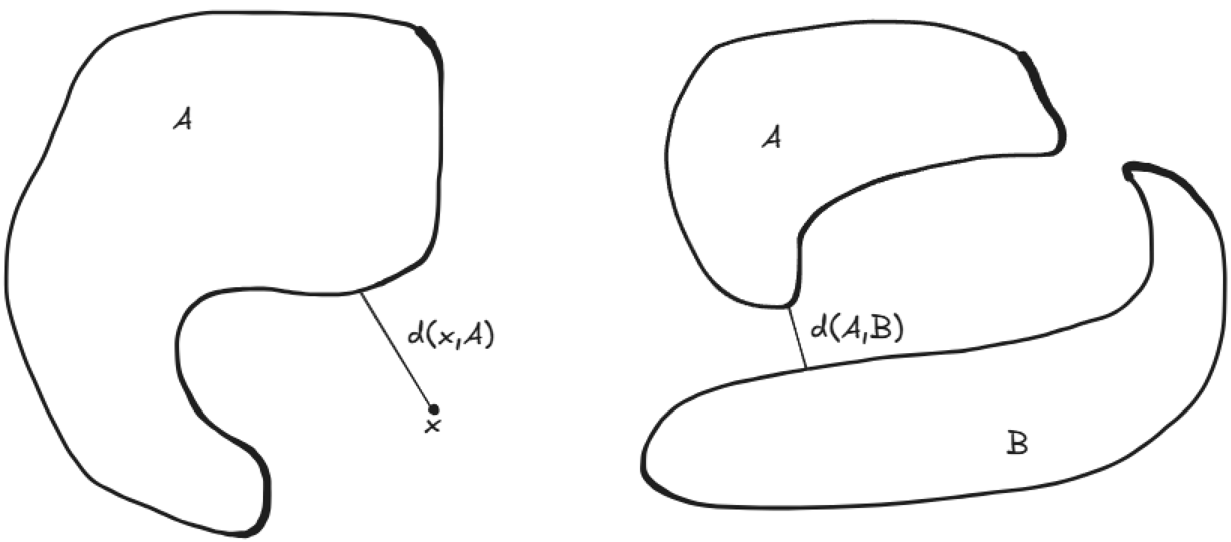

Figure 2: razdalja-od-množice

Za poljuben metrični prostor M in poljubno neprazno podmnožico $A \subset M$ je funkcija $d(-, A) = d(\ , A) : M \to \mathbb{R}$, definirana z $x \mapsto d(x, A)$, enakomerno zvezna na M.

Dokaz: vzemimo neki točki $x, y \in M$. Za vsak $a \in A$ velja:

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, a) \\ &\leq d(x, y) + d(y, a) \quad \text{(trikotniška neenakost)} \\ d(x, a) - d(x, y) &\leq d(y, a) \end{aligned}$$

Pomeni, da je $d(x, a) - d(x, y)$ spodnja meja za množico $\{d(y, a) | a \in A\}$ in obratno velja tudi:

$$\begin{aligned} d(x, a) - d(x, y) &\leq d(y, a) \\ \implies d(x, a) - d(y, a) &\leq d(x, y) \end{aligned}$$

Če zamenjamo vlogi točk x in y, dobimo tudi:

$$d(y, a) - d(x, a) \leq d(y, x)$$

Obe neenačbi skupaj nam omogočata zapis:

$$|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$$

To pomeni, da funkcija $d(-, A)$ zadošča Lipschitzovemu pogoju, torej je enakomerno zvezna. $\square$

Zaporedja v metričnih prostorih

Splošna definicija konvergence točk na številski premici lahko posplošimo na zaporedja točk v metričnem prostoru. Zaporedje točk $a_1, a_2, \dots$ prostora M konvergira k točki $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako naravno število n_0, da je vsak člen a_n v zaporedju, pri katerem je $n \geq n_0$, oddaljen od a za manj kot ϵ.

Bolj *uradno*: naj $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množico vseh naravnih števil. (Neskončno) zaporedje v množici M, ali zaporedje točk množice M, je neka preslikava $N \to M$. Vrednost funkcije $x : N \to M$ pri nekem naravnem številu n označimo z x_n (namesto z $x(n)$). Samo za zaporedje uporabimo namesto prejšnje *funkcijske* oznake eno izmed naslednjih:

- $(x_1, x_2, \dots)$
- $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ali (x_n)

Naj bo torej $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje točk metričnega prostora M. To zaporedje **konvergira** k točki $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$d(a, x_n) < \epsilon \iff x_n \in K_M(a, \epsilon)$$

Zaporedje ki konvergira h neki točki je konvergentno. Če x_n konvergira k a, pravimo, da je a **limita zaporedja** (x_n) in pišemo:

$$a = \lim x_n \iff a = \lim_{n \to \infty} x_n \iff x_n \to a$$

Očitno je, da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti a natanko tedaj, ko številsko zaporedje $(d(a, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0.

$a = \lim_{n \to \infty} x_n \implies 0 = \lim_{x_n \to a} d(a, x_n)$

Tudi pojem limite lahko posplošimo na preslikave nad metričnimi prostori.

Limita funkcije v metričnem prostoru

Naj bosta M, N metrična prostora, $a \in M$ in f preslikava iz M v N. Točka $b \in N$ je **limita preslikave** f pri a:

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \epsilon \ ; \ \forall x \in M - \{a\}$$

Preden nadaljujem, je tu še definicija okolice.

Okolica točke v metričnem prostoru

Naj bo M metrični prostor in $a \in M$. **Okolica** točke a v prostoru M je vsaka množica $U \subset M$, ki vsebuje kako kroglo $K_M(a,r)$ v M s središčem v a.

Vsaka krogla $K_M(a,r)$ (ali $\bar{K}_M(a,r)$) je torej že okolica točke a. Vsaka množica v M, ki tudi vsebuje kako okolico točke a, je tudi sama okolica točke a.

Naj bosta M in N metrična prostora ter $a \in M$ in $f : M \to N$ neka preslikava. Naslednje trditve so ekvivalentne:

a) Preslikava f je zvezna v točki a.
b) Za vsako okolico V točke $f(a) \in N$ obstaja taka okolica U točke $a \in M$, da velja $f(U) = M$.
c) Za vsako okolico V točke $f(a)$ je praslika $f^{-1}(V)$ okolica točke a.

Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metričnem prostoru M konvergira k točki $a \in M$ natanko tedaj, ko za vsako okolico U od točke a obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x_n \in U$ za vsak $n \geq n_0$.

Vsako zaporedje v poljubnem metričnem prostoru ima kvečjemu **eno limito**. Če bi imelo neko zaporedje (x_n) v metričnem prostoru M dve različni limiti $a, b \in M$, bi za pozitivno število $\epsilon = d(a,b)$ morali najti tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da bi bili za vsak $n \geq n_0$ izpolnjeni neenačbi

$$d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{in} \quad d(b, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Od tod dobimo protislovno neenačbo

$$\epsilon = d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square$$

Naj bosta N, M poljubna metrična prostora. preslikava $f : M \to N$ je zvezna v točki $a \in M$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v M z limito a konvergira zaporedje $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ proti $f(a)$.

> *Dokaz:* naj bo preslikava f zvezna v točki a in naj vanjo konvergira zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v M. Vzemimo poljubno okolico $V \subset N$ od točke $f(a)$. Po definiciji velja, da je $f(U) \subset V$. Ker je $a = \lim x_n$, lahko najdemo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x_n \in U$ za vsak $n \geq n_0$. Za vsak tak n je potem $f(x_n) \in U \subset V$, kar implicira $f(a) = lim f(x_n)$. $\square$

Posledično, če je X nek normiran prostor nad poljem skalarjev $\mathbb{F} = \mathbb{R} \wedge \mathbb{C}$ in sta $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neki konvergentni zaporedji v X ter $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neko konvergetno zaporedje v F, potem sta konvergetni tudi zaporedji:

$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{in} \quad (\lambda_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

in velja:

$$\lim(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lim x_n) + (\lim y_n)$$

$$\lim(\lambda_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lim \lambda_n) \cdot (\lim x_n)$$

Naj bosta M' in M'' neka metrična prostora. Zaporedje $(x_n = x'_n, x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $M = M' \times M''$ konvergira k točki $a = (a', a'') \in M$ natanko tedaj, ko velja:

$$a' = \lim x'_n \in M'$$
$$a'' = \lim x''_n \in M''$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} a = \lim x_n &\iff 0 = \lim d(a, x_n) \\ &\iff 0 = \lim \left(\max\{d(a', x_n'), d(a'', x_n'')\}\right) \\ &\iff 0 = \lim d(a', x_n') \ \wedge \ 0 = \lim d(a'', x_n'') \\ &\iff a' = \lim x_n' \ \wedge \ a'' = \lim x_n'' \quad \square \end{aligned}$$

Dokaz: naj bo $\lim x_n = a$ in $\lim y_n = b$. Po zgornjem dokazu sledi $\lim(x_n, y_n) = (a, b)$ v $X \times X$. Ker je seštevanje zvezna preslikava iz $X \times X$ v X, sledi $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Podobno dokažemo ostali dve trditvi.

Podzaporedje

Naj bo $(x_1, x_2, \dots)$ zaporedje elementov neke množice M. **Podzaporedje** tega zaporedja je vsako zaporedje oblike $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$, kjer je $(n_1, n_2, \dots)$ strogo naraščujoče zaporedje naravnih števil.

Ker je zaporedje v metričnih prostorih neka funkcija $N \to M$, definiramo podzaporedje zaporedja kot $x : N \to M$ je kompozitum $x \circ n : N \to M$, kjer je $n : N \to N$ neka strogo naraščujoča funkcija.

> Da dobimo to podzaporedje, moramo za n vzeti funkcijo, ki ima pri 1 vrednost n_1, 2 vrednost n_2, ...

Če ima zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metričnem prostoru limito a, tudi vsako njegovo podzaporedje konvergira v a.

Stekališče zaporedja

Naj bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v metričnem prostoru M. Točka $a \in M$ je **stekališče tega zaporedja**, če vsaka okolica te točke vsebuje neskončno členov tega zaporedja (če je za vsak $\epsilon > 0$ izpolnjena neenačba $d(a, x_n) < \epsilon$ pri neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$).

Zaporedje mora imeti več stekališč (tudi neskončno mnogo). Če je zaporedje x_n konvergetno, je $\lim x_n$ njegovo **edino stekališče**. Točka $s \in M$ pa je stekališče zaporedja x_n natanko tedaj, ko neko njegovo podzaporedje konvergira proti s.

Kompaktnost in povezanost

Cauchy-jeva zaporedja

Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metričnem prostoru M je Cauchyjevo ali ustreza Cauchyjevem pogoju, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za neka $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$ velja:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Vsako konvergetno zaporedje je Cauchyjevo.

> *Dokaz:* naj bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergetno zaporedje in naj bo $\epsilon > 0$. Če je $a = \lim x_n$, potem obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a, x_n) < \epsilon/2$ za vsak $n \geq n_0$. Za neka $m, n \geq n_0$ je potem:
>
> $$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \epsilon \quad \square$$

Vsako Cauchyjevo zaporedje ni nujno konvergentno (v metričnih prostorih).

> *Primer:* množica $\mathbb{R} - \{0\}$ z običajno metriko ima zaporedje $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki je Cauchyjevo (prva trditev), saj je konvergetno v množici $\mathbb{R}$, vendar ni konvergetno v $\mathbb{R} - \{0\}$, ker nobena točka v tej množici ni njegova limita.

Poln prostor

Nek metrični prostor je poln, če je v njem vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno. Vsak kompakten prostor oziroma vsak metrični prostor v katerem je vsaka omejena množica *relativno* kompaktna, je poln.

Dokaz: naj prostor M ustreza pogoju (da je kompakten). Vzemimo neko Cauchyjevo zaporedje v njem (a_n). To zaporedje je omejeno, saj po Cauchyjevem pogoju obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $d(a_m, a_n) \leq 1$ za vsak par $m, n \geq k$. Naj bo D največje od števil $d(a_m, a_n)$ za $m, n \leq k$. Če je $m \leq k$ in $n \geq k$, velja:

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a_k) + d(a_k, a_n) \leq D + 1$$

Množica $A = \{a_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ ima torej premer $\leq D + 1$. Velja tudi, da je množica A relativno kompaktna, torej ima njeno zaporedje (a_n) vsaj eno stekališče $s \in M$. Dokazati moramo samo še, da je $s = \lim a_n$.

Naj $\exists \epsilon > 0$. Po Cauchyjevem pogoju obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $d(a_m, a_n) < \epsilon/2$ za neka $m, n \geq n_0$. Ker je s stekališče, je $d(s, a_m) < \epsilon/2$ vsaj za en $m \geq n_0$. To pomeni, da je potem za vsak $n \geq n_0$ potem:

$$d(s, a_n) \leq d(s, a_m) + d(a_m, a_n) < \epsilon \quad \square$$

Funkcije več realnih spremenljivk

Zveznost

Parcialna odvedljivost

Diferencial preslikavce iz Rn v Rmo

Jacobijeva matrika

Verižno pravilo

Višji parcialni odvodi

Taylorjeva formula

Izrek o inverzni in implicitni funkciji

Prosi in vezani ekstremi

Dvojni in mnogotermni integrali

Pogoj za eskistenco

Uvedba novih spremenljivk

Računanje in uporaba