Trabalho II: o método Delta.

Disciplina: Inferência Estatística
Professor: Luiz Max de Carvalho

2 de Outubro de 2022

Data de Entrega: 22 de Outubro de 2022.

Orientações

- Enuncie e prove (ou indique onde se pode encontrar a demonstração) de todos os resultados não triviais necessários aos argumentos apresentados;
- Lembre-se de adicionar corretamente as referências bibliográficas que utilizar e referenciá-las no texto;
- Equações e outras expressões matemáticas também recebem pontuação;
- Você pode utilizar figuras, tabelas e diagramas para melhor ilustrar suas respostas;
- Indique com precisão os números de versão para quaisquer software ou linguagem de programação que venha a utilizar para responder às questões[1];

Introdução

Algumas vezes estamos interessados em estimar funções de variáveis aleatórias, em particular funções da média amostral. O método Delta permite, sob certas condições, aproximar a distribuição assintótica de funções de variáveis aleatórias. Este resultado é extremamente útil em Estatística porque permite obter aproximações sob condições bastante gerais, muitas vezes quando estimadores explícitos não estão disponíveis em forma fechada.

Questões

1. Enuncie e prove o método Delta;
2. Discuta sob quais condições o método funciona e porque;

[1]Não precisa detalhar o que foi usado para preparar o documento com a respostas. Recomendo a utilização do ambiente LaTeX, mas fique à vontade para utilizar outras ferramentas.

3. **Definição 1: transformações estabilizadoras da variância**. Suponha que $E[X_i] = \theta$ é o parâmetro de interesse. O Teorema central do limite diz que

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \sigma^2(\theta)\right), \tag{1}$$

ou seja, a variância da distribuição limite é função de θ. Idealmente, gostaríamos[2] que essa distribuição não dependesse de θ. Podemos utilizar o método Delta para resolver esse problema. Em particular, você demonstrou acima que

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \sigma^2(\theta) g'(\theta)^2\right). \tag{2}$$

O que desejamos então é escolher g de modo que $g'(\theta)\sigma(\theta) = a$ para todo θ. Dizemos que g é uma **transformação estabilizadora da variância**.

Aplicação: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra i.i.d. de uma distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância σ^2, **desconhecida**. Defina $Z_i = X_i^2$ e $\tau^2 = \text{Var}(Z_i)$.

(i) Mostre que $\tau^2 = 2\sigma^4$.

(ii) É possível mostrar que

$$\sqrt{n}\left(\bar{Z}_n - \sigma^2\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\sigma^4\right). \tag{3}$$

Proponha uma transformação estabilizadora da variância para este problema[3] *Dica*: Encontre g tal que

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{Z}_n) - g(\sigma^2)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\right).$$

[2] Por razões que ficarão claras mais à frente no curso. Se sua curiosidade não puder esperar, pesquise "estatística ancilar" ou "ancillar statistics".

[3] Note que, como não conhecemos σ^2, g não pode depender de σ^2.