Segunda avaliação (A2)

Disciplina: Inferência Estatística
Instrutor: Professor Carvalho

03 de Dezembro de 2020

- Por favor, entregue um único arquivo PDF;
- O tempo para realização da prova é de 3 horas, mais vinte minutos para upload do documento para o e-class;
- Leia a prova toda com calma antes de começar a responder;
- Responda todas as questões sucintamente;
- Marque a resposta final claramente com um quadrado, círculo ou figura geométrica de sua preferência;
- A prova vale 80 pontos. A pontuação restante é contada como bônus;
- Apenas tente resolver a questão bônus quando tiver resolvido todo o resto;
- Lembre-se de consultar o catálogo de fórmulas no fim deste documento.

Dicas

- Em uma regressão linear simples, temos:

$$\hat{\beta}_0 \sim \text{Normal}\left(\beta_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2}\right)\right),$$
$$\hat{\beta}_1 \sim \text{Normal}\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{s_x^2}\right),$$
$$\text{Cov}\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = -\frac{\bar{x}\sigma^2}{s_x^2},$$

  onde $s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ e $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes.

- Um processo de Poisson com taxa λ por unidade de tempo é um processo estocástico que satisfaz:
  - O número de chegadas em um intervalo de tempo Δ_t tem distribuição Poisson com média $\lambda\Delta_t$.
  - Os números de chegadas em qualquer coleção de intervalos disjuntos são independentes.

- Se X tem distribuição Poisson com média λ, então

$$\Pr(X \leq x) = Q(\lfloor x + 1 \rfloor, \lambda),$$

  onde

$$Q(x, s) = \frac{\Gamma(x, s)}{\Gamma(x)}$$

  é a função Gama regularizada superior e $\lfloor y \rfloor$ é maior inteiro menor ou igual a y – também chamado de *floor*. Ademais, temos

$$\frac{\partial}{\partial s}Q(x, s) = -\frac{e^{-s}s^{x-1}}{\Gamma(x)},$$

  onde $\Gamma(x) = (x-1)!$ é a função Gamma.

1. Catando poesia.

Eu te vejo sumir por aí
Te avisei que a cidade era um vão
Dá tua mão, olha pra mim
Não faz assim, não vai lá, não
Os letreiros a te colorir
Embaraçam a minha visão
Eu te vi suspirar de aflição
E sair da sessão frouxa de rir
Já te vejo brincando gostando de ser
Tua sombra a se multiplicar
Nos teus olhos também posso ver
As vitrines te vendo passar
Na galeria, cada clarão
É como um dia depois de outro dia
Abrindo um salão
Passas em exposição
Passas sem ver teu vigia
Catando a poesia
Que entornas no chão

As Vitrines (Almanaque, 1981) de Chico Buarque (1944-).

O eu-lírico da canção, que vamos chamar aqui de Ivo, pensa em seu amado, Adão. Adão é poeta, e tem a estranha mania de deixar cair seus poemas ao passear pelo shopping. Ivo, muito solícito e perdidamente apaixonado, corre atrás do companheiro catando os papéis que o desastrado deixa cair. Sendo estatístico, Ivo sabe que pode modelar o processo de queda dos poemas como um processo de Poisson com média θ. Ivo quer saber se será capaz de acompanhar Adão na sua jornada sem perder nenhum poema. Para isso, julga que se $\theta \leq \theta_0$, ele será capaz de catar toda a poesia deixada por Adão antes de ser carregada pelo vento.

Suponha que Ivo observa o processo de queda dos poemas em n intervalos de exatamente t unidades de tempo e toma nota dos números $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de poemas caídos em cada intervalo. Ivo considera a estatística de teste $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ e constrói o teste δ_c de modo que, se $S \geq c$, ele rejeita a hipótese $H_0 : \theta \leq \theta_0$.

a) (10 pontos) Encontre a função poder do teste de Ivo.

b) (10 pontos) Mostre que a função poder do item anterior é **não-decrescente** em θ;

c) (2,5 pontos) Encontre uma expressão para o tamanho α_0 do teste δ_c;

d) (2,5 pontos) O teste em questão é não-viesado? Justifique;

e) (5 pontos) Discuta se é possível atingir qualquer tamanho para δ_c e o que fazer se queremos um tamanho de, por exemplo, $\alpha_0 = 0.01$.

Conceitos trabalhados: Testes de hipótese; poder; tamanho.
Nível de dificuldade: fácil.
Resolução: A partir das dicas, sabemos que $Y_i \sim \text{Poisson}(\theta t)$, de modo que $S \sim \text{Poisson}(n\theta t)$. Portanto, a probabilidade de rejeitar H_0 é:

$$\pi(\theta \mid \delta_c) := \Pr(S \geq c \mid \theta) = \sum_{k=c}^{\infty} \frac{e^{-n\theta t}(n\theta t)^k}{k!} = 1 - Q(\lfloor c+1 \rfloor, n\theta t).$$

Isto responde a). Utilizando a outra dica dada no começo da prova, vemos que a derivada

$$\begin{aligned}\frac{d\pi(\theta \mid \delta_c)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left[1 - Q(\lfloor c+1 \rfloor, n\theta t)\right], \\ &= -\left(-nt\frac{e^{-nt\theta}(nt\theta)^{\lfloor c+1 \rfloor - 1}}{\Gamma(\lfloor c+1 \rfloor)}\right) = nt\frac{e^{-nt\theta}(nt\theta)^c}{\Gamma(\lfloor c+1 \rfloor)}\end{aligned}$$

é não-negativa para todo $\theta \in (0, \infty)$, o que responde b). A solução para c) é que sim, o teste é não-viesado: como a função poder é não-descrescente em θ temos que $\pi(\theta \mid \delta_c) \leq \pi(\theta' \mid \delta_c)$ para todo par (θ, θ') tal que $\theta \leq \theta_0$ e $\theta' > \theta_0 \geq \theta$, isto é, $\theta \in \Omega_0$ e $\theta' \in \Omega_1$. Para responder d), vamos nos lembrar que

$$\text{tamanho}(\delta) := \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta \mid \delta).$$

Como $\pi(\theta \mid \delta_c)$ é não descrescente e $\Omega_0 = (0, \theta_0]$, temos:

$$\text{tamanho}(\delta_c) = \sup_{\theta \leq \theta_0} \pi(\theta \mid \delta_c) = 1 - Q(\lfloor c+1 \rfloor, n\theta_0 t) =: \alpha_0.$$

Olhando para a expressão que acabamos de encontrar, podemos ver que não será sempre possível inverter a relação encontrada para, a partir de um par (α_0, θ_0), obter c que satisfaça a expressão exatamente. Para construir um teste com $\alpha_0 = 0.01$, precisamos encontrar c de modo que $\pi(\theta \mid \delta_c) \leq 0.01$, o que pode levar a tamanhos efetivos bem menores que o especificado. Com isso, respondemos e). Como extra, poderíamos citar a aleatorização aprendida no Trabalho IV como uma maneira de atingir α_0 exatamente. ■

2. Temos que pegar!

Além de apaixonados um pelo outro, Joelinton e Valcicléia também amam Pokémon. Os dois jogam competitivamente na Liga Brasileira de Pokémon (LBP). Há, contudo, um pequeno incoveniente: Joelinton é *Team Magma* enquanto Valcicléia é *Team Aqua*. Durante uma conversa acalorada, Joelinton afirma que o *Team Magma* é melhor, em termos de *pokescores* médios, que o *Team Aqua*. Valcicléia propõe consultar o site da LBP para obter dados sobre o assunto. Ao consultar o site, eles obtem m valores de *pokescores* de integrantes do *Team Magma* e n valores de integrantes do *Team Aqua*.

Suponha que modelamos os *pokescores* de cada jogador(a) em cada time como variáveis aleatórias normais com médias μ_M e μ_A e variâncias σ_M^2 e σ_A^2, respectivamente. Nos itens a seguir, **enuncie claramente** qual é a hipótese nula – e a hipótese alternativa – em cada caso, qual é a estatística de teste e qual o procedimento de teste.

a) (2,5 pontos) A partir do desenho experimental descrito, encontre quantidades pivotais para μ_M e μ_A, supondo σ_M^2 e σ_A^2 **desconhecidas**. Justifique;

b) (2,5 pontos) Utilize as quantidades do item anterior para construir intervalos de confiança exatos de 99% para μ_A e μ_M;

c) (5 pontos) Suponha que, no calor do momento, Valcicléia afirme que o *Team Magma* é tão ruim que não tem pokescore médio suficiente nem para competir na Liga Regional de Pokemon (LRP). Sabendo que o pokescore médio necessário para admissão na LRP é μ_0, mostre a Joelinton como utilizar o intervalo de confiança obtido no item anterior para testar a hipótese levantada por sua amada;

d) (10 pontos) Nossa dupla dinâmica está interessada em comparar as médias supondo que as variâncias são iguais. Proponha um teste de tamanho α_0 para avaliar a premissa de homogeneidade (variâncias iguais);

e) (10 pontos) Suponha que o teste do item anterior falhou em rejeitar H_0. Proponha um teste de tamanho α_0 para testar a hipótese inicial de Joelinton;

Conceitos trabalhados: Quantidades pivotais; intervalos de confiança; comparação de médias; comparação de variâncias.
Nível de dificuldade: médio.
Resolução: Vamos começar definindo $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ como sendo os *pokescores* do *Team Magma* e $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ como os os *pokescores* do *Team Aqua*. Como vimos em aula, as quantidades pivotais aqui são

$$U_M = \frac{\bar{X}_m - \mu_M}{\hat{\sigma}'_M} \sim \text{Student}(m-1),$$
$$U_A = \frac{\bar{Y}_n - \mu_A}{\hat{\sigma}'_A} \sim \text{Student}(n-1),$$

onde $\hat{\sigma}'_M$ e $\hat{\sigma}'_A$ são dados pelas fórmulas no catálogo. A partir destas quantidades (estatísticas) pivotais, conseguimos responder b): os intervalos

$$I_M = \bar{X}_m \pm T^{-1}(0,995; m-1)\frac{\hat{\sigma}'_M}{\sqrt{m}},$$
$$I_A = \bar{Y}_n \pm T^{-1}(0,995; n-1)\frac{\hat{\sigma}'_A}{\sqrt{n}},$$

são intervalos de confiança exatos para μ_M e μ_A, respectivamente.
Depois de respirar fundo e beber um copo d'água, Joelinton pode resolver c) e testar a hipótese aventada por Valcicléia simplesmente avaliando se

$$\bar{X}_m + T^{-1}(0.995; m-1)\frac{\hat{\sigma}'_M}{\sqrt{m}} < \mu_0.$$

Caso afirmativo, podemos rejeitar a hipótese $H_0 : \mu_M \geq \mu_0$ ao nível $\alpha = 0.01$. Para responder d) precisamos lembrar que o teste para a premissa de homogeneidade é o teste F. Nossa hipótese nula é $H_0 : \sigma_M^2 = \sigma_A^2$ e nossa estatística de teste é

$$V = \frac{S_X^2/(m-1)}{S_Y^2/(n-1)}.$$

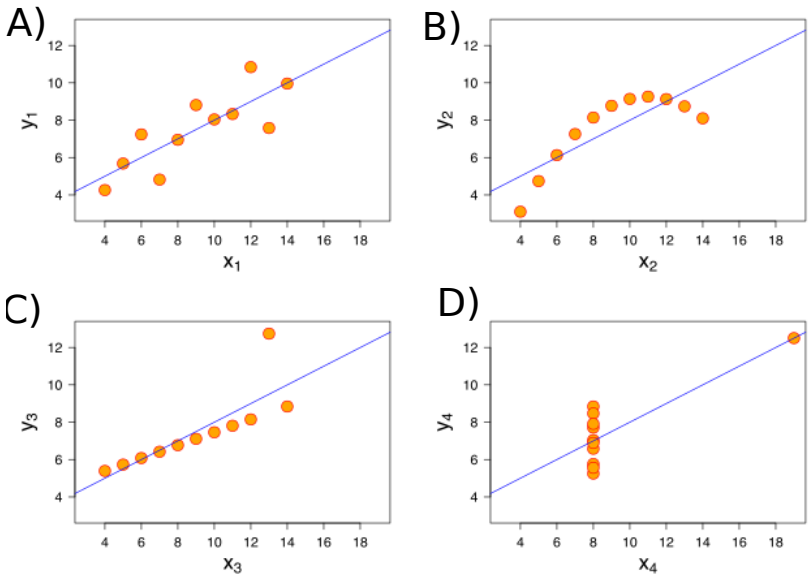
Sabemos que sob H_0, $V \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$. Vamos agora construir um teste de tamanho α_0. Como nossa hipótese alternativa $H_0 : \sigma_M^2 \neq \sigma_A^2$ é bilateral, definimos uma região de rejeição $R = (0, c_1) \cup (c_2, \infty)$ para V, onde $c_1 = F^{-1}(\alpha_0/2, m-1, n-1)$ e $c_2 = F^{-1}(1-\alpha_0/2; m-1, n-1)$ são os quantis apropriados de uma distribuição F. Nosso procedimento de teste é "se $V \in R$, rejeitamos H_0, caso contrário falhamos em rejeitar H_0". Para finalizar, vamos responder e). Se não rejeitamos a hipótese de diferença nas variâncias, podemos empregar um teste t de Student unilateral para testar $H_0 : \mu_M \leq \mu_A$ sob a premissa de variâncias iguais. Para isso, computamos

$$U = \frac{\sqrt{m+n-2}(\bar{X}_m - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\left(S_X^2 + S_Y^2\right)}},$$

que, sob H_0, tem distribuição t de Student com $m+n-2$ graus de liberdade. Nosso procedimento de teste é rejeitar H_0 se $U \geq c$, onde $c = T^{-1}(1-\alpha_0; m+n-2)$ é o quantil apropriado de uma distribuição t de Student com $m+n-2$ graus de liberdade. ■

3. Regressão linear: o melhor modelo ruim que você já viu.

Considere a figura a seguir:



Em todos os painéis, $\bar{x} = 9$, $\bar{y} = 7{,}5$, $s_x^2 = 110$ e $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0{,}816$. Isto é, todas as estatísticas sumárias relevantes atingem os mesmos valores. Disto resulta que $\hat{\beta}_0 = 3$ e $\hat{\beta}_1 = 0{,}5$ para todos os painéis.

a) (15 pontos) Comente sobre quais premissas básicas – ou nenhuma – da regressão linear aparentam estar sendo violadas em cada painel. Justifique.

b) (5 pontos) Os estimadores de máxima verossimilhança para os coeficientes no modelo

$$E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

são

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x},$$
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{y})(X_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}.$$

Tais estimadores são viesados? Justifique.

Dica: Pode ser conveniente escrever

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})\, Y_i}{s_x^2}.$$

Conceitos trabalhados: Regressão linear; premissas da regressão linear; viés.
Nível de dificuldade: médio.
Resolução: Vamos responder a) por painel:

- No painel A) não é possível identificar visualmente nenhuma violação clara das premissas do modelo de regressão;
- Já no painel B), podemos notar que a relação entre Y e X é não-linear, violando a premissa de linearidade, $E[Y] = \beta_0 + \beta_1 X$;
- Em C) vemos um ponto aberrante, o que sugere violação da premissa de dados condicionalmente independentes e identicamente distribuídos (i.i.d);
- Finalmente em D) vemos que as premissas de linearidade e i.i.d. não parecem ser atendidas pois o ponto extremo à direita (chamado comumente de "alavanca") cria uma relação linear artificial entre Y e X, que desapareceria se excluíssemos esse ponto.

Para responder b) temos dois caminhos: o mais simples é utilizar a dica dada no começo da prova e argumentar que como as distribuições de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são normais com média β_0 e β_1, os estimadores considerados são de fato não-viesados. O segundo caminho, e mais complicado, é utilizar manipulações de esperanças, o que faremos a seguir. Lembrando que $E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i$, usando a dica dada na própria questão e passando o operador de esperança, temos

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_1] &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})\, E[Y_i]}{s_x^2}, \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})\,(\beta_0 + \beta_1 X_i)}{s_x^2}, \\ &= \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x}) + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i\,(X_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x}) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_1] &= \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i\,(X_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}, \\ &= \beta_1, \end{aligned}$$

porque[1] $\sum_{i=1}^{n} X_i (X_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2$. Para $\hat{\beta}_0$, temos

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_0] &= E[\bar{y}] - \beta_1 \bar{x}, \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_0 + \beta_1 X_i}{n} - \beta_1 \bar{x}, \\ &= \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_1 X_i}{n} - \beta_1 \bar{x}, \\ &= \beta_0. \end{aligned}$$

Nota: A questão b) foi retirada *ipsis literis* dos exercícios 2 e 3 da seção 11.2 de DeGroot (recomendados!).

Questão Bônus: uma transformação útil.

Muitas vezes na aplicação de modelos de regressão é conveniente aplicar uma transformação à(s) variável(is) independente(s) de modo a facilitar a computação e/ou a interpretação das estimativas.

a) (10 pontos) Considere uma regressão linear simples. Encontre uma transformação $X' = f(X)$ da variável independente de modo que $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\beta}'_1$ sejam independentes.

b) (5 pontos) Encontre o valor de $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\beta}'_1$ sob a transformação do item anterior.

c) (5 pontos) Como essa transformação muda a interpretação dos coeficientes estimados?

Conceitos trabalhados: Transformação de covariáveis; interpretação dos coeficientes.
Nível de dificuldade: difícil.
Resolução: Resposta de a): a partir da dica dada no começo da prova, sabemos que

$$\text{Cov}\left(\hat{\beta}'_0, \hat{\beta}'_1\right) = -\frac{\bar{x}'\sigma^2}{s_x^2}.$$

Portanto, podemos considerar a transformação $X'_i = X_i - \bar{x}$, de modo que $\bar{x}' = 0$. Chamamos este procedimento de "centrar" (em inglês, *centering*) o preditor ou variável independente. Disto, temos que $\text{Cov}\left(\hat{\beta}'_0, \hat{\beta}'_1\right) = 0$ e, portanto, $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\beta}'_1$ são não-correlacionadas. Como a distribuição conjunta de $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\beta}'_1$ é bivariada normal (fato deduzido a partir dica), segue que $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\beta}'_1$ são independentes. Note que essa última conclusão se aplica somente a variáveis aleatórias normais, pois **neste caso**, correlação zero implica independência.
Para responder b) a respeito de $\hat{\beta}'_0$ basta aplicar a fórmula dada para encontrar

[1] Prove isto, se quiser.

$\hat{\beta}_0' = \bar{y}$. Já para $\hat{\beta}_1'$, precisamos notar que como $X_i' = X_i - \bar{x}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1' &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})(X_i' - \bar{x}')}{\sum_{i=1}^n (X_i' - \bar{x}')^2}, \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})([X_i - \bar{x}] - 0)}{\sum_{i=1}^n ([X_i - \bar{x}] - 0)^2}, \\
&= \hat{\beta}_1,
\end{aligned}$$

ou seja, a estimativa do coeficiente angular não muda!
Sobre c) vimos que $\hat{\beta}_0{}' = \bar{y}$, isto é, o intercepto é a média da variável dependente. Isso significa que β_0 pode ser entendido como a média da variável dependente quando a variável independente (a original!) atinge sua média. Isso facilita bastante a interpretação, especialmente em situações em que X nunca atinge zero em sua escala natural (por exemplo, quando X é a altura de um indivíduo). A interpretação de β_1 muda muito pouco, já que X' mantém as mesmas unidades que X. Além disso, como vimos em b), $\hat{\beta}_1' = \hat{\beta}_1$. ■

Fórmulas úteis

Como usar este catálogo: as fórmulas dadas aqui estão propositalmente privadas do seu contexto. O objetivo desta coleção é ajudar você a lembrar das expressões. Entretanto, saber quais expressões são utilizadas em que contexto é sua tarefa.

- $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- $\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}$;
- $S_X^2 = \sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2$;
- $S_Y^2 = \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y}_n)^2$;
- $U = \frac{\sqrt{m+n-2}(\bar{X}_m - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(S_X^2+S_Y^2)}}$;
- $V = \frac{S_X^2/(m-1)}{S_Y^2/(n-1)}$;
- $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- $\bar{y} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} Y_i$.