



IEL – protokol k projektu

Jan Schoř
xschorj00

14. prosince 2024

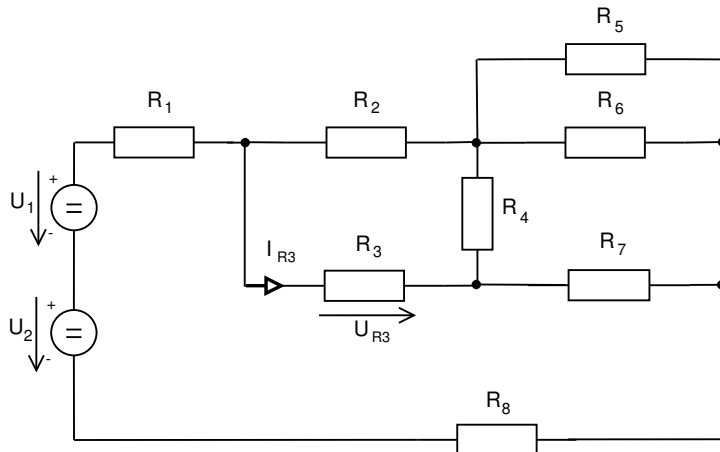
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	4
3	Příklad 3	6
4	Příklad 4	8
5	Příklad 5	10
6	Shrnutí výsledků	12

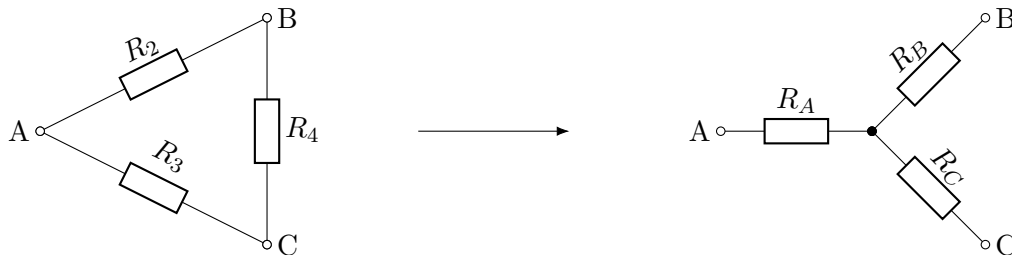
Příklad 1

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

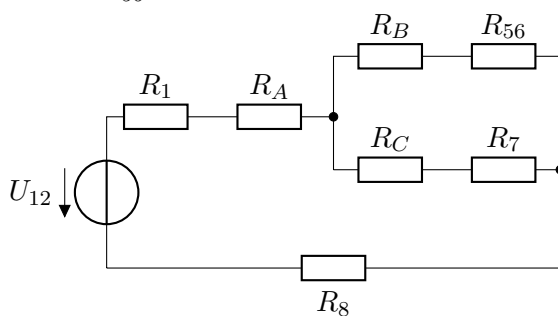
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
F	125	65	510	500	550	250	300	800	330	250



Rezistory R_2 , R_3 a R_4 tvoří trojúhelník. Použijeme převod a nahradíme je rezistory R_A , R_B a R_C .



Nahradíme tedy rezistory v obvodu za R_A , R_B a R_C . Při této příležitosti také zjednodušíme některé části obvodu. Zdroje U_1 a U_2 nahradíme jedním zdrojem U_{12} . Rezistory R_5 a R_6 nahradíme jedním rezistorem R_{56} .

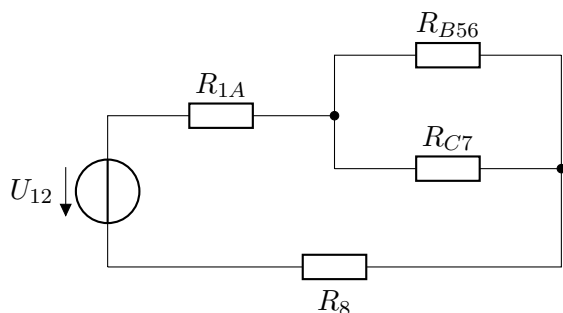


$$U_{12} = U_1 + U_2$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6}$$

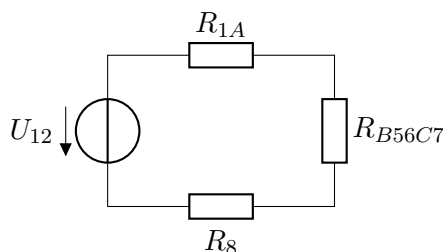
$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \quad R_b = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \quad R_c = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Opět zjednodušíme obvod a překreslíme všechny sériově zapojené rezistory do jednoho.



$$\begin{aligned} R_{1A} &= R_1 + R_A \\ R_{B56} &= R_B + R_{56} \\ R_{C7} &= R_C + R_7 \end{aligned}$$

Zjednodušíme paralelně zapojené rezistory do jednoho.



$$R_{B56C7} = \frac{R_{B56} \cdot R_{C7}}{R_{B56} + R_{C7}}$$

Nyní jsme schopni vypočítat celkový odpor R_{ekv} . Následně vypočítáme celkový proud, který protéká obvodem.

$$R_{ekv} = R_{1A} + R_{B56C7} + R_8$$

$$I = \frac{U_{12}}{R_{ekv}}$$

Spočítáme napětí na rezistoru R_{B56C7} a pomocí toho získáme proud protékající rezistorem R_{C7} .

$$\begin{aligned} U_{RB56C7} &= R_{B56C7} \cdot I \\ I_{RC7} &= \frac{U_{RB56C7}}{R_{C7}} \end{aligned}$$

Cílem úlohy je získat hodnotu na rezistoru R_3 . Pro její výpočet využijeme II. K. Z. Potřebujeme tedy zjistit napětí na všech rezistorech ve smyčce obsahující rezistor R_3 .

$$\begin{aligned} U_{R1} &= I \cdot R_1 \\ U_{R7} &= I_{RC7} \cdot R_7 \\ U_{R8} &= I \cdot R_8 \end{aligned}$$

Známe vše potřebné pro dopočítání napětí na R_3 . Po vypočítání napětí dokážeme spočítat i proud protékající tímto rezistorem.

$$\begin{aligned} U_{R3} &= U_{12} - U_{R1} - U_{R7} - U_{R8} \\ I_{R3} &= \frac{U_{R3}}{R_3} \end{aligned}$$

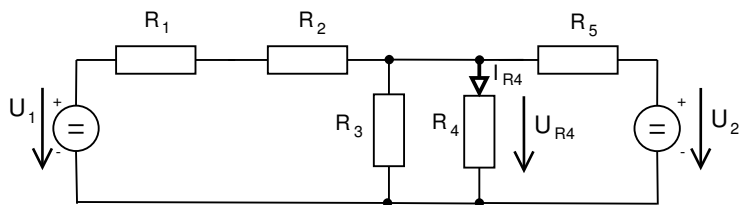
Po dosazení hodnot získáme výsledky:

$$\begin{aligned} U_{R3} &= 42.1208 \text{ V} \\ I_{R3} &= 76.5833 \text{ mA} \end{aligned}$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
F	130	180	350	600	195	650	80



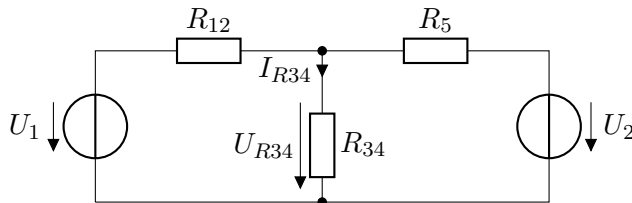
Zjednodušíme rezistory R_1 a R_2 do jednoho rezistoru R_{12} .

$$R_{12} = R_1 + R_2$$

To stejné uděláme pro rezistory R_3 a R_4 .

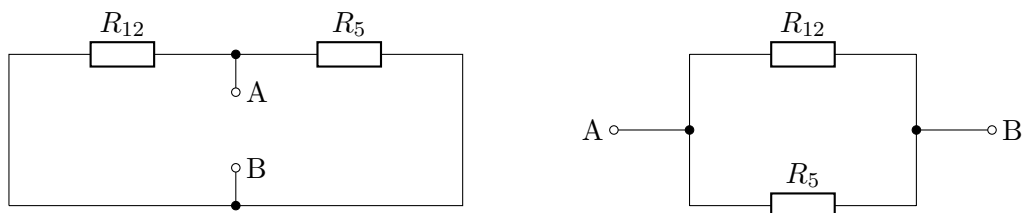
$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Zjednodušený obvod potom bude vypadat takhle:



Na zjednodušeném obvodu již není samotný rezistor R_4 , u kterého potřebujeme zjistit napětí a proud. Místo toho zjistíme tyto hodnoty na rezistoru R_{34} a z nich poté odvodíme požadované výsledky pro R_4 .

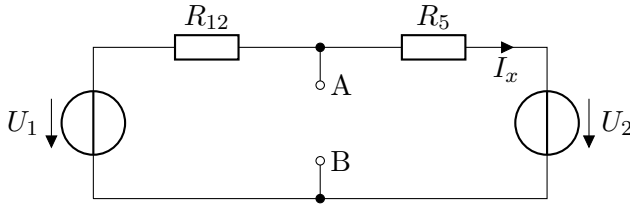
Jako další krok odpojíme zátěž a zkratujeme zdroje napětí, abychom mohli vypočítat vnitřní odpor skutečného zdroje napětí. Určíme si takto 2 body A a B, mezi kterými byl rezistor R_{34} .



Vnitřní odpor R_i je tedy roven celkovému odporu rezistorů R_{12} a R_5 . Použijeme tedy vzoreček pro paralelní zapojení rezistorů.

$$R_i = \frac{R_{12} \cdot R_5}{R_{12} + R_5}$$

Nyní si vytvoříme obvod bez rezistoru R_{34} a pomocí II. K. Z. vypočítáme celkový proud protékající tímto obvodem. Pojmenuji si ho jako proud I_x

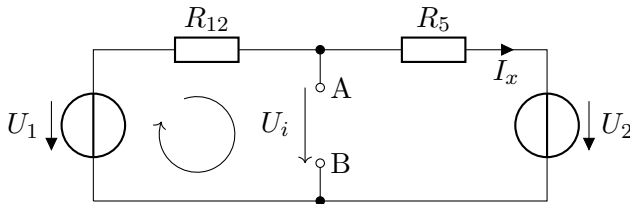


$$0 = I_x \cdot R_{12} + I_x \cdot R_5 + U_2 - U_1$$

$$0 = I_x(R_5 + R_{12}) + U_2 - U_1$$

$$I_x = \frac{U_1 - U_2}{R_5 + R_{12}}$$

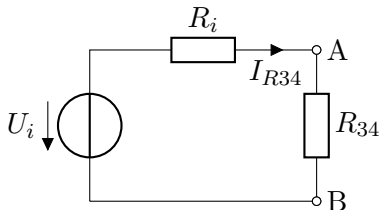
Nyní si podle II. K. Z. vypočítáme napětí ve smyčce a získáme tak napětí U_i mezi body A a B.



$$0 = U_i - U_1 - I_x \cdot R_{12}$$

$$U_i = U_1 + R_{12} \cdot I_x$$

Obvod si nyní dokážeme překreslit na jeho variantu se skutečným zdrojem a zátěží.



Z tohoto obvodu nyní dokážeme dopočítat proud a napětí na rezistoru R_{34} .

$$I_{R34} = \frac{U_i}{R_i + R_{34}}$$

$$U_{R34} = R_{34} \cdot I_{R34}$$

Nyní se vrátíme k obvodu před zjednodušením. Jelikož jsou rezistory R_3 a R_4 zapojeny paralelně, napětí na nich bude stejné jako na rezistoru R_{34} . Jediné, co je tedy třeba dopočítat, je proud na R_4 , který vypočítáme pomocí vzorečku.

$$U_{R4} = U_{R34}$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R34}}{R_4}$$

Po dosazení hodnot vypočítáme konkrétní hodnoty U_{R4} I_{R4} .

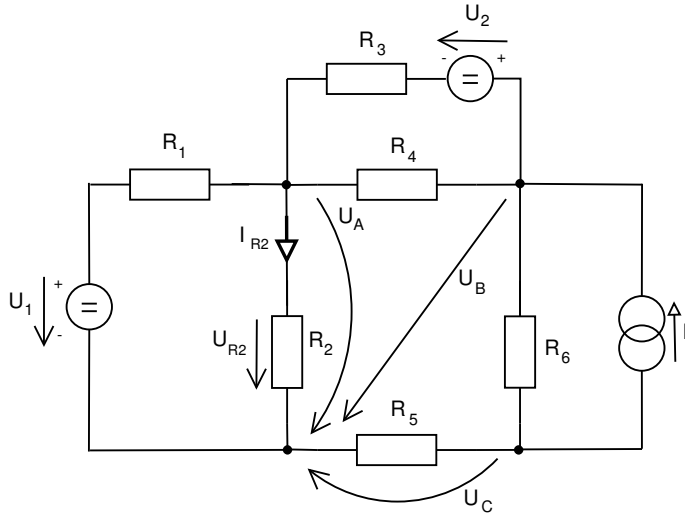
$$U_{R4} = 118.0477 \text{ V}$$

$$I_{R4} = 181.6119 \text{ mA}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	I [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
A	120	50	0.7	53	49	65	39	32	48



Tvorba rovnice pro každý uzel (A, B, C) podle I. K. Z.:

$$\begin{aligned}
 A: \quad & \frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A + U_2 - U_B}{R_3} + \frac{U_B - U_A}{R_4} - \frac{U_A}{R_2} = 0 \\
 B: \quad & \frac{U_A + U_2 - U_B}{R_3} + I - \frac{U_B - U_C}{R_6} - \frac{U_B - U_A}{R_4} = 0 \\
 C: \quad & \frac{U_B - U_C}{R_6} - I - \frac{U_C}{R_5} = 0
 \end{aligned}$$

Úprava rovnic pro dosazení do matice:

$$\begin{aligned}
 A: \quad & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right)U_A + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_B + 0U_C = \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} \\
 B: \quad & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_A - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right)U_B + \frac{1}{R_6}U_C = -I - \frac{U_2}{R_3} \\
 C: \quad & 0U_A + \frac{1}{R_6}U_B - \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_C = I
 \end{aligned}$$

Maticový tvar rovnic:

$$\begin{bmatrix}
 -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\
 \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right) & \frac{1}{R_6} \\
 0 & \frac{1}{R_6} & -\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_A \\
 U_B \\
 U_C
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} \\
 -I - \frac{U_2}{R_3} \\
 I
 \end{bmatrix}$$

Po dosazení hodnot získáme výsledek U_A, U_B, U_C :

$$\begin{aligned}
 U_A &= 49.2546 \text{ V} \\
 U_B &= 59.9700 \text{ V} \\
 U_C &= 10.5480 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Napětí mezi uzlem U_A a stanoveným referenčním uzlem je rovno napětí na rezistoru R_2 .

Pomocí Ohmova zákona dokážeme vypočítat proud I_{R2} :

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$I_{R2} = 1.0052 \text{ A}$$

$$U_{R2} = U_A = 49.2546 \text{ V}$$

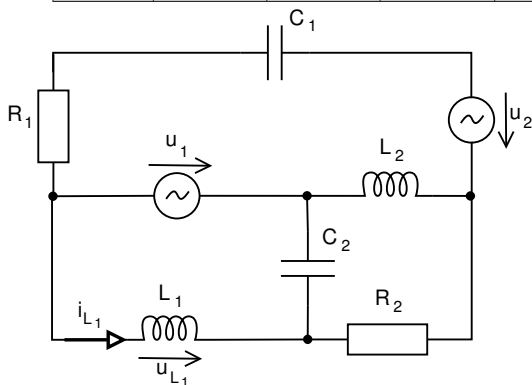
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_1} = U_{L_1} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_1})$ určete $|U_{L_1}|$ a φ_{L_1} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
F	2	3	12	10	170	80	150	90	65



Vytvořím si proudové smyčky a vytvořím si soustavu tří lineárních rovnic.

$$i_A : Z_{C1} \cdot I_A + R_1 \cdot I_A + U_1 + Z_{L2} \cdot (I_A - I_C) - U_2 = 0$$

$$i_B : Z_{L1} \cdot I_B + Z_{C2} \cdot (I_B - I_C) - U_1 = 0$$

$$i_C : R_2 \cdot I_C + Z_{L2} \cdot (I_C - I_A) + Z_{C2} \cdot (I_C - I_B) = 0$$

$$i_A : Z_{C1} \cdot I_A + R_1 \cdot I_A + Z_{L2} \cdot I_A + 0 \cdot I_B - Z_{L2} \cdot I_C = U_2 - U_1$$

$$i_B : 0 \cdot I_A + Z_{L1} \cdot I_B + Z_{C2} \cdot I_B - Z_{C2} \cdot I_C = U_1$$

$$i_C : -Z_{L2} \cdot I_A - Z_{C2} \cdot I_B + R_2 \cdot I_C + Z_{L2} \cdot I_C + Z_{C2} \cdot I_C = 0$$

$$i_A : (Z_{C1} + R_1 + Z_{L2})I_A + 0I_B - Z_{L2} \cdot I_C = U_2 - U_1$$

$$i_B : 0I_A + (Z_{L1} + Z_{C2})I_B - Z_{C2} \cdot I_C = U_1$$

$$i_C : -Z_{L2} \cdot I_A - Z_{C2} \cdot I_B + (R_2 + Z_{L2} + Z_{C2}) \cdot I_C = 0$$

Nyní převedeme rovnice do matice a získáme tak hodnoty I_A , I_B a I_C :

$$\begin{bmatrix} Z_{C1} + R_1 + Z_{L2} & 0 & -Z_{L2} \\ 0 & Z_{L1} + Z_{C2} & -Z_{C2} \\ -Z_{L2} & -Z_{C2} & R_2 + Z_{L2} + Z_{C2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - U_1 \\ U_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proud I_B je roven proudu na cívce L_1 . Vypočítáme si tedy velikost tohoto proudu a z něj dopočítáme napětí.

$$\begin{aligned}I_{L1} &= I_B \\U_{L1} &= I_{L1} \cdot Z_{L1} \\|U_{L1}| &= 1.3508 \text{ V}\end{aligned}$$

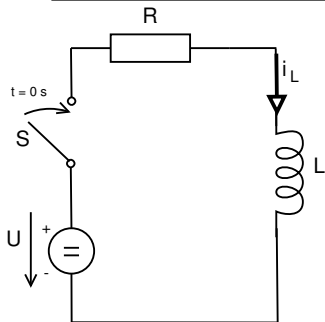
Dopočítáme fázový posuv pro φ_{L1} . Za A a B si dosadíme reálnou a imaginární část proudu protékajícího L_1 .

$$\begin{aligned}\varphi_{L1} &= \arctan\left(\frac{A}{B}\right) \\ \varphi_{L1} &= -1.4730 \text{ rad}\end{aligned}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
F	25	10	50	8



Hodnoty v obvodu dokážeme popsat třemi rovnicemi:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_R}{R} \implies u_R = R \cdot i \\ U &= u_R + u_L \\ i' &= \frac{u_L}{L}; \quad i(0) = i_{LP} \end{aligned}$$

Dosadíme vyjádřené u_R z první rovnice do druhé.

$$U = R \cdot i + u_L \implies u_L = U - R \cdot i$$

Hodnotu u_L následně můžeme dosadit do 3. rovnice:

$$\begin{aligned} i' &= \frac{U - i \cdot R}{L} \\ L \cdot i' &= U - i \cdot R \\ U &= L \cdot i' + R \cdot i; \quad i(0) = i_{LP} \end{aligned}$$

Nyní máme vytvořenou diferenciální rovnici. Sestavíme si charakteristickou rovnici.

$$i' = \lambda; \quad i = 1$$

Dosadíme zaměněné hodnoty pro i' a i do diferenciální rovnice a vyjádříme si λ .

$$L \cdot \lambda + R = 0 \implies \lambda = -\frac{R}{L}$$

Vypíšeme si očekávané řešení a dosadíme za λ hodnoty, které jsme si vyjádřili.

$$\begin{aligned} i(t) &= k(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ i(t) &= k(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \end{aligned}$$

Nyní si rovnici zderivujeme a dosadíme ji do diferenciální rovnice. Takhle vytvořenou rovnici potom integrujeme.

$$\begin{aligned}i'(t) &= k'(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} \\k'(t) &= \frac{U}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \\k(t) &= \frac{\frac{U}{R}}{\frac{L}{L}} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k \\k(t) &= \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k\end{aligned}$$

Dosadíme $k(t)$ do očekávaného řešení.

$$\begin{aligned}i_L &= \left(\frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\i_L &= \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\i_L &= \frac{U}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty pro $t = 0$ a dopočítáme derivační konstantu:

$$\begin{aligned}8 &= \frac{25}{50} + k \cdot e^{-\frac{50}{10} \cdot 0} \\k &= 7.5\end{aligned}$$

Jakmile známe derivační konstantu, jsme schopni vytvořit funkci pro výpočet i_L v závislosti na čase t . Dosadíme tedy zadané hodnoty.

$$i_L = \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5t}$$

Díky Ohmově zákonu víme, že by se měl proud v obvodu přibližovat k 500 mA. Pojďme si tedy dosadit hodnoty pro $t = 0$; $t = 0.2$; $t = 0.5$; $t = 1$ a $t = 100$:

$$\begin{aligned}i_L(0) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 0} = 8 \text{ A} \\i_L(0.2) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 0.2} = 3.2591 \text{ A} \\i_L(0.5) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 0.5} = 1.1156 \text{ A} \\i_L(1) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 1} = 0.5505 \text{ A} \\i_L(100) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 100} = 0.5 \text{ A}\end{aligned}$$

Tímto jsme si ověřili, že vzoreček pro funkci funguje.

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	F	$U_{R3} = 42.1208 \text{ V}$ $I_{R3} = 76.5833 \text{ mA}$
2	F	$U_{R4} = 42.1208 \text{ V}$ $I_{R4} = 118.0477 \text{ mA}$
3	A	$U_{R2} = 49.2546 \text{ V}$ $I_{R2} = 1.0052 \text{ A}$
4	F	$ U_{L1} = 1.3508 \text{ V}$ $\varphi_{L1} = -1.4730 \text{ rad}$
5	F	$i_L = \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5t}$