Zapiski za izpit

Analiza 3 2024/25

Jan Panjan

2025-02-08

Contents

Zapiski so večinoma iz knjige "Metrični prostori, Jože Vrabec"

Metrični prostori

Definicija metrike

Naj bo $M \neq \emptyset$. Metrika na M je realna funkcija d dveh spremenljivk na M, ki ustreza pogojem:

a) $d(x, y) \geq 0$
b) $d(x, y) = 0 \implies x = y$
c) $d(x, y) = d(y, x)$
d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

V jeziku teorije množic je metrika preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Slika $d(x, y)$ je razdalja elementov x in y. Neenakost $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ treh točk $x, y, z \in M$ imenujemo **trikotniška neenenakost**. Iz te neenačbe velja tudi $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Dokaz iz lastnosti (d):

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ d(x,z) - d(y,z) &\leq d(x,y) \\ -(d(x,z) - d(y,z)) &\leq d(x,y) \\ \implies |d(x,z) - d(y,z)| &\leq d(x,y) \quad \square \end{aligned}$$

Definicija metričnega prostora

Množico $M \neq \emptyset$ skupaj z izbrano metriko d na M (torej par (M, d)) imenujemo **metrični prostor**. Če vzamemo neko drugo metriko d' je potem (M, d') nek drug metrični prostor.

Osnovni zgledi metričnega prostora so premice ($\mathbb{R}$), ravnine ($\mathbb{R}^2$) in prostori ($\mathbb{R}^3$) z običajno metriko, definirana:

$d(x, y) = |y - x|$ za $x, y \in \mathbb{R}$

$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)}$ za $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

podobno za $\mathbb{R}^3$ ...

Množice $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ so vektorski prostori, zato seštevamo in s skalarjem množimo po komponentah. Iz lastnosti $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ velja:

$$d(x, y) = d(0, y - x)$$

To pomeni, da je razdalja med točkama x in y enaka razdalji od izhodišča do vektorja $y - x$. Metrika za katero velja ta lastnost je popolnoma določena, če za vsako točko navedemo njeno razdaljo od točke 0. To razdaljo bomo v splošnih prostorih s to lastnostjo imenovali...

Norma

Naj bo X nek realen ali kompleksen vektorski prostor. **Norma** na X je funkcija $||.|| : X \to \mathbb{R}$, ki ustreza pogojem:

a) $||x|| \geq 0$
b) $||x|| = 0 \implies x = 0$
c) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Prostor skupaj z normo na njem imenujemo **normiran vektorski prostor** (torej $(X, ||.||)$). Tudi tu je lastnost (d) imenovana trikotniška neenakost in tudi iz nje lahko izpeljemo novo neenakost:

$$| \; ||x|| - ||y|| \; | \leq ||x - y||$$

Če je X normiran vektorski prostor, je s formulo $d(x, y) = ||y - x||$ definirana metrika na X. Iz formule sledi lastnost $||x|| = d(0, x)$, zato je formula indentična kot tista od prej (glej Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo za dokaz).

Torej *vsak normiran prostor je metrični prostor*. Prav tako so zgoraj omenjeni prostori $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ tudi normirani prostori. Norme v njih so definirane tako:

$$||x|| = \|x\|$$
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Očitno je da ustrezajo vsem pogojem, vendar je za $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ težje dokazati trikotniško neenakost. **Poglej si to!!!**

Pri vektorjih lahko računamo dolžine vektorjev s skalarnim produktom. Dolžina vektorja $\vec{v}$ je kvadratni koren skalarnega produkta $\vec{v} \cdot \vec{v}$. To bomo posplošili in pokazali, da vsak skalarni produkt na nekem vektorskem prostoru X porodi normo na X. Obstajajo tudi norme, ki ne izhajajo iz nobenega skalarnega produkta.

Skalarni produkt

Skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru X je funkcija $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$

b) $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$

d) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$

Realen vektorski prostor skupaj s skalarnim produktom na njem imenujemo **realen unitaren vektorski prostor**. Lastnost (c) se imenuje **linearnost v prvem faktorju**, lastnost (d) **simetričnost** (ki zagotavlja tudi linearnost v drugem faktorju) ter (a) in (b) **pozitivna definitnost**.

Skalarni produkt na realnem linearnem prostoru X je *pozitivno definiten bilinearen funkcional na X* Preprosto je definiran na prostorih $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$; tu je primer za $\mathbb{R}^3$:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Če je X unitaren prostor, je s formulo $||x|| : \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definirana norma na X. Zdaj so definirane zgornje funkcije norme na $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$
$$||x|| = \sqrt{\langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle}$$
$$||x|| = \sqrt{\langle x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 \rangle}$$

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačba

V vsakem unitarnem prostoru velja za poljubna vektorja x in y Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenakost, ki izgleda tako:

$$
\begin{aligned}
\|\langle x,y\rangle|^2 &\leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \\
\|\langle x,y\rangle| &\leq \langle x\rangle \cdot \langle y\rangle
\end{aligned}
$$

Neenakost je posplošitev znane neenakosti $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, ki velja za geometrične vektorje. V kolikor sta x in y linearno neodvisna, velja v zgornji neenačbi strogi neenačaj.

Note glede kompleksnih prostorov

Velja lastnost $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$. Skalarni produkt na kompleksnem prostoru tako ustreza pogojem (a), (b), (c) in namesto (d) tej lastnosti. Primer je naslednja lastnost, ki je komplementarno pogoju (c):

$$\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z,x\rangle + \bar{\mu}\langle z,y\rangle$$

To res velja s pomočjo pogojev (c) in (d) iz definicije skalarnega produkta in zgornje lastnosti.

$$
\begin{aligned}
\langle z, \lambda x + \mu y\rangle &= \overline{\langle \lambda x + \mu y, z\rangle} \\
&= \overline{\lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle} \\
&= \bar{\lambda}\overline{\langle x,z\rangle} + \bar{\mu}\overline{\langle y,z\rangle} \\
&= \bar{\lambda}\langle z,x\rangle + \bar{\mu}\langle z,y\rangle \quad \square
\end{aligned}
$$

Dokaz za Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo: če je $y = 0$, potem je neenakost gotovo pravilna in vektorja x in y sta tudi linearno odvisna ($|\langle x,0\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle 0,0\rangle = 0$). Privzamemo, da $y \neq 0$, zato velja $\langle y,y\rangle > 0$ po (a) in (b). Za poljubna skalarja λ in μ velja tedaj:

$$\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle = |\lambda|^2 \cdot \langle x,x\rangle + \lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle + \bar{\lambda}\mu\langle y,x\rangle + |\mu|^2\langle y,y\rangle$$

Zdaj naj bo $\lambda = \langle y,y\rangle$ in $\mu = -\langle x,y\rangle$. Upoštevamo, da je $\lambda = \bar{\lambda}$ in $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle$. Na desni strani enačbe dobimo zdaj:

$$
\begin{aligned}
\langle y,y\rangle^2 \cdot \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle \cdot |\langle x,y\rangle|^2 - \langle y,y\rangle \cdot |\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 \cdot \langle y,y\rangle \\
= \langle y,y\rangle \cdot \Big(\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle - |\langle x,y\rangle|^2\Big)
\end{aligned}
$$

Leva stran prve enakosti je nenegativna zaradi lastnosti (a). V primeru, da sta x y linearno odvisna je pozitivna, saj je $\lambda \neq 0 \implies \lambda x + \mu y \neq 0$, kar dokaže Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbo. $\square$

Dokaz trikotniške neenakosti

S pomočjo teh lastnosti lahko zdaj dokažemo lastnost (d) trikotniške neenakosti iz izreka o normi na unitarnem prostoru X. Iz definicije norme in lastnosti (c) iz definicije skalarnega produkta sledi:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\| &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + |\langle x,y\rangle| + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|x\|\cdot\|y\| + \|y\|\cdot\|x\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\|+\|y\|)^2 \quad \square
\end{aligned}
$$

Če sta x in y linearno odvisna velja po definiciji Cauchy-Schwarz-Bunjakovski neenačbe $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

Po tej lemi velja, da **norma v takem prostoru ne izhaja iz skalarnega produkta** in poda potreben pogoj za to, da je norma porojena s skalarnim produktom (torej, za tiste, ki to ne velja, so porojene iz skalarnega produkta?).

Prav tako velja, da v unitarnem prostoru **norma natanko določa skalarni produkt**. V poljubnem unitarnem prostoru nad poljem skalarjev $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ je:

$$
\langle x,y\rangle = \begin{cases} \frac{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}{4}; & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}{4} + \frac{\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)}{4}; & \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}
$$

Leva stran je skalarni produkt, na desni strani ga definira norma, right?

Paralelogramska identiteta

V poljubnem unitarnem prostoru velja za poljubna elementa x in y Paralelogramska identiteta:

$$
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)
$$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)
\end{aligned}
$$

V paralelogramski identiteti nastopa samo norma, zato ima smisel v nekem normiranem prostoru. Ne velja pa, da je v njem tudi *pravilna*. Spodaj je dokazana samo za primer, ko izhaja iz skalarnega produkta, toda obstajajo normirani prostori, kjer identiteta ne velja.

Iz zgornje trditve sledi, da **ti prostori niso unitarni** in da **njihove norme ne izjajo iz skalarnega produkta**. Ta trditev podaja novi pogoj za to, da je norma porojena s skalarnim produktom.

Ničelni skalarni produkt

Elementa x in y poljubnega unitarnega prostora X imenujemo **pravokotna** oziroma **ortogonalna**, če je $\langle x,y\rangle = 0$ in zato $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = 0$. Ta lastnost implicira obstoj…

Pitagorov izrek

Ker poljubna pravokotna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ležita na katetah pravokotnega trikotnita s hipotenuzo $\vec{a}+\vec{b}$, razlaga Pitagorov izrek zvezo med dolžinami teh vektorjev. Preko norme definirano naslednjo posplošitev:

Če sta x in y pravokotna vektorja poljubnega unitarnega prostora, velja $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dokaz: velja $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, zato:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \square\end{aligned}$$

Krogle v metričnih prostorih

Naj bo M metrični prostor ter točka $a \in M$ in $r > 0$. Ločimo naslednje množice točk:

$$\begin{aligned}&K(a,r) = K_M(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\} \text{ odprta krogla (točke se dotikajo roba krogle)} \\ &\bar{K}(a,r) = \bar{K}_M(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \le r\} \text{ zaprta krogla (točke se ne dotikajo roba)} \\ &S(a,r) = S_M(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) = r\} \text{ sfera (samo rob/površina krogle)}\end{aligned}$$

Vse imajo središče v točki a in polmer r ter spadajo v metrični prostor M.

Enotska krogla

Če poznamo eno kroglo nekega normiranega prostora X, poznamo vse krogle. To je prikazano z naslednjim primerom:

Za poljubni točki a in b normiranega prostora X in za poljubni pozitivni števili r in s je preslikava $f : X \to X$, definirana z $f(x) = (s/r)(x-a) + b$, bijekcija ter preslika

- a v b,
- $K(a,r)$ na $K(b,s)$,
- $\bar{K}(a,r)$ na $\bar{K}(b,s)$,
- $S(a,r)$ na $S(b,s)$.

Dokaz: Preslikava f je očitno inverzna, saj je bijekcija, zato imamo za poljuben $x \in X$ naslednje ekvivalence:

$$\begin{aligned}x \in S(a,r) &\iff \|x-a\| = r \\ &\iff \|(s/r)(x-a)\| = s \\ &\iff \|f(x) - b\| = s \\ &\iff f(x) \in S(b,s) \quad \square\end{aligned}$$

Podoben sklep velja za odprte in zaprte krogle. Ker ima f čisti "geometrični" pomen, sta si krogli $K(a,r)$ in $K(b,s)$ (in ostale množice) povsem podobni v geometričnem pomenu besede. Velja namreč, da je f sestavljena iz preslikave

- $x \mapsto x - a$ oziroma translacije prostora X za vektor $-a$
- $x \mapsto (s/r)x$ oziroma $(s/r)-$kratne povečave/pomanjšave prostora
- $x \mapsto x + b$ oziroma translacije prostora X za vektor b

Torej res poznamo vse krogle, če poznamo eno in lahko vedno vzamemo enostavno kroglo oziroma tisto "navadno" kroglo, da opišemo ostale. Krogli $K(0,1)$ rečemo **enotska krogla** (lahko je odprta, zaprta ali sfera). Ima izhodišče v točki 0 in polmer 1.

Vseeno v splošnem metričnem prostoru ne velja, da so krogle z istimi središči in različnimi polmeri lahko v čemerkoli podobni.

Diameter

Premer ali diameter neprazne podmnožice A metričnega prostora M je diam$A = sup\{d(a,b)\ |a,b \in A\}$. Množica A je omejena, če velja eno izmed:

- $A = \emptyset$
- $A < \infty$

Torej v kolikor množica A ni prazna, je omejena takrat, ko je njen diameter diam$A$ manjši od ∞. Ta definicija velja tudi za *nepravo podmnožico* $M \subset M$. Namesto, da je prostor M omejen, lahko rečemo, da je **njegova metrika omejena**, saj je zahteva diam$M < \infty$ identična z zahtevo po omejenosti realne funkcije d na množici $M \times M$.

> Po definiciji je diam$A = sup\{d(a,b)\ |a,b \in A\}$, torej supremum oziroma najmanjšo zgornjo mejo. To predstavlja največja možna razdalja znotraj A, kar je takrat, ko sta a in b čimbolj *oddaljena*, vendar sta omejena z elementi množice A. Največja razdalja je, ko je eden izmed njiju najmanjši element A, drugi pa največji možen. Torej je res funkcija d omejena na množici $A \times A$.

Velja, da so za poljubno podmnožico A poljubnega metričnega prostora M naslednje trditve ekvivalentne:

a) A je omejena
b) za nek $x \in M$ in nek $r > 0$ je $A \subset \bar{K}_M(x,r)$
c) za vsak $x \in M$ obstaja tak $r > 0$, da je $A \subset K_M(x,r)$

Rekli smo, da je $\bar{K}$ krogla z notranjostjo in robom oziroma zaprta krogla, medtem ko je K krogla brez roba oziroma odprta krogla. Lasnost (b) pove torej, da je A pomnožica neke zaprte krogle $\bar{K}(x,r)$, torej obstajata točno določena x in r, za katera to velja.

Po drugi strani govori lastnost (c) o tem, da ne glede na to kateri x vzamemo, za vsakega obstaja nek r, tako da je A zagotovo podmnožica odprte krogle $K(x,r)$.

Dokaz:

(a) $\implies$ (c): izberemo nek $x \in M$ in $b \in A$ ter označimo $r = 1 + d(x,b) + \text{diam}A$. Za neko poljubno točko $a \in A$ velja

$$\begin{aligned} d(x,a) &\leq d(x,b) + d(b,a) \quad \text{(trikotniška neenakost)} \\ &\leq d(x,b) + \text{diam}A \\ &< 1 + d(x,b) + \text{diam}A = r \end{aligned}$$

Torej je res $A \subset K_M(x,r) \quad \square$.

(b) $\Rightarrow (a)$: naj bo $A \subset \bar{K}_M(x,r)$. Za neki točki $a,b \in A$ velja:

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\ &\leq 2r \end{aligned}$$

zato je A $\leq 2r\ldots$ **idk why**.

(c) $\implies (b)$: očitno.

A je torej omejena z neko kroglo, bodisi zaprto ali odprto.

Podmnožice metričnih prostorov

Naj bo M nek metrični prostor in $A \subset M$ poljubna podmnožica. Točka $x \in M$ je za množico A:

- **notranja**, če obstaja tak $r > 0$, da je $K_r(x) \subseteq A$

- **zunanja**, če obstaja tak $r > 0$, da $K_r(x) \subseteq M - A = \overline{A}$
- **robna**, če za vsak $r > 0$ velja $K_r(x) \cap A \neq \emptyset$ in $K_r(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$

Množico vseh notranjih točk množice A imenujemo **notranjost** množice A in jo označevali z $\mathrm{Int}_M(A)$ ali $\mathrm{Int}_M A$.

Množico vseh zunanjih točk množice A imenujemo **zunanjost** množice A in jo označevali z $\mathrm{Ext}_M(A)$ ali $\mathrm{Ext}_M A$.

Množico vseh robnih točk množice A imenujemo **rob** množice A in jo označevali z $b(A)$.

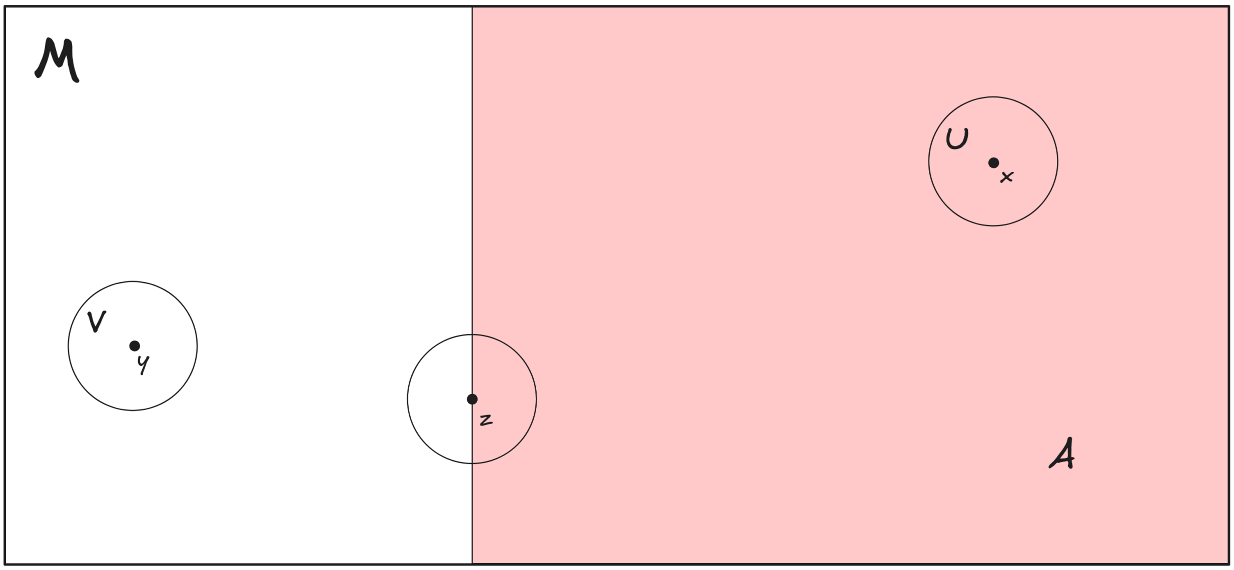

Figure 1: podmnožice

Zveznost metričnih prostorov

Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora. Preslikava $f : M \to M'$ je zvezna v točki $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$d'(f(a), f(b)) < \epsilon \implies d'(a, x) < \delta$$

Preslikava f je **zvezna na** M, če je zvezna v vsaki točki M. Množico vseh takih preslikav označimo s $C(M, M')$.

Če označimo $K = K_M$ in $K' = K_{M'}$, lahko pogoj za zveznost v točki a opišemo tudi s pomočjo krogel. Za vsak $\epsilon > 0$ mora obstajati tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in K(a, \delta)$ leži $f(x)$ v $K'(f(a), \epsilon)$, oziroma $f(K(a, \delta)) \subset K'(f(a), \epsilon)$.

Enakomerna zveznost

Zgornja preslikava f je **enakomerno zvezna** na podprostoru $N \subset M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ za vsak par točk $x, y \in N$, ki ustrezata pogoju $d(x, y) < \delta$.

V primeru, da je preslikava enakomerno zvezna na vsem prostoru M, bomo rekli, da je enakomerno zvezna.

Lipschitzov pogoj za enakomerno zveznost

Vsaka preslikava, ki zadošča Lipschitzovemu pogoju, je enakomerno zvezna. Lipschitzovemu pogoju ustreza, če obstaja tak $t \geq 0$, da za nek par točk $x, y \in M$ velja *ocena* $d'(f(x), f(y)) \leq t \cdot d(x, y)$.

Pogoj za t je ekvivalenten zahtevi, da je t zgornja meja množice

$$E = \{\frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)} \ |x, y \in M, x \neq y\}$$

Preslikava je Lipschitzova preslikava natanko tedaj, ko je množica E navzgor omejena. Najmanjše med števili t oziroma $\sup E$ bomo imenovali *raztezni koeficient preslikave* f.

Lastnosti zveznih preslikav

Osnovni zgledi zveznih in enakomerno zveznih preslikav so zvezne in enakomerno zvezne realne funkcije ene spremenljivke. Vendar to ne velja nujno za preslikave na metrčnih prostorih. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval, ki ga vzamemo za definicijsko območje. Vsaka injektivna zvezna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je

- striktno monotona,
- I bijektivno preslika spet na nek interval $J \subset \mathbb{R}$,
- njena inverzna funkcija $f^{-1} : J \to I$ je avtomatično zvezna (bijekcija).

Za vsako zvezno bijektivno preslikavo metričnih prostorov ne velja, da je inverzna preslikava zvezna, kar ne velja tudi za navadne funkcije, če definicijsko območje ni interval.

Primer: Funkcija $f : [-1, 0) \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ je definirana tako:

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; & x \in [-1, 0) \\ x - 1 \ ; & x \in [1, 2] \end{cases}$$

f je zvezna in preslika interval $[-1, 0) \cup [1, 2]$ bijektivno na interval $[-1, 1]$. Inverzna funkcija $f^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 0) \cup [1, 2]$ pa ni zvezna v točki 0!

Naj bo M nek metrični prostor. Če izberemo poljubno točko $a \in M$, lahko definiramo realno funkcijo na M s predpisom $x \mapsto d(a, x)$. To funkcijo je smiselno označiti z $d(a, \ )$ ali $d(a, -)$, saj njeno vrednost v poljubni točki $x \in M$ dobimo tako, da x postavimo na *prazno* mesto v predpisu.

> Podobno kot označimo s $\sqrt{\ }$ funkcijo, katere vrednost pri nekem $x \geq 0$ dobimo tako, da vstavimo x pod znak $\sqrt{\ }$, torej $\sqrt{x}$.

Za vsak $a \in M$ je funkcija $d(a, -) : M \to \mathbb{R}$ enakomerno zvezna. Druga trikotniška neenakost, $|d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y)$ (glej #Norma), nam pove, da je preslikava Lipschitzova. Prav tako je za nek normiran prostor X norma $\| \ \| = d(0, \ ) : X \to \mathbb{R}$ enakomerno zvezna funkcija na X. Funkcija $d(a, -)$ ima naravno posplošitev, to je **razdalja od dane podmnožice v** M.

Razdalja točke od množice

Naj bo M nek metrični prostor ter A in B neki njegovi neprazni podmnožici. *Razdalja točke $x \in M$ od množice A* je definirana kot:

$$d(x, A) = d(A, x) = \inf\{d(x, a) \ |a \in A\}$$

Razdalja množic A in B je definirana kot:

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\} \\
&= \inf\{d(a,B) \mid a \in A\} \\
&= \inf\{d(A,b) \mid b \in B\}
\end{aligned}
$$

Torej najmanjši možni razdalji med nekima točkama iz obeh množic.

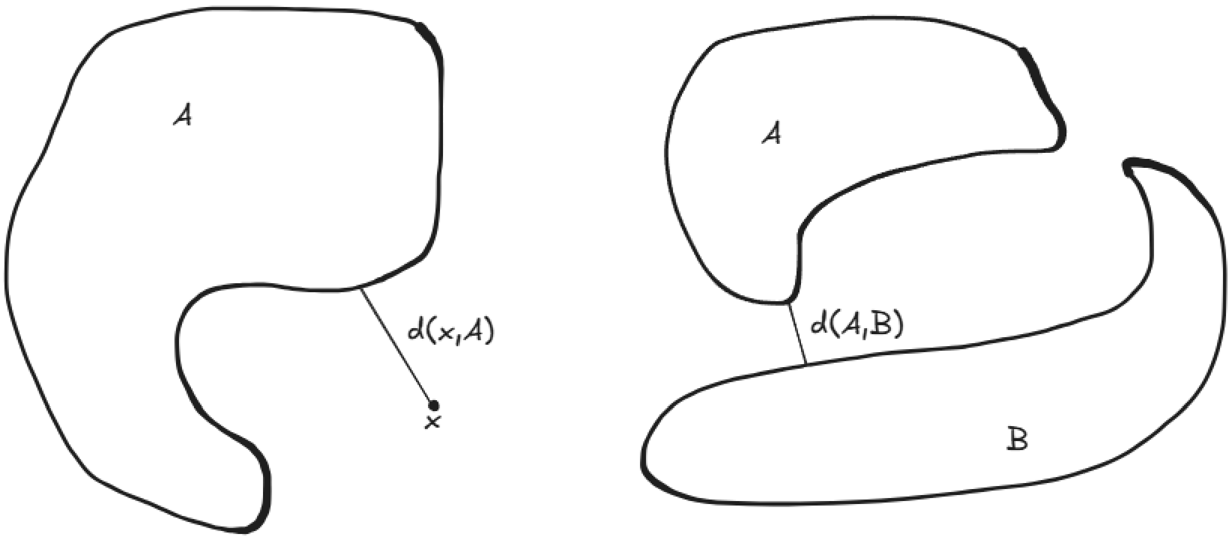

Figure 2: razdalja-od-množice

Za poljuben metrični prostor M in poljubno neprazno podmnožico $A \subset M$ je funkcija $d(-,A) = d(\ ,A) : M \to \mathbb{R}$, definirana z $x \mapsto d(x,A)$, enakomerno zvezna na M.

Dokaz: vzemimo neki točki $x, y \in M$. Za vsak $a \in A$ velja:

$$
\begin{aligned}
d(x,A) &\leq d(x,a) \\
&\leq d(x,y) + d(y,a) \quad \text{(trikotniška neenakost)} \\
d(x,a) - d(x,y) &\leq d(y,a)
\end{aligned}
$$

Pomeni, da je $d(x,a) - d(x,y)$ spodnja meja za množico $\{d(y,a) | a \in A\}$ in obratno velja tudi:

$$
\begin{aligned}
&d(x,a) - d(x,y) \leq d(y,a) \\
\implies &d(x,a) - d(y,a) \leq d(x,y)
\end{aligned}
$$

Če zamenjamo vlogi točk x in y, dobimo tudi:

$$
d(y,a) - d(x,a) \leq d(y,x)
$$

Obe neenačbi skupaj nam omogočata zapis:

$$
|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)
$$

To pomeni, da funkcija $d(-,A)$ zadošča Lipschitzovemu pogoju, torej je enakomerno zvezna. $\square$

Zaporedja v metričnih prostorih

Splošna definicija konvergence točk na številski premici lahko posplošimo na zaporedja točk v metričnem prostoru. Zaporedje točk $a_1, a_2, \ldots$ prostora M konvergira k točki $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako naravno število n_0, da je vsak člen a_n v zaporedju, pri katerem je $n \geq n_0$, oddaljen od a za manj kot ϵ.

Bolj *uradno*: naj $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množico vseh naravnih števil. (Neskončno) zaporedje v množici M, ali zaporedje točk množice M, je neka preslikava $N \to M$. Vrednost funkcije $x : N \to M$ pri nekem naravnem številu n označimo z x_n (namesto z $x(n)$). Samo za zaporedje uporabimo namesto prejšnje *funkcijske* oznake eno izmed naslednjih:

- $(x_1, x_2, \ldots)$
- $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ali (x_n)

Naj bo torej $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje točk metričnega prostora M. To zaporedje **konvergira** k točki $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$d(a, x_n) < \epsilon \iff x_n \in K_M(a, \epsilon)$$

Zaporedje ki konvergira h neki točki je konvergentno. Če x_n konvergira k a, pravimo, da je a **limita zaporedja** (x_n) in pišemo:

$$a = \lim x_n \iff a = \lim_{n\to\infty} x_n \iff x_n \to a$$

Očitno je, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti a natanko tedaj, ko številsko zaporedje $(d(a, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0.

$a = \lim_{n\to\infty} x_n \implies 0 = \lim_{x_n \to a} d(a, x_n)$

Tudi pojem limite lahko posplošimo na preslikave nad metričnimi prostori.

Limita funkcije v metričnem prostoru

Naj bosta M, N metrična prostora, $a \in M$ in f preslikava iz M v N. Točka $b \in N$ je **limita preslikave** f pri a:

$$b = \lim_{x\to a} f(x)$$

če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \epsilon \ ; \ \forall x \in M - \{a\}$$

Preden nadaljujem, je tu še definicija okolice.

Okolica točke v metričnem prostoru

Naj bo M metrični prostor in $a \in M$. **Okolica** točke a v prostoru M je vsaka množica $U \subset M$, ki vsebuje kako kroglo $K_M(a, r)$ v M s središčem v a.

Vsaka krogla $K_M(a, r)$ (ali $\bar{K}_M(a, r)$) je torej že okolica točke a. Vsaka množica v M, ki tudi vsebuje kako okolico točke a, je tudi sama okolica točke a.

Naj bosta M in N metrična prostora ter $a \in M$ in $f : M \to N$ neka preslikava. Naslednje trditve so ekvivalentne:

a) Preslikava f je zvezna v točki a.
b) Za vsako okolico V točke $f(a) \in N$ obstaja taka okolica U točke $a \in M$, da velja $f(U) = M$.
c) Za vsako okolico V točke $f(a)$ je praslika $f^{-1}(V)$ okočica točke a.

Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metričnem prostoru M konvergira k točki $a \in M$ natanko tedaj, ko za vsako okolico U od točke a obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x_n \in U$ za vsak $n \geq n_0$.

Vsako zaporedje v poljubnem metričnem prostoru ima kvečjemu **eno limito**. Če bi imelo neko zaporedje (x_n) v metričnem prostoru M dve različni limiti $a, b \in M$, bi za pozitivno število $\epsilon = d(a, b)$ morali najti tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da bi bili za vsak $n \geq n_0$ izpolnjeni neenačbi

$$d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{in} \quad d(b, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Od tod dobimo protislovno neenačbo

$$\epsilon = d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square$$

Naj bosta N, M poljubna metrična prostora. preslikava $f : M \to N$ je zvezna v točki $a \in M$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v M z limito a konvergira zaporedje $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ proti $f(a)$.

> *Dokaz:* naj bo preslikava f zvezna v točki a in naj vanjo konvergira zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v M. Vzamimo poljubno okolico $V \subset N$ od točke $f(a)$. Po definiciji velja, da je $f(U) \subset V$. Ker je $a = \lim x_n$, lahko najdemo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x_n \in U$ za vsak $n \geq n_0$. Za vsak tak n je potem $f(x_n) \in U \subset V$, kar implicira $f(a) = lim f(x_n)$. $\square$

Posledično, če je X nek normiran prostor nad poljem skalarjev $\mathbb{F} = \mathbb{R} \land \mathbb{C}$ in sta $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neki konvergentni zaporedji v X ter $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neko konvergetno zaporedje v F, potem sta konvergetni tudi zaporedji:

$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{in} \quad (\lambda_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

in velja:

$$\lim(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lim x_n) + (\lim y_n)$$

$$\lim(\lambda_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lim \lambda_n) \cdot (\lim x_n)$$

Naj bosta M' in M'' neka metrična prostora. Zaporedje $(x_n = x'_n, x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $M = M' \times M''$ konvergira k točki $a = (a', a'') \in M$ natanko tedaj, ko velja:

$$a' = \lim x'_n \in M'$$
$$a'' = \lim x''_n \in M''$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
a = \lim x_n &\iff 0 = \lim d(a, x_n) \\
&\iff 0 = \lim \left(\max\{d(a', x'_n), d(a'', x''_n)\}\right) \\
&\iff 0 = \lim d(a', x'_n) \quad \land \quad 0 = \lim d(a'', x''_n) \\
&\iff a' = \lim x'_n \qquad a'' = \lim x''_n \quad \square
\end{aligned}$$

Dokaz: naj bo $\lim x_n = a$ in $\lim y_n = b$. Po zgornjem dokazu sledi $\lim(x_n, y_n) = (a, b)$ v $X \times X$. Ker je seštevanje zvezna preslikava iz $X \times X$ v X, sledi $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Podobno dokažemo ostali dve trditvi.

Podzaporedje

Naj bo $(x_1, x_2, \dots)$ zaporedje elementov neke množice M. **Podzaporedje** tega zaporedja je vsako zaporedje oblike $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$, kjer je $(n_1, n_2, \dots)$ strogo naraščujoče zaporedje naravnih števil.

Ker je zaporedje v metričnih prostorih neka funkcija $N \to M$, definiramo podzaporedje zaporedja kot $x : N \to M$ je kompozitum $x \circ n : N \to M$, kjer je $n : N \to N$ neka strogo naraščujoča funkcija.

> Da dobimo to podzaporedje, moramo za n vzeti funkcijo, ki ima pri 1 vrednost n_1, 2 vrednost n_2, $\dots$

Če ima zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metričnem prostoru limito a, tudi vsako njegovo podzaporedje konvergira v a.

Stekališče zaporedja

Naj bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v metričnem prostoru M. Točka $a \in M$ je **stekališče tega zaporedja**, če vsaka okolica te točke vsebuje neskončno členov tega zaporedja (če je za vsak $\epsilon > 0$ izpolnjena neenačba $d(a, x_n) < \epsilon$ pri neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$).

Zaporedje mora imeti več stekališč (tudi neskončno mnogo). Če je zaporedje x_n konvergetno, je $\lim x_n$ njegovo **edino stekališče**. Točka $s \in M$ pa je stekališče zaporedja x_n natanko tedaj, ko neko njegovo podzaporedje konvergira proti s.

Odprte in zaprte množice

Kompaktnost in povezanost

Cauchy-jeva zaporedja in polni prostori

Funkcije več realnih spremenljivk

Zveznost

Parcialna odvedljivost

Diferencial preslikavce iz Rn v Rmo

Jacobijeva matrika

Verižno pravilo

Višji parcialni odvodi

Taylorjeva formula

Izrek o inverzni in implicitni funkciji

Prosi in vezani ekstremi

Dvojni in mnogotermni integrali

Pogoj za eskistenco

Uvedba novih spremenljivk

Računanje in uporaba