Lista 3 - Cap 7.4

2. $\theta \sim Beta(5,10)$
$X_1, \dots, X_{20} \sim Bernoulli(\theta)$
$y = \sum_{i=1}^{20} x_i = 1$

Sabemos do Teorema 7.3.1 que $\theta | X_1, \dots, X_n \sim Beta(5+1, 10+20-1)$
$\equiv Beta(6, 29)$

Pelo Corolário 7.4.1., $\delta^*(X) = E[\theta|X]$ é estimador de Bayes.
Como $\theta | \vec{X} \sim Beta(6, 29)$, $E[\theta|\vec{X}] = 6/(6+29) = 6/35$

4. $X_1, \dots, X_n \sim Bernoulli(\theta)$
$\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$, $\mu_0 = \alpha/(\alpha+\beta)$

Seja $y = \sum_{i=1}^n x_i$. Então $\theta | x_1, \dots, x_n \sim Beta(\alpha+y, \beta+n-y)$

$$E[\theta|x_1,\dots,x_n] = \frac{\alpha+y}{\alpha+\beta+n} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+n} + \frac{\overline{X_n}}{\frac{(\alpha+\beta)}{n}+1}$$

Defina $\gamma_n = \dfrac{1}{\frac{\alpha+\beta}{n}+1} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+n} = \mu_0 \cdot \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n} = \mu_0(1-\gamma_n)$

$$1-\gamma_n = \frac{\alpha+\beta}{n} \Big/ \left(\frac{\alpha+\beta}{n}+1\right) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}$$

Logo $E[\theta|X_1,\dots,X_n] = \gamma_n \overline{X_n} + \mu_0(1-\gamma_n)$ e $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim \dfrac{1}{(\alpha+\beta)/n+1} = 1$

7. $X_1, \dots, X_n \sim Poisson(\theta)$
$\theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $\mu_0 = \alpha/\beta$, $y = \sum_{i=1}^n x_i$

Temos que, pelo Teorema 7.3.2, $\theta | x_1, \dots, x_n \sim Gamma(\alpha+y, \beta+n)$

Sabemos que o estimador de Bayes é $E[\theta|X_1,\dots,X_n] = \dfrac{\alpha+y}{\beta+n}$

Defina $\gamma_n = n/\beta+n$ e $1-\gamma_n = \beta/\beta+n$

$$E[\theta|X_1,\dots,X_n] = \frac{\alpha}{\beta+n} + \frac{\overline{X_n}}{(\beta+n)/n} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\beta+n} + \gamma_n \cdot \overline{X_n}$$
$$= \gamma_n \cdot \overline{X_n} + (1-\gamma_n)\mu_0.$$

Além disso $\gamma_n \longrightarrow 1$.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n(\vec{X}) = \gamma_n \cdot \overline{X_n} + (1-\gamma_n)\mu_0$

Sabemos que $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \theta$, pela lei fraca dos grandes números, isto é, $P(|\overline{x_n} - \theta| > \varepsilon) \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$. Então, tome $\varepsilon > 0$:

desigualdade triangular

$$P(|\delta_n(\vec{x}) - \theta| > \varepsilon) \le P(|\delta_n(\vec{x}) - \overline{x_n}| + |\overline{x_n} - \theta| > \varepsilon)$$
$$\le P(|\delta_n(\vec{x}) - \overline{x_n}| > \varepsilon/2) + P(|\overline{x_n} - \theta| > \varepsilon/2)$$
$$= P(|(1-\gamma_n)(\mu_0 - \overline{x_n})| > \varepsilon/2) + P(|\overline{x_n} - \theta| > \varepsilon/2)$$
$\longrightarrow 0$, com n suficientemente grande.

se isso ocorre o primeiro ou o segundo ocorrem

11. $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$, $y = \sum_{i=1}^n x_i$
$\theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$
$\theta | X_1, \dots, X_n \sim Gamma(\alpha+n, \beta+y)$, pelo Teorema 7.3.4.

O estimador de Bayes é $E[\theta|X_1,\dots,X_n] = \dfrac{\alpha+n}{\beta+y} = \dfrac{(\alpha/n)+1}{(\beta/n)+\overline{X_n}} := \delta_n^*(\vec{x})$

Podemos ver que $|\delta_n^*(x^*) - 1/\overline{x_n}| \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$. Essa convergência é dita ponto a ponto e implica $P(|\delta^*(x^*) - 1/\overline{x_n}| > \varepsilon) \to 0$. Usando a mesma desigualdade do exercício 7, provamos que $\delta^*(\vec{x})$ é consistente.

14. $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$
$\xi(\theta)$ priori de θ
$\hat{\theta}$ estimador de Bayes com a perda quadrática.
Defina $\psi := \theta^2$

Suponha que queremos estimar ψ sujeito a $L(\psi, a) = (\psi - a)^2$

Se $\hat{\psi}$ é o estimador de Bayes, $\hat{\psi} = E[\psi|X_1,\dots,X_n] = E[\theta^2|X_1,\dots,X_n]$.
Sabemos também que $\hat{\theta} = E[\theta|X_1,\dots,X_n]$. Além disso:

$$Var(\theta|X_1,\dots,X_n) = E[\theta^2|X_1,\dots,X_n] - (E[\theta|X_1,\dots,X_n])^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow E[\theta^2|X_1,\dots,X_n] \ge (E[\theta|X_1,\dots,X_n])^2$$

Pelo exercício 4, de 4.4., a igualdade só vale se $P(\theta = c|X_1,\dots,X_n) = 1$, o que não é verdade dada a verossimilhança. Assim $\hat{\psi} > \hat{\theta}^2$.