Задачи за проблем на гранични вредности за обични диференцијални равенки

Задача 1. Метод на гаѓање за линеарен проблем на гранични вредности

Да се разгледа статичкото издолжување на жица фиксирана на двата краја, опишано со равенката

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f_0$$

каде $y(x)$ е вертикалното отстапување на жицата, а f_0 е константна распределена сила.

Гранични услови:

$$y(0) = 0, y(L) = 0$$

Нека $L = 1$ и $f_0 = 1$.

1. (10 поени) Напишете програма која:
    - ги чита од тастатура бројот на подинтервали N,
    - проверува дали $N > 0$,
    - го дели интервалот $[0, L]$ на еднакви чекори.
2. (15 поени) Трансформирајте ја равенката од втор ред во систем од две равенки од прв ред и имплементирајте Runge–Kutta метод од четврти ред за решавање на проблем на почетни вредности.
3. (15 поени) Користејќи метод на гаѓање за линеарен граничен проблем, решете два почетни проблеми и со линеарна комбинација определете решение што го задоволува граничниот услов $y(L) = 0$.
4. (10 поени) Во секоја точка испечатете табела со: реден број, x, $y(x)$и $y'(x)$. Податоците да се прикажат на екран или да се запишат во датотека (по избор на корисникот).

Задача 2. Метод на гаѓање за нелинеарен проблем на гранични вредности

Да се разгледа нелинеарна равенка од тип

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y^3$$

со гранични услови:

$$y(0) = 0, y(L) = A$$

Нека $L = 1$, $A = 0.5$.

1. (10 поени) Напишете програма која чита:
   - број на подинтервали $N > 1$,
   - толеранција ε,
   - максимален број итерации M.
2. (15 поени) Имплементирајте Runge–Kutta метод од четврти ред за решавање на нелинеарен проблем на почетни вредности со почетен наклон $t = y'(0)$.
3. (20 поени) Користете метод на гаѓање со Њутнов метод за итеративно одредување на параметарот t така што да биде задоволен условот $y(L) = A$.
4. (5 поени) Да се пријави дали методот конвергирал или не, и по колку итерации.

Задача 3. Конечни разлики и алгоритам на Нумеров

Да се разгледа Поасоновата равенка во една димензија:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\rho_0$$

со гранични услови:

$$\phi(0) = 0, \phi(L) = 0$$

Нека $L = 1$, $\rho_0 = 1$.

1. (10 поени) Дискретизирајте го интервалот $[0, L]$ на N внатрешни точки и проверете дали $N > 1$.
2. (20 поени) Со користење на метод на конечни разлики со Нумеров алгоритам, изведете систем од линеарни равенки за непознатите ϕ_i.
3. (15 поени) Решете го добиениот тридијагонален систем со соодветен алгоритам.
4. (5 поени) Испечатете табела со x_i и $\phi(x_i)$.

Задача 4. Метод на гаѓање за сопствени вредности

Да се разгледа равенката за трансверзални осцилации на затегната жица:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

со гранични услови:

$$y(0) = 0, y(L) = 0$$

Нека $L = 1$.

1. (10 поени) Напишете програма која задава почетни услови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ и избира почетен интервал $[\lambda_1, \lambda_2]$.
2. (20 поени) Користејќи го методот на Нумеров, интегрирајте ја равенката за дадена вредност на λ.
3. (15 поени) Со метод на преполовување, пронајдете ја најмалата сопствена вредност λ за која важи $y(L) = 0$.
4. (5 поени) Испечатете ја најдената сопствена вредност и соодветната сопствена функција.

Задача 5. Сопствени вредности на три-дијагонална матрица

Да се разгледа стационарната Шредингерова равенка за честичка во бесконечна потенцијална јама:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

со гранични услови:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Нека $L = 1$.

1. (15 поени) Со дискретизација на вториот извод, запишете ја равенката во матрична форма

   $$A\psi = E\psi$$

   каде A е три-дијагонална матрица.

2. (20 поени) Имплементирајте метод за наоѓање на најмала сопствена вредност.
3. (10 поени) Нормализирајте ја сопствената функција и испечатете ги вредностите $\psi(x_i)$.

Задолженија за на час

Задача А — „Прочитај и означи“

Запиши во тетратка, на лист или во фајл:

1. Запиши:
    - која е диференцијалната равенка
    - кои се граничните услови
2. Во кодот, најди:
    - каде се поставуваат граничните услови
    - каде точно се користи избраниот метод (RK4 / Numerov / Thomas)

Задача Б — „Микро-интервенција во кодот“

Во Задача 1

- Промени:
    - должината L
    - изворот f_0
- Прашање:

  „Што се менува во обликот на решението и зошто?“

Во Задача 2

- Промени:
    - крајната вредност $y(L)$
    - или почетната претпоставка за наклонот
- Дали бројот на итерации се менува? Зошто?

Во Задача 3

- Промени:
    - бројот на точки N
- Како се менува мазноста и стабилноста на решението?

Во Задача 4

- Промени:
    - интервалот за λ
- Дали го добиваш истото сопствено решение?

Во Задача 5

- Промени:
    - бројот на внатрешни точки
- Што се случува со сопствената вредност кога дискретизацијата е погруба?