Capítulo 7.7

Wednesday, September 2, 2020 11:40 PM

4. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ iid (independente e identicamente distribuído), μ conhecido e σ^2 não.
Temos que mostrar que $T = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$.
Vou usar o Critério de Fatorização: para isso preciso fatorar $f_n(x|\theta) = u(x)\, v(T(x), \theta)$
$f(x|\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\}$ é pdf da distribuição normal.

Essa é nossa estatística

$$f_n(x|\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\}$$

Deve ficar em

$$= 1 \cdot \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2} T\},$$

onde $u(x) = 1$ e $v(r(x), \sigma^2) = f_n(x|\theta)$

Como existe fatorização e u, v são não negativas, dizemos que T é estatística suficiente.

7. $X_1, \dots, X_n \sim Beta(\alpha, \beta)$ i.i.d., onde β é conhecido e α é desconhecido.
Temos que provar que $T = \prod_{i=1}^n x_i$ é estatística suficiente.
Vou usar o critério de fatorização:

$$f(x|\alpha) = \frac{1}{\boxed{B(\alpha,\beta)}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \cdot \mathbb{1}\{x \in [0,1]\}$$

Depende só de α e β

Função v — Nossa estatística! — só função de x, logo u!

$$f_n(x|\alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\alpha) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)^n} \cdot \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i)\right)^{\beta-1}$$

função v

$$= \left[\left(\prod_{i=1}^n (1-x_i)\right)^{\beta-1}\right]\left[\frac{1}{B(\alpha,\beta)^n} \cdot T^{\alpha-1}\right]$$

$$= u(x) \cdot v[T, \alpha].$$

Foi possível fazer assim, pois β era conhecido.
Logo provamos que T é suficiente.

13. $X_1, \dots, X_n$ tem pdf $f(x|\theta)$. Considere $T = r(X_1, \dots, X_n)$ e $T' = r'(X_1, \dots, X_n)$, onde $T' = h(T)$, onde h é função injetiva.
Dem.: Temos que provar duas afirmações. A "if" e a "only if". Assim:
($\Rightarrow$) Suponha que T seja estatística suficiente para θ. Assim,

$$f_n(x|\theta) = u(x)\, v(T, \theta),$$

para algumas funções $u, v \geq 0$. Nesse caso $T = h^{-1}(T')$ e, portanto,

$$f_n(x|\theta) = u(x)\, v(h^{-1}(T'), \theta)$$

Logo $v(h^{-1}(T'), \theta)$ só depende dos dados através de T'. Pela regra da fatorização, T' é suficiente.

($\Leftarrow$) Demonstração análoga.

16. Ω um intervalo real. $f_n(x|\theta)$ é pdf de X. Seja $T = r(X)$ uma estatística suficiente.
Tome uma priori $\xi(\theta)$. Assim:

$$\xi(\theta|x) = \frac{f_n(x|\theta)\xi(\theta)}{g_n(x)} = \frac{u(x)\, v(r(x), \theta)\, \xi(\theta)}{g_n(x)} \overset{(*)}{=} \frac{\cancel{u(x)}\, v(r(x), \theta)\, \xi(\theta)}{\cancel{u(x)} \int_\Omega v(r(x), \theta)\, \xi(\theta) d\theta}$$

Teorema de Bayes

$$\text{Temos que } g_n(x) = \int_\Omega f_n(x|\theta)\xi(\theta)\, d\theta = \int_\Omega u(x)\, v(r(x), \theta)\, \xi(\theta)\, d\theta \overset{(*)}{=} u(x) \int_\Omega v(r(x), \theta)\, \xi(\theta)\, d\theta$$

não depende de θ

Onde usamos o critério da fatorização.

Logo $\xi(\theta|x)$ depende de x apenas através de $r(x)$.