ANALIZA

PREDAVANJA

INFORMACIJE

Ocena
- z izpitom ali kolokvijema ⇒ skupaj vsaj 50% aka 50T

Vsebina
- Metrični prostori
- C.-S.B. v normiranih vektorskih prostorih, kjer je $\|\cdot\|$ porojena iz skalarnega produkta

RPIT - Odprte, zaprte množice, rob množice,
- Kompaktne, povezane množice
- Zaporedja, limite in stekališča, Cauchyjeva zap., popolnost in napolnitev metričnih prostorov
- Zveznost in enakomerna zveznost, lastnosti zveznih preslikav
- Fje več spremenljivk: zveznost, limite ($\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$)
- Smerni odvod, parcialni odvod, totalni odvod ← izpit
- Diferencial, Jacobijeva matrika, verižno pravilo (odvajanje $f\circ g$)
- Taylorjeva formula
- Iskanje lokalnih ekstremov in Hessejeva matrika

Izpit - Izrek o lokalno inverzni preslikavi in izrek o implicitni fji
- Vezani ekstremi (robni ekstremi)
- Mnogoterni integrali: Def. (Darbouxove, Riemannove vsote), obstoj, množice z Jordansko (oz. Lebesguovo) mero 0, računanje: Fubinijev izrek in substitucija

Literatura
- M.P. Spiegel: Schaum's... advanced calculus
- J.Vrabec: Metrični prostori

7.10.$\overline{24}$

1. METRIČNI PROSTORI

Def. 1.1

Bodi M množica. Razdalja oz. metrika je fja $d: M \times M \to \mathbb{R}$, za katero velja:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ 2.\ d(x,y) = d(y,x) \text{ (simetrična)} \\ 3.\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{array}\right\} \forall x,y,z \in M$$

Če je d razdalja na množici M, potem je (M,d) metrični prostor.

Opomba 1.2

$d: M \times M \to \mathbb{R}$. Pravilno bi bilo pisati $d:(x,y) \mapsto d((x,y)) \in \mathbb{R}$.

Opomba 1.3

Če $M = \emptyset$. Potem $M \times M = \emptyset$. Obstaja natanko ena fja $d: \emptyset \to \mathbb{R}$. In to je prazna fja $d = \emptyset$. (Tu se spomnimo na def. fje, po kateri je fja $f: A \to B$ podmnožica od $A \times B$, da velja: $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B$, da $(x,y) \in f$. Tedaj $f = \emptyset \subseteq \emptyset \times \mathbb{R} = \emptyset$. To je fja, saj je pogoj izpolnjen „na prazno". In ta prazna fja ustreza vsem lastnostim metrike (izpolnjeni so „na prazno"). Torej če je $M = \emptyset$, je tudi metrični prostor. Metrika je prazna fja $\emptyset \subseteq M \times M \to \mathbb{R}$.)

Trditev 1.4

Za vsako metriko $d: M \times M \to \mathbb{R}$ velja še:

4. $d(x,y) \geq 0$
5. $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$

Dokaz (4. lastnost)

$$0 \overset{\text{last. 1}}{=} d(x,x) \overset{\text{last. 3}}{\le} d(x,y) \times d(x,y) \overset{\text{last. 2}}{=} d(x,y)+d(x,y) = 2d(x,y)$$

$$\Rightarrow 0 \le 2d(x,y) \Rightarrow 0 \le d(x,y)$$

Dokaz (5. lastnost)

$$d(x,z) \overset{\text{trikotniška neenakost}}{\le} d(x,y)+d(y,z) \Rightarrow d(x,z)-d(y,z) \le d(x,y) \;*$$

podobno:

$$d(y,z) \le d(y,x)+d(x,z) \Rightarrow d(y,z)-d(x,z) \le d(x,y) \;/\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow -d(x,y) \le d(x,z)-d(y,z) \overset{\text{glej } *}{\le} d(x,y)$$

Zgledi metričnih prostorov 1.5

a) $(M,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$

$d(x,y):=|y-x|$ ← običajna razdalja

b) $(M,d)=(\mathbb{C},|\cdot|)$

$|z|:=\sqrt{\bar{z}\cdot z}=\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}$

$d(z,w)=|z-w|$ ← standardna/običajna metrika/razdalja

c) $(M,d)=(\mathbb{R}^3,\|\cdot\|_2)$

$\mathbb{R}^3:=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2+|z_1-z_2|^2}$

d) Če $M\neq\emptyset$ ima M vsaj eno metriko, npr

$$d(x,y)=\begin{cases}1; & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

imenuje se diskretna metrika; (M,d) pa je diskretni metrični prostor.

e) $M_n(\mathbb{R}) := \{$matrike velikosti $n \times n$ z realnimi koeficienti$\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \underbrace{d(A,B) := \operatorname{rang}(B-A)}_{\text{Metrika}}$$

f) $(M,d) = (\mathbb{R}, d^*)$

$$d^*(x,y) = \begin{cases} |x-y|; & x,y \in \mathbb{Q} \vee x,y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1+|x-y|; & \text{ostali} \end{cases}$$

je metrika

g) $\forall$ povezan, enostaven graf je metrični prostor

h) (M,d) je metrični prostor.

Potem $d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ je zopet metrika

$\Rightarrow (M,d^*)$ je metrični prostor ekvivalenten (glej kasneje) (M,d).

Dokaz, da je d^* metrika:

1.) $d^*(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{d(x,y) = 0}_{d \text{ je metrika}} \Leftrightarrow x = y$

2.) $d^*(x,y) = d^*(y,x)$ dv. preveri

3.) $f: t \mapsto \frac{t}{1+t} = \frac{t+1-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \Rightarrow$ naraščajoča fja od $t>0$

Vemo, da $d^*(x,y) = f(d(x,y))$. f je naraščujoča fja t.j.a in d je metrika, torej $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\Rightarrow f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y))$

$$\Rightarrow d^*(x,y) \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(z,y)} = d^*(x,z) + d^*(z,y)$$

$$\Rightarrow d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \text{ je metrika}$$

h.1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ je metrični prostor z omejeno metriko, ekvivalenten običajni metriki (glej kasneje)

i) P-adična metrika na $\mathbb{Q}$. Bodi p praštevilo. Racionalno št. $x \in \mathbb{Q}$ pišemo v obliki

$$x = \frac{p^\alpha \cdot n}{p^\beta \cdot m}, \text{ kjer } GDC(n,p) = GDC(m,p) = 1$$

$$= p^{\alpha-\beta} \cdot \frac{n}{m}$$

Fja $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$|0|_p := 0$

$|p^{\gamma} \cdot \frac{n}{m}| := p^{-\gamma}$, kjer je $GDC(n,p) = GDC(m,p) = 1$

je p-adična norma.

Npr:

2-adična: $x = \frac{63}{550}$ $\quad \left|\frac{63}{550}\right|_2 = \left|\frac{3^2 \cdot 7}{2 \cdot 5^2 \cdot 11}\right|_2 = |2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7 \cdot 11^{-1}| = 2$

3-adična: $x = \frac{63}{550}$ $\quad |x|_3 = 3^{-2}$

13-adična: $|x|_{13} = 13^{-0} = 1$

D.U. pokaži, da: $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p$

$|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

$d(x,y) = |x-y|_p$ je metrika

$(M,d)=(\mathbb{Q},d_p)$ je torej (p-adični) metrični prostor

j) (3 bonus točke D.V.)

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)=\{[x]:=\mathbb{R}\cdot\vec{x};\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}\}\Rightarrow$ premice v $\mathbb{R}^3$ skozi $(0,0,0)$

$d([\vec{x}],[\vec{y}]):=\arccos\left(\frac{|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\right)$ dokaži, da je metrika

$=\arccos\langle\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|},\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\rangle$