

8.1 Основен Монте Карло метод (интеграл)

Чекор 1: Општ проблем и формула

Да се пресмета:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Се генерираат N **рамномерно распределени** случајни точки:

$$x_i \in [a, b], i = 1, \dots, N$$

Општата Монте Карло апроксимација (од скрипта):

$$I_N = (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

или со средна вредност:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Rightarrow I_N = (b - a) \langle f \rangle$$

Чекор 2: Конкретен пример (избор на функција)

Ќе земеме класичен пример:

$$f(x) = x^2, a = 0, b = 1$$

Точното решение (за проверка):

$$I_{\text{exact}} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \approx 0.333333$$

Чекор 3: Генерирани точки и пресметка

Нека (пример, рачно избрани вредности како да излегле од генератор):

i	x_i
1	0.12
2	0.47
3	0.83
4	0.31
5	0.65

Пресметај:

$f(x_i) = x_i^2$		
i	x_i	$f(x_i)$
1	0.12	0.0144
2	0.47	0.2209
3	0.83	0.6889
4	0.31	0.0961
5	0.65	0.4225

Средна вредност:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{5} (0.0144 + 0.2209 + 0.6889 + 0.0961 + 0.4225) = \frac{1.4428}{5} = 0.28856$$

Монте Карло интеграл:

$$I_5 = (1 - 0) \cdot 0.28856 = 0.28856$$

Чекор 4: Споредба

$$|I_5 - I_{\text{exact}}| = |0.28856 - 0.33333| = 0.04477$$

(мала $N \rightarrow$ голема грешка, што е очекувано)

8.2 Проценка на грешката (клучна идеја!)

Чекор 1: Општа формула (од скрипта)

Стандардната девијација на Монте Карло проценката:

$$\sigma_I = (b - a) \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$$

каде:

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)^2$$

Чекор 2: Пресметка за истиот пример

Пресметај $f(x_i)^2$:

i	$f(x_i)^2$
1	0.000207
2	0.0488
3	0.4746
4	0.0092
5	0.1785
$\langle f^2 \rangle = \frac{0.7113}{5} = 0.14226$	

Стави во формулата:

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{0.14226 - (0.28856)^2}{5}} = \sqrt{\frac{0.05898}{5}} = \sqrt{0.011796} \approx 0.1086$$

Клучна поента (да им ја кажеш експлицитно)

$$\sigma_I \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

→ за 100 пати помала грешка → треба **10 000** пати повеќе точки.

8.3 Монте Карло пресметка на π

Чекор 1: Геометриски модел

- Квадрат: $[-1,1] \times [-1,1] \rightarrow$ плоштина $A_{\square} = 4$

- Круг: $x^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow$ плоштина $A_{\circ} = \pi$

Однос:

$$\frac{A_{\circ}}{A_{\square}} = \frac{\pi}{4}$$

Чекор 2: Монте Карло формула

Генерирај N точки (x_i, y_i) .

Нека:

- N_{\circ} = број точки со $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$

Тогаш:

$$\pi_N = 4 \frac{N_{\circ}}{N}$$

Чекор 3: Конкретен пример

Нека:

- $N = 1000$
- $N_{\circ} = 785$

$$\pi_{1000} = 4 \cdot \frac{785}{1000} = 3.14$$

Апсолутна грешка:

$$|\pi - \pi_N| \approx |3.14159 - 3.14| = 0.00159$$

8.2 Метод на средна вредност

Чекор 1: Општата идеја и формула (од скрипта)

Да се пресмета интеграл:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Се дефинира **средна вредност** на функцијата:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Оттука:

$$I = (b-a) \langle f \rangle$$

Монте Карло апроксимација на средната вредност

Се генерираат N рамномерно распределени точки:

$$x_i \in [a, b], i = 1, \dots, N$$

Средната вредност се апроксимира со:

$$\langle f \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Затоа Монте Карло интегралот е:

$$I_N = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$



Ова е методот на средна вредност.

Чекор 2: Конкретен пример (како во скрипта)

Ќе земеме едноставен интеграл:

$$I = \int_0^2 x^2 dx$$

Точно решение (за проверка):

$$I_{\text{exact}} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2.666667$$

Значи:

- $a = 0$
- $b = 2$
- $f(x) = x^2$

Чекор 3: Генерирање точки и пресметка

Нека $N = 6$ и нека генераторот даде (пример):

$$x_i = \{0.32, 1.41, 0.87, 1.76, 0.55, 1.12\}$$

Чекор 3.1: Пресметај $f(x_i)$

$f(x_i) = x_i^2$		
i	x_i	$f(x_i)$
1	0.32	0.1024
2	1.41	1.9881
3	0.87	0.7569
4	1.76	3.0976
5	0.55	0.3025
6	1.12	1.2544

Чекор 3.2: Средна вредност

$$\langle f \rangle_6 = \frac{1}{6}(0.1024 + 1.9881 + 0.7569 + 3.0976 + 0.3025 + 1.2544)$$

$$\langle f \rangle_6 = \frac{7.5019}{6} = 1.25032$$

Чекор 3.3: Монте Карло интеграл

$$I_6 = (b - a)\langle f \rangle_6 = 2 \cdot 1.25032 = 2.50064$$

Чекор 4: Споредба со точното решение

$$|I_6 - I_{\text{exact}}| = |2.50064 - 2.66667| = 0.16603$$

→ Мала $N \rightarrow$ голема флуктуација (очекувано).

Чекор 5: Проценка на грешката (како во скрипта)

Чекор 5.1: Општа формула

Стандардна девијација:

$$\sigma_I = (b - a) \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$$

каде:

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)^2$$

Чекор 5.2: Пресметка за примерот

$$f(x_i)^2 = x_i^4$$

i	x_i^4
1	0.01049
2	3.9526
3	0.5729
4	9.5929
5	0.0915
6	1.5735

$$\langle f^2 \rangle = \frac{15.7939}{6} = 2.63232$$

$$\sigma_I = 2 \sqrt{\frac{2.63232 - (1.25032)^2}{6}} = 2\sqrt{0.1789} \approx 0.846$$

Клучни поенти

Методот на средна вредност е **основен Монте Карло метод**

- Формулата секогаш е:

$$I_N = (b - a) \frac{1}{N} \sum f(x_i)$$

- Грешката:

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- Не зависи од димензијата \rightarrow затоа МС е моќен во повеќе димензии