Приближно решавање обични диференцијални равенки (ОДР): Еднодимензионален хармониски осцилатор

Ќе ја решаваме равенката на хармониски осцилатор:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Ќе ја земеме во бездимензионирана форма, со $m = 1$, $k = \omega^2 = 1$:

$$x'' = -x$$

Систем равенки од прв ред:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x \end{cases}$$

За почетни услови $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, аналитичкото решение е:

$$x(t) = x_0 \cos t \ \ + v_0 \sin t$$
$$v(t) = -x_0 \sin t + v_0 \cos t$$

Ќе земеме конретни почетни услови, и тоа $x_0 = 1$, $v_0 = 0$. Тогаш, решението е

$$x(t) = \cos t$$

Потоа, равенката ќе ја решаваме со сите нумерички методи кои ги учевте на предавање.

1. **Метод на Тејлор**
   - За x и v посебно:
     - $x' = v$
     - $x'' = v' = -x$
     - $x''' = -v$, итн.
   - Тејлор од 2-ри ред:

     $$x_{n+1} = x_n + hx_n' + \frac{h^2}{2}x_n''$$
     $$v_{n+1} = v_n + hv_n' + \frac{h^2}{2}v_n''$$

   - Овде изводите се едноставни и убаво се гледа структурата.
2. **Експлицитен Ојлер**
   - Скаларно или како систем:

     $$x_{n+1} = x_n + hv_n, v_{n+1} = v_n - hx_n$$

3. **Имплицитен Ојлер**
   - Систем од 2 равенки со две непознати x_{n+1}, v_{n+1}:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hv_{n+1} \\ v_{n+1} = v_n - hx_{n+1} \end{cases}$$

- Линеарен систем, може да се реши аналитички по чекор (без Њутн)

4. **Подобрен Ојлер (Пикард / Heun)**
   - Прво предвидување со експлицитен Ојлер, па корекција со среден наклон.
   - Може и на ниво на систем: $k_{1x}, k_{1v}, k_{2x}, k_{2v}$, па средно.
5. **Експлицитен RK од 2-ри ред (midpoint)**
   - Истиот систем, само со k_1, k_2 (midpoint метод).
6. **„Подобар“ RK2 базиран на подобрен Ојлер**
   - Варијанта каде k_2 се зема на крајот на чекорот (Heun) – убаво за да се споредат два различни RK2 на ист проблем.
7. **Класичен RK4**
   - Систем од 2 равенки, $k_{1x}, k_{1v}, k_{2x}, k_{2v}, \ldots$
8. **Класичен Verlet**
   - На ниво на втор ред:

     $$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 a_n$$

     со $a_n = -x_n$.
   - Може да почнеш од познато x_0 и x_1
9. **Velocity Verlet / Leapfrog**
   - Класичен leapfrog:
     - $v_{\{n+\frac{1}{2}\}} = v_n + \left(\frac{h}{2}\right) a_n$
     - $x_{\{n+1\}} = x_n + h\, v_{\{n+\frac{1}{2}\}}$
     - $a_{\{n+1\}} = -x_{\{n+1\}}$
     - $v_{\{n+1\}} = v_{\{n+\frac{1}{2}\}} + \left(\frac{h}{2}\right) a_{\{n+1\}}$

ЗАДАЧА 1. Taylor 2nd order

- пополнете го TODO skeleton-от
- пуштете го кодот
- изгенерирајте taylor_oscillator.csv
- направете график x(t) и грешка err(t)

ЗАДАЧА 2. Explicit Euler

Овој метод ќе биде најнестабилен.
Споредете го со Taylor 2.

ЗАДАЧА 3. Implicit Euler

Стабилен, но „го гуши“ осцилаторот.
Проверете ја амплитудата во графикот.

ЗАДАЧА 4. Heun (подобрен Ојлер)

Подобро од Ојлер, полошо од RK методите.
Анализирајте ја грешката.

ЗАДАЧА 5. RK2 (midpoint)

Одличен за неговата цена.
Споредете го со Heun.

ЗАДАЧА 6. „Подобар" RK2 (тежински)

Проверете дали е подобар од midpoint.

ЗАДАЧА 7. RK4

Најдобар метод од сите, проверете со два други метода

ЗАДАЧА 8. Classical Verlet

Два-чекорски метод со многу добра долгорочна стабилност.
Споредете амплитуда со RK4.

ЗАДАЧА 9. Velocity Verlet (Leapfrog)

Симплектичен метод → ја чува енергијата!
Направете график на амплитудата и покажете:

- дека x_num не расте,
- не опаѓа,
- туку останува приближно константен низ време.