Estatística - Capítulo 8

Friday, September 11, 2020 11:06 AM

Importante lembrar: Soma de v.a. independentes $\underset{\overset{\shortparallel}{X_1+\dots+X_n}}{}$

- $X \sim Be(p)$, $S_n \sim Bin(n,p)$
- $X \sim Geom(p)$, $S_n \sim Neg\,Bin(n,p)$
- $X \sim Poi(\lambda)$, $S_n \sim Poi(n\lambda)$
- $X \sim Exp(\lambda)$, $S_n \sim Gamma(n,\lambda)$
- $X \sim Normal(\mu,\sigma^2)$, $S_n \sim Normal(n\mu, n\sigma^2)$

Chi-Quadrado: $X_1,\dots,X_m \sim N(0,1) \Rightarrow X_1^2+\dots+X_m^2 \sim \chi^2(m)$

$X \sim Gamma(m/2, 1/2) \Rightarrow X \sim \chi^2(m)$

Propriedades: $X \sim \chi^2(m)$

$$E[X] = m$$
$$Var[X] = 2m$$

Ex.: $X_1,\dots,X_{10} \sim Exp(1/2)$

$X_1+\dots+X_{10} \sim Gamma(10, 1/2) \equiv Gamma(20/2, 1/2)$, isto é,
$X_1+\dots+X_{10} \sim \chi^2(20$

Ex.2: $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma} \sim \chi^2(1) \text{ e}$$

$$\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_2-\mu}{\sigma}\right)^2+\dots+\left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

Viés nos Estimadores:

Viés de um estimador: Seja $\delta(\mathbf{X})$ um estimador para $g(\theta)$.

$$Viés(\delta) = E[\delta(\mathbf{X})] - g(\theta)$$

Se $Viés(\delta) = 0$, chamamos δ de não enviesado (unbiased)

A partir de um estimador enviesado, podemos construir um sem viés.
Exemplo: o EMV (MLE) de σ^2 de $N(\mu,\sigma^2)$ é

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2$$

Observe o quanto isso lembra χ^2. $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\bar{X}_n \sim N(\mu,\sigma^2/n)$
então $X_i-\bar{X}_n \sim N(0, \sigma^2(1-1/n)) \Rightarrow \frac{X_i-\bar{X}_n}{\sigma\sqrt{1-1/n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\sigma^2(1-1/n)}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

$Var(X_i-\bar{X}_n) \neq Var(X_i)+Var(\bar{X}_n)$, por quê?

$$\begin{aligned} Var(X_1-\bar{X}_n) &= Var(X_1 - X_1/n - \dots - X_n/n) \\ &= Var((n-1)X_1/n - X_2/n - \dots - X_n/n) \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^2}Var(X_1) + \frac{1}{n^2}Var(X_2)+\dots+\frac{1}{n^2}Var(X_n) \\ &= \sigma^2\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{(n-1)}{n^2}\right) = \sigma^2\frac{(n-1)}{n} \end{aligned}$$

Para calcular o viés:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2\right] &= E[(X_1-\bar{X}_n)^2] = E\left[\frac{\sigma^2(1+1/n)}{\sigma^2(1-1/n)}(X_i-\bar{X}_n)^2\right] \\ &= \sigma^2(1-1/n)E\left[\left(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\sigma\sqrt{1-1/n}}\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$Viés = E[\hat{\sigma}^2_{MLE}] - \sigma^2 = \sigma^2 - \sigma^2/n - \sigma^2 = -\sigma^2/n \rightarrow$ Assintoticamente não enviesado

Como tirar esse viés? Queremos que $E[\hat{\sigma}^2] = c\sigma^2$ com $c = 1$,
mas obtivemos $c = (1-1/n)$. Se eu tomar $E\left[\frac{\hat{\sigma}^2_{MLE}}{1-1/n}\right] = \sigma^2$, como queremos!

Defina
$$s^2 = \frac{\sigma^2_{MLE}}{1-1/n} = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2}{(1-1/n)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2}{n-1}$$

Hipóteses: $\{x : f(x|\theta) > 0\}$ não muda em θ; λ_n, 2 vezes diferenciável

Informação de Fisher: $\lambda_n = \log f_n(x|\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_i(x|\theta)$

Lembrar: $R(\delta,\theta) = Var(\delta) + Viés(\delta)^2$

$\lambda_n' = \frac{d}{d\theta}\log f_n(x,\theta)$ é chamado de score

$$I_n(\theta) = E_\theta[(\lambda_n'(X|\theta))^2] = -E_\theta[\lambda''(X|\theta)]$$

Lembrar: $I_n(\theta) = n\,I(\theta)$!! $I(\theta)$ se calcula considerando 1 amostra.

Cramer-Rao: Seja $T = r(X)$ uma estatística e $m(\theta) := E_\theta[T]$ (depende de θ.)

$$\boxed{Var_\theta(T) \geq \frac{[m'(\theta)]^2}{n\,I(\theta)}}$$

Importante: Vale a igualdade se, e somente se, $T = u(\theta)\lambda_n'(X|\theta) + v(\theta)$ (pode ser escrito como)

Se T não for enviesado, $E[\theta] = \Theta \Rightarrow m'(\theta) = 1$

Estimador eficiente: T é um estimador eficiente para $m(\theta)$ se sua variância é mínima, isto é, vale a igualdade de Cramér-Rao, isto é, $T = u(\theta)\lambda_n'(x|\theta) + v(\theta)$

Adicionais: Se T é estimador eficiente para $m(\theta)$ e $m'(\theta) \neq 0$,

$$\frac{[n\,I(\theta)]^{1/2}}{m'(\theta)}[T - m(\theta)] \xrightarrow{d} N(0,1)$$