Exercício: intervalo de confiança para a diferença de médias

Disciplina: Inferência Estatística
Instrutor: Luiz Max Carvalho

Outubro/2022

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Motivação: Neste pequeno exercício vamos raciocinar sobre a construção de intervalos de confiança para a diferença entre dois parâmetros. Em particular, vamos estudar a construção de intervalos de confiança exatos para a diferença entre médias de duas populações normais.

Que droga é essa?

Suponha que estamos interessados em avaliar o efeito de uma droga (remédio) sobre a pressão arterial sistólica de pacientes com hipertensão. Para tanto, tratamos n_t indivíduos com a droga A, que é nova no mercado, e designamos este grupo como **tratamento**. No mesmo ensejo, tratamos n_c indivíduos no grupo **controle** com a droga C, que já é estabelecida como tratamento padrão contra a hipertensão.

Suponha que $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_{n_t})$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, X_{n_c})$ são as medições das pressões arteriais dos pacientes. Assuma que $X_i \sim \text{Normal}(\mu_t, \sigma_t^2)$, para $i = 1, 2, \ldots, n_t$ e que $Y_j \sim \text{Normal}(\mu_c, \sigma_c^2)$ para $j = 1, 2, \ldots, n_c$, isto é, que os dois conjuntos de dados vêm de populações normais e são independentes entre si – e indenticamente distribuídos dentro de cada grupo. Suponha ainda que você não observa $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ diretamente, mas sim

$$\bar{X} := \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} X_i,$$

$$\bar{Y} := \frac{1}{n_c} \sum_{j=1}^{n_c} Y_j,$$

$$S_x^2 := \frac{1}{n_t - 1} \sum_{i=1}^{n_t} (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_y^2 := \frac{1}{n_c - 1} \sum_{j=1}^{n_c} (Y_j - \bar{Y})^2.$$

1. Suponha que as populações são *homocedásticas*, isto é que $\sigma_t = \sigma_c = \sigma$. Encontre um estimador para σ e construa uma quantidade pivotal para σ^2;

2. Usando a quantidade pivotal do item anterior, construa uma quantidade pivotal para $\Delta := \mu_t - \mu_c$;

3. Agora, construa um intervalo de confiança exato de 89% para Δ.