



## IEL – protokol k projektu

Jan Schoř  
xschorj00

14. prosince 2024

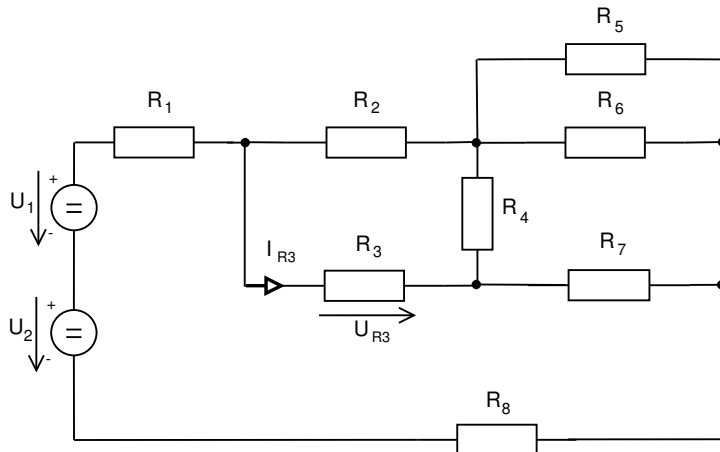
### Obsah

|          |                         |           |
|----------|-------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Příklad 1</b>        | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Příklad 2</b>        | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Příklad 3</b>        | <b>6</b>  |
| <b>4</b> | <b>Příklad 4</b>        | <b>8</b>  |
| <b>5</b> | <b>Příklad 5</b>        | <b>9</b>  |
| <b>6</b> | <b>Shrnutí výsledků</b> | <b>11</b> |

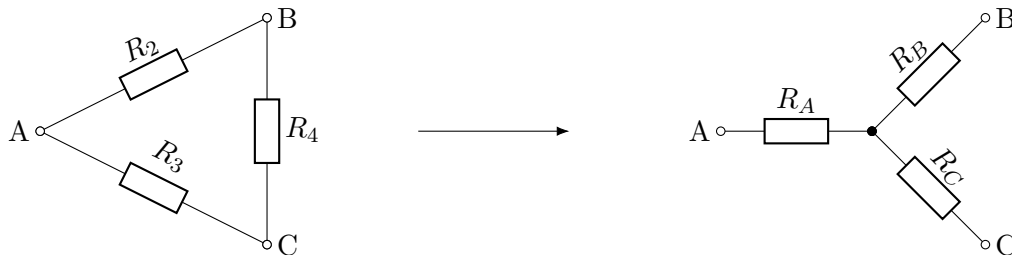
## Příklad 1

Stanovte napětí  $U_{R3}$  a proud  $I_{R3}$ . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

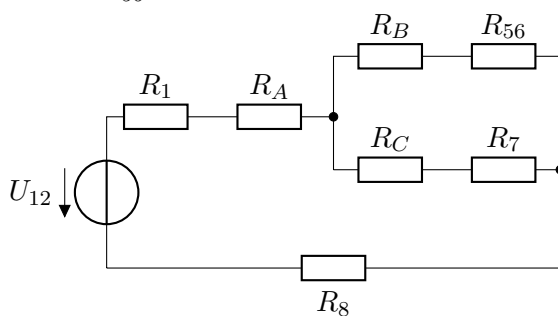
| sk. | $U_1$ [V] | $U_2$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $R_3$ [ $\Omega$ ] | $R_4$ [ $\Omega$ ] | $R_5$ [ $\Omega$ ] | $R_6$ [ $\Omega$ ] | $R_7$ [ $\Omega$ ] | $R_8$ [ $\Omega$ ] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| F   | 125       | 65        | 510                | 500                | 550                | 250                | 300                | 800                | 330                | 250                |



Rezistory  $R_2$ ,  $R_3$  a  $R_4$  tvoří trojúhelník. Použijeme převod a nahradíme je rezistory  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ .



Nahradíme tedy rezistory v obvodu za  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ . Při této příležitosti také zjednodušíme některé části obvodu. Zdroje  $U_1$  a  $U_2$  nahradíme jedním zdrojem  $U_{12}$ . Rezistory  $R_5$  a  $R_6$  nahradíme jedním rezistorem  $R_{56}$ .

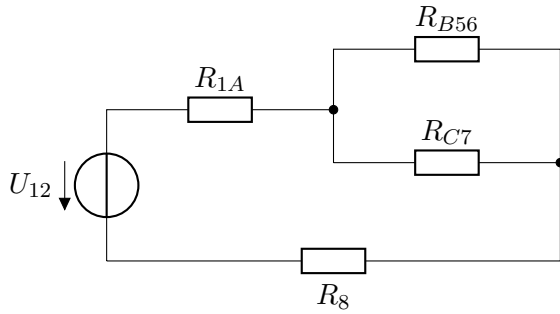


$$U_{12} = U_1 + U_2$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6}$$

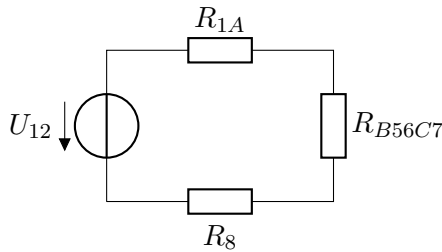
$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \quad R_b = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \quad R_c = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Opět zjednodušíme obvod a překreslíme všechny sériově zapojené rezistory do jednoho.



$$\begin{aligned} R_{1A} &= R_1 + R_A \\ R_{B56} &= R_B + R_{56} \\ R_{C7} &= R_C + R_7 \end{aligned}$$

Zjednodušíme paralelně zapojené rezistory do jednoho.



$$R_{B56C7} = \frac{R_{B56} \cdot R_{C7}}{R_{B56} + R_{C7}}$$

Nyní jsme schopni vypočítat celkový odpor  $R_{ekv}$ . Následně vypočítáme celkový proud, který protéká obvodem.

$$\begin{aligned} R_{ekv} &= R_{1A} + R_{B56C7} + R_8 \\ I &= \frac{U_{12}}{R_{ekv}} \end{aligned}$$

Spočítáme napětí na rezistoru  $R_{B56C7}$  a pomocí toho získáme proud protékající rezistorem  $R_{C7}$ .

$$\begin{aligned} U_{RB56C7} &= R_{B56C7} \cdot I \\ I_{RC7} &= \frac{U_{RB56C7}}{R_{C7}} \end{aligned}$$

Cílem úlohy je získat hodnotu na rezistoru  $R_3$ . Pro její výpočet využijeme II. K. Z. Potřebujeme tedy zjistit napětí na všech rezistorech ve smyčce obsahující rezistor  $R_3$ .

$$\begin{aligned} U_{R1} &= I \cdot R_1 \\ U_{R7} &= I_{RC7} \cdot R_7 \\ U_{R8} &= I \cdot R_8 \end{aligned}$$

Známe vše potřebné pro dopočítání napětí na  $R_3$ . Po vypočítání napětí dokážeme spočítat i proud protékající tímto rezistorem.

$$\begin{aligned} U_{R3} &= U_{12} - U_{R1} - U_{R7} - U_{R8} \\ I_{R3} &= \frac{U_{R3}}{R_3} \end{aligned}$$

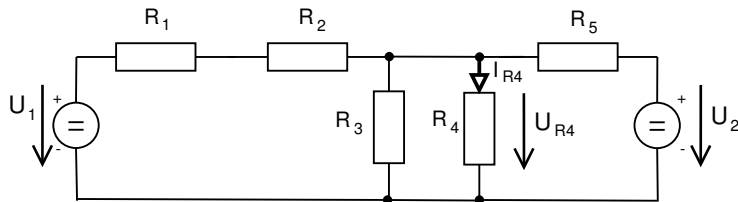
Po dosazení hodnot získáme výsledky:

$$\begin{aligned} U_{R3} &= 42.1208 \text{ V} \\ I_{R3} &= 76.5833 \text{ mA} \end{aligned}$$

## Příklad 2

Stanovte napětí  $U_{R4}$  a proud  $I_{R4}$ . Použijte metodu Théveninovy věty.

| sk. | $U_1$ [V] | $U_2$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $R_3$ [ $\Omega$ ] | $R_4$ [ $\Omega$ ] | $R_5$ [ $\Omega$ ] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| F   | 130       | 180       | 350                | 600                | 195                | 650                | 80                 |



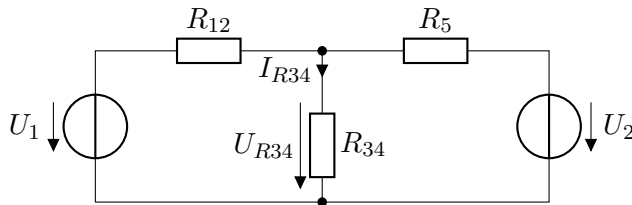
Zjednodušíme rezistory  $R_1$  a  $R_2$  do jednoho rezistoru  $R_{12}$ .

$$R_{12} = R_1 + R_2$$

To stejné uděláme pro rezistory  $R_3$  a  $R_4$ .

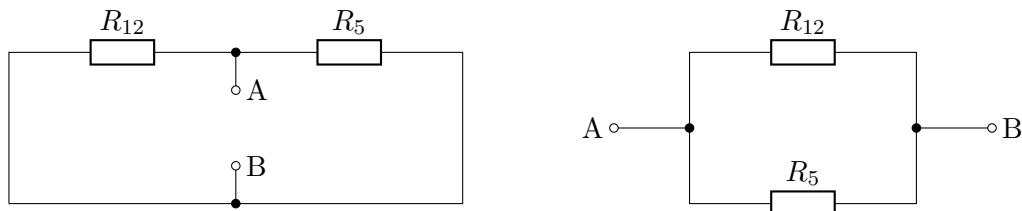
$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Zjednodušený obvod potom bude vypadat takhle:



Na zjednodušeném obvodu již není samotný rezistor  $R_4$ , u kterého potřebujeme zjistit napětí a proud. Místo toho zjistíme tyto hodnoty na rezistoru  $R_{34}$  a z nich poté odvodíme požadované výsledky pro  $R_4$ .

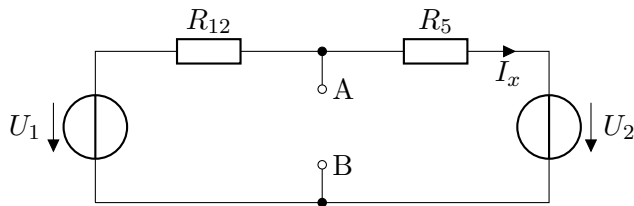
Jako další krok odpojíme zátěž a zkratujeme zdroje napětí, abychom mohli vypočítat vnitřní odpor skutečného zdroje napětí. Určíme si takto 2 body A a B, mezi kterými byl rezistor  $R_{34}$ .



Vnitřní odpor  $R_i$  je tedy roven celkovému odporu rezistorů  $R_{12}$  a  $R_5$ . Použijeme tedy vzoreček pro paralelní zapojení rezistorů.

$$R_i = \frac{R_{12} \cdot R_5}{R_{12} + R_5}$$

Nyní si vytvořím obvod bez rezistoru  $R_{34}$  a pomocí II. K. Z. vypočítám celkový proud protékající tímto obvodem. Pojmenuji si ho jako proud  $I_x$

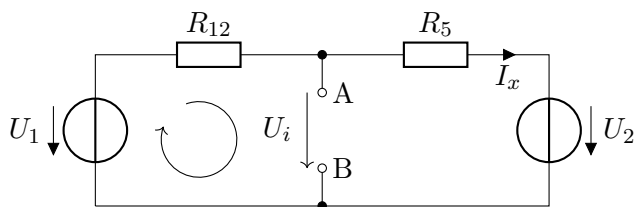


$$0 = I_x \cdot R_{12} + I_x \cdot R_5 + U_2 - U_1$$

$$0 = I_x(R_5 + R_{12}) + U_2 - U_1$$

$$I_x = \frac{U_1 - U_2}{R_5 + R_{12}}$$

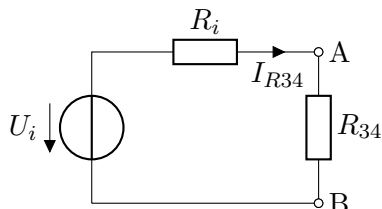
Nyní si podle II. K. Z. vypočítáme napětí ve smiře a získáme tak napětí  $U_i$  mezi body A a B.



$$0 = U_i - U_1 - I_x \cdot R_{12}$$

$$U_i = U_1 + R_{12} \cdot I_x$$

Obvod si nyní dokážeme překreslit na jeho variantu se skutečným zdrojem a zátěží.



Z tohoto obvodu nyní dokážeme dopočítat proud a napětí na rezistoru  $R_{34}$ .

$$I_{R34} = \frac{U_i}{R_i + R_{34}}$$

$$U_{R34} = R_{34} \cdot I_{R34}$$

Nyní se vrátíme k obvodu před zjednodušením. Jelikož jsou rezistory  $R_3$  a  $R_4$  zapojeny paralelně, napětí na nich bude stejné jako na rezistoru  $R_{34}$ . Jediné, co je tedy třeba dopočítat, je proud na  $R_4$ , který vypočítáme pomocí vzorečku.

$$U_{R4} = U_{R34}$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R34}}{R_4}$$

Po dosazení hodnot vypočítáme konkrétní hodnoty  $U_{R4}$   $I_{R4}$ .

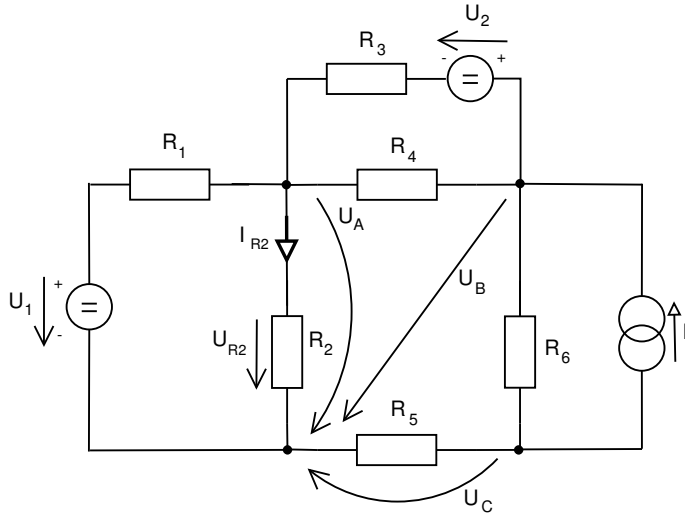
$$U_{R4} = 118.0477 \text{ V}$$

$$I_{R4} = 181.6119 \text{ mA}$$

### Příklad 3

Stanovte napětí  $U_{R2}$  a proud  $I_{R2}$ . Použijte metodu uzlových napětí ( $U_A, U_B, U_C$ ).

| sk. | $U_1$ [V] | $U_2$ [V] | $I$ [A] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $R_3$ [ $\Omega$ ] | $R_4$ [ $\Omega$ ] | $R_5$ [ $\Omega$ ] | $R_6$ [ $\Omega$ ] |
|-----|-----------|-----------|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| A   | 120       | 50        | 0.7     | 53                 | 49                 | 65                 | 39                 | 32                 | 48                 |



Tvorba rovnice pro každý uzel (A, B, C) podle I. K. Z.:

$$\begin{aligned}
 A: \quad & \frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A + U_2 - U_B}{R_3} + \frac{U_B - U_A}{R_4} - \frac{U_A}{R_2} = 0 \\
 B: \quad & \frac{U_A + U_2 - U_B}{R_3} + I - \frac{U_B - U_C}{R_6} - \frac{U_B - U_A}{R_4} = 0 \\
 C: \quad & \frac{U_B - U_C}{R_6} - I - \frac{U_C}{R_5} = 0
 \end{aligned}$$

Úprava rovnic pro dosazení do matice:

$$\begin{aligned}
 A: \quad & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right)U_A + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_B + 0U_C = \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} \\
 B: \quad & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_A - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right)U_B + \frac{1}{R_6}U_C = -I - \frac{U_2}{R_3} \\
 C: \quad & 0U_A + \frac{1}{R_6}U_B - \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_C = I
 \end{aligned}$$

Maticový tvar rovnic:

$$\begin{bmatrix}
 -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\
 \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right) & \frac{1}{R_6} \\
 0 & \frac{1}{R_6} & -\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_A \\
 U_B \\
 U_C
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} \\
 -I - \frac{U_2}{R_3} \\
 I
 \end{bmatrix}$$

Po dosazení hodnot získáme výsledek  $U_A, U_B, U_C$ :

$$\begin{aligned}
 U_A &= 49.2546 \text{ V} \\
 U_B &= 59.9700 \text{ V} \\
 U_C &= 10.5480 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Napětí mezi uzlem  $U_A$  a stanoveným referenčním uzlem je rovno napětí na rezistoru  $R_2$ .

Pomocí Ohmova zákona dokážeme vypočítat proud  $I_{R2}$ :

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$I_{R2} = 1.0052 \text{ A}$$

$$U_{R2} = U_A = 49.2546 \text{ V}$$

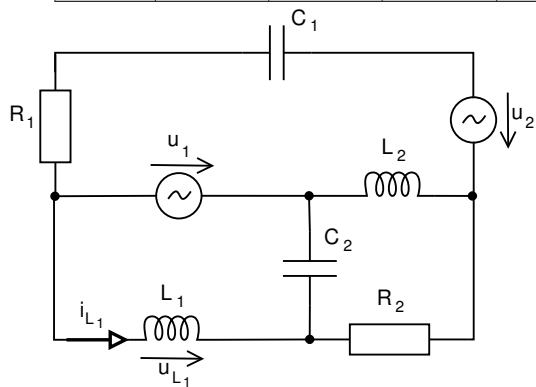
## Příklad 4

Pro napájecí napětí platí:  $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$ ,  $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$ .

Ve vztahu pro napětí  $u_{L_1} = U_{L_1} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_1})$  určete  $|U_{L_1}|$  a  $\varphi_{L_1}$ . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

| sk. | $U_1$ [V] | $U_2$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $L_1$ [mH] | $L_2$ [mH] | $C_1$ [ $\mu$ F] | $C_2$ [ $\mu$ F] | $f$ [Hz] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|------------|------------|------------------|------------------|----------|
| F   | 2         | 3         | 12                 | 10                 | 170        | 80         | 150              | 90               | 65       |

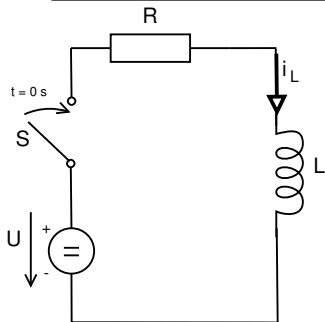




## Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase  $t = 0$  [s] sepne spínač  $S$ . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení  $i_L = f(t)$ . Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

| sk. | $U$ [V] | $L$ [H] | $R$ [ $\Omega$ ] | $i_L(0)$ [A] |
|-----|---------|---------|------------------|--------------|
| F   | 25      | 10      | 50               | 8            |



Hodnotu  $u_L$  následně můžeme dosadit do 3. rovnice:

$$\begin{aligned} i' &= \frac{U - i \cdot R}{L} \\ L \cdot i' &= U - i \cdot R \\ U &= L \cdot i' + R \cdot i; \quad i(0) = i_{LP} \end{aligned}$$

Nyní máme vytvořenou diferenciální rovnici. Sestavíme si charakteristickou rovnici.

$$i' = \lambda; \quad i = 1$$

Dosadíme zaměněné hodnoty pro  $i'$  a  $i$  do diferenciální rovnice a vyjádříme si  $\lambda$ .

$$L \cdot \lambda + R = 0 \implies \lambda = -\frac{R}{L}$$

Vypíšeme si očekávané řešení a dosadíme za  $\lambda$  hodnoty, které jsme si vyjádřili.

$$\begin{aligned} i(t) &= k(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ i(t) &= k(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \end{aligned}$$

Nyní si rovnici zderivujeme a dosadíme ji do diferenciální rovnice. Takhle vytvořenou rovnici potom integrujeme.

$$\begin{aligned} i'(t) &= k'(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ k'(t) &= \frac{U}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \\ k(t) &= \frac{U}{\frac{R}{L}} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k \\ k(t) &= \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k \end{aligned}$$

Dosadíme  $k(t)$  do očekávaného řešení.

$$\begin{aligned} i_L &= \left( \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + k \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\ i_L &= \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\ i_L &= \frac{U}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty pro  $t = 0$  a dopočítáme derivační konstantu:

$$\begin{aligned} 8 &= \frac{25}{50} + k \cdot e^{-\frac{50}{10} \cdot 0} \\ k &= 7.5 \end{aligned}$$

Jakmile známe derivační konstantu, jsme schopni vytvořit funkci pro výpočet  $i_L$  v závislosti na čase  $t$ . Dosadíme tedy zadané hodnoty.

$$i_L = \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5t}$$

Díky Ohmově zákonu víme, že by se měl proud v obvodu přibližovat k 500 mA. Pojďme si tedy dosadit hodnoty pro  $t = 0$ ,  $t = 0.2$ ;  $t = 0.5$ ,  $t = 1$  a  $t = 100$ :

$$\begin{aligned}i_L(0) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 0.2} = 8 \text{ A} \\i_L(0.2) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 0.2} = 3.2591 \text{ A} \\i_L(0.5) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 0.5} = 1.1156 \text{ A} \\i_L(1) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 1} = 0.5505 \text{ A} \\i_L(100) &= \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5 \cdot 100} = 0.5 \text{ A}\end{aligned}$$

Tímto jsme si ověřili, že vzoreček pro funkci funguje.

## Shrnutí výsledků

| Příklad | Skupina | Výsledky  |
|---------|---------|---|
| 1       | F       | $U_{R3} = 42.1208 \text{ V}$ $I_{R3} = 76.5833 \text{ mA}$  |
| 2       | F       | $U_{R4} = 42.1208 \text{ V}$ $I_{R4} = 118.0477 \text{ mA}$ |
| 3       | A       | $U_{R2} = 49.2546 \text{ V}$ $I_{R2} = 1.0052 \text{ A}$    |
| 4       | F       | $ U_{L1}  =$ $\varphi_{L1} =$                               |
| 5       | F       | $i_L = \frac{1}{2} + 7.5 \cdot e^{-5t}$                     |