

Wstęp

Układ równań liniowych jest to pewny zbiór równań w postaci:

$$Ax = b$$

Gdzie A jest macierzą o wymiarach $N \times N$, natomiast x oraz b są wektorami gdzie x jest tym szukany. Układ równań liniowych można zapisać w postaci:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1$$

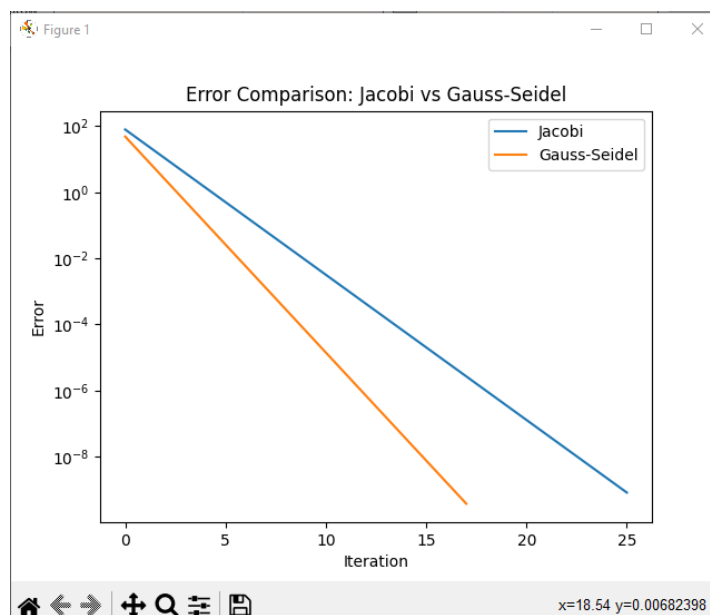
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = b_2$$

I tak dalej...

Jedną z metod rozwiązywania układów równań liniowych jest metoda iteracyjna. Polega ona na dążeniu do rzeczywistego rozwiązania poprzez wyznaczanie coraz to dokładniejszego rozwiązania w każdej iteracji. Aby ta metoda miała jakikolwiek sens, należy zdefiniować warunek stopu. W przypadku analizowanych metod warunkiem stopu jest wartość wektora residuum albo odpowiednia liczba iteracji.

Zadania

Pierwsze zadanie polegało na porównaniu ze sobą wartości błędu wektora residuum metod Jacobiego oraz Gaussa-Seidla. Wyniki przedstawione są na rysunku.



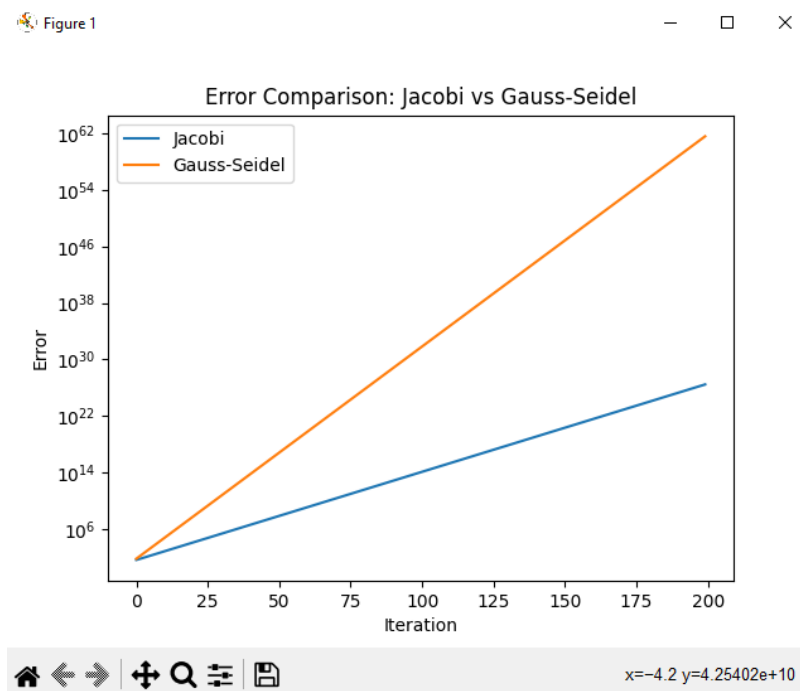
Warto także porównać ze sobą czas wykonania.

Metoda Jacobiego – 5,6 sekundy, 26 iteracji

Metoda Gaussa-Seidla – 3,3 sekundy, 18 iteracji

Łatwo zatem zauważyć, że metoda Jacobiego wykonała się dłużej oraz potrzebowała więcej iteracji. Natomiast jeżeli chodzi o wartość błędu, to są one identyczne i wynoszą około $8,15 \cdot 10^{-10}$

Drugie zadanie polegało na porównaniu czasu wykonania i wartości błędów dla zadanej macierzy.



Niestety w tym przypadku obie metody zostały przerwane ze względu na limit iteracji a nie wartość błędu, ponieważ wartość błędu tylko rosta.

Metoda Jacobiego – 39,8 sekund, 200 iteracji

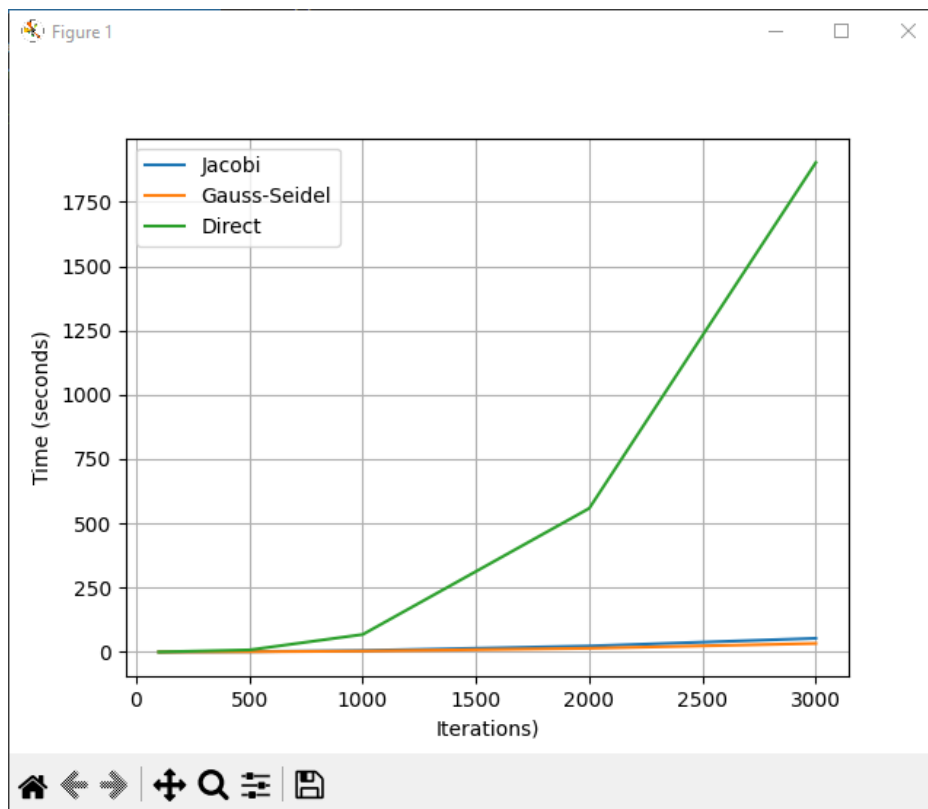
Metoda Gaussa-Seidla – 36,7 sekund, 200 iteracji

Kolejne zadanie polegało na próbie wyznaczenia rozwiązania metodą bezpośrednią. Ja Implementowałem metodę faktoryzacji LU.

Ta metoda okazała się wolniejsza, lecz dużo bardziej skuteczna niż dwie poprzednie. Wartość błędu wyniosła bowiem $1,16 \cdot 10^{-13}$ a czas to 61 sekund. Może to sugerować, że faktoryzacji LU jest lepsza.

Ostatnie zadanie polegało na porównaniu ze sobą czasów rozwiązywania układów równań w zależności od liczby niewiadomych (rozmiaru macierzy) N . Przyjąłem wartości $N = 100, 500, 1000, 2000, 3000$.

Wyniki przedstawione są na wykresie.



Jak widać faktoryzacji LU pomimo, że jest dokładniejsza to czasowo wypada dużo gorzej, ze względu na złożoność obliczeniową $O(n^3)$.

Wnioski

Pomimo, że metoda faktoryzacji LU jest bardziej dokładna to zajmuje dużo więcej czasu. Dla większych macierzy jest niepraktyczna lecz jeżeli ktoś dysponuje dużą ilością czasu to pewnie warto z niej korzystać. Natomiast metody iteracyjne czasami zawodzą, co prowadzi do myślenia, że żadna z

trzech badanych metod nie jest idealna, ponieważ wszystkie mają jakiś problem.