Линеарен проблем на гранични вредности (BVP) (метод на линеарно гаѓање)

Чекор 1: Општ проблем + поделба на 2 проблеми на почетни вредности

1.1 Општ линеарен граничен проблем

Диференцијална равенка:

$$y'' = f(x, y, y')$$

со гранични услови:

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Линеарен е ако:

$$f(x, y, y') = p(x)\, y' + q(x)\, y + r(x)$$

1.2 Два проблеми на почетни вредности (како во скрипта)

Скриптата го дели проблемот на:

(I) Прв IVP (Initial value problem):

$$y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x), y_1(a) = \alpha, y_1'(a) = 0$$

(II) Втор IVP:

$$y_2'' = p(x)y_2' + q(x)y_2, y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1$$

1.3 Линеарна комбинација (формула за решението)

Ако $y_2(b) \neq 0$, решението на граничниот проблем е:

$$\boxed{y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}\, y_2(x)}$$

Чекор 2: Конкретен пример (избор на равенка и услови)

Ќе земеме едноставен линеарен пример каде p, q, rсе јасни:

$$y'' = y$$

Ова е од облик $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$со:

$$p(x) = 0, q(x) = 1, r(x) = 0$$

Гранични услови:

$$a = 0,\ \alpha = 0; b = 1,\ \beta = 1$$

т.е.

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

Чекор 3: Запиши ги двата IVP со конкретни вредности

(I) Прв IVP (за y_1)

$$y_1'' = y_1, y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0$$

(II) Втор IVP (за y_2)

$$y_2'' = y_2, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$$

Чекор 4: Нумеричко решавање на двата IVP (со RK4, чекор $h = 0.5$)

За да можеме да пресметаме $y_1(b)$и $y_2(b)$, мора да ги интегрираме од $x = 0$до $x = 1$. (Скриптата препорачува RK метод за IVP.)

Претворање во систем од прв ред (стандардно)

Нека:

$$u = y, v = y'$$

Тогаш:

$$u' = v, v' = u$$

4.1 Решавање за y_1

Почетни:

$$u_0 = y_1(0) = 0, v_0 = y_1'(0) = 0$$

Очигледно (и нумерички ќе даде исто):

$$y_1(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1(1) = 0$$

Значи:

$$y_1(b) = y_1(1) = 0$$

4.2 Решавање за y_2(две RK4 итерации: 0->0.01->0.02→0.5→1.0)

Почетни:

$$u_0 = y_2(0) = 0, v_0 = y_2'(0) = 1, h = 0.5$$

Итерација 1 (од $x_0 = 0$до $x_1 = 0.5$)

По RK4 (за овој систем) добиваме:

$$u_1 = y_2(0.5) = 0.5208333333, v_1 = y_2'(0.5) = 1.1276041667$$

Итерација 2 (од $x_1 = 0.5$до $x_2 = 1.0$)

$$u_2 = y_2(1) = 1.1745876736, v_2 = y_2'(1) = 1.5427585178$$

Значи:

$$y_2(b) = y_2(1) = 1.1745876736$$

Чекор 5: Состави го решението $y(x)$(формула + конкретни броеви)

Општа формула (од скрипта):

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$

Стави конкретно:

- $\beta = 1$
- $y_1(b) = 0$
- $y_2(b) = 1.1745876736$

Коефициент:

$$C = \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} = \frac{1}{1.1745876736} = 0.8513625866$$

Значи решението е:

$$\boxed{y(x) = 0 + 0.8513625866\ y_2(x)}$$

Чекор 6: Конкретни вредности во точки (во твој стил)

1) На $x = 0$

$$y(0) = 0.85136 \cdot y_2(0) = 0.85136 \cdot 0 = 0$$

2) На $x = 0.5$

Знаеме $y_2(0.5) = 0.5208333333$

$$y(0.5) = 0.8513625866 \cdot 0.5208333333 = 0.4434180139$$

3) На $x = 1$

Знаеме $y_2(1) = 1.1745876736$

$$y(1) = 0.8513625866 \cdot 1.1745876736 = 1.0000000000$$

Решение (сумирано)

- $C = 0.8513625866$
- $y(0) = 0$
- $y(0.5) = 0.4434180139$
- $y(1) = 1$

1.1 Нелинеарен BVP

Општ нелинеарен проблем на гранични вредности

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Воведување параметар за почетниот наклон (метод на гаѓање)

Се воведува параметар t за почетниот наклон:

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y'(a) = t$$

Услов за точно решение

За вистинското решение мора да важи:

$$y(b, t) = \beta$$

што е еквивалентно со равенката:

$$F(t) = y(b,t) - \beta = 0$$

Њутнова итерација за параметарот t

Секвенцата $t_0, t_1, t_2,$ ...се добива со формулата:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1}) - \beta}{z(b,t_{k-1})}$$

каде што е дефинирано:

$$z(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Помошна равенка за функцијата z

Со диференцирање на диференцијалната равенка по параметарот tсе добива:

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}\, z + \frac{\partial f}{\partial y'}\, z'$$

со почетни услови:

$$z(a,t) = 0, z'(a,t) = 1$$

Конкретен нелинеарен пример

Ќе го разгледаме следниот проблем:

- $y'' = y^2, y(0) = 0, y(1) = 1$
- $b = 1,\ \beta = 1$
- $f(x,y,y') = y^2$

$a = 0,\ \alpha = 0$

Парцијални изводи (ќе ни требаат за z-равенката):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Чекор 3: Постави ги двата IVP што се решаваат во секоја Њутнова итерација

3.1 IVP за $\boldsymbol{y(x,t)}$

$$y'' = y^2, y(0) = 0, y'(0) = t$$

3.2 IVP за $\boldsymbol{z(x,t)}$

$$z'' = 2y\,z, z(0) = 0, z'(0) = 1$$

Во практика (како во скриптата), и двете ги решаваш нумерички (на пр. RK4) од $x = a$до $x = b$.

Чекор 4: Претворање во системи од прв ред (за RK4)

За y:

$$u = y, v = y' \Rightarrow u' = v, v' = u^2$$

Почетни:

$$u(0) = 0, v(0) = t$$

За z:

$$p = z, q = z' \Rightarrow p' = q, q' = 2u\,p$$

Почетни:

$$p(0) = 0, q(0) = 1$$

Чекор 5: Њутнова итерација — со конкретни броеви

(за да биде читливо, ќе земам **еден RK4 чекор** со $h = 1$од 0 до 1 — доволно за демонстрација на алгоритмот)

Итерација 0: избери $t_0 = 1$

Чекор 5.1: Реши y-IVP за $t_0 = 1$(RK4, $h = 1$)

Почетно:

$$u_0 = 0, v_0 = 1$$

RK4 коефициенти за системот $u' = v$, $v' = u^2$:

k1

$$k_{1u} = v_0 = 1, k_{1v} = u_0^2 = 0$$

k2 (на половина чекор)

$$u_{mid} = u_0 + \frac{1}{2}k_{1u} = 0.5$$
$$k_{2u} = v_0 + \frac{1}{2}k_{1v} = 1, k_{2v} = u_{mid}^2 = 0.25$$

k3

$$k_{3u} = v_0 + \frac{1}{2}k_{2v} = 1 + 0.125 = 1.125, k_{3v} = 0.25$$

k4 (на крај)

$$u_{end} = u_0 + k_{3u} = 1.125$$
$$k_{4u} = v_0 + k_{3v} = 1.25, k_{4v} = u_{end}^2 = 1.265625$$

Ажурирање:

$$u(1) = u_0 + \frac{1}{6}(k_{1u} + 2k_{2u} + 2k_{3u} + k_{4u}) = \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1.125 + 1.25)$$
$$= 1.0833333$$

Значи:

$$y(b, t_0) = y(1,1) = u(1) = 1.0833333$$

Чекор 5.2: Реши z-IVP за $t_0 = 1$ (RK4, $h = 1$)

Почетно:

$$p_0 = 0, q_0 = 1$$

а $u(x)$го земаме од истите „меѓучекори" како погоре: $u_0 = 0$, $u_{mid} = 0.5$, $u_{end} = 1.125$.

За системот $p' = q$, $q' = 2u\,p$:

K1

$$K_{1p} = q_0 = 1, K_{1q} = 2u_0 p_0 = 0$$

K2

$$\begin{aligned} &p_{mid} = p_0 + \frac{1}{2}K_{1p} = 0.5, q_{mid} = q_0 + \frac{1}{2}K_{1q} = 1 \\ &K_{2p} = 1, K_{2q} = 2u_{mid}p_{mid} = 2(0.5)(0.5) = 0.5 \end{aligned}$$

K3

$$\begin{aligned} &p_{mid2} = p_0 + \frac{1}{2}K_{2p} = 0.5, q_{mid2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.5 = 1.25 \\ &K_{3p} = 1.25, K_{3q} = 2(0.5)(0.5) = 0.5 \end{aligned}$$

K4

$$\begin{aligned} &p_{end} = p_0 + K_{3p} = 1.25, q_{end} = 1 + K_{3q} = 1.5 \\ &K_{4p} = 1.5, K_{4q} = 2u_{end}p_{end} = 2(1.125)(1.25) = 2.8125 \end{aligned}$$

Ажурирање:

$$p(1) = p_0 + \frac{1}{6}(K_{1p} + 2K_{2p} + 2K_{3p} + K_{4p}) = \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1.25 + 1.5) = 1.1666667$$

Значи:

$$z(b, t_0) = z(1,1) = p(1) = 1.1666667$$

Чекор 5.3: Њутнов чекор за t

Равенка (од скрипта):

$$t_1 = t_0 - \frac{y(b, t_0) - \beta}{z(b, t_0)}$$

Вредности: $t_0 = 1$, $y(b, t_0) = 1.0833333$, $\beta = 1$, $z(b, t_0) = 1.1666667$

$$t_1 = 1 - \frac{1.0833333 - 1}{1.1666667} = 1 - \frac{0.0833333}{1.1666667} = 1 - 0.0714286 = 0.9285714$$

Чекор 6: Следна итерација (само резултатите, во истиот стил)

Повтори ги **истите** 2 решавања (за yи за z) со $t_1 = 0.9285714$. Со истата RK4-шема добиваме:

- $y(1, t_1) = 1.0004251$
- $z(1, t_1) = 1.1547619$

Њутнов чекор:

$$t_2 = t_1 - \frac{1.0004251 - 1}{1.1547619} = 0.9285714 - 0.000368 \approx 0.9282034$$

Резиме (што точно прават во код)

Во секоја итерација k:

1. решаваат IVP за yсо $t = t_k$→ земаат $y(b, t_k)$
2. решаваат IVP за zсо истото t_k→ земаат $z(b, t_k)$
3. ажурираат:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(b, t_k) - \beta}{z(b, t_k)}$$

4. стоп ако $| \ y(b, t_k) - \beta \ | < \varepsilon$или $| \ t_{k+1} - t_k \ | < \varepsilon$.