

# Primeira avaliação (A1)

Disciplina: Inferência Estatística  
Professor: Luiz Max de Carvalho

25 de Setembro de 2020

- Por favor, entregue um único arquivo PDF;
- O tempo para realização da prova é de 3 horas, mais vinte minutos para upload do documento para o e-class;
- Responda todas as questões sucintamente;
- Marque a resposta final claramente com um quadrado, círculo, ou figura geométrica de sua preferência;
- A prova vale 80 pontos; a pontuação restante é contada como bônus.
- Apenas tente resolver a questão bônus quando tiver resolvido todo o resto.

## Dicas

- Se  $X$  tem distribuição Beta com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , temos

$$f_X(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}.$$

Além disso, se  $\alpha, \beta > 1$  e  $F_X(m) = 1/2$ , então  $m \approx \frac{\alpha - \frac{1}{3}}{\alpha + \beta - \frac{2}{3}}$ ;

- Um processo de Poisson com taxa  $\lambda$  por unidade de tempo é um processo estocástico que satisfaz:
  - O número de chegadas num intervalo de tempo  $\Delta_t$  tem distribuição Poisson com média  $\lambda\Delta_t$ .
  - Os números de chegadas em qualquer coleção de intervalos disjuntos são independentes.
- O máximo de uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , em que cada  $X_i$  tem f.d.p./f.m.p  $f_X$  e c.d.f  $F_X$ , tem f.d.p./f.m.p  $f_M(y) = n f_X(y) [F_X(y)]^{n-1}$ .

## 1. Esperando aviões.

*Meus olhos te viram triste  
Olhando pro infinito  
Tentando ouvir o som do próprio grito  
E o louco que ainda me resta  
Só quis te levar pra festa  
Você me amou de um jeito tão aflito  
Que eu queria poder te dizer sem palavras  
Eu queria poder te cantar sem canções  
Eu queria viver morrendo em sua teia  
Seu sangue correndo em minha veia  
Seu cheiro morando em meus pulmões  
Cada dia que passo sem sua presença  
Sou um presidiário cumprindo sentença  
Sou um velho diário perdido na areia  
Esperando que você me leia  
Sou pista vazia esperando aviões*

(Vander Lee [1966-2016])

Considere o eu-lírico da canção, que vamos chamar aqui de Joelinton. Apaixonado, Joelinton vai todos os dias ao aeroporto esperar por sua amada, Valcicléia. Todos os dias, ele sempre chega no mesmo horário, espera exatamente  $t$  horas e anota num caderninho o número de aviões que pousam na pista A do aeroporto. Depois de  $n$  dias, Joelinton, impaciente, resolve olhar suas anotações com os números  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de aviões que chegaram nos dias em que tem durado o seu martírio. Supondo que as chegadas dos aviões são independentes, entre si, Joelinton se pergunta sobre como estimar a taxa de chegada dos aviões,  $\theta$ .

- a) (7,5 pontos) Compute a informação de Fisher do experimento de Joelinton;
- b) (2,5 pontos) Encontre o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$ ;
- c) (10 pontos) O estimador encontrado é viesado? Justifique sua resposta;
- d) (10 pontos) O estimador encontrado é eficiente? Justifique sua resposta.

**Conceitos trabalhados:** EMV, informação de Fisher, viés, Cramér-Rao e eficiência. **Nível de dificuldade:** médio.

**Resolução:** Sabemos que a chegada dos aviões é um processo de Poisson, e, em particular, que cada  $X_i$  é distribuído Poisson com taxa  $t\theta$ . Usando o fato de que as amostras são i.i.d, podemos escrever

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-nt\theta} (t\theta)^S,$$

onde  $S := \sum_{i=1}^n x_i$ . Portanto,

$$\lambda_n(\mathbf{x} \mid \theta) = - \sum_{i=1}^n \log(x_i!) - nt\theta + S[\log(t) + \log(\theta)] = C - nt\theta + S \log(\theta), \quad (1)$$

$$\lambda'_n(\mathbf{x} \mid \theta) = -nt + \frac{S}{\theta}, \quad (2)$$

$$\lambda''_n(\mathbf{x} \mid \theta) = -\frac{S}{\theta^2}. \quad (3)$$

Lembrando que  $E[S] = nt\theta$  (pela lei de esperanças), podemos computar

$$I_n(\theta) = -E[\lambda''_n(\mathbf{x} \mid \theta)] = \frac{nt}{\theta}. \quad (4)$$

Outro caminho para resolver a) é lembrar que, para uma amostra aleatória,  $I_n(\theta) = nI(\theta)$  e fazer os cálculos para  $X_1$ , por exemplo. A resposta de b) vem “de graça” através de (2); igualando a expressão a zero, temos

$$\hat{\theta}_{\text{EMV}} = \frac{S}{nt} = \frac{1}{t} \bar{X}_n.$$

Para responder c), precisamos apenas calcular

$$E[\hat{\theta}_{\text{EMV}}] = \frac{1}{t} E[\bar{X}_n] = \frac{1}{nt} E[S] = \theta,$$

para concluir que o EMV é não-viesado. Para responder à questão d), precisamos lembrar que o limite de Cramér-Rao para a variância de um estimador não-viesado de  $\theta$  é

$$\text{Var}(\delta(\mathbf{X})) \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta}{nt}.$$

Vamos comparar com a variância do  $\hat{\theta}_{\text{EMV}}$ :

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{\text{EMV}}) = \frac{1}{n^2 t^2} \text{Var}(S) = \frac{nt\theta}{n^2 t^2} = \frac{\theta}{nt},$$

onde a penúltima igualdade vale porque as amostras são independentes (lei de variâncias). Isto nos leva a concluir que o EMV de fato atinge a cota inferior e, portanto, é eficiente. Outra maneira de ver o mesmo resultado é utilizar a parte final do Teorema de Cramér-Rao e perceber que podemos escrever

$$\hat{\theta}_{\text{EMV}} = u(\theta)\lambda'_n(\mathbf{x} \mid \theta) + v(\theta),$$

em particular

$$\hat{\theta}_{\text{EMV}} = \frac{\theta}{nt} \lambda'_n(\mathbf{x} \mid \theta) + \theta.$$

■

## 2. Inferência para a Uniforme $(0, \theta)$ .

Suponha que dispomos de uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de uma distribuição Uniforme no intervalo  $(0, \theta)$ .

- a) (5 pontos) Encontre o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$ ;
- b) (5 pontos) O estimador encontrado é viesado. Encontre um estimador não-viesado baseado no estimador do item anterior;
- c) (5 pontos) Encontre um estimador de momentos para  $\theta$ ;
- d) (15 pontos) Compare os estimadores obtidos em termos de erro quadrático médio (“MSE”), e discuta se algum deles é admissível para  $n \geq 3$ .

**Conceitos trabalhados:** EMV, método dos momentos, erro quadrático médio e admissibilidade. **Nível de dificuldade:** médio.

**Resolução:** A f.d.p da uniforme vale

$$f(x | \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A f.d.p. conjunta é

$$f_n(\mathbf{x} | \theta) = \begin{cases} \theta^{-n}, 0 \leq x_i \leq \theta (i = 1, 2, \dots, n), \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

Notamos que a função de verossimilhança é decrescente em  $\theta$ , e portanto é maximizada em  $M := \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Assim, repondemos a) ao concluirmos que  $\hat{\theta}_{\text{EMV}} = M$ . Para responder b), lembramos que

$$f_M(y) = \frac{n}{\theta} \left[ \frac{y}{\theta} \right]^{n-1},$$

e, portanto,

$$E[M] = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y y^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta.$$

Outro caminho é utilizar a fórmula de cauda para a esperança,  $E[M] = \int_0^\infty \Pr(M > y) dy = \int_0^\infty [1 - F_M(y)] dy$ :

$$\begin{aligned} E[M] &= \int_0^\infty \left[ 1 - \left[ \frac{y}{\theta} \right]^n \right] dy, \\ &= \int_0^\theta \left[ 1 - \left[ \frac{y}{\theta} \right]^n \right] dy + \int_\theta^\infty \left[ 1 - \left[ \frac{y}{\theta} \right]^n \right] dy, \\ &= \int_0^\theta 1 dy - \frac{1}{\theta^n} \int_0^\theta y^n dy \\ &= \theta - \frac{\theta^{n+1}}{(n+1)\theta^n} = \frac{n}{n+1} \theta. \end{aligned}$$

Desta forma, como  $E[\hat{\theta}_{\text{EMV}}] = c\theta$ , podemos criar um estimador não-viesado  $\hat{\theta}_u = \frac{1}{c} \hat{\theta}_{\text{EMV}}$ . A resposta para c) é simples: notamos que a esperança de  $X_1$  é

$\theta/2$ , e, desta maneira,  $\hat{\theta}_{\text{MM}} = 2\bar{X}_n$ . Para finalizar, vamos responder à questão d) olhando o MSE de cada estimador, lembrando que  $\hat{\theta}_u$  e  $\hat{\theta}_{\text{MM}}$  são não-viesados:

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{EMV}}) &= \text{Var}(\hat{\theta}_{\text{EMV}}) + \text{viés}^2 = \text{Var}(M) + (1-c)^2\theta^2, \\ \text{MSE}(\hat{\theta}_u) &= \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_{\text{EMV}})}{c^2} = \frac{\text{Var}(M)}{c^2}, \\ \text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MM}}) &= \text{Var}(\hat{\theta}_{\text{MM}}) = \text{Var}(2\bar{X}_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).\end{aligned}$$

Para sermos capazes de comparar os erros quadráticos médios explicitamente, precisamos calcular as quantidades  $\text{Var}(M)$  e  $\text{Var}(X_1)$ . Primeiro, calculamos

$$\text{Var}(X_1) = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x^2 dx - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}.$$

Depois, computamos

$$\text{Var}(M) = E[M^2] - (E[M])^2 = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^2 y^{n-1} dy - c^2\theta^2 = \left[ \frac{n}{n+2} - c^2 \right] \theta^2.$$

Assim chegamos a

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{EMV}}) &= \text{Var}(M) + (1-c)^2\theta^2 = \left[ \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right] \theta^2, \\ \text{MSE}(\hat{\theta}_u) &= \frac{\text{Var}(M)}{c^2} = \left[ \frac{1}{n(n+2)} \right] \theta^2, \\ \text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MM}}) &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{\theta^2}{3n},\end{aligned}$$

e assim podemos concluir que  $\text{MSE}(\hat{\theta}_u) \leq \text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{EMV}}) \leq \text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MM}})$ . Concluímos que o EMV e EMM são inadmissíveis para  $n \geq 3$ . ■

**Nota:** uma parte da resposta (sobre o EMM) faz parte do exercício 3 (recomendado!) da seção 7.9 de DeGroot.

### 3. Crescimentos indesejados.

Um efeito colateral comum de esteróides anabolizantes é o ginecoma, crescimento do tecido mamário em homens. Uma grande rede de academias brasileira avalia condição física de seus usuários que utilizam estes anabolizantes, e monitora este sintoma especificamente. Vamos supor que a probabilidade de gerar este efeito colateral é comum em todos os homens e a amostra de indivíduos é aleatória. Denote  $Z_1, Z_2, \dots$  variáveis aleatórias que registram se o usuário desenvolveu ginecoma  $Z_i = 1$  ou não  $Z_i = 0$ . Utilizamos a distribuição Bernoulli para modelar este processo, onde a **probabilidade de não desenvolver o sintoma é  $\theta$** . Seja

$$X_1 = \min\{n : Z_n = 1\},$$

o número indivíduos avaliados para encontrar o primeiro caso. Logo,  $\Pr(X = k; \theta) = \theta^{k-1}(1-\theta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Esta é a *distribuição geométrica*,  $\mathcal{G}(\theta)$ , e possui  $E[X_1] = 1/(1-\theta)$  e  $\text{Var}(X_1) = \theta/(1-\theta)^2$ .

- a) (3 pontos) Mostre que  $X_1$  é uma estatística suficiente para  $\theta$ ;
- b) (4 pontos) Encontre o estimador de máxima verossimilhança para  $\theta/(1-\theta)$  baseado em  $X_1$ ;
- c) (3 pontos) Derive a família de distribuições *a priori* conjugadas para este problema;
- d) (10 pontos) Encontre uma aproximação para o estimador de Bayes sob perda absoluta;

**Conceitos trabalhados:** suficiência, invariância do EMV, conjugação, estimador de Bayes. **Nível de dificuldade:** fácil.

**Resolução:** Para resolver a), basta escrever a verossimilhança:

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = \theta^{x-1}(1-\theta), \quad (5)$$

e notar que conseguimos usar o Teorema da fatorização

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = u(\mathbf{x})v[r(\mathbf{x}), \theta],$$

fazendo  $u(\mathbf{x}) = 1$  e  $v[r(\mathbf{x}), \theta] = \theta^{x-1}(1-\theta)$ . Concluimos que  $r(\mathbf{x}) = x-1$  e, como  $x = r(\mathbf{x}) + 1$ ,  $X_1 = x$  tem de ser estatística suficiente também. Para resolver b), vamos notar que o EMV é invariante a transformações, e, desta forma, basta encontrar  $\hat{\theta}_{\text{EMV}}$ . Para tanto, vamos escrever

$$l(\theta) := \log f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = (x-1)\log(\theta) + \log(1-\theta).$$

Daí

$$l'(\theta) = \frac{x-1}{\theta} - \frac{1}{1-\theta},$$

e assim<sup>1</sup>  $l'(\theta) = 0 \implies \hat{\theta}_{\text{EMV}} = \frac{x-1}{x}$ . O EMV para  $\omega = \theta/(1-\theta)$  é  $\hat{\omega} = \hat{\theta}_{\text{EMV}}/(1-\hat{\theta}_{\text{EMV}}) = x-1$ . A resposta de c) é encontrada após breve inspeção de (5); a priori conjugada precisa ter a forma  $\xi(\theta) \propto \theta^a(1-\theta)^b$  para que a posteriori,  $\xi(\theta \mid \mathbf{x})$  tenha a mesma forma funcional. A distribuição Beta, descrita nas dicas acima, é a resposta correta, portanto. Finalmente, para resolver d), vamos escrever a posteriori:

$$\begin{aligned} \xi(\theta \mid \mathbf{x}) &\propto f_n(\mathbf{x} \mid \theta)\xi(\theta), \\ &\propto \theta^{x-1+\alpha-1}(1-\theta)^\beta. \end{aligned}$$

Daqui chegamos à conclusão de que a distribuição *a posteriori* de  $\theta$  é uma distribuição Beta com parâmetros  $\alpha' = \alpha + x - 1$  e  $\beta' = \beta + 1$ . Utilizando a outra parte da dica, temos que o estimador de Bayes sob perda absoluta é a mediana *a posteriori*:

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = \frac{3\alpha' - 1}{3(\alpha' + \beta') - 2} = \frac{3(\alpha + x) - 4}{3(\alpha + \beta + x) - 2}. \quad (6)$$

■

<sup>1</sup>O correto seria checar que temos de fato um ponto de máximo, mas a vida é curta.

## Questão Bônus: Inconceivable!

*“You keep using that word. I do not think it means what you think it means”* – Inigo Montoya em “The Princess Bride” (1987).

Suponha que temos uma amostra aleatória  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de uma distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , ambas desconhecidas. Suponha queremos estimar  $\sigma^2$  e considere estimadores da forma

$$\delta_c(\mathbf{X}) = c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, \quad (7)$$

$c > 0$ .

- (5 pontos) Encontre o erro quadrático médio (“MSE”) desta classe de estimadores, em função de  $c$ .
- (2,5 pontos) Encontre  $c^*$  de modo que  $\delta_{c^*}(\mathbf{X})$  seja admissível.
- (2,5 pontos)  $\delta_{c^*}(\mathbf{X})$  é não-viesado? Justifique sua resposta.

**Conceitos trabalhados:** distribuição Qui-quadrado, admissibilidade. **Nível de dificuldade:** difícil.

**Resolução:** Este é o exemplo 8.7.6 de DeGroot (pág. 510). Vamos começar computando os momentos de  $\delta_c(\mathbf{X})$ . Sabemos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \text{Qui-quadrado}(n-1),$$

portanto temos  $E[\delta_c(\mathbf{X})] = (n-1)c\sigma^2$  e  $\text{Var}(\delta_c(\mathbf{X})) = 2(n-1)c^2(\sigma^2)^2$ . Por conveniência, defina  $W := \delta_c(\mathbf{X}) - \sigma^2$ . Lembrando que  $E[Y^2] = \text{Var}(Y) + (E[Y])^2$ , podemos computar o MSE:

$$\begin{aligned} h(c) := \text{MSE}(\delta_c(\mathbf{X})) &= E[W^2] = \text{Var}(W) + (E[W])^2, \\ &= \text{Var}(\delta_c(\mathbf{X})) + (E[\delta_c(\mathbf{X})] - \sigma^2)^2, \\ &= 2(n-1)c^2(\sigma^2)^2 + [(n-1)^2c^2 - 2(n-1)c + 1] (\sigma^2)^2, \\ &= [a(n)c^2 - b(n)c + 1] (\sigma^2)^2, \end{aligned}$$

com  $a(n) = 2(n-1) + (n-1)^2$  e  $b(n) = 2(n-1)$  o que responde a). Para responder b), notamos que minimizar  $h(c)$  é equivalente a minimizar  $g(c) = a(n)c^2 - b(n)c + 1$ . Assim, fazemos  $g'(c) = 2a(n)c - b(n)$  igual a zero para encontrar

$$c^* = \frac{b(n)}{2a(n)} = \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1},$$

onde a última igualdade segue da diferença de quadrados. A resposta para c) é **não**, o que pode ser justificado por cálculo direto ou pelo fato de que no estimador não-viesado de  $\sigma^2$ ,  $c = 1/(n-1)$  ■