Exercício: Desenho amostral para controlar as probabilidades de erro de testes de hipótese

Disciplina: Inferência Estatística
Instrutor: Luiz Max Carvalho

Outubro/2022

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Motivação: Entre os vários fatores a serem considerados na construção de um teste estatístico, a capacidade de detectar um efeito caso ele esteja presente é um das mais importantes. Em algumas situações é possível determinar o tamanho de amostra necessário para controlar as probabilidades de erro do teste em questão. E é exatamente isso que faremos neste exercício.

É pra medir *quantos* mesmo, chefe ?!

Suponha que os seus dados vêm de uma distribuição normal com parâmetros μ e σ^2. Você tem acesso à média amostral, $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ e à variância amostral, $S_2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Você recebeu a tarefa de desenhar um teste estatístico para testar as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

1. Suponha que σ^2 é <u>conhecida</u> e considere o teste

$$\delta_c = \begin{cases} \text{Rejeitar } H_0 \text{ quando } |\bar{X}_n - \mu_0|/\sigma \geq c, \\ \text{Falhar em rejeitar } H_0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   Determine o valor de c para que o tamanho de δ_c seja $\alpha = 0.01$.

2. Vamos agora supor σ^2 <u>desconhecida</u>. Defina $\hat{\sigma}' = \sqrt{S_2}$ e considere o teste

$$\delta'_k = \begin{cases} \text{Rejeitar } H_0 \text{ quando } |\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\hat{\sigma}'| \geq k, \\ \text{Falhar em rejeitar } H_0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   Determine o valor de k para que o tamanho de δ'_k seja $\alpha = 0.01$.

3. Para cada um dos testes acima (δ_c e δ'_k), determine o tamanho amostral (n) tal que o teste tenha poder de 0.95 em $\mu+\sigma$, isto é $\pi(\mu+\sigma|\delta_c) = 0.95$ e $\pi(\mu+\sigma|\delta_k) = 0.95$. Compare os tamanhos amostrais necessários e discuta se são diferentes e porque.