Cap 7.5

1. $f(y) = \begin{cases} 1/n, & y \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$

$E[Y] = \sum_{i=1}^n y_i \cdot f(y_i) = 1/n \sum_{i=1}^n y_i = 1/n \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n$

$E[Y^2] = \sum_{i=1}^n y_i^2 f(y_i) = 1/n \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1/n \sum_{i=1}^n x_i^2$

Logo $Var[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}_n^2 + \bar{x}_n^2$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\bar{x}_n}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_n^2$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2\bar{x}_n x_i + \bar{x}_n^2]$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - \bar{x}_n]^2$

Claro que eu fiz o processo contrário

4. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $\theta \in (0,1)$

$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta^y (1-\theta)^{n-y}$, $y = \sum_{i=1}^n x_i$

⇒ Se $y = 0$, $f(x_1, \dots, x_n | \theta) = (1-\theta)^n$, que é função decrescente em θ $\left(\frac{d}{d\theta}(1-\theta)^n = -n(1-\theta)^{n-1} < 0, \ \theta \in (0,1)\right)$

Então o máximo é atingido quando $\theta = 0$, que não pertence ao intervalo. $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta < \varepsilon$ tal que $(1-\delta)^n < (1-\varepsilon)^n$.

⇒ Se $y = 1$, $f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \theta$, e facilmente vemos que essa função é crescente em θ e não tem máximo em $(0,1)$.

9. $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória com pdf:

$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

ATENÇÃO

$f_n(\vec{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^n x_i)^{\theta-1}$, $\min\{x_i\} > 0$, $\max\{x_i\} < 1$

Se $L(\theta) = \log f_n(\vec{x}|\theta) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i$

$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\hat{\theta}) = \frac{n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \underbrace{\log x_i}_{<0}} > 0$

10. $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória de pdf

$f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$

$f_n(\vec{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} e^{-|x_i - \theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i - \theta|}$

$L(\theta) = \ln f_n(\vec{x}|\theta) = -n \log 2 - \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i - \theta|}_{\text{Queremos } \theta \text{ que minimize isso}}$

$\hat{\theta} = \text{mediana}\{x_1, \dots, x_n\}$