# 11. Binární lineární klasifikace a logistická regrese, učení modelu logistické regrese.

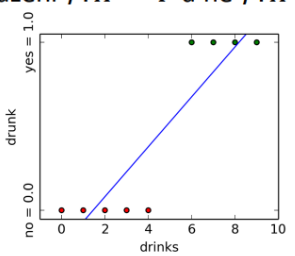
## Binární lineární klasifikace

• V případě klasifikace požaduje výstup systému ve smyslu rozhodnutí o příslušnosti k jedné ze dvou definovaných tříd

• Přiřadíme datům z jedné třídy požadovanou výstupní hodnotu **+1** a datům z druhé třídy **0** (příp. -1)

• Stanovíme parametry lin. Regrese

Ta ovšem provádí zobrazení $f: X \rightarrow Y$ a ne $f: X \rightarrow C$




• Rozhodnutí o příslušnosti ke třídě provedeme na základě porovnání hodnoty funkce $f$ s daným prahem

• **Za výstup z regrese tedy přidáme nelineární rozhodovací člen**

• Platí

$$c_x = \begin{cases} 'yes' & pro \quad f(x) \geq 0.5 \\ 'no' & pro \quad f(x) < 0.5 \end{cases}$$

• **Nevýhoda: všechna data ovlivňují polohu separující nadroviny**

• Je třeba změnit i trénovací kritérium (cost funkci)

- • Nechceme aproximovat body ale separovat třídy !!

## Logistická regrese

**Funkce sigmoida:**

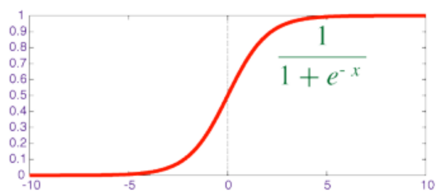
• Funkce definovaná jako:

- • $sigmoid(x) = \sigma(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

• Má zajímavé vlastnosti:

- • definiční obor $(-\infty, +\infty)$
- • obor hodnot (0,1)

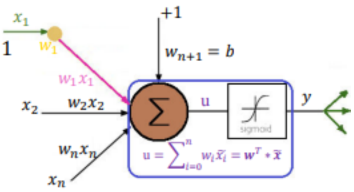
$\Rightarrow$„přiřazuje reálným číslům pravděpodobnost“




$\sigma(x) > 0.5 \; pro \; x > 0 \quad \sigma(x) < 0.5 \; pro \; x < 0$

## Binární lineární klasifikátor se sigmoidou #1

- Vstupem je vektor $\boldsymbol{x} = [x_1; x_2; \dots; x_n]$
  - Například hodnoty pixelů testovacího obrázku
- Každá vstupní hodnota $x_i$ se vynásobí vahou $w_i$, výsledek se sečte a přičte se k němu váha $w_{n+1}$
  - To lze zapsat jako $\sum_{i=1}^{n+1} w_i \tilde{x}_i = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}} = u$
  - Kde $\tilde{\boldsymbol{x}}$ je původní vektor $\boldsymbol{x}$ rozšířený o hodnotu $x_{n+1} = 1$
- Hodnota tohoto součinu říká, zda bod $\boldsymbol{x}$ leží v prostoru o $n$ dimenzích a souřadných osách $x_1, x_2, \dots, x_n$ nad, pod nebo přímo na podploše o dimenzi $n-1$, která je definována rovnicí
  $$w_1 x_1 + \dots + w_n x_n + w_{n+1} = 0$$
- Hodnota součinu u se dosadí do sigmoidy
  - "Převede se na pravděpodobnost v rozmezí (0,1)"




## Binární lineární klasifikátor se sigmoidou #2

- Pokud je hodnota na výstupu sigmoidy $\geq 0.5$, přiřadíme $\boldsymbol{x}$ ke třídě 1
- Pokud je hodnota na výstupu sigmoidy $< 0.5$, přiřadíme $\boldsymbol{x}$ ke třídě 0
- **Popsaný klasifikátor je binární a pravděpodobnostní**
  - Třída 1 má pro $\boldsymbol{x}$ pravděpodobnost $\sigma(u) = \sigma(\boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}})$
  - Třída 0 má pro $\boldsymbol{x}$ pravděpodobnost $1 - \sigma(u) = 1 - \sigma(\boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}})$
- **Umí klasifikovat jen třídy separovatelné lineárně (přímkou)**
  $\boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}} \geq 0 \Rightarrow \sigma(\boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}}) \geq 0.5 \Rightarrow$ bod leží v jedné části příznakového prostoru
  $\boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}} < 0 \Rightarrow \sigma(\boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{x}}) < 0.5 \Rightarrow$ bod leží ve druhé části příznakového prostoru
- **Klasifikátor je parametrický s vektorem parametrů $\boldsymbol{w}$**
  - **Během trénování se používá jiné kritérium než pro učení obyčejné regrese !!**

## Učení modelu logistické regrese

• Pravděpodobnost náhodného jevu lze určit kombinatorickým rozborem nebo z dat pomocí relativní četnosti

• Náhodná veličina je výsledek náhodného pokusu vyjádřený číslem

• Učení Logistické regrese pomocí numerické řešení metody **MLE** (Maximum Likelihood Estimation) pro logistickou regresi pomocí SGD:

- Co je to Metoda maximální věrohodnosti?
  - postup, jak z trénovacích dat odhadnout (určit) parametry modelu
- Cílem je najít parametry maximalizující věrohodnost dat
  - tj. "pravděpodobnost" toho, že daný model tato data vygeneroval
- Výsledný odhad má celou řadu pozitivních vlastností:
  - je asymptoticky eficientní (pro počet pozorování $n \to \infty$)
  - tj. odhadujeme neznámý parametr nejlepším možným způsobem.
- Existují i jiné metody odhadu?
  - ano, například Metoda nejmenších čtverců = Least Squares Estimation (LSE)

# Obecný postup při aplikaci metody MLE

1) Vyjádří se věrohodnost dat = sdružené rozdělení pravděpodobnosti celého souboru dat

- pro soubor stejně rozdělených, nezávislých diskrétních náhodných veličin platí, že jejich sdruženou distribuci lze rozdělit na součin jednotlivých rozdělení

$$p(X_1, X_2, \dots, X_N | \theta) = p(X_1|\theta)p(X_2|\theta)\dots p(X_N|\theta) = \prod_{i=1}^{N} p(X_i|\theta)$$

2) Vypočte se logaritmus této věrohodnosti

$$\ln p(X_{1:N}) = \ln \prod_{i=1}^{N} p(X_i|\theta) = \sum_{i=1}^{N} \ln p(X_i|\theta)$$

3) Hledá se takový odhad $\hat{\theta}$, který tuto věrohodnost maximalizuje

$$\hat{\theta}_{MLE} = \underset{\theta\epsilon\Theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{N} \ln p(X_i|\theta)$$

$\hat{\theta}_{MLE}$ se najde tak, že vztah pro věrohodnost se zderivuje a položí roven nule

Podrobnější postup:

1) Vyjádří se věrohodnost dat = sdružené rozdělení pravděpod. celého souboru dat

$$\prod_{i=1}^{N} p(X_i|\theta) = \prod_{i=1}^{N} \theta^{X_i}(1-\theta)^{1-X_i}$$

$$\text{X ale nabývá pouze hodnot } \{0,1\}$$

$$\prod_{i=1}^{N} \theta^{X_i}(1-\theta)^{1-X_i} = \theta^k(1-\theta)^{N-k}$$

$$\text{kde } k \text{ je počet hodnot } \{1\} \text{ v souboru dat}$$

2) Vypočte se logaritmus této věrohodnosti

$$ln\left(\theta^k(1-\theta)^{N-k}\right) = k\, ln\theta + (N-k)\ln(1-\theta)$$

3) Vypočte se derivace a položí se rovna nule

$$\frac{d}{d\theta}(k\, ln\theta + (N-k)\ln(1-\theta)) = \frac{k}{\theta} + \frac{(N-k)(-1)}{1-\theta} = 0$$

$$k(1-\theta) = (N-k)\theta$$

$$k - k\theta = N\theta - k\theta$$

$$\theta = \frac{k}{N}$$

Výsledná kriteriární funkce:

## Vlastnosti kriteriální funkce

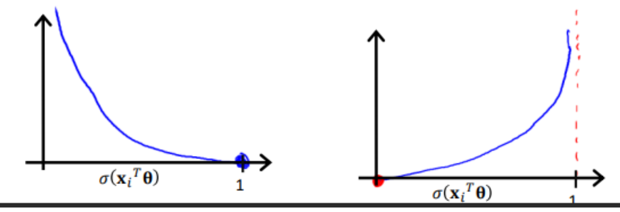
- Maximalizovat cost funkci znamená minimalizovat fci

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{N} \{y_i ln(\sigma(\mathbf{x}_i{}^T\boldsymbol{\theta})) + (1-y_i) ln(1-\sigma(\mathbf{x}_i{}^T\boldsymbol{\theta}))\}$$

- Zároveň platí, že y nabývá pouze hodnot 0 nebo 1

Pro $y = 1$ minimalizujeme $-ln(\sigma(\mathbf{x}_i{}^T\boldsymbol{\theta}))$, druhý člen = 0

Pro $y = 0$ minimalizujeme $-ln(1-\sigma(\mathbf{x}_i{}^T\boldsymbol{\theta}))$, první člen = 0



- Řešení metodou SGD:

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \alpha \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i(\sigma(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\theta}_t) - y_i)$$

kde $\alpha$ je velikost kroku (learning rate)

- Trénování se zastavuje pokud
  - Se dostatečně nemění hodnoty $\boldsymbol{\theta}$ mezi dvěma iteracemi
  - Dochází ke zhoršení přesnosti rozpoznávání na evaluační sadě

# Interpretace kriteriální funkce

- Vztah $y_i ln\left(\sigma(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\theta})\right)$ představuje tzv. křížovou entropii (Cross Entropy)
- Entropie je míra nejistoty a udává počet bitů, který je nutný na zakódování informace, kterou reprezentuje daná náhodná veličina
- Pokud má veličina X prostor elementárních jevů Ω, pak entropie X je definovaná jako:

$$H(X) = -\sum_{x\epsilon\Omega} p(x) log_2\left(p(x)\right)$$

- Příklad #1: Házení mincí
  - $H(x) = -(0{,}5 log_2 0{,}5 + 0{,}5 log_2 0{,}5) = 1$
- Příklad #1: Házení 32-stěnnou kostkou
  - $H(x) = -\left(\sum_{32} \frac{1}{32} log_2 \frac{1}{32}\right) = 5$

# Křížová entropie

- Předpokládejme, že veličina X má prostor elementárních jevů Ω
- Nad tímto prostorem jsou definována rozdělení pravděpodobnosti p(x) a q(x)
- Křížová entropie (cross entropy) udává, kolik bitů musíme použít, chceme-li místo p(x) použít q(x)

$$C(p,q) = \sum_{x\epsilon\Omega} p(x) log\left(\frac{1}{q(x)}\right) = -\sum_{x\epsilon\Omega} p(x) log\left(q(x)\right)$$

$$C(p,q) = \sum_{x\epsilon\Omega} p(x) log\left(\frac{p(x)}{q(x)} \frac{1}{p(x)}\right) = D(p,q) + H(p)$$

- Minimalizovat křížovou entropii znamená minimalizovat rozdíl mezi dvěma rozděleními pravděpodobnosti
  - Jedno reprezentuje skutečné rozdělení $y_i$ pro trénovací data
  - Druhé hodnoty $\hat{y}_i$ predikované modelem s parametry $\boldsymbol{\theta}$