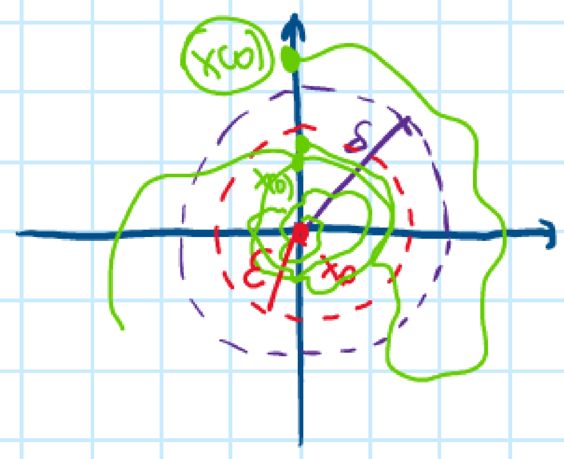
Sistemas não lineares

Tuesday, May 26, 2020 12:15 PM

Pontos Críticos ou de Equilíbrio: Seja $x' = f(x)$ um sistema de equações autônomo, isto é, independe diretamente do tempo, então se $f(x_0) = 0$, x_0 é ponto crítico.



Estável: O ponto crítico x_0 é estável se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que para toda solução $x(t)$ do sistema, $\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon$. Ele é instável se não é estável.
↳ ponto crítico estável
↳ ponto inicial
↳ solução
↳ $\forall t \geq 0$!

Assintoticamente Estável: Se x_0 é ponto crítico estável, ele é dito assintoticamente estável se existe δ_0 com $0 < \delta_0 \leq \delta$ tal que $\|x(0) - x_0\| < \delta_0 \rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x_0$.
↳ convergência das soluções

- Considere:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x,y) \\ \dot{y}(t) = G(x,y) \end{cases}$$
→ não dependem do tempo diretamente

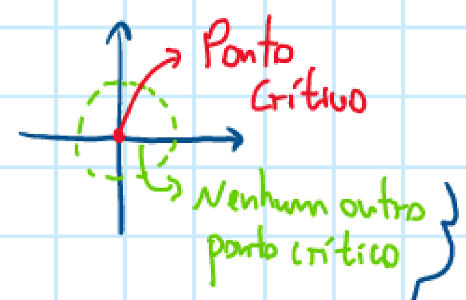
Podemos tentar resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{G(x,y)}{F(x,y)}$, Se têm derivadas parciais contínuas, podemos usar $-G_x = F_y$ para mostrar que é exata!

$$F(x,y)\,dy - G(x,y)\,dx = 0$$

Mas, e se não conseguirmos?

Aproximação Linear próxima dos pontos críticos!

Suponha que $x' = Ax + g(x)$ e que $x = 0$ é um ponto crítico isolado.
(Se 0 não é ponto crítico, mas $x_0 \neq 0$ é, tome $u = x - x_0$).

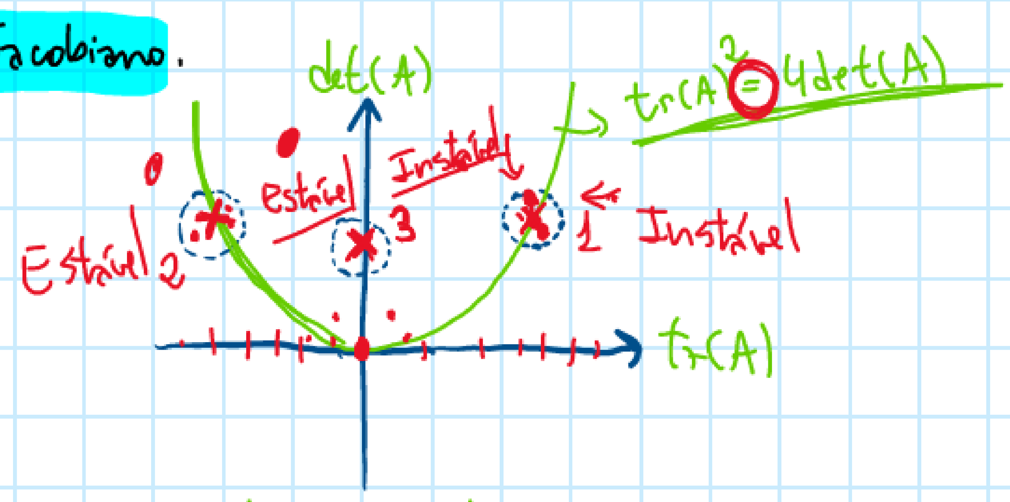


Suponha $\det A \neq 0$ (para $x=0$ ser ponto crítico isolado de $x' = Ax$).
Suponha $g(x)$ com componentes com derivadas parciais contínuas e:
$$\|g(x)\| / \|x\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } x \to 0.$$
Então o sistema é aproximadamente linear próximo a 0.

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$$
⇒ Podemos mostrar que se F e G têm derivadas contínuas até a segunda ordem, o sistema é aproximadamente linear em torno do ponto crítico.

Usando o Teorema da Fórmula de Taylor infinitesimal (pg. 106, Elon), temos que:
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix}$$
$$\approx \underbrace{\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}}_{\text{Jacobiano}}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Problemas: Sejam λ_1, λ_2 os autovalores do Jacobiano.
1) Se $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
2) Se $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
3) Se $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$



$p_\lambda = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$
$\lambda = \dfrac{tr(A) \pm \sqrt{tr^2(A) - 4det(A)}}{2}$

Exemplo (13 do Livro)

13. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 \\ \dot{y} = y - x^2 \end{cases}$

a) Pontos críticos: $\begin{matrix} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = y^2 \\ y = x^2 \end{matrix} \Rightarrow x = (x^2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

(0,0), (1,1)

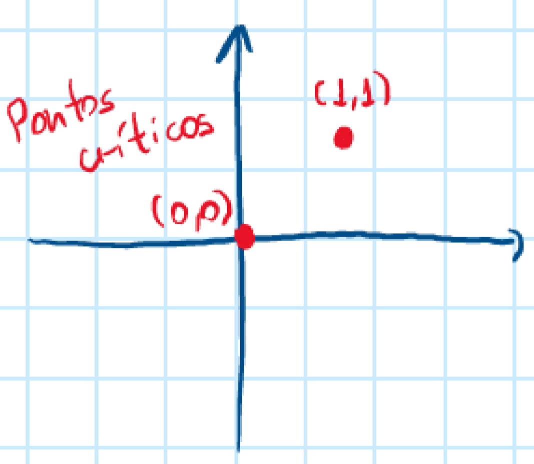
b) Sistema Linear: Para $x_0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(0,0) & F_y(0,0) \\ G_x(0,0) & G_y(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Para $x_0 = (1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(1,1) & F_y(1,1) \\ G_x(1,1) & G_y(1,1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

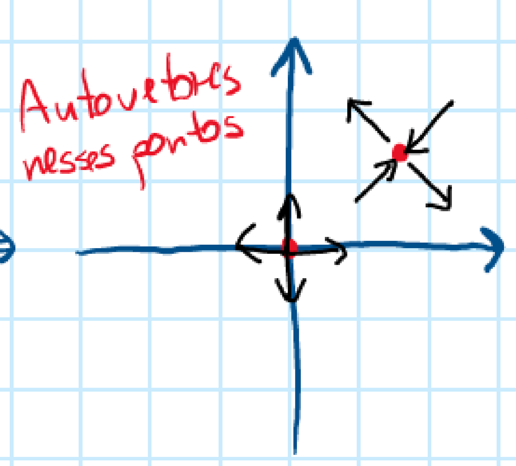
(0,0)

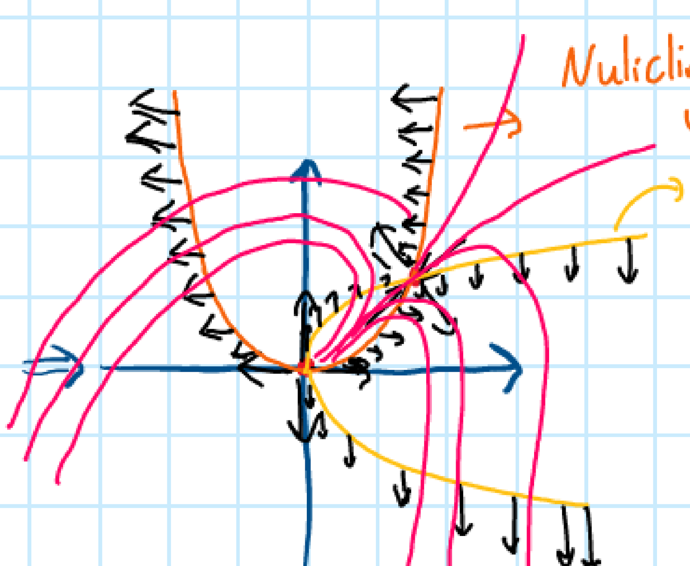
c) Autovalores: i) Para $x_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (mas tem dois autovetores LI)
ii) Para $x_0 = (1,1) \Rightarrow p_\lambda = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.
i) Nó instável (dois autovalores positivos)
ii) Ponto de Sela

d) Retrato de Fase:



⇒





Nuliclinais:
$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = x^2$
$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = y^2$

Quando $\dot{y} = 0$, $y = x^2$,
logo $y^2 - x^4 \Rightarrow \dot{x} = x - x^4$.
Se $x > 1$, $\dot{x} < 0$, $\dot{y} = 0$.
Se $x < 0$, $\dot{x} < 0$, $\dot{y} = 0$
Se $0 < x < 1$, $\dot{x} > 0$