Statistika

7. predavanje

Barbara Boldin

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije
Univerza na Primorskem

Intervalsko ocenjevanje in testiranje statističnih domnev

Naučili smo se, kako s slučajnim vzorčenjem dobimo:

- nepristransko oceno za populacijsko povprečje μ in
- nepristransko oceno za varianco populacije σ^2.

Danes bomo spoznali **intervale zaupanja** in **preizkušanje statističnih domnev o populacijskem povprečju** μ v dveh primerih:

- ko je σ poznan (**Z-test**) in
- ko σ ni poznan (**t-test**)

Pri tem privzemimo, da (i) je vzorčenje naključno in vsakič sledi istim verjetnostnim zakonom in (ii) da je porazdelitev izbrane slučajne spremenljivke približno normalna. Predpostavka o normalni porazdelitvi je stroga, izkaže pa se, da so metode za test povprečja dokaj robustne (tu nam pomaga centralni limitni izrek).

Z-test : preizkušanje domnev o μ pri znanem σ

Denimo, da poznamo standardni odklon σ obravnavane populacije, na podlagi naključnega vzorca pa želimo preizkusiti domnevo, da je populacijsko povprečje za preučevano slučajno spremenljivko enako μ^*:

H_0 : $\mu = \mu^*$

H_0 imenujemo **ničelna domneva**.

Naj bo n velikost vzorca ter $\bar{x}$ povprečje naključnega vzorca. Izračunamo vrednost testne statistike

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

Če $\bar{x}$ "preveč" odstopa od μ^* (t.j. testna statistika se preveč oddalji od 0), potem H_0 zavrnemo. Kaj pomeni "preveč" je odvisno od

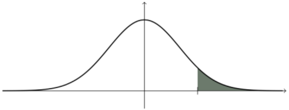
- **alternativne hipoteze** in
- **stopnje značilnosti** α

Test se imenuje Z-test, ker ima testna statistika v primeru veljavnosti ničelne hipoteze približno standardno normalno porazdelitev in zato izračunano vrednost primerjamo s kvantili te porazdelitve.

Ničelno hipotezo testiramo proti eni od treh **alternativnih hipotez**:

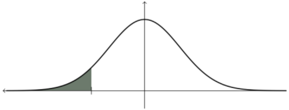
- $H_1^+ : \mu > \mu^*$

  Pri enostranski alternativni hipotezi H_1^+ ničelno hipotezo zavrnemo proti H_1^+, če testna statistika odstopa preveč v desno (siva regija)



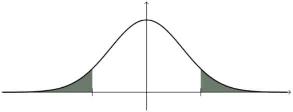
- $H_1^- : \mu < \mu^*$

  Pri enostranski alternativni hipotezi H_1^- ničelno hipotezo zavrnemo proti H_1^-, če testna statistika odstopa preveč v levo (siva regija)



- $H_1 : \mu \neq \mu^*$

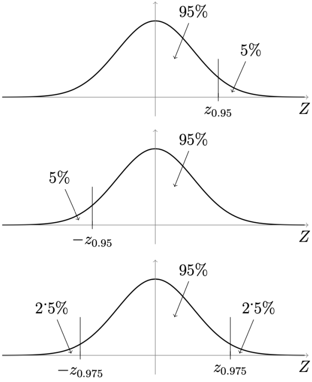
  Pri dvostranski alternativni hipotezi H_0 zavrnemo v korist H_1, če testna statistika preveč odstopa (v katerokoli smer; siva regija)



Naj z_p označuje p-kvantil standardne normalne slučajne spremenljivke. **Stopnja značilnosti** α ($0 < \alpha < 1$) določa prag zavrnitve H_0.

Če je denimo $\alpha = 0.05$, potem hipotezo H_0 zavrnemo (glej tabelo za $N(0,1)$)

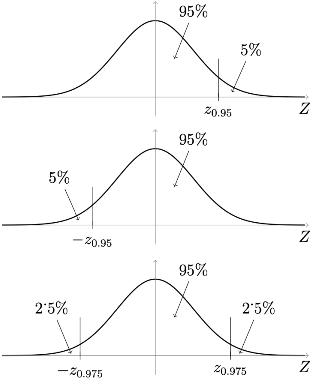
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{0.95} = 1.65$
- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{0.95} = -1.65$
- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{0.975} = 1.96$



Naj z_p označuje p-kvantil standardne normalne slučajne spremenljivke.
Stopnja značilnosti α $(0 < \alpha < 1)$ določa prag zavrnitve H_0.

Če je denimo $\alpha = 0.05$, potem hipotezo H_0 zavrnemo (glej tabelo za $N(0, 1)$)

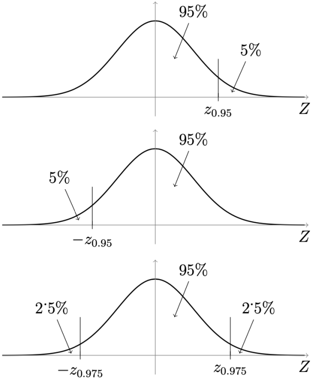
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{0.95} = 1.65$
- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{0.95} = -1.65$
- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{0.975} = 1.96$



Naj z_p označuje p-kvantil standardne normalne slučajne spremenljivke. **Stopnja značilnosti** α $(0 < \alpha < 1)$ določa prag zavrnitve H_0.

Če je denimo $\alpha = 0.05$, potem hipotezo H_0 zavrnemo (glej tabelo za $N(0,1)$)

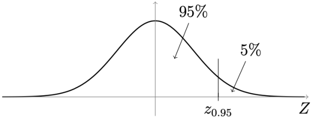
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{0.95} = 1.65$
- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{0.95} = -1.65$
- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{0.975} = 1.96$



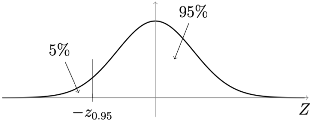
Naj z_p označuje p-kvantil standardne normalne slučajne spremenljivke. **Stopnja značilnosti** α $(0 < \alpha < 1)$ določa prag zavrnitve H_0.

Če je denimo $\alpha = 0.05$, potem hipotezo H_0 zavrnemo (glej tabelo za $N(0,1)$)

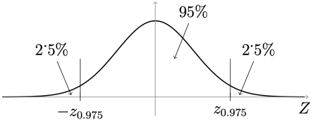
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{0.95} = 1.65$



- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{0.95} = -1.65$

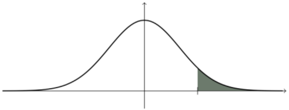


- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{0.975} = 1.96$

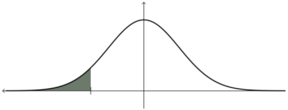


Bolj splošno: pri stopnji značilnosti α ničelno hipotezo H_0 zavrnemo

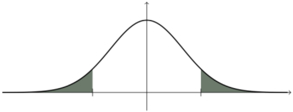
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{1-\alpha}$



- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{1-\alpha}$

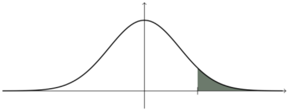


- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{1-\alpha/2}$

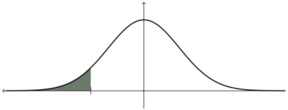


Bolj splošno: pri stopnji značilnosti α ničelno hipotezo H_0 zavrnemo

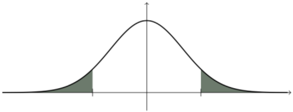
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{1-\alpha}$



- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{1-\alpha}$

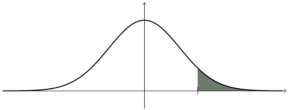


- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{1-\alpha/2}$

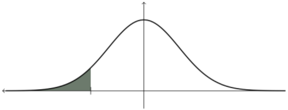


Bolj splošno: pri stopnji značilnosti α ničelno hipotezo H_0 zavrnemo

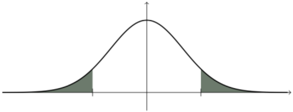
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{1-\alpha}$



- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{1-\alpha}$

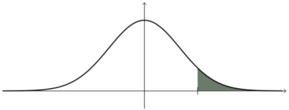


- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{1-\alpha/2}$

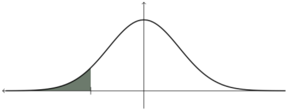


Bolj splošno: pri stopnji značilnosti α ničelno hipotezo H_0 zavrnemo

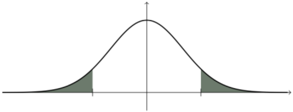
- v korist alternativne hipoteze H_1^+ kadar $Z > z_{1-\alpha}$



- v korist alternativne hipoteze H_1^- kadar $Z < -z_{1-\alpha}$



- v korist alternativne hipoteze H_1 kadar $|Z| > z_{1-\alpha/2}$



Primer. Višina štiriletnih deklic je normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ in standardnim odklonom $\sigma = 5$ cm. Naključno izbran vzorec devetih deklic nam da višine:

$$101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95.$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testirajmo ničelno hipotezo

$H_0 : \mu = 100$ cm

Za ta vzorec dobimo $\bar{x} = 97$, torej je testna statistika

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{97 - 100}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = -1.8.$$

Kaj vzamemo za alternativno domnevo?

- H_0 najprej testirajmo proti dvostranski alternativni domnevi $H_1 : \mu \neq 100$ cm.
  Prag zavrnitve H_0 proti H_1 je $z_{0.975} = 1.96$. Ker $|Z| < 1.96$, ničelne hipoteze ne zavrnemo. Rečemo, da **odstopanja niso statistično značilna.**

Primer. Višina štiriletnih deklic je normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ in standardnim odklonom $\sigma = 5$ cm. Naključno izbran vzorec devetih deklic nam da višine:

$$101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95.$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testirajmo ničelno hipotezo

$H_0 : \mu = 100$ cm

Za ta vzorec dobimo $\bar{x} = 97$, torej je testna statistika

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{97 - 100}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = -1.8.$$

Kaj vzamemo za alternativno domnevo?

- H_0 najprej testirajmo proti dvostranski alternativni domnevi $H_1 : \mu \neq 100$ cm.
  Prag zavrnitve H_0 proti H_1 je $z_{0.975} = 1.96$. Ker $|Z| < 1.96$, ničelne hipoteze ne zavrnemo. Rečemo, da **odstopanja niso statistično značilna**.

Primer. Višina štiriletnih deklic je normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ in standardnim odklonom $\sigma = 5$ cm. Naključno izbran vzorec devetih deklic nam da višine:

$$101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95.$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testirajmo ničelno hipotezo

$H_0 : \mu = 100$ cm

Za ta vzorec dobimo $\bar{x} = 97$, torej je testna statistika

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{97 - 100}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = -1.8.$$

Kaj vzamemo za alternativno domnevo?

- H_0 najprej testirajmo proti dvostranski alternativni domnevi $H_1 : \mu \neq 100$ cm.
  Prag zavrnitve H_0 proti H_1 je $z_{0.975} = 1.96$. Ker $|Z| < 1.96$, ničelne hipoteze ne zavrnemo. Rečemo, da **odstopanja niso statistično značilna**.

- Ničelno domnevo sedaj testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^+ : \mu > 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $z_{0.95} = 1.65$, kar pomeni da H_0 seveda ne zavrnemo (odstopanja v desno ne morejo biti statistično značilna, če povprečje od ničelne hipoteze odstopa v levo).

- Ničelno domnevo testirajmo še proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.95} = -1.65$, kar pomeni da H_0 zavrnemo v korist alternativne hipoteze H_1^-. **Odstopanja so statistično značilna.**

- Vzemimo sedaj $\alpha = 0.01$ in ničelno domnevo testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.99} = -2.33$, kar pomeni da H_0 ne moremo zavrniti v korist H_1^-.

- Ničelno domnevo sedaj testirajmo proti alternativni domnevi $H_1^+ : \mu > 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $z_{0.95} = 1.65$, kar pomeni da H_0 seveda ne zavrnemo (odstopanja v desno ne morejo biti statistično značilna, če povprečje od ničelne hipoteze odstopa v levo).

- Ničelno domnevo testirajmo še proti alternativni domnevi $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.95} = -1.65$, kar pomeni da H_0 zavrnemo v korist alternativne hipoteze H_1^-. **Odstopanja so statistično značilna.**

- Vzemimo sedaj $\alpha = 0.01$ in ničelno domnevo testirajmo proti alternativni domnevi $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.99} = -2.33$, kar pomeni da H_0 ne moremo zavrniti v korist H_1^-.

- Ničelno domnevo sedaj testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^+ : \mu > 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $z_{0.95} = 1.65$, kar pomeni da H_0 seveda ne zavrnemo (odstopanja v desno ne morejo biti statistično značilna, če povprečje od ničelne hipoteze odstopa v levo).

- Ničelno domnevo testirajmo še proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.95} = -1.65$, kar pomeni da H_0 zavrnemo v korist alternativne hipoteze H_1^-. **Odstopanja so statistično značilna.**

- Vzemimo sedaj $\alpha = 0.01$ in ničelno domnevo testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.99} = -2.33$, kar pomeni da H_0 ne moremo zavrniti v korist H_1^-.

- Ničelno domnevo sedaj testirajmo proti alternativni domnevi $H_1^+ : \mu > 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $z_{0.95} = 1.65$, kar pomeni da H_0 seveda ne zavrnemo (odstopanja v desno ne morejo biti statistično značilna, če povprečje od ničelne hipoteze odstopa v levo).

- Ničelno domnevo testirajmo še proti alternativni domnevi $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.95} = -1.65$, kar pomeni da H_0 zavrnemo v korist alternativne hipoteze H_1^-. **Odstopanja so statistično značilna.**

- Vzemimo sedaj $\alpha = 0.01$ in ničelno domnevo testirajmo proti alternativni domnevi $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.99} = -2.33$, kar pomeni da H_0 ne moremo zavrniti v korist H_1^-.

- Ničelno domnevo sedaj testirajmo proti alternativni domnevi $H_1^+ : \mu > 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $z_{0.95} = 1.65$, kar pomeni da H_0 seveda ne zavrnemo (odstopanja v desno ne morejo biti statistično značilna, če povprečje od ničelne hipoteze odstopa v levo).

- Ničelno domnevo testirajmo še proti alternativni domnevi $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.95} = -1.65$, kar pomeni da H_0 zavrnemo v korist alternativne hipoteze H_1^-. **Odstopanja so statistično značilna.**

- Vzemimo sedaj $\alpha = 0.01$ in ničelno domnevo testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.99} = -2.33$, kar pomeni da H_0 ne moremo zavrniti v korist H_1^-.

- Ničelno domnevo sedaj testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^+ : \mu > 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $z_{0.95} = 1.65$, kar pomeni da H_0 seveda ne zavrnemo (odstopanja v desno ne morejo biti statistično značilna, če povprečje od ničelne hipoteze odstopa v levo).

- Ničelno domnevo testirajmo še proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.95} = -1.65$, kar pomeni da H_0 zavrnemo v korist alternativne hipoteze H_1^-. **Odstopanja so statistično značilna.**

- Vzemimo sedaj $\alpha = 0.01$ in ničelno domnevo testirajmo proti alternativni domnevi
  $H_1^- : \mu < 100$ cm.

  Testno statistiko moramo sedaj primerjati z vrednostjo $-z_{0.99} = -2.33$, kar pomeni da H_0 ne moremo zavrniti v korist H_1^-.

Interval zaupanja

Interval zaupanja je intervalna ocena nekega parametra. Interval zaupanja za μ pri dani **stopnji zaupanja** $0 < \beta < 1$ je tak interval (μ_{min}, μ_{max}), da velja

$$P(\mu_{min} < \mu < \mu_{max}) = \beta.$$

Za dan β je interval zaupanja za μ

$$\boxed{(\mu_{min}, \mu_{max}) = \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2}\right)}$$

Interval zaupanja je slučajni interval, vezan na vzorec!

Najbolj pogosto je $\beta = 0.95$ ali $\beta = 0.99$. Tedaj govorimo o 95% oz. 99% intervalu zaupanja. Za dan interval zaupanja ne vemo, ali je parameter μ vsebovan v njem ali ne. Lahko pa trdimo, da je z verjetnostjo β ta interval eden od tistih, ki vsebujejo μ.

Primer. Za prejšnji primer je za $\beta = 0.95$

$$\mu_{min} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975} = 97 - \frac{5}{3} 1.96 = 93.73$$

$$\mu_{max} = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975} = 97 + \frac{5}{3} 1.96 = 100.27.$$

torej je 95% interval zaupanja za μ interval $(93.73, 100.27)$.

Primer. Za prejšnji primer je za $\beta = 0.95$

$$\mu_{min} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975} = 97 - \frac{5}{3} 1.96 = 93.73$$

$$\mu_{max} = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.975} = 97 + \frac{5}{3} 1.96 = 100.27.$$

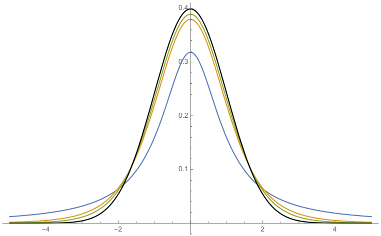
torej je 95% interval zaupanja za μ interval $(93.73, 100.27)$.

t-test: preizkušanje domnev o μ kadar σ ni poznan

Če standardni odklon ni znan, potem σ nadomestimo z njegovo oceno, *s*. Kvantile standardne normalne porazdelitve nadomestimo s kvantili ene od t.i. Studentovih porazdelitev. **Studentove porazdelitve** so družina porazdelitev, ki se razlikujejo glede na število **prostostnih stopenj df** (angl. degrees of freedom). Če je *n* velikost vzorca, je

$$\boxed{df = n - 1.}$$

Tem spremenljivkam je ime dal angleški statistik William Sealy Gosset (1876–1937), ki je pisal pod psevdonimom Student. Intuitivno lahko število prostostnih stopenj pri Studentovi porazdelitvi gledamo kot količino informacije, ki jo imamo na voljo za oceno standardnega odklona.



Primerjava standardne normalne porazdelitve (črna) in Studentove porazdelitve za $n = 1$ (modra), $n = 5$ (rjava) in $n = 10$ (zelena)

Testna statistika je sedaj

$$\boxed{T = \frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{s}{\sqrt{n}}}}$$

Naj bo $t_p(df)$ p-kvantil Studentove porazdelitve pri stopnji prostosti df.

Pri stopnji značilnosti α ničelno hipotezo $H_0 : \mu = \mu^*$ zavrnemo

- v korist alternativne hipoteze $H_1^+ : \mu > \mu^*$ kadar $T > t_{1-\alpha}(df)$
- v korist alternativne hipoteze $H_1^- : \mu < \mu^*$ kadar $T < -t_{1-\alpha}(df)$
- v korist alternativne hipoteze $H_1 : \mu \neq \mu^*$ kadar $|T| > t_{1-\alpha/2}(df)$

Prag zavrnitve razberemo iz tabele za Studentovo porazdelitev (glej e-učilnico!).

Pozor! Vrednosti v naslovih stolpcev so sedaj verjetnosti NAD tabeliranimi vrednostmi!

Če so vzorci veliki (recimo $n > 50$), potem t-test da praktično enake p-vrednosti kot z-test (glej sliko porazdelitev na prejšnji strani).

Primer. Višina štiriletnih deklic je normalno porazdeljena s sredino μ in standardnim odklonom σ. Naključno izbran vzorec devetih deklic nam da višine:

$$101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95.$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$ testirajmo ničelno hipotezo

$H_0 : \mu = 100$ cm

proti različnim alternativnim hipotezam.

Od zadnjič vemo: $\bar{x} = 97$cm in $s = 5$cm.

Testna statistika je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{\sigma}{n}} = \frac{97 - 100}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = -1.8$$

Stopnja prostosti je $df = n - 1 = 8$.

Primer. Višina štiriletnih deklic je normalno porazdeljena s sredino μ in standardnim odklonom σ. Naključno izbran vzorec devetih deklic nam da višine:

$$101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95.$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$ testirajmo ničelno hipotezo

$H_0 : \mu = 100$ cm

proti različnim alternativnim hipotezam.

Od zadnjič vemo: $\bar{x} = 97$cm in $s = 5$cm.

Testna statistika je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{\sigma}{n}} = \frac{97 - 100}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = -1.8$$

Stopnja prostosti je $df = n - 1 = 8$.

- ◇ $H_1 : \mu \neq 100$

  Iz tabele razberemo prag zavrnitve $t_{0.95} = 1.86$. H_0 torej ne zavrnemo v korist H_1 (odstopanja niso statistično značilna).

- ◇ $H_1^- : \mu < 100$

  Prag zavrnitve je sedaj $-t_{0.9} = -1.397$. H_0 torej zavrnemo v korist H_1 (odstopanja so statistično značilna).

Ali se zadnji sklep spremeni, če $\alpha = 0.05$? Za

$H_1^- : \mu < 100$

in $\alpha = 0.05$ razberemo prag zavrnitve $-t_{0.95} = -1.86$. V tem primeru odstopanja niso statistično značilna.

- $H_1 : \mu \neq 100$

  Iz tabele razberemo prag zavrnitve $t_{0.95} = 1.86$. H_0 torej ne zavrnemo v korist H_1 (odstopanja niso statistično značilna).

- $H_1^- : \mu < 100$

  Prag zavrnitve je sedaj $-t_{0.9} = -1.397$. H_0 torej zavrnemo v korist H_1 (odstopanja so statistično značilna).

Ali se zadnji sklep spremeni, če $\alpha = 0.05$? Za

$H_1^- : \mu < 100$

in $\alpha = 0.05$ razberemo prag zavrnitve $-t_{0.95} = -1.86$. V tem primeru odstopanja niso statistično značilna.

- $H_1 : \mu \neq 100$

  Iz tabele razberemo prag zavrnitve $t_{0.95} = 1.86$. H_0 torej ne zavrnemo v korist H_1 (odstopanja niso statistično značilna).

- $H_1^- : \mu < 100$

  Prag zavrnitve je sedaj $-t_{0.9} = -1.397$. H_0 torej zavrnemo v korist H_1 (odstopanja so statistično značilna).

Ali se zadnji sklep spremeni, če $\alpha = 0.05$? Za

$H_1^- : \mu < 100$

in $\alpha = 0.05$ razberemo prag zavrnitve $-t_{0.95} = -1.86$. V tem primeru odstopanja niso statistično značilna.

Intervali zaupanja (II)

Interval zaupanja za μ pri dani stopnji zaupanja $0 < \beta < 1$ je sedaj

$$\boxed{(\mu_{min}, \mu_{max}) = \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{(1+\beta)/2}(df), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{(1+\beta)/2}(df)\right)}$$

Primer. Za prejšnji primer je za $\beta = 0.95$

$$\mu_{min} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975}(8) = 97 - \frac{5}{3} 2.306 = 93.16$$

$$\mu_{max} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975}(8) = 97 + \frac{5}{3} 2.306 = 100.84.$$

torej je 95% interval zaupanja za μ interval $(93.16, 100.84)$.

Intervali zaupanja (II)

Interval zaupanja za μ pri dani stopnji zaupanja $0 < \beta < 1$ je sedaj

$$\boxed{(\mu_{min}, \mu_{max}) = \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{(1+\beta)/2}(df), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{(1+\beta)/2}(df)\right)}$$

Primer. Za prejšnji primer je za $\beta = 0.95$

$$\mu_{min} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975}(8) = 97 - \frac{5}{3} 2.306 = 93.16$$

$$\mu_{max} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975}(8) = 97 + \frac{5}{3} 2.306 = 100.84.$$

torej je 95% interval zaupanja za μ interval $(93.16, 100.84)$.

Intervali zaupanja (II)

Interval zaupanja za μ pri dani stopnji zaupanja $0 < \beta < 1$ je sedaj

$$\boxed{(\mu_{min}, \mu_{max}) = (\bar{x} - \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{(1+\beta)/2}(df), \bar{x} + \tfrac{s}{\sqrt{n}} t_{(1+\beta)/2}(df))}$$

Primer. Za prejšnji primer je za $\beta = 0.95$

$$\mu_{min} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975}(8) = 97 - \frac{5}{3} 2.306 = 93.16$$
$$\mu_{max} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975}(8) = 97 + \frac{5}{3} 2.306 = 100.84.$$

torej je 95% interval zaupanja za μ interval $(93.16, 100.84)$.

Primerjava povprečij dveh spremenljivk na istih enotah

Denimo, da na eni populaciji preučujemo dve intervalski spremenljivki, X in Y. Naj bo μ_X pričakovana vrednost prve, μ_Y pa pričakovana vrednost druge spremenljivke v celotni populaciji.

Testiramo ničelno hipotezo

$H_0 : \mu_X = \mu_y$

proti eni od alternativnih hipotez: dvostranski ($H_1 : \mu_X \neq \mu_y$), enostranski v korist X ($H_1^+ : \mu_X > \mu_y$) ali enostranski v korist Y ($H_1^- : \mu_X < \mu_y$).

Test enakosti povprečij se v tem primeru prevede na Z- ali t- test za spremenljivko $X - Y$.

Primer. Rezultati obeh kolokvijev Statistike za skupino sedmih študentov so dani v naslednji tabeli

1. kolokvij (X)	2. kolokvij (Y)	$D = X - Y$
72	57	
61	47	
52	71	
48	52	
92	77	
69	81	
56	49	

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testirajmo ničelno hipotezo, da je povprečje točk na 1. kolokviju enako kot povprečje točk na 2. kolokviju.

Primer. Rezultati obeh kolokvijev Statistike za skupino sedmih študentov so dani v naslednji tabeli

1. kolokvij (X)	2. kolokvij (Y)	$D = X - Y$
72	57	15
61	47	14
52	71	-19
48	52	-4
92	77	15
69	81	-12
56	49	7

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testirajmo ničelno hipotezo, da je povprečje točk na 1. kolokviju enako kot povprečje točk na 2. kolokviju.

$H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$
$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$

Testna statistika je

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_X^* - \mu_Y^*)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

kjer je $\bar{d} = \bar{x} - \bar{y}$, po ničelni hipotezi pa je $\mu_X^* - \mu_Y^* = 0$.

Imamo $\bar{d} = 2.3$ in

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\Big((d_1 - \bar{d})^2 + \ldots + (d_n - \bar{d})^2\Big) \\ &= \frac{1}{6}\Big((15 - 2.3)^2 + \ldots + (7 - 2.3)^2\Big) = 196.6 \end{aligned}$$

torej $s = 14.02$. Sledi

$$t = \frac{2.3}{\frac{14.02}{\sqrt{7}}} = 0.43$$

Ker je $df = 6$, za $\alpha = 0.05$ dobimo prag zavrnitve ± 2.447. H_0 torej ne zavrnemo (odstopanja niso statistično značilna).