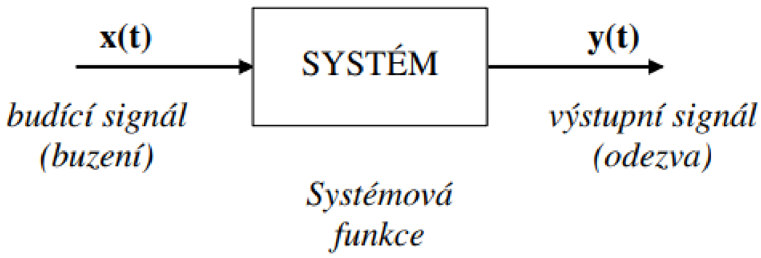
6. Signály a systémy. LTI systémy. Přenosová funkce, impulsní odezva. Konvoluce u číslicových signálů.

Signály a systémy

- Systém dokáže generovat, zpracovávat, modifikovat a přijímat signály. Signál je projevem činnosti systému.



Klasifikace systémů:

Podle charakteru signálu

Spojité – pracují se spoj. vstup.a výstupními signály

Číslicové – pracují s diskrétními signály

Hybridní – fungují jako převodníky mezi analogovými a číslicovými signály

Podle kauzality:

princip kauzality: odezva nemůže nastat dříve než buzení

Kauzální – odezva závisí pouze na současných a minulých hodnotách

Nekauzální – závislost i na budoucích hodnotách

nerealizovatelné v klasických (on-line) systémech,

realizovatelné v off-line režimu – celý signál je v paměti

příklad nekauzálního systému $y(t) = (x(t) + x(t-1) + x(t+1))/3$

Podle linearity

Lineární – platí podmínka $F(ax_1 + bx_2) = aF(x_1) + bF(x_2)$

odezva na lineární kombinaci budících signálů je rovna lineární kombinaci odezev na jednotlivé budící signály

z linearity vyplývá princip superpozice (odezvu systému lze složit z odezev na dílčí buzení)

Příklady

lineárních systémů $y(t) = k.x(t)$ $y = dx(t)/dt$

nelineárních systémů $y(t) = x^2(t)$ $y(t) = |x(t)|$

Podle stacionarity (časové nezávislosti)

Pro časově **nezávislý systém** platí podmínka:

$$F(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$$

Je-li vstupní signál zpožděn o čas $\Delta t = t - t_0$,
musí i výstup být zpožděn o Δt
Chování systému se nemění v čase.

Příklady

časově nezávislých systémů $y(t) = k.x(t)$

časově závislých systémů $y(t) = t.x(t)$

LTI systémy (Linear time-invariant)

= **lineární časově nezávislé** systémy

- Jejich chování (u spojitých systémů) popisují diferenciální rovnice s konst. Koeficienty
- Dif. rovnice popisuje vztah mezi vstupem a výstupem:

Základní vztah

$$A_0 y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

lze přepsat do podoby

$$y[n] = B_0' x[n] + B_1' x[n-1] \cdots B_M' x[n-M] - A_1' y[n-1] \cdots - A_N' y[n-N]$$

- Je vidět, že hodnota výstupního signálu závisí na:
  - předchozích M hodnotách vstupu
  - předchozích N hodnotách výstupu

nerekurzivní systém- FIR

= (Finite Impulse Response) – systém s konečnou odezvou

- nerekurzivní systém reaguje na jednotkový impulz **konečnou odezvou** (o délce M), konečnou odezvou reaguje na jakýkoliv konečný signál

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

Určeme odezvu na jednotkový impulz na vstupu

y[0] = x[0] - 2x[-1] + x[-2] = 1 + 0 + 0 = 1
y[1] = x[1] - 2x[0] + x[-1] = 0 – 2*1 + 0 = -2
y[2] = x[2] - 2x[1] + x[0] = 0 - 0 + 1 = 1
y[3] = x[3] - 2x[2] + x[1] = 0 + 0 + 0 = 0, y[4] = 0, atd

Rekurzivní systém – IIR

= (Infinite Impulse Response) - systém s nekonečnou imp. odezvou

- rekurzivní systém reaguje na jednotkový impulz nekonečnou odezvou, nekonečnou odezvou reaguje také na jakýkoliv konečný signál

- Chování libovolného LTI systému lze jednoznačně popsat tím, jak reaguje na jednotkový impulz => **Odezva na jednotkový impulz jednoznačně charakterizuje libovolný LTI systém. Označuje se h[n]**

Přenosová funkce, impulsní odezva

Z-transformace

- Je efektivním nástrojem, který usnadňuje analýzu chování LTI systémů a jejich návrh
- Její myšlenka spočívá v tom, že číslicové signály a popisy číslicových systémů převádí (transformuje) do prostoru **komplexních čísel**, kde lze snadněji a rychleji provést potřebné operace.
- Její největší přínos je v tom, že výpočetně náročnou operaci konvoluce převede na snazší operaci součinu.
- **Existuje přímá vazba mezi Fourierovou transformací a Z-transformací**
- Z-transformace obecného (nekonečného) číslicového signálu x[n] je definována vztahem:

$$X[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Příklad: signál 2 5 3 4 je transformován na

$$X[z] = 2z^0 + 5z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

Shrnutí: Z-tranformace převádí signál na polynom, v němž hrajou klíčovou roli mocniny **komplexní** proměnné z^{-1}

- Signál popsaný v čase se nazývá **originál**
- Jeho transformovaná verze se označuje jako **obraz**

Signály v časovém prostoru se značí *x[n], y[n],* **...**

v obrazovém prostoru pak *X[z], Y[z],*

- Aplikací Z-transformace vzniká **Přenosová funkce**
  H[z] je tzv. přenosová funkce popisující chování systému v obrazové oblasti

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \cdots A_N z^{-N}}$$

Pro libovolný LTI systém platí:

v časové oblasti $y[n] = h[n] * x[n]$

v obrazové oblasti $Y[z] = H[z] X[z]$

- **Přenosová funkce je obrazem impulzní odezvy**
- **konvoluce v časové oblasti se transformuje na součin v obrazové oblasti**

Činnost LTI systému lze tedy popsat několika způsoby:

- Pomocí diferenční rovnice

$$A_0 y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

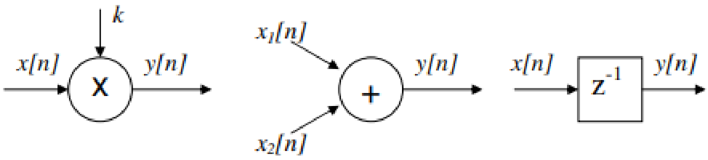
- Pomocí přenosové funkce (Postihuje „přenos dat“ mezi výstupem a vstupem prostřednictvím Z-transformace)

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}}{A_0 + A_1 z^{-1} \cdots A_N z^{-N}}$$

- Pomocí impulsní odezvy (=odezva ustáleného systému na jednotkový impuls)

$$h[n] = F(\delta[n])$$

- Pomocí základních stavebních prvků



násobící prvek, sčítací prvek, zpožďovací prvek

Příklad popisu systému:

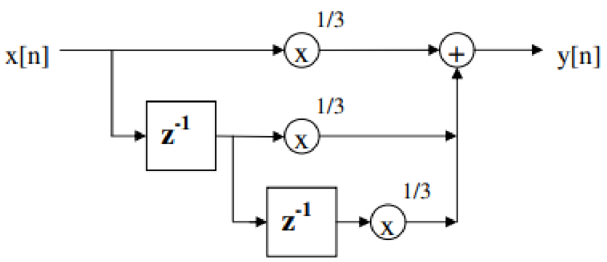
Průměrovací filtr (systém který počítá výstupní hodnotu z průměru N aktuálních vzorků – zde N = 3)

A. Diferenční rovnice $y[n] = \frac{1}{3} x[n] + \frac{1}{3} x[n-1] + \frac{1}{3} x[n-2]$

B. Přenosová funkce $H(z) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}}{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}$

C. Impulzní odezva $h[0] = \frac{1}{3}, h[1] = \frac{1}{3}, h[2] = \frac{1}{3}$

D. Grafické schéma



Konvoluce u číslicových signálů

= Matematická funkce postihující interakci **signálu** a **systému popsaného impulzní odezvou**.

při známé impulzní odezvě můžeme pomocí konvoluce stanovit odezvu na libovolnou vstupní posloupnost $x(n)$ Na vstup lineárního systému s impulsní charakteristikou $h[n]$ je přiváděn vstupní signál $x[n]$, výsledkem je výstupní signál $y[n]$, který vznikl konvolucí.

SVztah pro konvoluci:

potom odezva systému na signál x[n] musí být

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SYSTÉM}\\ h[n]\end{matrix}} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Příklad:

Konvoluce u číslicových signálů

např. x[0] = 2, x[1] = 2, x[2] = 3, x[3] = 2, x[4] = 1
h[0] = 3, h[1] = 2, h[2] = -3, h[3] = 1

					n				
	hodnota v časech	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
	odezva na x(0)	x(0).h(0)	x(0).h(1)	x(0).h(2)	x(0).h(3)				
	odezva na x(1)		x(1).h(0)	x(1).h(1)	x(1).h(2)	x(1).h(3)			
k	odezva na x(2)			x(2).h(0)	x(2).h(1)	x(2).h(2)	x(2).h(3)		
	odezva na x(3)				x(3).h(0)	x(3).h(1)	x(3).h(2)	x(3).h(3)	
	odezva na x(4)					x(4).h(0)	x(4).h(1)	x(4).h(2)	x(4).h(3)
	součet odezev				Σ x(k).h(n-k)				

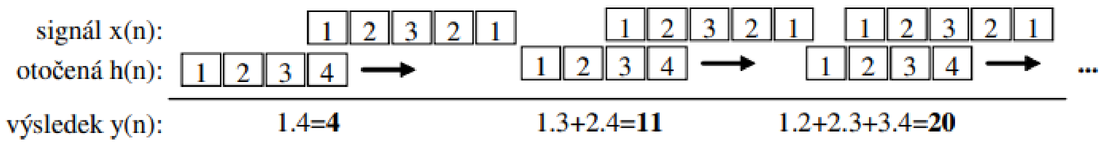
obecný vztah $$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

jde o součet dílčích součinů signálu ***x*** *a funkce* ***h*** *<u>otočené</u> kolem bodu n*

Pro číslicové signály lze poměrně snadno spočítat

příklad: x[n] = 1 2 3 2 1, délka Nx = 5, h[n] = 4 3 2 1, Nh = 4

1) Metodou posuvného proužku



2) Pomocí polynomiálního násobení (žádný signál se neotáčí!)

$$(1s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1).(4s^3 + 3s^2 + 2s + 1) = 4s^7 + 11s^6 + 20s^5 \ldots$$

Konvoluce u periodických signál

Je-li signál periodický, výsledkem konvoluce je opět periodický signál se **stejnou periodou**.

Příklad:

signál x = 2 1 3 2 1 3 2 1 3 perioda Tx = 3

funkce h = 5 6 3 4 1 2

1. **Určíme konvoluci pro jednu periodu:**

   (2 1 3) * (5 6 3 4 1 2) = (10 17 27 29 15 17 5 6) ta má délku 8 vzorků

2. **Konvoluci kompletního periodického signálu určíme „přeložením“ výše uvedené sekvence do bloků o délce Tx, tj. 3**

   10 17 27 ↵

   29 15 17 ↵

   <u>5 6 .</u>

   44 38 44

Výsledný periodický signál je 44, 38, 44, 44, 38, 44, ...

Vlastnosti konvoluce

- Komutativnost

$$x * h = h * x$$

- Asociativnost

$$(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$$

<u>Sériové a paralelní řazení systémů</u>