psa-teoretična-01

1. naloga

1. Naslednje funkcije razvrsti v **nepadajočem vrstnem redu** glede na **asimptotično rast** (veliki O).

- $f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$
- $f_2(n) = 2^{1000000n}$
- $f_3(n) = \binom{n}{2}$
- $f_4(n) = n\sqrt{n}$

Primer: $f(n) = n$ raste asimptotično počasneje kot $g(n) = n^2$. Z drugimi besedami, $f(n) \in O(g(n))$, toda $g(n) \notin O(f(n))$.

$f_1(n)$

$f_1(n)$ je konstantna funkcija, saj $2^{2^{1000000}}$ ni odvisno od n, zaradi česar velja

$$f_1(n) \in O(1) \iff f_1(n) = O(1)$$

$f_2(n)$

Po pravilu $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$ velja:

$$f_2(n) = 2^{1000000n} = (2^{1000000})^n = (2^n)^{1000000}$$

Velja, da funkcija raste tako hitro, kot raste n. To pomeni, da $(2^n)^{1000000}$ raste hitreje kot $(2^n)^{99999}$ in ta počasneje kot 99998, itn.

To vodi do tega, da funkcija $f_2(n)$ raste vsaj tako hitro, kot 2^n, torej:

$$f_2(n) = O(2^n)$$

$f_3(n)$

$f_3(n) = \binom{n}{2}$ lahko razvijemo po enačbi:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$\implies \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$$

$$= \frac{n(n-1)\,\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,\cdot 2!}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

Torej $f_3(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ in velja naprej:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$O-$notacija opisuje zgornjo mejo asimptotičnega obnašasnja funkcij - kako se funkcija obnaša, ko n raste - funkcija ne raste hitreje, kot največji člen v enačbi.

V naši enačbi je največji člen $n^2/2$, saj $n^2 = n \cdot n = 2n > n$. Funkcija ne raste hitreje kot n^2, zato je to zgornja meja in velja, da je asimptotična rast funkcije:

$$f_3(n) = O(n^c); \quad c \geq 2$$

za vsak $c \geq 2$, oziroma $O(n^2)$.

$f_4(n)$

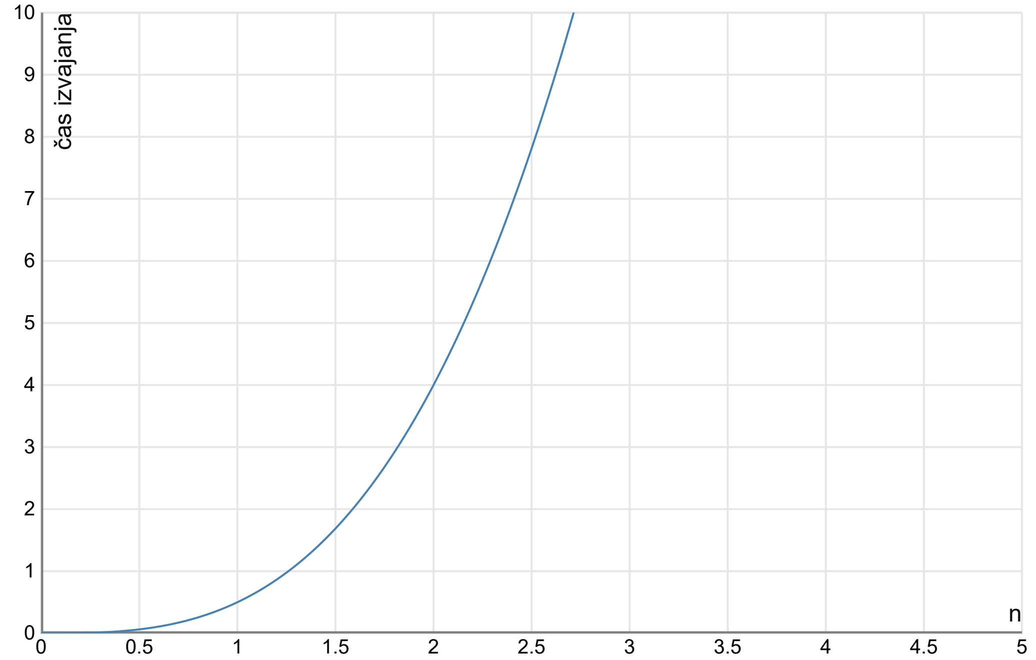
Če preuredimo zapis funkcije:

$$f_4(n) = n\sqrt{n} = n^1 \cdot n^{1/2}$$

Po pravilu $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ velja:

$$n^1 \cdot n^{1/2} = n^{1+1/2} = n^{3/2}$$

Funkcija grafično izgleda tako:



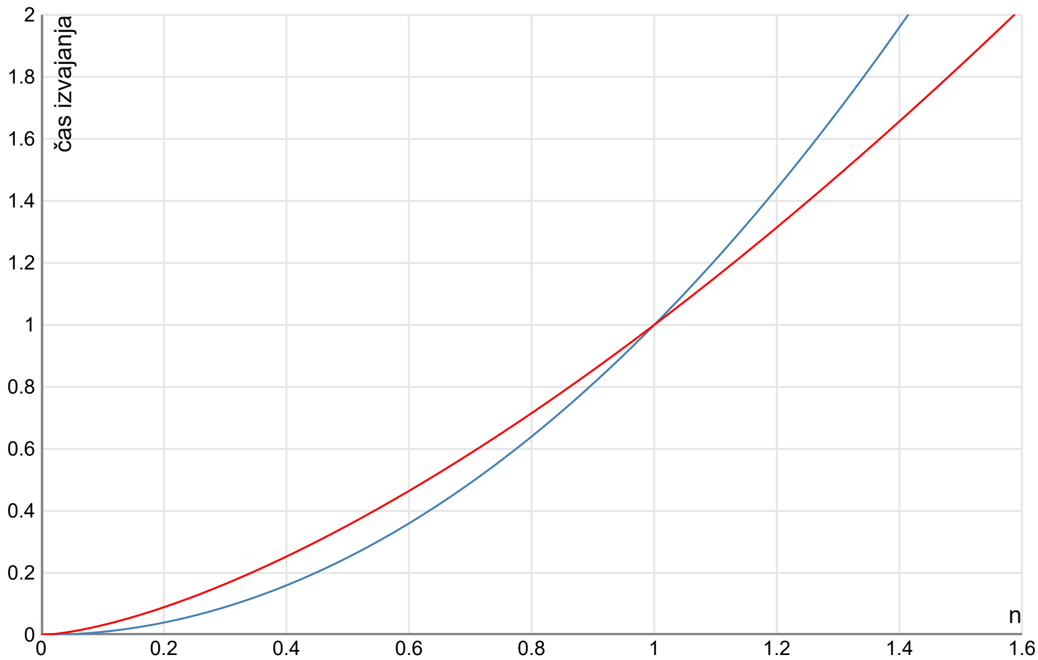
Podobno kot prej rečemo, da funkcija ne raste hitreje kot člen $n^{3/2}$, torej

$$f_4(n) = O(n^c); \quad c \geq \frac{3}{2}$$

Katera od f_3 in f_4 ima večjo asimptotično rast?

$f_3 = O(n^2)$ raste hitreje kot $f_4 = O(n^{3/2})$, saj $n^{3/2} = n^{1.5}$ raste hitreje kot $n_1 1$, a počasneje kot n^2 (glede na primer iz navodil).

Grafično predstavljeno (modra = f_3, rdeča = f_4):



Nepadajoči vrstni red funkcij glede na njihove asimptotične rasti

$$O(1) < O(n^{3/2}) < O(n^2) < O(2^n) \implies f_1 < f_4 < f_3 < f_2$$

---

2. Z uporabo definicije velikega O pokaži $n^{1+0,001} \notin O(n)$.

2. naloga