Capitulo_8.7

Thursday, September 10, 2020 12:27 AM

4. $X \sim Geometric(p)$, p desconhecido.
A ideia é encontrar um estimador não viesado para $1/p$.
Passo 1: Encontrar estimador para p.
A p.m.f. de X é $f(x|p) = (1-p)^{x-1} p$ e $1/p$ (Existe outra versão com $f(x|p) = (1-p)^x p$ e $E[X] = \frac{1-p}{p}$)
Vou encontrar pelo método de momentos, pois é mais simples. Veja que $E[X] = 1/p < \infty$, o que é condição necessária para o método. Assim $m_1 = \bar{X}_n = E[X|p] = 1/p$.
Pelo método de momentos $\hat{p} = 1/\bar{x}_n$ é estimador para p.
Passo 2: Estimador para $1/p$.
Um estimador para $1/p$ é $\bar{X}_n$ como vimos no passo 1.
Passo 3: Calcular viés do estimador:
$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\, E[X_1] = \frac{1}{p}$$
Passo 4: Corrigir viés: Como Viés $(\delta(p)) = E(\bar{X}_n) - \frac{1}{p} = 0$, o estimador é não viesado e não precisa de correção.

Obs.: Nesse exercício, $n = 1 \Rightarrow \bar{X}_n = X$

6. Fazer exercício após estudar 8.2 ou seguir equação 8.7.8
$X_1, \dots, X_n \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconhecidos

Dem.: Seja $T = c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ um estimador para σ^2. Temos que $\left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$, logo $\frac{T}{\sigma^2 c} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$ (Chi-quadrado com $n-1$ graus de liberdade).
$$\left.\begin{aligned} E[T] &= c\sigma^2(n-1) \\ Var[T] &= 2(n-1)c^2\sigma^4 \end{aligned}\right\} \text{Olhar média e variância } \chi^2 \text{ e multiplicar por } c\sigma^2$$
$$\begin{aligned} MSE(T) &= E[(T-\sigma^2)^2] = E[T^2] - 2\sigma^2 E[T] + (\sigma^2)^2 \\ &= Var[T] + E[T]^2 - 2\sigma^2 E[T] + \sigma^4 \\ &= 2(n-1)c^2\sigma^4 + c^2\sigma^4(n-1)^2 - 2\sigma^2 c\sigma^2(n-1) + \sigma^4 \\ &= \sigma^4[((n-1)^2 + 2(n-1))c^2 - 2(n-1)c + 1] \\ &= \sigma^4[(n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1] \end{aligned}$$
Temos que minimizar a equação do 2º grau em c nos colchetes. Assim:
$$\hat{c} = \underset{c \in \mathbb{R}}{\arg\min}\ (n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1$$
$$= \frac{\cancel{2}(n-1)}{\cancel{2}(n^2-1)} = \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{(n-1)}(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$
Logo se $\forall c > \hat{c}$, o MSE é crescente. Assim, como $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$, temos que
$\sigma_0^2 < \sigma_1^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (\mu, \sigma^2)$.

11. Seja A a resposta no animal A e B no animal B.
Sabemos que $E[A] = E[B] = \theta$, θ desconhecido.
$Var[A] = 4\, Var[B]$
Se $X_1, \dots, X_m$ corresponde a uma amostra do animal A e
$Y_1, \dots, Y_n$ " " " " " " B } independentes
Estimador: $\hat{\theta} = \alpha \bar{X}_m + (1-\alpha)\bar{Y}_n$

a) Vamos verificar o viés. Por isso calculamos $E[\hat{\theta}]$, isto é,
$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}] &= \alpha E[\bar{X}_m] + (1-\alpha) E[\bar{Y}_n] \\ &\overset{\text{prove!}}{=} \alpha E[X_1] + (1-\alpha) E[Y_1] \quad \text{Médias iguais} \\ &= \alpha E[X_1] + (1-\alpha) E[X_1] \\ &= E[X_1] = \theta \end{aligned}$$
Logo $\forall \alpha, m, n$, $\hat{\theta}$ é não viesad.

b) Queremos minimizar $Var(\hat{\theta})$ com m e n fixos.
$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &= Var(\alpha \bar{X}_m + (1-\alpha)\bar{Y}_n) \quad \text{Independência} \\ &= \alpha^2 Var(\bar{X}_m) + (1-\alpha)^2 Var(\bar{Y}_n) \\ &= \frac{\alpha^2}{m^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{m}\, Var(X_1) + \frac{(1-\alpha)^2}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n}\, Var(Y_1) \\ &= \frac{\alpha^2\, Var(Y_1) \cdot 4}{m} + \frac{(1-\alpha)^2 Var(Y_1)}{n} \\ &= \frac{Var(Y_1)}{mn}[4n\alpha^2 + (1-\alpha)^2 m] \\ &= \frac{Var(Y_1)}{mn}[\underbrace{(4n+m)\alpha^2 - 2m\alpha + m}_{\text{Minimizar em } \alpha}] \end{aligned}$$
$$\hat{\alpha} = \underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\arg\min}\ (4n+m)\alpha^2 - 2m\alpha + m$$
→ espaço dos estimadores não viesados
$$= \frac{\cancel{2}m}{\cancel{2}(4n+m)} = \frac{m}{m+4n} = \frac{1}{1 + 4(n/m)}$$
→ Valor de α com menor variância

13. $X_1, \dots, X_n$ com pdf $f(x|\theta)$, θ desconhecido. Seja T uma estatística e assuma $\delta(X)$ estimador não viesado para θ, tal que $E_\theta[\delta(X)|T]$ não depende de θ. $\delta_0(X) := E[\delta(X)|T]$ (Lembrar de Rao-Blackwell)
↳ não depende de θ

a) Para saber o viés, calculamos a esperança. → Isso mostra o não viés
$$E[\delta_0(X)] = \underbrace{E[E[\delta(X)|T]]}_{\text{Lei da Esperança Total}} = \underbrace{E[\delta(X)]}_{\delta(X) \text{ é não viesado}} = \theta$$

b) Sabemos que $R(\theta, \delta_0) = E[(\delta_0(X) - \theta)^2] = Var[\delta_0] + \cancel{\text{Viés}[\delta_0]^2} \to 0$
$R(\theta, \delta) = E[(\delta(X) - \theta)^2] = Var[\delta] + \cancel{\text{Viés}[\delta]^2} \to 0$
Por Rao Blackwell $R(\theta, \delta_0) \leq R(\theta, \delta)$ se T é estatística suficiente. Se T não for suficiente temos que usar o Teorema 4.7.4, onde:
$$\begin{aligned} Var[\delta(X)] &= E_\theta[Var(\delta(X)|T)] + Var[E_\theta(\delta(X)|T)] \\ &= E_\theta[Var(\delta(X)|T)] + Var[\delta_0(X)] \end{aligned}$$
Como $Var(\delta(X)|T) \geq 0$, $E_\theta[Var(\delta(X)|T)] \geq 0$. Use integral para ver isso ou desigualdade de Markov.
Logo segue o resultado que $Var[\delta] \geq Var[\delta_0]$.