DM

PO2 S01

uspořádané dvojice (x,y) $\{\{x\},\{x,y\}\}$

Kartézský součin $A\times B := \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$

n. k-tice $(x_1 \dots x_k)$ $(x,y,z) \sim (x,(y,z)) \sim ((x,y),z)$

Kartézská mocnina $A^k = \underbrace{A\times \dots \times A}_{k}$ Kartézský součin je asociativní

Relace

$x \to \boxed{\text{relace}} \to$ ano/ne
$y \to$

Def: A je binární relace mezi souřadnicemi X a Y $\equiv A \subseteq X\times Y$

Def: A je relace na množině X mezi X a X $(A \subseteq X^2)$

Př. $A=\{1,2,3,4,5\}$

(1) $x=y$ $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

(2) $x \mid y$

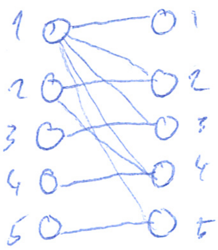
	1	2	3	4	5
1	×	×	×	×	×
2		×		×	
3			×		
4				×	
5					×

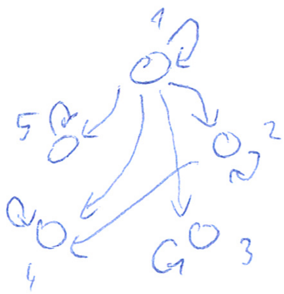
3) $x+y \le 5$

	1	2	3	4	5
1	×	×	×	×	
2	×	×	×		
3	×	×			
4	×				
5					

(4) $\emptyset$ prázdná relace   (5) $\{1,2,3,4,5\}^2$ univerzální relace

2 jinak





$(x,y)\in R$

zkratka

xRy

Operace s relacemi

Inverze R^{-1} je relace mezi Y a X

$R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

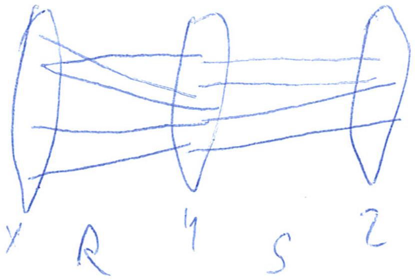
Skládání relací

R mezi X, Y ; S mezi Y Z

$\Downarrow$

T mezi X a Z

$xTz \equiv \exists y \in Y : xRy \wedge ySz$



$T = R \circ S$

Diagonála

$\Delta_X := \{(x,x) \in X\}$

Funkce (zobrazení)

$x \downarrow f \downarrow y$

$f : X \to Y$

Df: Funkce z množiny X do mn. Y je relace A mezi X a Y

t. ž. $\forall x \in X \ \exists! y \in Y : xAy$

značení: $f(x) \dots y : x f y$

$f[S] := \{f(x) \mid x \in S\}$

př: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$

$x \mapsto \sin x$

$x \mapsto a \sin \varphi x$

"nekonečná matice indexovaná rel. čísly"

② $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0; 1\}$

③ $|A| : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ kardinalita

⓪ $f(x) = x$ identita Δ_X

④ $f(a,b) \in Y$ $A \times B \to Y$, $a \in A$, $b \in B$

Skládání funkcí

$f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$

pak $f \circ g : X \to Z$

Vlastnosti funkcí

Df: Funkce $f: X \to Y$ je

- prostá (injektivní) $\equiv \nexists x, x' \in X : x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$
- na Y (surjektivní) $\equiv \forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$
- vzájemně jednoznačná (bijekce) (1-1) $\equiv \forall y \in Y\ \exists! x \in X : f(x) = y$
  - $\rightarrow f^{-1}$ je funkce z Y do X

Df: Relace R na X je

- reflexivní $\equiv \forall x \in X : xRx$ $(\Delta_X \subseteq R)$
- symetrická $\equiv \forall x, y \in X\ xRy \Rightarrow yRx$ $R = R^{-1}$
- antisymetrická $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- tranzitivní $\equiv \forall x, y, z \in X\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ mají (=) (>) (<)

Ekvivalence

rovnost čísel, podobnost, shodnost, rovnost mod k

Df: Relace R na X je ekvivalence $\equiv R$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní

Ekvivalenční třída prvku $x \in X$

$R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$ $xRy \Leftrightarrow x \in R[y] \Leftrightarrow y \in R[x]$

Věta ① $\forall x \in X\ R[x] \neq \emptyset$ Dk: reflexivita $xRx \Rightarrow x \in R[x]$

② $\forall x, y \in X$ buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$

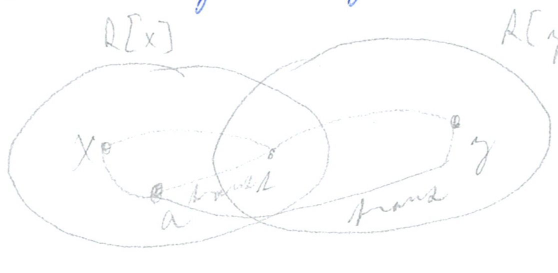
③ $\{R[x] \mid x \in X\}$ určuje ekvivalenci R jednoznačně Dk ③

Dk ②: Pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$ pak $R[x] = R[y]$ (budeme dokazovat)

$\exists t \in R[x] \cap R[y]$ chceme $R[x] \subseteq R[y]$ tedy $\forall a \in R[x] : a \in R[y]$

$aRx \overset{\text{tr}}{\wedge} xRt \Rightarrow aRt$

$yRt \wedge \overset{aRt}{tRy} = yRX$



Df: Množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny $X \equiv$

① $\forall A \in \mathcal{S} : A \neq \emptyset$

② $\forall A, B \in \mathcal{S} : A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

③ $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$

$x R y \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{S} : \{x, y\} \subseteq A$

Def: Relace R je na mn. X je uspořádání $\equiv$ R je reflexivní, tranzitivní, antisymetrická

Def: (částečně) Uspořádaná množina (ČUM) (X, R) $(\leq, \preceq, \trianglelefteq)$

Příklady:

① $(\mathbb{N}, \leq)$ lineární

② $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární

③ ΔX

④ $(\mathbb{N}^+, \mid)$ dělitelnost – některé prvky neporovnatelné

⑤ $(2^X, \subseteq)$ inkluze

! $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \mid)$ není uspořádání: $-1 \mid 1$, $1 \mid -1$ není antisym.

Def: $x, y \in X$ jsou porovnatelné $\equiv xRy \vee yRx$

Uspořádání R je lineární $\equiv \forall x, y \in X$ porovnatelné

def: $(X, \leq)$ ČUM $\Rightarrow (X, <)$: $x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$ – ostrá nerovnost, ostré "uspořádání"

⑥ lexikografické uspořádání

$(A, \leq)$ lin. uspořádaná množina (abeceda)

A^2 def $\leq_{lex}$

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \equiv x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$

$(A^2, \leq_{lex})$

$(A^*, \leq_{lex})$ $\equiv$ → $\exists p$ kde se liší, rozhodne p; → 1 slovo skončí : $\leq$

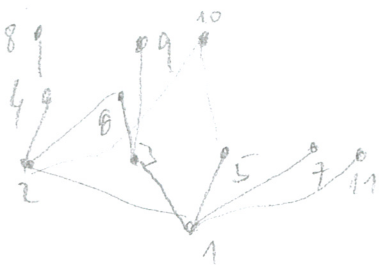
↑ konečná posloupnost prvků z A

Hasseův diagram pro konečné ČUM

Def x je bezprostředním předchůdcem y v uspořádání $\leq$ $\equiv$ ($x \lhd y$)

$x < y$ & $(\nexists z : x < z \wedge z < y)$

pro dělitelnost $\qquad (2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$



Def: Pro $(X;\leq)$ ČUM

- $x \in X$ je nejmenší $\equiv \forall y \in X \;\; x \leq y$

  minimální $\equiv \nexists y \in X \;\; y < x$

  analogicky největší, maximální

Lemma: Každá konečná neprázdná ČUM má minimální prvek

Dk: $x_1 \in X$ zvolíme libovolně, pokud x_1 není minimální $\exists x_2 < x_1$

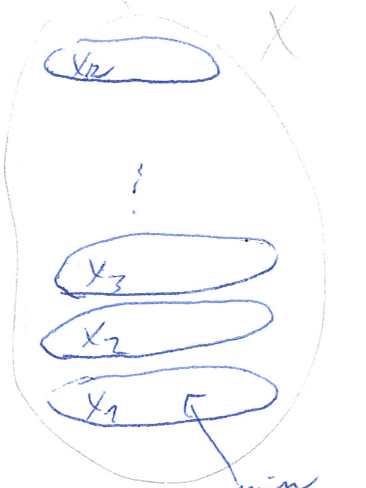
x_2 . . . $x_3 < x_2$

x_k je minimální $x_i = x_j$ pro $i < j$ porušit antisymetrii nikdy nenastane

Def: Pro $(X;\leq)$ ČUM

- $A \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in A$ jsou porovnatelné
- $A \subseteq X$ je antiřetězec/nezávislá množina $\equiv$
  $\equiv \nexists a, b$ různé a porovnatelné
- $\omega(X, \leq) :=$ max z délek řetězců (výška uspořádání)
- $\alpha(X;\leq)$: — " — antiřetězců (~~délka~~ šířka uspořádání)

Věta o dlouhém a širokém: $\forall (X;\leq)$ ČUM: $\alpha(X;\geq) \cdot \omega(X;\geq) \geq |X|$



min prvky antiřetězec
vrstvy v H diagramu

Dk: $X_1 := \{x \in X \mid x \text{ je minimální}\}$

Když máme $X_1 \dots X_i$

$Z_i : X \setminus \bigcup_{j=1}^{i} X_j \xrightarrow{\text{když } Z_i = \emptyset} \text{hotovo}$

$X_{i+1} := \{x \in Z_i \,;\, x \text{ je minimální}\}$

$X_1 \; X_2 \; X_3 \dots X_k$

1. $\forall i \; X_i$ je antiřetězec $|X_i| \leq \alpha$
2. $\{X_1 \dots X_k\}$ tvoří rozklad X $\;\; \alpha \cdot \omega \geq \overbrace{\underbrace{|X_1|}_{\leq \alpha} + \dots + \underbrace{|X_k|}_{\leq \alpha}}^{\leq \omega} = |X|$
3. $\exists r_1 \in X_1 \dots r_k \in X_k : \{r_1 \dots r_k\}$ je řetězec $k \leq \omega$

r_k zvolíme libovolně z X_k

$r_k \notin X_{k-1} \Rightarrow \exists r_{k-1} \in X_{k-1} : r_{k-1} < r_k$ . . . tohle až do r_1

QED

$\# f: N \to M = m^n$
$|N| = n \quad |M| = m$
$n, m > 0$

Dk indukcí podle n

1. $n = 1 \quad \#fcí = m^1$
2. $n \Rightarrow n+1$

$(n+1)$-prvková N, m prvková M
zvolíme pevně $x \in N$
f je jednoznačně určena $f(x)$ m zp
$\# f = m \cdot m^n = m^{n+1}$ $f|: N \setminus \{x\} \to M$ ind předp □

Věta: Je-li N n-prvková množina pak $|2^N| = 2^n$

Dk: $A \subseteq N$
$\downarrow$
$c_A: N \to \{0,1\} \quad c_A(x) \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$
charakteristická funkce
$\#$ podmnožin $A = \#$ char funkcí $= 2^n$ □

Věta: Nechť $X \neq \emptyset$ konečná
$\mathcal{S} := \{S \subseteq X \mid |S| \text{ je sudá}\}$
$\mathcal{L} := \{L \subseteq X \mid |L| \text{ je lichá}\}$
Potom
$|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$

Dk: Stačí dokázat $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$
Sestrojíme bijekci $f: \mathcal{S} \to \mathcal{L}$
zvolíme si $a \in X$
$f(S) := S \,\Delta\, \{a\}$
1. $f(S) \in \mathcal{L}$
2. f má inverzi ... $f^{-1} = f$

} z toho plyne, že je to bijekce □

Věta: Nechť N je n-prvková
M je m-prvková
potom $\# f\ N \to M$ prostých $=$
$= \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}_{n \text{ členů}} \quad m^{\underline{n}}$

Dk: jako první věta, nemusím opakovat

Kódování funkcemi

- $X \to \{0,1\} \ldots 2^X$
- $\{1,2\} \to X \ldots (x,y) \in X^2$
- $\{1,2,\ldots k\} \to X \ldots$ uspořádané k-tice X^k
- $\mathbb{N} \to X \ldots$ nekonečné posloupnosti prvků X
- permutace na X: $f: X \to X$ bijekce
  $n = |X|$ $\quad f: \{1,\ldots,n\} \xrightarrow{\text{bijekce}} X$ lineární uspořádání na X

$\#$perm na $X = \#$ prostých funkcí z $\{1..n\} \mapsto \{1..n\}$
$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ $\quad (0! = 1)$

$\#$ neuspořádaných k-tic z n-prvkové množiny N $\qquad \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

$\#$ uspoř. k-tic $= n^k$

$\#$ uspoř. k-tic bez opakování $= n^{\underline{k}}$ → dělíme počtem způsobů jak uspořádat $= k!$

Df: Kombinační číslo $\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$

Df: Pro množinu X a $k \geq 0$: $\binom{X}{k} := \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$

Věta $\forall X$ a $k \geq 0$ $\quad \left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$

$\#$ k-prvkových podmnožin

Vlastnosti komb. čísel

2) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} = 1$

3) $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$

4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

spočítání všech podmnožin

Dk 5: $|X| = n$, $a \in X$

$\binom{X}{k}$ obsahuje a → $\binom{X \setminus \{a\}}{k-1}$

$\binom{X}{k}$ neobsahuje a → $\binom{X \setminus \{a\}}{k}$

Věta: (Binomická) pro $n \geq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Dk: $\overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n}$

$\binom{n}{0} x^n y^0 \quad \binom{n}{1} x^{n-1} y^1$

počet zp. vybrání x n. x

počet zp. vybrání

Důsledek

$x = 1 \quad y = -1$

$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots (-1)^n \binom{n}{n}$

↳ $|Y| = |Z|$

DM P05 S01

$|T| = 15$ $|K| = 5$ $|E| = 11$

$|T \cap K| = 3$ $|K \cap E| = 5$ $|T \cap E| = 2$ $|T \cap K \cap E| = 1$

$|T \cup K| = |T| + |K| - |T \cap K| = 17$

$|T \cup K \cup E| = |T| + |K| + |E| - |T \cap E| - |T \cap K| - |K \cap E| + |T \cap K \cap E|$

Věta: Princip inkluze a exkluze pro konečné množiny $A_1 \dots A_n$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1 \dots n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

alternativně

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1 \dots n\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Dk: pro každý prvek $x \in \bigcup_i A_i$ spočítáme příspěvky k L a P straně

nechť x patří do právě j množin z $A_1 \dots A_n$ $\quad$ L: vždy 1 $\quad$ P: p

Průniky k-tic: ① $k > j$ ... přispěje 0

② $k \leq j$ ... $(-1)^{k+1}\binom{j}{k}$

$p = \binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} \dots (-1)^{j+1}\binom{j}{j}$ $\longrightarrow$ binom. věta $0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots$

$0 = \binom{j}{0} - p$

$p = 1$ QED $\quad 0 = 1 - p$

Dk2: $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = \sum_{I \subseteq \{1 \dots n\}} \prod_{i \in I} x_i$

Nechť $A = \bigcup_i A_i$

Pro $B \subseteq A$: $c_B : A \to \{0,1\}$

pro $a \in A$ $c_B(a) = \begin{cases} 0 \\ 1 \text{ pokud } a \in B \end{cases}$

$x_i := -c_{A_i}$

$$\underbrace{\prod_i (1 - c_{A_i})}_{1 - c_{\bigcup_i A_i}} = \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1 \dots n\}} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} -c_{A_i}}_{c_{\bigcap_{i \in I} A_i}}\right) + 1$$

$c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$

$c_{\overline{X}} = 1 - c_X$ $\quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

$1 - c_{X \cup Y} = (1 - c_X)(1 - c_Y)$

$$\cancel{1} + c_{\bigcup_i A_i} = \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1 \dots n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot c_{\bigcap_{i \in I} A_i}\right) + \cancel{1}$$

$\sum_{a \in A} c_X(a) = |X|$

$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_I (-1)^{|I|+1} \underbrace{\sum_a c_{\bigcap_i A_i}(a)}_{\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|}$$

DM P05 S02

Šatnářka

$S_n := \{\pi \mid \pi \text{ permutace na } \{1..n\}\}$

i dostal svůj $\pi(i) = i$

$\tilde{S}_n := |\{\pi \in S_n \mid \nexists i : \pi(i) = i\}|$

Pr[náhodně vybrané $\pi \in \tilde{S}_n$] $= \frac{\tilde{S}_n}{n!}$

$A := \{\pi \in S_n \mid \pi$ má pevný bod$\}$

$A_i := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$, $i \in 1..n$

$A = \bigcup_i A_i$

$|A_i| = (n-1)!$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$\vdots$

obec $(n-k)!$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{I \in \binom{\{1..n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|}_{\binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \frac{(-1)^{k+1}}{n!}\right)$$

$$\tilde{S}_n = n! - |A| = n! \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \dots \frac{(-1)^n}{n!}\right)}_{\approx \frac{1}{e}}$$

Odhady

0) $2^{n-1} \le n! \le n^n$

1) $n^{n/2} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

2*) $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\left(\frac{n}{e}\right)^n$

2**) Stirlingova formule
$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$

3) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$

4*) $\binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$

5) $\frac{2^{2n}}{2n+1} \le \binom{2n}{n} < 2^{2n}$

min ≤ průměr ≤ max, max ≤ Σ

$(n!)^2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots n \cdot n$
$(1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \dots$

$n! = \sqrt{1 \cdot n} \cdot \sqrt{2(n-1)} \cdots \sqrt{n \cdot 1}$

$i(n-i+1) \ge n$

$i=1, i=n$: $=n$ — jinak min ≥ 2, max $\ge \frac{n}{2}$

$n! \ge (\sqrt{n})^n = (n^{\frac{1}{2}})^n = n^{n/2}$

$\sqrt{i(n-i+1)} \le \frac{i + n - i + 1}{2} = \frac{n+1}{2}$

$n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

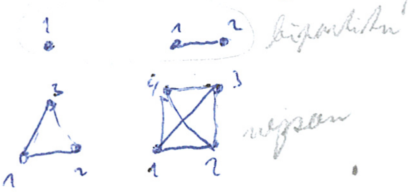
AG nerovnost
$x, y > 0$
$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

Def: Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde:
- V je konečná neprázdná množina vrcholů
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran

Rozšíření
- orientovaný
- smyčky
- multigrafy
- nekonečné

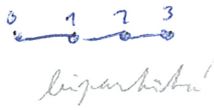
příklady

úplný graf K_n
$V(K_n) := \{1 \dots n\}$
$E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$

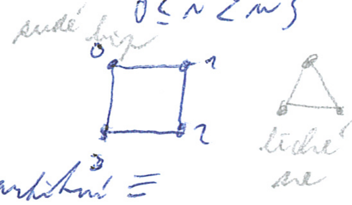


prázdný graf E_n
$V(E_n) := 1 \dots n$
$E(E_n) := \emptyset$

cesta P_n
$V(P_n) := \{0 \dots n\}$
$E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \le i < n\}$



kružnice C_4
$V(C_n) := \{0 \dots n-1\}$
$E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \le i < n\}$



úplný bipartitní graf $K_{m,n}$
$V(K_{m,n}) := \{a_1 \dots a_m\} \cup \{b_1 \dots b_n\}$
$E(K_{m,n}) := \{\{a_i, b_j\} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$

Def: Graf G je bipartitní $\equiv$ $\exists$ rozklad množiny $V(G)$ na X, Y t. ž. $E(G) \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in X, y \in Y\}$
alternativně
$\forall e \in E(G): |e \cap X| = 1$ & $|e \cap Y| = 1$

Def: Grafy G a H jsou izomorfní $\overset{G \cong H}{\equiv} \exists f: V(G) \longrightarrow V(H)$ bijekce
t. ž. $\forall u, v \in V(G): (\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H))$
$\cong$ je ekvivalence

Def: Stupeň vrcholu v v grafu G je
$\deg_G(v) := |\{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}|$

Def: Graf G je k-regulární $(k \in \mathbb{N})$
$\equiv \forall u \in V(G): \deg_G(u) = k$

Def: skóre grafu G je posloupnost stupňů všech vrcholů

Def: Graf G je regulární

Věta:
$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$
důsledek $\rightarrow$ je sudé číslo
vrcholů lichého stupně je sudý } princip sudosti

Věta o skóre: Posloupnost $D = d_1 \le \dots d_n$ pro $n \ge 2$ je skóre grafu

$\Leftrightarrow D' = d'_1 \dots d'_{n-1}$ je skóre grafu & $0 \le d_n \le n-1$

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \ge n - d_n \end{cases}$$

Dk: $\Leftarrow$ nechť G' je graf se skóre D' a vrcholy $v_1 \dots v_{n-1}$

vytvořím G doplněním vrcholu v_n a hran $\{v_i, v_n\}$ pro $i \in \{n-d_n \dots n-1\}$

↳ G má skóre D

$\Rightarrow$ Lemma: Nechť $\mathcal{G}$ je množina všech grafů na vrcholech $\{1, \dots n\}$ se skóre D, $\mathcal{G} \ne \emptyset$

Potom $\exists G \in \mathcal{G}: \{v_n, v_i\} \in E(G)$ pro všechna $i \in \{n-d_n \dots n-1\}$

→ mohu odpojit v_n a získám G' se skóre D'

Dk: pro $G \in \mathcal{G}$ def $j(G) := \max\{j \mid \{v_j, v_n\} \notin E(G)\}$

pokud $j(G) = n - d_n$ tak G splňuje lemma

Pokud $d_n = n-1$ pak každý $G \in \mathcal{G}$ splňuje lemma

najdeme $G \in \mathcal{G}$ jehož $j(G)$ je minimální

sporem: Pokud $j(G) > n - d_n - 1$

$\{v_j, v_n\} \notin E(G)$

$\exists i < j : \{v_i, v_n\} \in E(G)$

$\exists k : \left.\begin{array}{l} \{v_i, v_k\} \notin E(G) \\ \{v_j, v_k\} \in E(G) \end{array}\right\}$ protože $d_i \le d_j$

Upravíme graf G na G_1: $V(G_1) := V(G)$

$E(G_1) := E(G) \cup \{\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_n\}\} \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}$

ale $G_1 \in \mathcal{G}$

$j(G_1) < j(G)$ ↯

\# tříd izomorfismu .... $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$

\# grafů $(V,E) = |2^{\binom{V}{2}}| = 2^{\binom{n}{2}}$

1 třída má $n!$ grafů

Def: Graf je podgrafem grafu $G=(V,E) \equiv V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$
$G' \subseteq G$

Def: $G'(V',E')$ je indukovaným podgrafem grafu $G(V,E) \equiv V' \subseteq V \wedge E' = E \cap \binom{V}{2}$

Def: Cesta v grafu $G=(V,E)$ je
1. $G' \subseteq G : G' \cong P_n$ pro nějaké n ⟶ koncové vrcholy cesty
2. $(v_0, e_1, v_1 \dots e_n, v_n)$, kde $v_0 \dots v_n$ jsou různé vrcholy
$e_1 \dots e_n$ jsou hrany
$\forall i \; e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

def: sled (walk)
$(v_0, e_1 \dots e_n, v_n) \; \forall i \; e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
def: tah neopakují se hrany
cesta ani vrcholy

Def: Kružnice v grafu
1. $G' \subseteq G : G' \cong C_n$ pro nějaké n
2. $(v_0, e_0, v_1, e_1, \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$ $v_0 \dots v_{n-1}$ jsou navzájem různé vrcholy
$e_0 \dots e_{n-1}$ hrany
$\forall i \; e_i = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$

Def: Graf G je souvislý $\equiv$
$\forall u,v \in V(G) \; \exists$ cesta v G s krajními vrcholy u, v.

Def: Dosažitelnost v G je relace na $V(G)$ t. ž. $u \sim v \equiv \exists$ cesta v G s krajními vrcholy u, v

Lemma: relace $\sim$ je ekvivalence

Def: Komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované třídami ekvivalence $\sim$

Dk lemma: Refl: $u \sim u$ ✓ (triviální cesta)
sym $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$ ✓
tranz: $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$

Lemmátko: $\exists$ cesta mezi $u, v \Leftrightarrow \exists$ sled mezi u, v
$\Rightarrow$: triviální; každá cesta je sled
$\Leftarrow$: sled S
kdyby se v S neopakovaly vrcholy je to cesta
pokud $v_k = v_l$ $k < l$

Když vynecháme, který
↓ sled
$v_0 e_1 \dots e_k, v_k, e_{k+1} \dots e_l, v_l \dots e_n, v_n$
opakujeme dokud S není cesta □

Matice sousednosti
$A_{ij} := [\{v_i, v_j\} \in E]$ A je symetrická, součty řádků/sloupců jsou stupně vrcholů

$A^2_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot A_{kj} = \sum_k [\{v_i, v_k\} \in E] \cdot [\{v_k, v_j\} \in E]$
\# sledů délky 2 z v_i do v_j

Lemma: A^k_{ij} = # sledů délky k z v_i do v_j

Dk: Indukcí podle k:

1. $k=1$ ✓
2. $k \Rightarrow k+1$ $\quad A^{k+1}_{ij} = (A^k \cdot A)_{ij} = \sum_r \underbrace{A^k_{ir}}_{\text{\# sledů délky } k \text{ z } v_i \text{ do } v_r} A_{rj} \quad \leftarrow [\{v_r, v_j\} \in E]$

$\sum_{\{v_r, v_j\} \in E}$ # sledů délky k z v_i do v_r = # sledů délky $k+1$ z v_i do v_j

Př: počet $\triangle$ délky 3

uzavřený sled délky 3

A^3_{ii} = # sledů délky 3 z v_i do v_i

$$\#\triangle = \frac{\sum_i A^3_{ii}}{6}$$

Vzdálenost (grafová metrika) v souvislém grafu G

$d_G : V^2 \to N$

$d_G(u,v) :=$ min z délek všech cest mezi u, v

Lemma: $\forall u, v, w \in G$

1. $d(u,v) \geq 0$
2. $d(u,v) = 0 \iff u = v$
3. $d(u,v) = d(v,u)$
4. $\triangle$ nerovnost $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Grafové operace:

$G+v$, $G+e$ přidání

$G-v$, $G-e$ smazání $\quad G - v = G[V(G) \setminus \{v\}]$

$G \% e$ dělení hrany $\to V' := V \cup \{x\}$ pro $x \notin V$

$E' := E \setminus \{\{u,v\}\} \cup \{\{u,x\}, \{v,x\}\}$

$G.e$ ... kontrakce hrany

$G.e = G - u - v + x + (e \setminus \{u,v\} \cup \{x\})$

pro všechny $e \in E$

t.ž. $|e \cap \{u,v\}| = 1$

$\triangle$ cesty lze vyrobit dělením P_1

Kružnice C_3

Eulerovský tah def: obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu
(uzavřený): cyklický

Def: Graf je eulerovský $\equiv \exists$ v něm uzavřený eulerovský tah
... všechny stupně sudé ... souvislý

Věta: Graf G je eulerovský $\iff G$ je souvislý $\wedge \forall v \in V: \deg_G(v)$ je sudý

Dk: $\Rightarrow$ sudost z toho že hrana musí vstoupit i vystoupit
souvislost: $\forall u, v \in V(G)\ \exists$ tah mezi $u, v \Rightarrow \exists$ cesta $\Rightarrow$ souvislý

$\Leftarrow$ vezmeme $T :=$ nejdelší tah

1. T je uzavřený: sporem: kdyby nebyl uzavřený
   - nechť u je jeden z konců tahu
   - tah obsahuje lichý # hran incidentních s u
   - u má sudý stupeň $\Rightarrow \exists$ hrana neincidentní s $T \Rightarrow T$ lze prodloužit $\Rightarrow$ ↯

2. T je uzavřený

a) pokud $\{u, v\} \in E(G)$, $u, v \in T$ pak $\{u, v\} \in T$
   - kdyby to pro nějaké u, v neplatilo
   - T rozpojíme při některém průchodu u
   - na konec přidáme $\{u, v\}, v \Rightarrow$ delší tah ↯

b) T obsahuje všechny vrcholy

   - kdyby $\exists v \in V(G) \wedge v \notin T$:
   - zvolíme $u \in T$ libovolně
   - souvislost $\Rightarrow \exists$ cesta C mezi u, v
   - $\exists r, s \in C: r \in T, s \notin T\ \{r, s\} \in E(G)$
   - T rozpojíme a prodloužíme o $\{r, s\}, s \Rightarrow$ delší tah ↯

cvič: otevřený eul tah $\iff$ souvislý, právě 2 mají lichý stupeň

Pro multigraf s násobnými hranami taky funguje
smyčky – počítáme do deg dvakrát

orientované grafy ... sledy, tahy, cesty, kružnice jsou orientované
$E \subseteq V^2 \setminus \{(x,x) \mid x \in V\}$ ... matice sousednosti nemusí být symetrická
šipky

souvislost $<$ drží pohromadě $\rightarrow$ slabá def: podkladový graf je souvislý
dosažitelnost všude $\Rightarrow$ silná def: $\forall u, v \in V(G)\ \exists$ orientovaná cesta z u, v

def: podkladový graf k oř. grafu $G = (V, E)$: $G^0 = (V, E^0)$ kde $\{u, v\} \in E^0 \equiv (u, v) \in E(G) \vee (v, u) \in E(G)$

def: $\deg^{in}(v) := \# u : (u, v) \in E(G)$ $\quad \deg^{out}(v) = \# w : (v, w) \in E$

def: Graf je vyvážený $\equiv \forall v \in V\ \deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$

Věta: následující vlastnosti orientovaného grafu G jsou ekvivalentní:

1. G je vyvážený a slabě souvislý
2. G je eulerovský
3. G je vyvážený a silně souvislý

Dk: $(3) \Rightarrow (1)$ ez

$(2) \Rightarrow (3)$ ez vyváženost
silná souvislost: $\forall u, v\ \exists$ orientovaný tah $u \to v \Rightarrow \exists$ orientovaná cesta $u \to v$

$(1) \Rightarrow (2)$ analogicky k předchozí větě

Stromy

def: Strom je souvislý graf bez kružnic (acyklický)
def: Les je graf jehož komponenty jsou stromy $\Rightarrow$ acyklický graf
def: list je vrchol stupně 1

Lemma (o koncovém vrcholu):
Každý strom s aspoň 2 vrcholy má aspoň 2 listy

Dk: Uvažme nejdelší cestu P $u \to v$
u, v jsou listy
Kdyby u nebyl list: $\exists k$ $\{k, u\}$ je hrana, která neleží na cestě
$k \in P \Rightarrow$ část cesty $u \dots k + \{u, k\}$ tvoří cyklus ↯
$k \notin P$: $k \{u, k\}, P$ je delší cesta ↯

Lemma: Nechť v je list grafu G. Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G - v$ je strom

Dk: $\Rightarrow$ $G - v$ je souvislý – pokud mezi $x, y \neq v$ $\exists$ cesta $\Rightarrow$ leží i v $G - v$, protože list má $\deg = 1$
~~souvislost~~ acyklický ez, odebráním nevznikne cyklus

$\Leftarrow$ G souvislý: $\forall x, y \neq v$ $\exists$ cesta v $G - v$, ale ta je i v G
cesty $x - v$: nechť $s :=$ soused v
$\forall x$ $\left.\begin{array}{l} x \sim s \\ \wedge\ s \sim v \end{array}\right\}$ tranz $\Rightarrow x \sim v$

G acyklický: v má $\deg 1 \Rightarrow$ neleží na žádné kružnici