7. Fourierovy řady. Diskrétní Fourierova transformace, její použití a interpretace. Spektrum signálu, FFT. Číslicové filtry FIR a IIR. Filtrace v čase nebo prostoru.

Fourierovy řady

- Libovolný periodický signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky – harmonická analýza.
- !Umožňují rozložit a složit jakýkoliv **periodický spojitý** signál na harmonické složky!.
- Pro výpočet rozkladu je nutné, aby byl signál popsán **analytickou funkcí**

Trigonometrický tvar Fourierových řad

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right]$$

a_0 představuje stejnosměrnou složku signálu

každá složka je popsána kombinací funkcí *sin* a *cos*

počet složek je v obecném případě nekonečný

pro daný signál je nutné spočítat koeficienty a_k a b_k

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \qquad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

Nevýhodou jsou tři typy koeficientů.

Polární tvar Fourierových řad

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

součet sinusovky a kosinusovky o stejné frekvenci je zde nahrazen pouze kosinusovkou rozšířenou o obecný fázový úhel

pro daný signál je nutné spočítat koeficienty c_k a φ_k

umožňuje výpočet spektra (jednostranného) – závislost c_k a φ_k na k

výpočet se provádí přes a_k a b_k

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \arctan(b_k / a_k)$$

Exponenciální tvar

$$x(t) = \sum_{k=-\omega}^{\infty} X_k \exp(jk\omega_0 t)$$

- X_k je komplexní koef., definován i pro záporná čísla k
- vede na koncept dvoustranného spektra – pro kladné i záporné frekvence
- složky se zápornou frekvencí mají význam kosinusovek s opačnou fází
- vztahy mezi koeficienty FŘ v různých tvarech

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad c_k = 2|X_k|$$

výhoda exponenciálního tvaru – snazší výpočet

Diskrétní Fourierovy řady

- **Spektrum u číslicových signálů** – nelze přímo aplikovat FŘ (není analytická funkce) a signály jsou konečné a více či méně náhodné.
- Číslicové signály jsou běžnější a řešit výpočet převodníky je drahé => vznik **DFT**
- Jsou aplikovatelné na **periodické číslicové signály**

Požadavek: pro vzorkovaný periodický signál musí dávat **stejný výsledek** (stejné spektrum) jako pro pův. nevzorkovaný signál.

Vztah: $$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi nk/N}$$

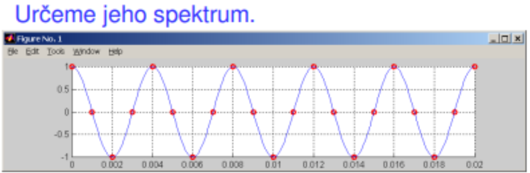
určuje, jak vypočítat komplexní spektrální koeficient X[k] z N vzorků vstupního číslicového signálu

- Je-li signál popsán N vzorky, stačí spočítat pouze prvních N/2 hodnot spektra. Dalších N/2 hodnot jsou čísla komplexně sdružená a není třeba je počítat. Při praktické interpretaci je třeba amplitudu násobit číslem 2.
- Výpočtem podle výše uvedeného vztahu dostaneme diskrétní spektrum, nebo také vzorkované spektrum s hodnotami komplexních koeficientů na frekvencích k.Fs/N.
- Spektrum můžeme počítat i pro k > N, dostaneme však stejné hodnoty jako pro základní interval -N/2 < k < N/2. Spektrum číslicových signálů je totiž periodické s periodou Fs.

Příklad použití:

Příklad: Mějme signál $x(t) = \cos 2\pi 250t$ vzorkovaný na 1 kHz

Určeme jeho spektrum.



Periodu tvoří 4 vzorky, tj N = 4, x[0]=1, x[1]=0, x[2]= -1, x[3]=0

pro výpočet spektra můžeme použít rovnice na předchozí stránce

$$X[0] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.0/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.0/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.0/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.0/4} = \tfrac{1}{4}(1.1 + 0.1 - 1.1 + 0.1) = 0$$

$$X[1] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.1/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.1/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.1/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.1/4}) = \tfrac{1}{4}(1 + 0 + (-1).(-1) + 0) = 0{,}5$$

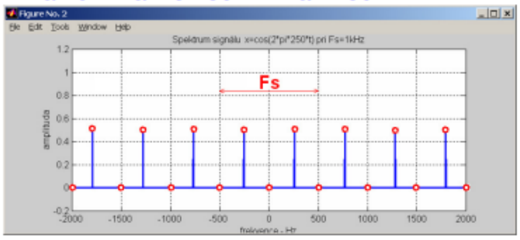
$$X[2] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.2/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.2/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.2/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.2/4}) = \tfrac{1}{4}(1.1 + 0.1 - 1.1 + 0.1) = 0$$

$$X[3] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.3/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.3/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.3/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.3/4}) = \tfrac{1}{4}(1 + 0 + (-1).(-1) + 0) = 0{,}5$$

Koeficienty *X[k]* patří k harmonickým složkám na frekvencích *k.(Fs/N)*, tedy na frekvencích 0 Hz, 250 Hz, 500 Hz, 750 Hz

Složka na frekvenci 0 Hz má (komplexní) koeficient 0
250 Hz 0,5
500 Hz 0
750 Hz 0,5

U číslic.signálů však **neexistují frekvence nad *Fs/2***, dojde tedy k přesunutí z 500 Hz na 0 Hz a ze 750 Hz na - 250 Hz



V jednostranném spektru neuvažujeme záporné frekvence, takže budeme mít složky pouze na frekvencích:
0 Hz s koeficientem 0, a 250 Hz s koeficientem 0,5 + 0,5 = 1

Diskrétní Fourierova transformace – její použití a interpretace

Spojité signály (popsané analytickou funkcí) Na neperiodický signál se nahlíží jako na signál, jehož T → ∞. Místo Fourier. řad se používá Fourierova transformace (FT):

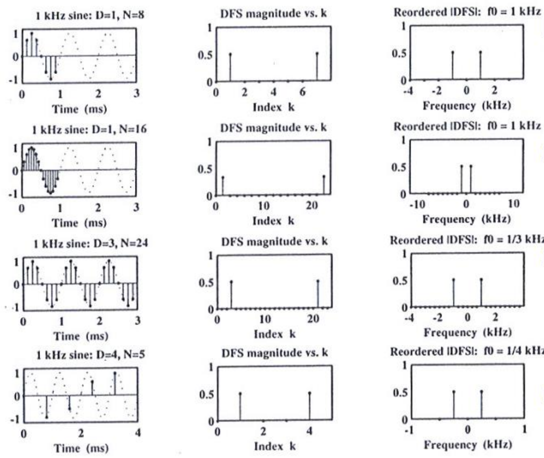
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Číslicové signály (popsané konečnou sekvencí hodnot)

- Na danou sekvenci hodnot pohlížíme, jakoby by byla jednou periodou periodického signálu. Pak můžeme použít **Diskrétní Fourierovu transformaci** (DFT), která je popsána úplně stejným vztahem jako DFŘ:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk / N)$$

- Závěr:
  - **Spektrum číslicového signálu je diskrétní a periodické**
  - N určuje velikost rozlišení frekvencí ve spektru



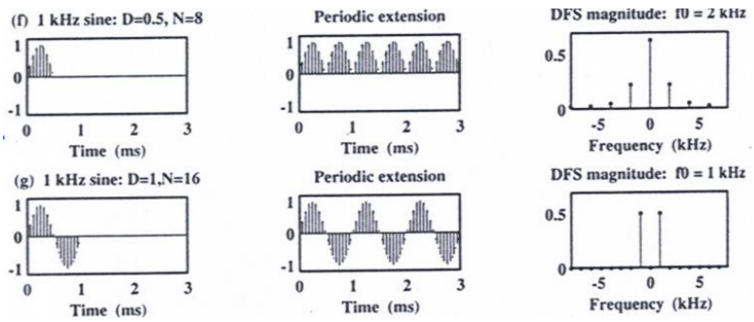
Fs = 8 KHz, 8 vzorků na periodu, rozlišení ve spektru 1 kHz

Fs = 16 KHz, 16 vzorků na periodu, rozlišení ve spektru 1 kHz

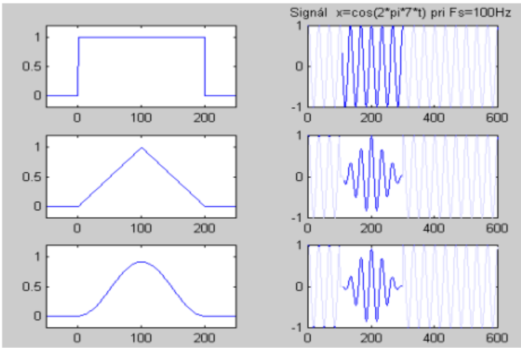
Fs = 8 KHz, 8 vzorků na periodu, celkem 24 vzorků, rozlišení ve spektru 0,33 kHz

Fs < 2 KHz, méně než 2 vzorky na periodu,, dochází k aliasingu

  - pokud N nereprezentuje periodu, spektrum je „rozmazané“



- Při analýze neznámých signálů neznáme jejich periodu, signály navíc nemusí být ani periodické, prakticky vždy tedy dojde k rozmazaní spektra (objeví se neexistující složky
- **Okénkovací funkce** (window function) – řeší otázku, jak nejlépe provést výřez, a alespoň částečně eliminovat rozmazání



- Provést výřez části signálu znamená násobit signál obdélníkovou funkcí. Násobení v čase se převádí na **konvoluci** ve spektru (konvoluce spektra signálu se spektrem okna). Obdélníkové okno má z tohoto pohledu nejnepříznivější spektrum.

Zpětná (inverzní) DFT

Vztahy pro DFT a IDFT:

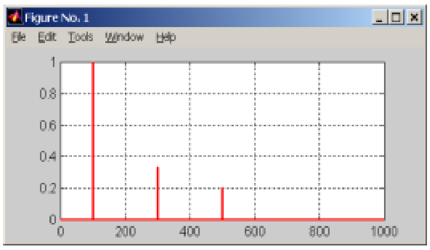
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi nk/N) \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\exp(j2\pi nk/N)$$

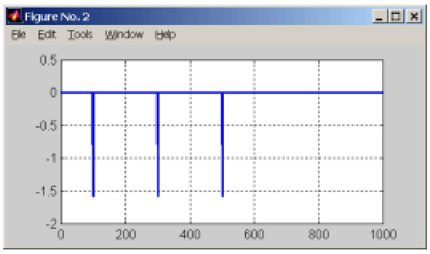
- Liší se pouze ve znaménku
- Do IDFT vstupuje vždy N hodnot **dvoustranného** spektra
- Pokud na signál aplikujeme nejprve DFT a následně IDFT, dostaneme **tentýž** signál

Spektrum signálu

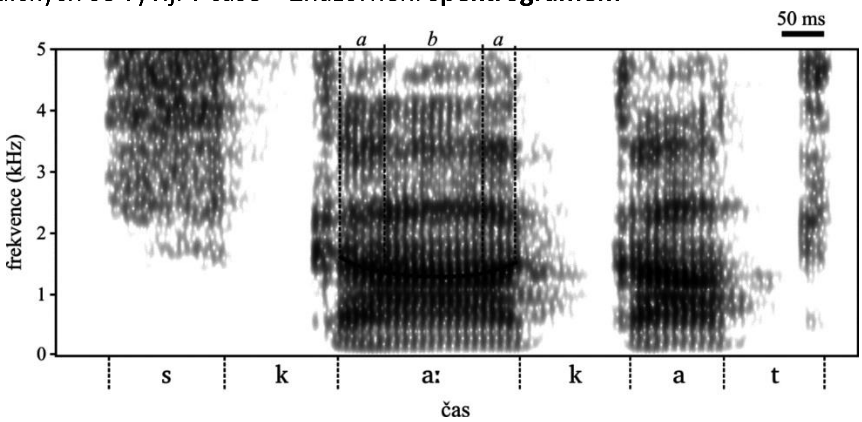
= Závislost amplitud a fází harmonických složek na frekvenci

- Používáme:
  - **Amplitudové spektrum** – A jako funkce f
  - **Fázové spektrum –** Φ jako funkce f (fáze je vztažena vůči kosinové funkci)
- U periodických signálů je čárové



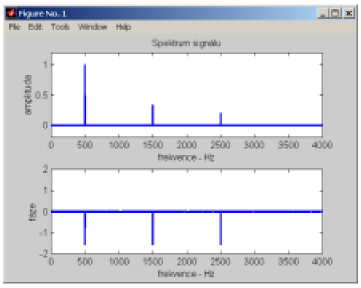


- U neperiodických se vyvíjí v čase – Znázornění **spektrogramem**

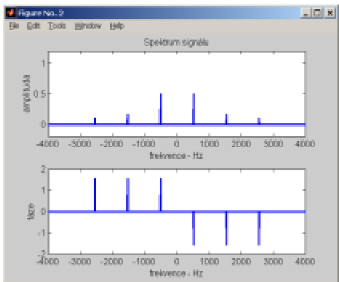


- Dělíme na:
    - **Jednostranné spektrum** – vychází z polárního tvaru a zobrazuje pouze kladné frekvence
    - **Dvoustranné spektrum** – vychází z exponenciálního tvaru a zobrazuje kladné a záporné frekvence.

jednostranné spektrum



dvoustranné spektrum



- Spektrum používané v praxi **je jednostranné**, většina výpočetních postupů však počítá dvoustranné spektrum, z něhož snadno odvodíme jednostranné.

Rychlá Fourierova transformace – FFT

- poskytuje úplně stejné hodnoty jako DFT, ale mnohem rychlejším způsobem
- vysoké rychlosti je dosaženo optimalizovaným výpočtem,
- ten bere v úvahu např. symetričnost exponenciálních členů exp (-j2πnk/N)
- dále podobnost mezi lichými a sudými koeficienty, atd.
- nejrychleji funguje v případech, že N je mocninou 2
- Přímé vyhodnocení sum (vzorce FT) by zabralo O(n2) aritmetických operací. FFT naproti tomu poskytuje složitost pouze O(n log n) operací.

Číslicové filtry FIR a IIR

Jednoduché číslicové LTI systémy

Systémy typu FIR (Final Impulse Response)

- systémy s konečnou impulzní odezvou (na jednotkový impulz reagují signálem s konečným počtem vzorků)
- popis v časové oblasti $y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

impulzní odezva trvá M vzorků

- **nerekurzivním algoritmem**

Zesilovač: $y[n] = k.x[n]$

impulsní odezva $h[n] = k\delta[n]$
vektor koeficientů *b = [k]* *jediný nenulový koeficient*

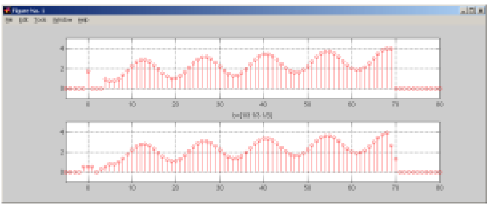
Zpožďovač $y[n] = x[n-k]$

impulsní odezva $h[n] = \delta[n-k]$
vektor koeficientů *b = [0, 0, .. 1]* *též jediný koeficient*

Průměrovací filtr (3.řádu) nekauzální:

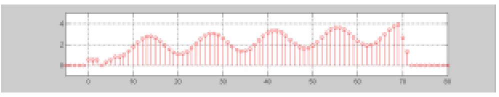
$$y[n] = (x[n-1] + x[n] + x[n+1])/3$$

vektor koeficientů imp. odezvy *b = [1/3, 1/3, 1/3]*



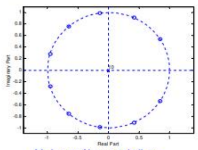
Prům. filtr kauzální: $y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2])/3$

tytéž koeficienty *b = [1/3, 1/3, 1/3]*, *rozdíl ve fázovém zpoždění*



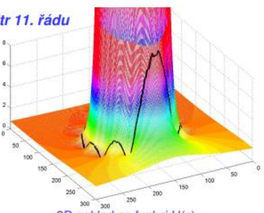
Filtry FIR řádu M

- **mají M nulových bodů, které určují místa největšího útlumu**
- **mají M-násobný pól v počátku, který má pouze nepřímý vliv na funkci filtru**

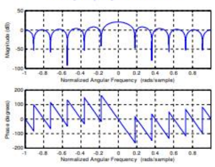


Nuly a póly v rovině z

Průměr. filtr 11. řádu



3D pohled na funkci H(z)



Frekvenční charakteristika

Poměrně **jednoduchý** a **intuitivní** návrh

Filtr je **nerekursivní** (bez zpětných vazeb), je tudíž vždy **stabilní** (nemůže způsobit kmitání)

Filtry FIR mohou zajistit **lineární** průběh **fázové charakteristiky**

S filtry FIR se **hůře dosahuje velká strmost** přechodu mezi propustným a nepropustným pásmem

Pro dosažení velké strmosti jsou třeba **filtry s mnoha koeficienty**, takové filtry mají dlouhé zpoždění

IIR

IIR – infinite impuls response, s nekonečnou impulsní odezvou

Výstupní signál zaveden na vstup – **zpětná vazba**

$$y[n]+A_1y[n-1]\cdots A_Ny[n-N]=B_0x[n]+B_1x[n-1]\cdots B_Mx[n-M]$$

Přenosová funkce vyjádřená pomocí Z-transformace

$$H(z)=\frac{B_0+B_1z^{-1}\cdots B_Mz^{-M}}{1+A_1z^{-1}\cdots A_Nz^{-N}}=z^{N-M}\frac{(z-z_1)(z-z_2)..(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)..(z-p_N)}$$

má **M nul** (v čitateli), **N pólů** (ve jmenovateli), a dále nuly nebo póly v počátku či v nekonečnu (v závislosti na členu z^{N-M})

Frekv. charakteristiku dostaneme opět dosazením $z = e^{j2\pi F}$ do *H(z), tedy na jednotkové kružnici*

$$H(F)=\frac{B_0+B_1e^{-j2\pi F}\cdots B_Me^{-j2\pi FM}}{1+A_1e^{-j2\pi F}\cdots A_Ne^{-j2\pi FN}}$$

Výhody a nevýhody filtrů IIR

Poměrně **složitý** a **méně intuitivní** návrh

Filtr je **rekursivní** (se zpětnými vazbami), může být **nestabilní** (pro amplitudově omezený vstupní signál by generoval signál s neustále rostoucími amplitudami)

Filtr IIR bude **stabilní,** pokud všechny jeho póly leží **uvnitř jednotkové kružnice**

S filtry IIR lze dosáhnout **velmi strmé přechody** mezi propustným a nepropustným pásmem, a to i při malém řádu filtru.

Filtry IIR nemají lineární průběh fázové charakteristiky.

Filtrace v čase nebo prostoru

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n]+A_1 y[n-1]\cdots A_N y[n-N]=B_0 x[n]+B_1 x[n-1]\cdots B_M x[n-M]$$

Časový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Systémový popis pomocí přenosové funkce:

$$H(z)=\frac{B_0+B_1 z^{-1}\cdots B_M z^{-M}}{1+A_1 z^{-1}\cdots A_N z^{-N}}$$

Frekvenční přenosová charakteristika (za z dosazeno $e^{j2\pi F}$)

$$H(F)=\frac{B_0+B_1 e^{-j2\pi F}\cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1+A_1 e^{-j2\pi F}\cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$

V časové doméně je klíčový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

Ve frekvenční doméně pak popis pomocí Fourier. transf.

$$Y(F)=H(F)X(F)$$

kde *Y(F)* je DFT výstupního signálu

X(F) je DFT vstupního signálu

H(F) je DFT impulzní odezvy sytému a zároveň

$$H(F)=\frac{B_0+B_1 e^{-j2\pi F}\cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1+A_1 e^{-j2\pi F}\cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$

Platí:

1. Frekv. charakteristika je Fourier. transf. impulzní odezvy
2. Konvoluce v čase se transformuje na součin ve frekvencích

V prostoru:

Ve statickém obraze nehraje při filtrování roli čas, ale prostor - **okolí jednotlivých bodů**.

Obrazové filtry rovněž pracují **na principu konvoluce**, tj. novou hodnotu v daném bodě určí z lineární kombinace hodnot v okolních bodech.

$$I_k(x,y)=\sum_{i,j\in okolí} h(i,j).I_{k-1}(x+i,y+j)$$

Nová *hodnota v bodu* ***konvoluční jádro*** ***předchozí*** *hodnoty v okolí*

Poznámka:

Operace s obrazy se dělají v iteračních krocích. Při výpočtu nové iterace je třeba nové hodnoty ukládat do jiné matice než té, v níž byly uloženy původní hodnoty.