Métodos Numéricos e Revisão

Thursday, June 18, 2020 8:04 PM

Trabalho: Modelo SEIR. Calculamos o R_0 em uma monitoria desse modelo.
Lembrem-se da relação entre período de latência e uma taxa correspondente.

$\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{(t+1)} + (t+1)^3$, $y(0)=3$. Encontrar $y(2)$ com $h = 0,125$ (erro)

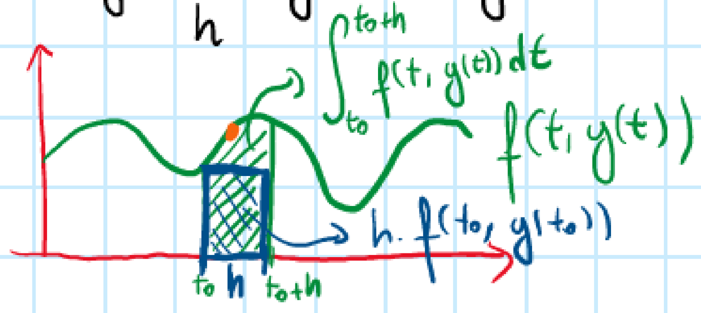
↳ Solução Verdadeira: $y' - 2y(t+1)^{-1} = (t+1)^3$

Método de Euler:

$y(t_0+h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3)$

Se $y' = f(t, y)$, o método de Euler diz que $y'(t_0) \approx \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}$, logo:

$y(t_0+h) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t))\,dt \approx hf(t_0, y(t_0))$



Se $h>0$, $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$
$y_0 = y(t_0)$
forma uma sequência.

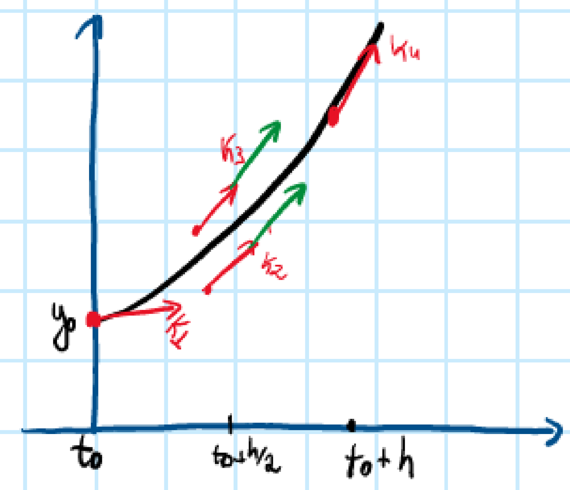
Erro Local: Temos que $y(t_0+h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3) \approx kh^2$ (Expansão de Taylor), se y tem derivada de terceiro grau limitada.

Mas se y tem segunda derivada contínua, $y(t_0+h) - y_1 = \frac{1}{2}h^2 y''(t_0+\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < h$.

Método Runge-Kutta: (scipy.integrate.odeint / solve_ivp)

Nesse caso $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h/2, y_n + h \cdot k_1/2) \\ k_3 = f(t_n + h/2, y_n + h \cdot k_2/2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + h \cdot k_3) \end{cases}$$



Método de Poincaré

Exemplo: $\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 \\ u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$, $t > 0$

Seja $\tau = \omega t$, $v(\tau) = u(t)$. Assim

$\dot{u} = v'(\tau) \cdot \omega$ e $\ddot{u} = v''(\tau) \cdot \omega^2$

$v''(\tau) \cdot \omega^2 + v(\tau) + \varepsilon v(\tau)^3$

$v(0) = u(0) = 1$, $v'(0) = \dot{u}(0)/\omega = 0$

11(9.3): $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + xy^3 \\ \dot{y} = x - 2y - xy \end{cases}$

- Pontos Críticos

a) $\begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow 2x + y + xy^3 = 0 \\ \dot{y} = 0 \Rightarrow x - (2+x)y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{x+2} \end{cases}$, $x \neq -2$

$2x + \left(\frac{x}{x+2}\right) + x\left(\frac{x}{x+2}\right)^3 = 0$ $\div x$

$2 + \frac{1}{x+2} + \frac{x^3}{(x+2)^3} = 0$

$2(x+2)^3 + (x+2)^2 + x^3 = 0 \Rightarrow x = -1.1935$, $y = -1.4798$

Pontos Críticos: $(0,0)$, $(-1.1935, -1.4798)$ (x_0, y_0)

b) $J = \begin{pmatrix} 2 + y^3 & 1 + 3xy^2 \\ 1 - y & -(2+x) \end{pmatrix}$

$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

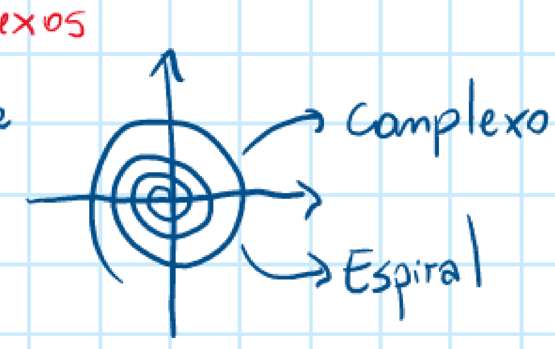
$J_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} -1.24 & -6.84 \\ 2.15 & -0.81 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.24 & -6.84 \\ 2.15 & -0.81 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) Autovalores:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $p_\lambda = \lambda^2 - 5 = 0$, $\boxed{\lambda = \pm\sqrt{5}}$ → Ponto de Sela

$\begin{pmatrix} -1.24 & -6.84 \\ 2.15 & -0.81 \end{pmatrix}$, $\lambda = \boxed{-1.032} \pm \boxed{4.1125i}$ → Autovalores Complexos

Assintoticamente Estável



d) Retrato de Fase: