Пример: Гаусова елиминација

Почетен систем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, n$$

Нека е системот:

$$\{ \begin{matrix} 2x + y - z = 8 \\ x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = \frac{11}{3} : -3 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{matrix}$$

Матрици:

$$A = (\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 2 \end{matrix}), b = (\begin{matrix} 8 \\ \frac{11}{3} \\ -3 \end{matrix})$$

Чекор k=1 (pivot = $\boldsymbol{a_{11} = 2}$)

Елиминација (чекор $\boldsymbol{k}$)

За $k = 1, \dots, n - 1$и $i = k + 1, \dots, n$:

Множител

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

Ажурирање на матрицата

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} a_{kj}, j = k, \dots, n$$

Ажурирање на десната страна

$$b_i \leftarrow b_i - m_{ik} b_k$$

За i=2

Множител:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

Ажурирање ред 2: $R_2 \leftarrow R_2 - m_{21}R_1$

- За $j = 1$:

$$a_{21} \leftarrow -3 - (-1.5) \cdot 2 = -3 + 3 = 0$$

- За $j = 2$:

$$a_{22} \leftarrow -1 - (-1.5) \cdot 1 = -1 + 1.5 = 0.5$$

- За $j = 3$:

$$a_{23} \leftarrow 2 - (-1.5) \cdot (-1) = 2 - 1.5 = 0.5$$

Десна страна:

$$b_2 \leftarrow -11 - (-1.5) \cdot 8 = -11 + 12 = 1$$

Новиот ред 2 е:

$$(0, 0.5, 0.5, 1)$$

За i=3

Множител:

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ажурирање ред 3: $R_3 \leftarrow R_3 - m_{31}R_1$

- $a_{31} \leftarrow -2 - (-1) \cdot 2 = -2 + 2 = 0$
- $a_{32} \leftarrow 1 - (-1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2$
- $a_{33} \leftarrow 2 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$

Десна страна:

$$b_3 \leftarrow -3 - (-1) \cdot 8 = -3 + 8 = 5$$

Новиот ред 3:

$$(0, 2, 1, -5)$$

По првиот чекор, системот е:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

Чекор k=2 (pivot = $\boldsymbol{a_{22} = 0.5}$)

Сега елиминираме a_{32}.

За i=3

Множител:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{0.5} = 4$$

Ажурирање ред 3: $R_3 \leftarrow R_3 - m_{32}R_2$

- $a_{32} \leftarrow 2 - 4 \cdot 0.5 = 2 - 2 = 0$
- $a_{33} \leftarrow 1 - 4 \cdot 0.5 = 1 - 2 = -1$

Десна страна:

$$b_3 \leftarrow 5 - 4 \cdot 1 = 1$$

Новиот ред 3:

$$(0, 0, -1, 1)$$

Сега имаме горно-тријагонален систем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Обратна супституција

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j), i = n-1, \dots, 1$$

1) Од третата равенка

$$-1 \cdot z = 1 \Rightarrow z = -1$$

2) Од втората равенка

$$0.5y + 0.5z = 1$$

Стави $z = -1$:

$$0.5y + 0.5(-1) = 1 \Rightarrow 0.5y - 0.5 = 1 \Rightarrow 0.5y = 1.5 \Rightarrow y = 3$$

3) Од првата равенка

$$2x + y - z = 8$$

Стави $y = 3, z = -1$:

$$2x + 3 - (-1) = 8 \Rightarrow 2x + 4 = 8 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Решение

$$(x, y, z) = (2, 3, -1)$$

Пример: Гаусова елиминација со парцијално пивотирање

Систем:

$$\begin{cases} 0x + 2y + 9z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Чекор k=1: парцијално пивотирање во колона 1

Бараме најголем елемент по апсолутна вредност во колона 1, од редови 1..3:

- $|a_{11}| = |0| = 0$
- $|a_{21}| = |1| = 1$
- $|a_{31}| = |2| = 2$ ✅ најголем → ред 3

➡️ **Swap** ред 1 и ред 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 9 & | & 7 \end{pmatrix}$$

(Без ова: би имале делење со $a_{11} = 0$→ крај.)

Елиминација под пивотот $a_{11} = 2$

За i=2

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21}R_1$$

- $a_{22} \leftarrow -1 - 0.5 \cdot 3 = -2.5$
- $a_{23} \leftarrow 2 - 0.5 \cdot 1 = 1.5$
- $b_2 \leftarrow 3 - 0.5 \cdot 5 = 0.5$

Ред 2 станува:

$$(0, -2.5, 1.5 \mid 0.5)$$

За i=3

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0}{2} = 0$$

Ред 3 останува ист.

Сега имаме:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -2.5 & 1.5 & | & 0.5 \\ 0 & 2 & 9 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Чекор k=2: парцијално пивотирање во колона 2 (редови 2..3)

Гледаме:

- $|a_{22}| = |-2.5| = 2.5$
- $|a_{32}| = |2| = 2$

✅ Пивот е ред 2 (не менуваме редови).

Елиминација на a_{32}

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{-2.5} = -0.8$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32}R_2 = R_3 + 0.8R_2$$

- $a_{33} \leftarrow 9 + 0.8 \cdot 1.5 = 9 + 1.2 = 10.2$
- $b_3 \leftarrow 7 + 0.8 \cdot 0.5 = 7 + 0.4 = 7.4$

Ред 3:

$$(0, 0, 10.2 \;|\; 7.4)$$

Тријагонална форма:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -2.5 & 1.5 & | & 0.5 \\ 0 & 0 & 10.2 & | & 7.4 \end{pmatrix}$$

Обратна супституција

1) Од третата равенка

$$10.2z = 7.4 \Rightarrow z = \frac{7.4}{10.2} = \frac{37}{51} \approx 0.72549$$

2) Од втората равенка

$$-2.5y + 1.5z = 0.5$$
$$-2.5y = 0.5 - 1.5z$$

Со $z = \frac{37}{51}$:

$$1.5z = \frac{3}{2} \cdot \frac{37}{51} = \frac{37}{34}$$
$$0.5 - 1.5z = \frac{1}{2} - \frac{37}{34} = \frac{17}{34} - \frac{37}{34} = -\frac{20}{34} = -\frac{10}{17}$$
$$-2.5y = -\frac{10}{17} \Rightarrow y = \frac{4}{17} \approx 0.23529$$

3) Од првата равенка

$$2x + 3y + z = 5$$
$$2x = 5 - 3y - z$$

Со $y = \frac{4}{17}, z = \frac{37}{51}$:

$$3y = \frac{12}{17}$$
$$\frac{12}{17} + \frac{37}{51} = \frac{36}{51} + \frac{37}{51} = \frac{73}{51}$$
$$2x = 5 - \frac{73}{51} = \frac{255}{51} - \frac{73}{51} = \frac{182}{51} \Rightarrow x = \frac{91}{51} \approx 1.78431$$

Решение

$$(x, y, z) = (\frac{91}{51}, \frac{4}{17}, \frac{37}{51}) \approx (1.78431, 0.23529, 0.72549)$$

Што точно треба да биде „аларм“ за pivot во код

Во чекор k, ако:

- $a_{kk} = 0$(или премногу мал) → **мора swap**
- па дури потоа се пресметува $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$

LU (Крут / Doolittle факторизација)

Ќе го земам **истиот систем** од првиот пример (за да можеш да споредиш дека решението е исто):

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1) Цел: $A = LU$ со Doolittle

- L е долно-тријагонална со **1 на дијагонала**
- U е горно-тријагонална

Нека:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

2) Градење на U и L (чекор по чекор)

Факторизација

$$A = LU$$

со:

- $L_{ii} = 1$
- U горно-тријагонална

Формули (Doolittle)

За $i = 1, \ldots, n$:

Горна матрица U

$$U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}, j = i, \ldots, n$$

Долна матрица L

$$L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}), i = j+1, \dots, n$$

Чекор i=1

Ред 1 на U: $u_{1j} = a_{1j}$

$$u_{11} = 2, u_{12} = 1, u_{13} = -1$$

Колона 1 на L: $\ell_{i1} = a_{i1}/u_{11}$

$$\ell_{21} = \frac{-3}{2} = -1.5, \ell_{31} = \frac{-2}{2} = -1$$

До тука:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Чекор i=2

$$\boldsymbol{u_{22} = a_{22} - \ell_{21}u_{12}}$$

$$u_{22} = -1 - (-1.5) \cdot 1 = -1 + 1.5 = 0.5$$

$$\boldsymbol{u_{23} = a_{23} - \ell_{21}u_{13}}$$

$$u_{23} = 2 - (-1.5) \cdot (-1) = 2 - 1.5 = 0.5$$

$$\boldsymbol{\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}u_{12}}{u_{22}}}$$

$$\ell_{32} = \frac{1 - (-1) \cdot 1}{0.5} = \frac{2}{0.5} = 4$$

Сега:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Чекор i=3

$$\boldsymbol{u_{33} = a_{33} - \ell_{31} u_{13} - \ell_{32} u_{23}}$$

$$u_{33} = 2 - (-1) \cdot (-1) - 4 \cdot 0.5 = 2 - 1 - 2 = -1$$

Значи финално:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Решавање: $\boldsymbol{LUx = b}$

Решавање $\boldsymbol{Ax = b}$

Прво $Ly = b$, па $Ux = y$.

3А) Напредна супституција: $\boldsymbol{Ly = b}$

$$y_1 = b_1$$
$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j \, , i = 2, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ред 1:

$$y_1 = 8$$

Ред 2:

$$-1.5 y_1 + y_2 = -11 \Rightarrow y_2 = -11 + 1.5 \cdot 8 = -11 + 12 = 1$$

Ред 3:

$$-y_1 + 4y_2 + y_3 = -3 \Rightarrow y_3 = -3 + y_1 - 4y_2 = -3 + 8 - 4 = 1$$

Значи:

$$y = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3В) Обратна супституција: $\boldsymbol{Ux = y}$

$$x_n = \frac{y_n}{U_{nn}}$$
$$x_i = \frac{1}{U_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}x_j)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ред 3:

$$-1 \cdot z = 1 \Rightarrow z = -1$$

Ред 2:

$$0.5y + 0.5z = 1 \Rightarrow y + z = 2 \Rightarrow y = 3$$

Ред 1:

$$2x + y - z = 8 \Rightarrow 2x + 3 - (-1) = 8 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Решение

$$(x, y, z) = (2, 3, -1)$$

Решавање на тридијагонален систем: Thomas алгоритам

Напредна елиминација (forward sweep)

Иницијализација

$$\tilde{b}_1 = b_1, \tilde{d}_1 = d_1$$

За $i = 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{a_i}{\tilde{b}_{i-1}} \\ \tilde{b}_i &= b_i - w_i\, c_{i-1} \\ \tilde{d}_i &= d_i - w_i\, \tilde{d}_{i-1} \end{aligned}$$

По ова добиваш горно-тријагонален систем:

$$\tilde{b}_i x_i + c_i x_{i+1} = \tilde{d}_i$$

Обратна супституција (back substitution)

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\tilde{d}_n}{\tilde{b}_n} \\ x_i &= \frac{\tilde{d}_i - c_i x_{i+1}}{\tilde{b}_i}, i = n-1, \dots, 1 \end{aligned}$$

Конкретен пример (n=4) — чекор по чекор

Ќе решиме систем:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{array} \right.$$

Значи:

- $a_2 = a_3 = a_4 = -1$
- $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 2$
- $c_1 = c_2 = c_3 = -1$
- $d_1 = 1, d_2 = 0, d_3 = 0, d_4 = 1$

1) Напредна елиминација

i=1 (иницијализација)

$$\tilde{b}_1 = b_1 = 2$$
$$\tilde{d}_1 = d_1 = 1$$

i=2

$$w_2 = \frac{a_2}{\tilde{b}_1} = \frac{-1}{2} = -0.5$$
$$\tilde{b}_2 = b_2 - w_2 c_1 = 2 - (-0.5)(-1) = 2 - 0.5 = 1.5$$
$$\tilde{d}_2 = d_2 - w_2 \tilde{d}_1 = 0 - (-0.5)(1) = 0.5$$

i=3

$$w_3 = \frac{a_3}{\tilde{b}_2} = \frac{-1}{1.5} = -\frac{2}{3} \approx -0.6667$$
$$\tilde{b}_3 = b_3 - w_3 c_2 = 2 - (-0.6667)(-1) = 2 - 0.6667 = 1.3333$$
$$\tilde{d}_3 = d_3 - w_3 \tilde{d}_2 = 0 - (-0.6667)(0.5) = 0.3333$$

i=4

$$w_4 = \frac{a_4}{\tilde{b}_3} = \frac{-1}{1.3333} = -0.75$$
$$\tilde{b}_4 = b_4 - w_4 c_3 = 2 - (-0.75)(-1) = 2 - 0.75 = 1.25$$
$$\tilde{d}_4 = d_4 - w_4 \tilde{d}_3 = 1 - (-0.75)(0.3333) = 1 + 0.25 = 1.25$$

2) Обратна супституција

1) Од четвртата равенка (i=4)

$$x_4 = \frac{\tilde{d}_4}{\tilde{b}_4} = \frac{1.25}{1.25} = 1$$

2) Од третата равенка (i=3)

Формула:

$$x_3 = \frac{\tilde{d}_3 - c_3 x_4}{\tilde{b}_3}$$

Стави $c_3 = -1, x_4 = 1$:

$$x_3 = \frac{0.3333 - (-1) \cdot 1}{1.3333} = \frac{1.3333}{1.3333} = 1$$

3) Од втората равенка (i=2)

$$x_2 = \frac{\tilde{d}_2 - c_2 x_3}{\tilde{b}_2}$$

Стави $c_2 = -1, x_3 = 1$:

$$x_2 = \frac{0.5 - (-1) \cdot 1}{1.5} = \frac{1.5}{1.5} = 1$$

4) Од првата равенка (i=1)

$$x_1 = \frac{\tilde{d}_1 - c_1 x_2}{\tilde{b}_1}$$

Стави $c_1 = -1, x_2 = 1$:

$$x_1 = \frac{1 - (-1) \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Решение

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,1)$$

А) Метод на Јакоби

Ќе решаваме систем:

$$\{\begin{matrix} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = -11 \end{matrix}$$

Почетна претпоставка:

$$x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0$$

Чекор 1: Општа равенка (од скрипта) + конкретни равенки

Општа Јакобиева шема (за $i = 1,2,\dots,n$):

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)})$$

Критериум за запирање (релативна грешка, од скрипта):

$$\frac{|\ x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}\ |}{|\ x_i^{(n)}\ |} < \varepsilon$$

Сега ги изолираме непознатите (конкретен систем):

1. Од 1-та равенка:

$$10x_1 = 6 + x_2 - 2x_3 \Rightarrow x_1^{(k)} = \frac{6 + x_2^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)}}{10}$$

2. Од 2-та равенка:

$$11x_2 = 25 + x_1 + x_3 \Rightarrow x_2^{(k)} = \frac{25 + x_1^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}}{11}$$

3. Од 3-та равенка:

$$10x_3 = -11 - 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_3^{(k)} = \frac{-11 - 2x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)}}{10}$$

Чекор 2: Итерација $k = 1$(стави $x^{(0)} = (0, 0, 0)$)

1. $x_1^{(1)} = \frac{6+0-2\cdot0}{10} = 0.6$
2. $x_2^{(1)} = \frac{25+0+0}{11} = 2.27272727$
3. $x_3^{(1)} = \frac{-11-2\cdot0+0}{10} = -1.1$

Значи:

$$x^{(1)} = (0.6,\ 2.27272727,\ -1.1)$$

Чекор 3: Итерација $k = 2$(користи само $x^{(1)}$)

1.

$$x_1^{(2)} = \frac{6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}}{10} = \frac{6 + 2.27272727 - 2(-1.1)}{10} = \frac{10.47272727}{10} = 1.04727273$$

2.

$$x_2^{(2)} = \frac{25 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}}{11} = \frac{25 + 0.6 - 1.1}{11} = \frac{24.5}{11} = 2.22727273$$

3.

$$x_3^{(2)} = \frac{-11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)}}{10} = \frac{-11 - 2(0.6) + 2.27272727}{10} = \frac{-9.92727273}{10} = -0.99272727$$

$$x^{(2)} = (1.04727273,\ 2.22727273,\ -0.99272727)$$

Чекор 4: Итерација $k = 3$

1.

$$x_1^{(3)} = \frac{6 + 2.22727273 - 2(-0.99272727)}{10} = \frac{10.21272727}{10} = 1.02127273$$

2.

$$x_2^{(3)} = \frac{25 + 1.04727273 - 0.99272727}{11} = \frac{25.05454546}{11} = 2.27768595$$

3.

$$x_3^{(3)} = \frac{-11 - 2(1.04727273) + 2.22727273}{10} = \frac{-10.86727273}{10} = -1.08672727$$
$$x^{(3)} = (1.02127273,\ 2.27768595,\ -1.08672727)$$

В) Метод на Гаус–Зајдел

Чекор 1: Општа равенка (од скрипта) + конкретни равенки

Општа Гаус–Зајделова шема (истата идеја, ама со „свежи" вредности за $j < i$):

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)})$$

За нашиот систем:

1.

$$x_1^{(k)} = \frac{6 + x_2^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)}}{10}$$

2. (тука x_1е веќе ново!)

$$x_2^{(k)} = \frac{25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}}{11}$$

3. (тука x_1, x_2се веќе нови!)

$$x_3^{(k)} = \frac{-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}}{10}$$

Чекор 2: Итерација $\boldsymbol{k = 1}$(стави $\boldsymbol{x^{(0)} = (0, 0, 0)}$)

1.

$$x_1^{(1)} = \frac{6 + 0 - 2 \cdot 0}{10} = 0.6$$

2. (стави **новото** $x_1^{(1)}$, и старото $x_3^{(0)}$)

$$x_2^{(1)} = \frac{25 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}}{11} = \frac{25 + 0.6 + 0}{11} = 2.32727273$$

3. (стави **нови** $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$)

$$x_3^{(1)} = \frac{-11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)}}{10} = \frac{-11 - 1.2 + 2.32727273}{10} = \frac{-9.87272727}{10} = -0.98727273$$
$$x^{(1)} = (0.6,\ 2.32727273,\ -0.98727273)$$

Чекор 3: Итерација $k = 2$

1.

$$x_1^{(2)} = \frac{6 + 2.32727273 - 2(-0.98727273)}{10} = \frac{10.30181819}{10} = 1.03018182$$

2.

$$x_2^{(2)} = \frac{25 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)}}{11} = \frac{25 + 1.03018182 - 0.98727273}{11} = 2.27662810$$

3.

$$x_3^{(2)} = \frac{-11 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)}}{10} = \frac{-11 - 2.06036364 + 2.27662810}{10} = -1.07837355$$
$$x^{(2)} = (1.03018182,\ 2.27662810,\ -1.07837355)$$

Чекор 4: Итерација $k = 3$

1.

$$x_1^{(3)} = \frac{6 + 2.27662810 - 2(-1.07837355)}{10} = 1.04333752$$

2.

$$x_2^{(3)} = \frac{25 + 1.04333752 - 1.07837355}{11} = 2.26954218$$

3.

$$x_3^{(3)} = \frac{-11 - 2(1.04333752) + 2.26954218}{10} = -1.08171329$$

$$x^{(3)} = (1.04333752,\ 2.26954218,\ -1.08171329)$$