6.1 Метод на Тејлор (ОДР)

Чекор 1: Општа формула (од скрипта) + што значи во пракса

Почнуваме од ОДР:

$$y'(t) = f(t, y)$$

Решението во следниот јазол се добива со Тејлоров развој:

$$y(t_i + h) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{y''(t_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(t_i)}{n!}h^n$$

Скриптата го пишува тоа концизно како:

$$y_{i+1} = y_i + h\,T^{(n)}(t_i, y_i)$$

каде:

$$T^{(n)}(t_i, y_i) = f(t_i, y_i) + \frac{h}{2!}f'(t_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(t_i, y_i)$$

Клучното тука (за имплементација): треба да умеат да ги пресметаат $f, f', f'', \ldots$(изводи по tдолж решението).

Чекор 1 (конкретен пример): избор на ОДР и параметри

Ќе земеме пример што е најлесен за Тејлор (изводите се „чисти“):

$$y'(t) = y, y(0) = y_0 = 1$$

Избираме:

- ред на Тејлор: $n = 3$(до член h^3)
- чекор: $h = 0.1$
- почетно: $t_0 = 0,\ y_0 = 1$

Чекор 2: Пишување на формулата со конкретната функција f

Тука:

$$f(t, y) = y$$

Сега треба $f'(t, y)$и $f''(t, y)$(изводи по tдолж решението). Бидејќи $y' = y$:

- $y' = y$
- $y'' = y' = y$
- $y''' = y'' = y$

Значи во оваа задача:

$$f = y, f' = y, f'' = y$$

Сега $T^{(3)}$(според (6.9) до f'') е:

$$T^{(3)}(t_i, y_i) = f_i + \frac{h}{2} f_i' + \frac{h^2}{6} f_i''$$

и затоа:

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + \frac{h}{2} y_i + \frac{h^2}{6} y_i)$$
$$\boxed{y_{i+1} = y_i(1 + h \cdot 1 + \frac{h^2}{2} \cdot 1 + \frac{h^3}{6})}$$

За $h = 0.1$:

$$y_1 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} = 1 + 0.1 + 0.005 + \frac{0.001}{6} = 1.1051666667$$

Чекор 3: Итерации (со бројки, како твојот формат)

1) Прв чекор (од t_0до t_1)

Равенка:

$$y_1 = y_0(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6})$$

Вредности: $y_0 = 1$, $h = 0.1$

$$y_1 = 1 \cdot 1.1051666667 = 1.1051666667$$

2) Втор чекор (од t_1до t_2)

Равенка:

$$y_2 = y_1(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6})$$

Вредности: $y_1 = 1.1051666667$, $h = 0.1$

$$y_2 = 1.1051666667 \cdot 1.1051666667 = 1.2213923611$$

3) Трет чекор (од t_2до t_3)

Равенка:

$$y_3 = y_2(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6})$$

Вредности: $y_2 = 1.2213923611$, $h = 0.1$

$$y_3 = 1.2213923611 \cdot 1.1051666667 = 1.3498584971$$

Резултат (табеларно)

- $t_0 = 0.0$, $y_0 = 1.0000000000$
- $t_1 = 0.1$, $y_1 = 1.1051666667$
- $t_2 = 0.2$, $y_2 = 1.2213923611$
- $t_3 = 0.3$, $y_3 = 1.3498584971$

6.2.1 Експлицитен метод на Ојлер

Чекор 1: Општа формула (од скрипта) + конкретна

Општата формула:

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i)$$

Приближно решавање ОДР_2024

За нашиот пример $f(t, y) = y$:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\,y_i = y_i(1 + h)}$$

Чекор 2: Итерација $\boldsymbol{i = 0 \to 1}$

Равенка:

$$y_1 = y_0(1 + h)$$

Вредности: $y_0 = 1$, $h = 0.1$

$$y_1 = 1 \cdot 1.1 = 1.1$$

Чекор 3: Итерација $\boldsymbol{i = 1 \to 2}$

$$y_2 = y_1(1 + h)$$

Вредности: $y_1 = 1.1$, $h = 0.1$

$$y_2 = 1.1 \cdot 1.1 = 1.21$$

Чекор 4: Итерација $\boldsymbol{i = 2 \to 3}$

$$y_3 = y_2(1 + h)$$

Вредности: $y_2 = 1.21$, $h = 0.1$

$$y_3 = 1.21 \cdot 1.1 = 1.331$$

Резултат (експл. Ојлер):

- $y_0 = 1$
- $y_1 = 1.1$
- $y_2 = 1.21$
- $y_3 = 1.331$

6.2.2 Имплицитен метод на Ојлер

Чекор 1: Општа равенка (од скрипта) + конкретна

Општа имплицитна шема:

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

За нашиот пример $f(t, y) = y$:

$$y_{i+1} = y_i + h\,y_{i+1}$$

Пренеси на една страна:

$$y_{i+1}(1 - h) = y_i \Rightarrow \boxed{y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - h}}$$

(Ова е „среќен“ пример каде може аналитички да се реши; воопшто, скриптата вели дека често треба Њутн за y_{i+1}.)

Чекор 2: Итерација $i = 0 \to 1$

$$y_1 = \frac{y_0}{1 - h}$$

Вредности: $y_0 = 1$, $h = 0.1$

$$y_1 = \frac{1}{0.9} = 1.1111111111$$

Чекор 3: Итерација $i = 1 \to 2$

$$y_2 = \frac{y_1}{1 - h} = \frac{1.1111111111}{0.9} = 1.2345679012$$

Чекор 4: Итерација $i = 2 \to 3$

$$y_3 = \frac{y_2}{1-h} = \frac{1.2345679012}{0.9} = 1.3717421124$$

Резултат (импл. Ојлер):

- $y_1 = 1.1111111111$
- $y_2 = 1.2345679012$
- $y_3 = 1.3717421124$

6.2.3 Подобрен метод на Ојлер (предвидување + корекција)

Чекор 1: Општа формула (од скрипта) + конкретна

Скриптата го дава во форма (предвидување со експл. Ојлер, па корекција со „трапез“):

Општо:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f'(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))]$$

За $f(t, y) = y$:

1. **Предвидување**:

$$y_{i+1}^{(p)} = y_i + h\,y_i = y_i(1+h)$$

2. **Корекција**:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1}^{(p)})$$

Замени $y_{i+1}^{(p)} = y_i(1+h)$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y_i + y_i(1+h)) = y_i[1 + \frac{h}{2}(2+h)]$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i(1 + h + \frac{h^2}{2})}$$

За $h = 0.1$:

$$1 + h + \frac{h^2}{2} = 1 + 0.1 + 0.005 = 1.105$$

Чекор 2: Итерација $\boldsymbol{i = 0 \rightarrow 1}$

(ќе го покажам точно како „предвидување/корекција“)

Предвидување:

$$y_1^{(p)} = y_0(1 + h) = 1 \cdot 1.1 = 1.1$$

Корекција:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(y_0 + y_1^{(p)}) = 1 + 0.05(1 + 1.1) = 1 + 0.105 = 1.105$$

Чекор 3: Итерација $\boldsymbol{i = 1 \rightarrow 2}$

Предвидување:

$$y_2^{(p)} = y_1(1 + h) = 1.105 \cdot 1.1 = 1.2155$$

Корекција:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(y_1 + y_2^{(p)}) = 1.105 + 0.05(1.105 + 1.2155) = 1.105 + 0.116025 = 1.221025$$

Чекор 4: Итерација $\boldsymbol{i = 2 \rightarrow 3}$

Предвидување:

$$y_3^{(p)} = y_2(1 + h) = 1.221025 \cdot 1.1 = 1.3431275$$

Корекција:

$$y_3 = y_2 + 0.05(y_2 + y_3^{(p)}) = 1.221025 + 0.05(1.221025 + 1.3431275) = 1.221025 + 0.128707625 = 1.349732625$$

Резултат (подобрен Ојлер):

- $y_1 = 1.105$
- $y_2 = 1.221025$
- $y_3 = 1.349732625$

Брза споредба (после 3 чекори до $t = 0.3$)

- Еxспл. Ојлер: $y_3 = 1.331$
- Импл. Ојлер: $y_3 \approx 1.371742$
- Подобрен Ојлер: $y_3 \approx 1.349733$
- (Од Тејлор 3-ти ред имавме $y_3 \approx 1.349858$)

6.3.1 Експлицитен Runge–Kutta од 2-ри ред (RK2 midpoint)

Чекор 1: Општи равенки + конкретни (од скрипта)

Општо (скрипта):

$$y_{i+1} = y_i + h\,k_2$$

каде:

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f'(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

Конкретно (бидејќи $f(t, y) = y$):

$$\begin{aligned} k_1 &= y_i \\ k_2 &= y_i + \frac{h}{2}k_1 \\ y_{i+1} &= y_i + h\,k_2 \end{aligned}$$

Чекор 2: Итерација $i = 0 \rightarrow 1$

Равенки:

$$\begin{aligned} &k_1 = f(t_0, y_0) = y_0 \\ &k_2 = f'(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1) = y_0 + \frac{h}{2}k_1 \\ &y_1 = y_0 + h\,k_2 \end{aligned}$$

Вредности: $y_0 = 1$, $h = 0.1$

1. $k_1 = 1$
2. $k_2 = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot 1 = 1 + 0.05 = 1.05$
3. $y_1 = 1 + 0.1 \cdot 1.05 = 1.105$

Чекор 3: Итерација $i = 1 \rightarrow 2$

Вредности: $y_1 = 1.105$, $h = 0.1$

1. $k_1 = y_1 = 1.105$
2. $k_2 = 1.105 + 0.05 \cdot 1.105 = 1.105 + 0.05525 = 1.16025$
3. $y_2 = 1.105 + 0.1 \cdot 1.16025 = 1.221025$

Чекор 4: Итерација $i = 2 \rightarrow 3$

Вредности: $y_2 = 1.221025$

1. $k_1 = 1.221025$
2. $k_2 = 1.221025 + 0.05 \cdot 1.221025 = 1.221025 + 0.06105125 = 1.28207625$
3. $y_3 = 1.221025 + 0.1 \cdot 1.28207625 = 1.349232625$

Резултат (RK2 midpoint):

$$y_1 = 1.105, y_2 = 1.221025, y_3 = 1.349232625$$

6.3.2 „Подобрен RK2“ (Heun / подобрен Ојлер во RK нотација)

Чекор 1: Општи равенки + конкретни (од скрипта)

Скрипта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

каде:

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + h,\, y_i + h\, k_1)$$

Приближно решавање ОДР_2024

Конкретно ($f = y$):

$$k_1 = y_i, k_2 = y_i + h\, k_1$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

Чекор 2: Итерација $i = 0 \to 1$

Вредности: $y_0 = 1$, $h = 0.1$

1. $k_1 = 1$
2. $k_2 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$
3. $y_1 = 1 + 0.05(1 + 1.1) = 1 + 0.105 = 1.105$

Чекор 3: Итерација $i = 1 \to 2$

Вредности: $y_1 = 1.105$

1. $k_1 = 1.105$
2. $k_2 = 1.105 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2155$
3. $y_2 = 1.105 + 0.05(1.105 + 1.2155) = 1.221025$

Чекор 4: Итерација $i = 2 \to 3$

Вредности: $y_2 = 1.221025$

1. $k_1 = 1.221025$
2. $k_2 = 1.221025 + 0.1 \cdot 1.221025 = 1.3431275$
3. $y_3 = 1.221025 + 0.05(1.221025 + 1.3431275) = 1.349732625$

Резултат (Heun / подобрен RK2):

$$y_1 = 1.105, y_2 = 1.221025, y_3 = 1.349732625$$

6.3.3 Експлицитен Runge–Kutta од 4-ти ред (RK4)

Чекор 1: Општи равенки + конкретни (типичен RK4)

Типичниот RK4:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

со:

$$
\begin{aligned}
k_1 &\quad = f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f'(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1) \\
k_3 &= f'(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2) \\
k_4 &= f(t_i + h, y_i + h\, k_3)
\end{aligned}
$$

Конкретно ($f = y$) — секој k е просто вредност на y во таа точка.

$$f_2 = 2x + 3, x_0 = 1$$

Чекор 2: Итерација $\boldsymbol{i = 0 \to 1}$

Вредности: $y_0 = 1$, $h = 0.1$

1. $k_1 = 1$ $(k_1 = 2 \cdot \mathbf{1} + 3)$
2. $k_2 = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot 1 = 1.05(k_2 = 2 \cdot \mathbf{1} + 3 + \frac{0.1}{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{1} + 3)$
3. $k_3 = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot 1.05 = 1.0525$
4. $k_4 = 1 + 0.1 \cdot 1.0525 = 1.10525$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1 + \frac{0.1}{6}(1 + 2 \cdot 1.05 + 2 \cdot 1.0525 + 1.10525) \\
&= 1 + \frac{0.1}{6}(6.31025) = 1 + 0.1051708333 = 1.1051708333
\end{aligned}
$$

Чекор 3: Итерација $\boldsymbol{i = 1 \to 2}$

Вредности: $y_1 = 1.1051708333$

1. $k_1 = 1.1051708333$
2. $k_2 = 1.1051708333 + 0.05k_1 = 1.1604293750$
3. $k_3 = 1.1051708333 + 0.05k_2 = 1.1631923021$
4. $k_4 = 1.1051708333 + 0.1k_3 = 1.2214900635$
5.

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 1.1051708333 + \frac{0.1}{6}(6.976733\ldots) = 1.2214025709
\end{aligned}
$$

(ако ги собереш точно: $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \approx 6.976734251$)

Чекор 4: Итерација $\boldsymbol{i = 2 \to 3}$

Вредности: $y_2 \approx 1.2214025709$

1. $k_1 = 1.2214025709$
2. $k_2 = 1.2214025709 + 0.05k_1 = 1.2824726995$
3. $k_3 = 1.2214025709 + 0.05k_2 = 1.2855262059$
4. $k_4 = 1.2214025709 + 0.1k_3 = 1.3499551915$
5.

$$y_3 = y_2 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 1.3498584971$$

Резултат (RK4)

$$y_1 \approx 1.1051708333, y_2 \approx 1.2214025709, y_3 \approx 1.3498584971$$

Мини-споредба до $t = 0.3$

- RK2 midpoint: $y_3 \approx 1.349232625$
- Heun (RK2): $y_3 \approx 1.349732625$
- RK4: $y_3 \approx 1.349858497$