Curvas e Superfícies 2021.1
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Asla Medeiros e Sá
Monitor Lucas Machado Moschen Entrega 29/03/2021

Lista 4

Exercício 1 Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

Solução 1. De forma geral, para conferir que uma curva é regular de ordem m, pedimos que os vetores correspondentes às primeiras m derivadas sejam linearmente independentes[1]. Se a curva é parametrizada pelo comprimento de arco, a primeira e a segunda derivadas são ortogonais e, portanto, linearmente independentes. Como as funções acima tem segunda derivada com 0 na primeira componente, mas tem valor 1 na primeira, basta verificar que $\alpha''(t) \neq 0$.

(a) $\alpha''(t) = (0, 2, 6t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha''(t) = (0, 4, 6t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$

Exercício 2 Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1+\cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2)), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2+y^2 = 1\}$ e da esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Desenhe a curva α, o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional.

Solução 2. Primeiro vamos provar que a curva é regular. Derivando obtemos:

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), \cos(t/2)),$$

como $\sin(t)^2 + \cos^2(t) = 1$, se um deles for nulo, o outro obrigatoriamente não será e α é regular. Para mostrar que o traço está contido nessa interseção, tome $t \in \mathbb{R}$ e defina $(x, y, z) := \alpha(t)$. Assim:

$$(x-1)^2 + y^2 = cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

o que implica que $(x, y, z) \in C$. Além disso,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4\sin^2(t/2) = 2(1 + \cos(t)) + 4\sin^2(t/2)$$

Como $\cos(t) = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = 2\cos^2(t/2) - 1$, temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\cos^2(t/2) + 4\sin^2(t/2) = 4$$

o que implica $(x, y, z) \in S$. Como t é arbitrário, o traço da curva está contido na intersecção. Confira a Figura 1.

[1]Wikipedia: `https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_curve#Definitions`

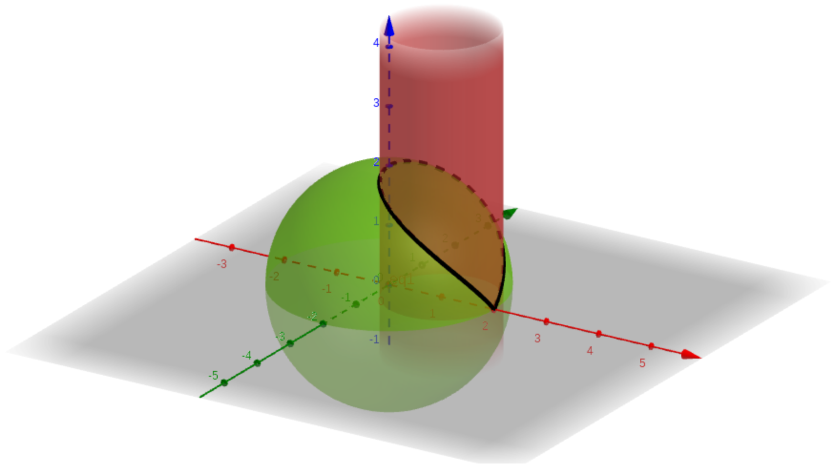

Figura 1: Intersecção de cilindro e esfera. Arquivo está no Github.

Exercício 3 Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), t \in \mathbb{R}$$

Solução 3. Para obter uma reparametrização pelo comprimento de arco, primeiro precisamos encontrar a função comprimento de arco.

$$\alpha'(t) = e^t(\cos(t) - \sin(t), \cos(t) + \sin(t), 1)$$

Assim

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t ||\alpha'(s)||ds = \int_0^t e^s\sqrt{3}ds = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}$$

Assim defina $g(t) = \sqrt{3}e^t$. Sabemos que essa transformação é um difiomorfismo e que se $\beta(s) = \alpha(g^{-1}(s))$, teremos que β será parametrizada pelo comprimento de arco. Como

$$g^{-1}(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

Uma parametrização pelo comprimento arco é

$$\beta(s) = \frac{s}{\sqrt{3}}\Big(\cos(\log(s/\sqrt{3})), \sin(\log(s/\sqrt{3})), 1\Big)$$

Exercício 4 Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e só se, $\forall t \in I, \alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $||\alpha'(t)||$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), b.t), t \in R$.

Solução 4. Lembre que $||\alpha'(t)||^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle$. Assim, para todo t

$$k^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle \iff \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = 0 \iff \alpha'(t) \perp \alpha''(t)$$

No caso da hélice, observe que

$$\alpha'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\alpha''(t) = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)$$

Assim $\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = 0 \implies ||\alpha'(t)||$ é constante.

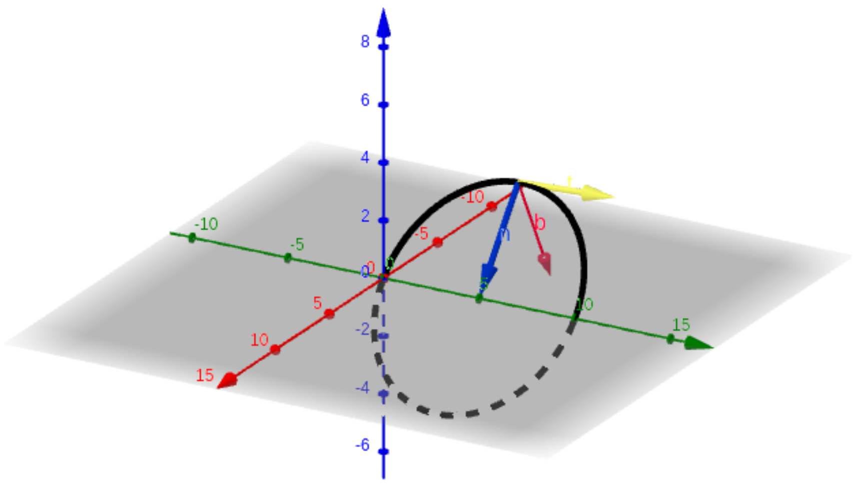

Figura 2: Triedo de Frenet de uma circunferência.

Exercício 5 Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação do triedro de Frenet de cada curva:

(a) $\alpha(t) = (4\cos(t), 5 - 5\sin(t), -3\cos(t)), t \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

(b) $\beta(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

Solução 5. Nesse exercício, é importante parametrizarmos pelo comprimento de arco, porque definimos o Triedo de Frenet apenas dessa forma (por enquanto). No desenho, eu multipliquei os vetores unitários por uma constante k para que eles ficassem visíveis quando comparados com a curva. O desenho de (a) está no Geogebra e (b) é equivalente. Confira a Figura 2.

Exercício 6 Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular, a qual, não é, necessariamente, parametrizada por comprimento de arco. Prove, então, que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3}$$

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}$$

em que $\times$ denota o produto vetorial.

Solução 6. Para esse exercício, vale consultar o livro [1], em especial a Proposição 2.1.2 na página 31 e a Proposição 2.3.1 na página 48.

Exercício 7 Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in R$

(b) $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t), t \in R$

Solução 7. A ideia desses exercícios é usar as fórmulas demonstradas no exercício passado:

(a) Primeiro calculamos as três derivadas

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$
$$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$$
$$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$$

Agora calculemos algumas expressões

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (6t^2, -6t, 2)$$
$$||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2 = 36t^4 + 36t^2 + 4$$

Usando as fórmulas,

$$\kappa_\alpha(t) = \sqrt{\frac{36t^4 + 36t^2 + 4}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}$$
$$\tau_\alpha(t) = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

(b) Primeiro calculamos as três derivadas

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$
$$\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$
$$\alpha'''(t) = (\sin(t), -\cos(t), 0)$$

Agora calculemos algumas expressões

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (\sin(t), -\cos(t), 1)$$
$$||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2 = 2$$

Usando as fórmulas,

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{2^{1/2}}{2^{3/2}} = \frac{1}{2}$$
$$\tau_\alpha(t) = \frac{1}{2}$$

Exercício 8 Seja $\alpha(t)$ uma curva 2-regular:

(a) Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t.

(b) Prove que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P de R^3 tal que $\langle P - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\rangle = 0$

Solução 8. Assim

(a) O plano osculador é gerado pelos vetores tangente e normal à curva α a cada t. Considere $\beta = \alpha \circ \phi$ a parametrização de α pelo comprimento de arco. Temos que $\dot{\beta}(s)$ e $\ddot{\beta}(s)/\kappa_\beta(s)$ geram o plano osculador e, portanto, $\ddot{\beta}(s)$ e $\dot{\beta}(s)$ são paralelos ao plano osculador. Ainda

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(\phi(s)) \cdot \dot{\phi}(s)$$

o que implica $\dot{\alpha}(t)$ ser paralelo ao plano osculador. Além disso,

$$\ddot{\beta}(s) = \ddot{\alpha}(\phi(s)) \cdot (\dot{\phi}(s))^2 + \dot{\alpha}(\phi(s)) \cdot \ddot{\phi}(s) \implies \ddot{\alpha}(\phi(s)) \cdot (\dot{\phi}(s))^2 = \ddot{\beta}(s) - \dot{\alpha}(\phi(s)) \cdot \ddot{\phi}(s)$$

Concluo que $\ddot{\alpha}(t)$ é paralelo ao plano osculador, pois é paralelo à soma de vetores paralelos.

(b) Sabemos que o plano osculador é dado pelos pontos P tal que $\langle P - \alpha(t_0), B(t)\rangle = 0$, onde $B(t)$ é o vetor binormal. Usando um raciocínio similar ao exercício 6, conseguimos provar que

$$B(t) = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{||\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}||}$$

e, portanto, está provado.

Exercício 9 Desenhe em ambiente computacional as curvas e seus planos normal e osculador em função do parâmetro:

(a) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \in R$.

(b) $\beta(t) = (a\cos(t) + b\sin(t), a\sin(t) + b\cos(t), c\sin(2t)), t \in R$.

Solução 9. Solução a cargo do leitor.

Exercício 10 Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante com o eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

Solução 10. Considere a hélice circular

$$\hat{\gamma}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$$

A norma da derivada é dada por $\sqrt{a^2 + b^2} := c$. Assim, podemos reparametrizar pelo comprimento de arco,

$$\gamma(t) = (a\cos(t/c), a\sin(t/c), bt/c)$$

Primeiro calculamos os vetores tangente e normal,

$$T(t) = \frac{1}{c}(-a\sin(t/c), a\cos(t/c), b)$$

$$\dot{T}(t) = -\frac{a}{c^2}(\cos(t/c), \sin(t/c), 0)$$

$$N(t) = (-\cos(t/c), -\sin(t/c), 0)$$

E agora o binormal,

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{c}(b\sin(t/c), -b\cos(t/c), a)$$

O eixo do cilindro que a hélice se encontra é gerado pelo vetor $e_3 = (0, 0, 1)$. E

$$\langle B(t), e_3 \rangle = a, \forall t \in \mathbb{R}$$

Assim, o cosseno do ângulo formado por esses dois vetores é constante e, definindo o ângulo entre dois vetores entre $[0, \pi]$, teremos ângulo constante.

Exercício 11 Prove que a aplicação

$$\alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \sin(s), -\frac{3}{5}\cos(s)\right), s \in \mathbb{R}$$

é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cujo traço é um círculo. Determine, então, seus centro e raio.

Solução 11. Veja que $\alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right)$ e, portanto

$$||\alpha'(s)||^2 = \frac{16}{25}\sin^2(s) + \cos^2(s) + \frac{9}{25}\sin^2(s) = 1$$

portanto α é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco. Agora observe que

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos(s), \sin(s). \frac{3}{5}\cos(s)\right) \implies \kappa_\alpha(s) = 1$$

Usando a fórmula para a torção, encontramos que

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{5}(3, 0, 4) \cdot \left(\frac{4}{5}\sin(s), \cos(s), -\frac{3}{5}\sin(s)\right) = 0$$

Como a torção é nula, nossa curva está num plano. Como a curvatura é constante, pelo Teorema Fundamental das Curvas no Plano, ela é igual a um círculo após um movimento rígido. Todavia, provamos na última lista que movimento rígido transforma círculos em círculos. Portanto nossa curva é um círculo. Em particular encontrar que o raio é 1. Por fim, observe que

$$||\alpha(s) - (0, 1, 0)||^2 = \frac{16}{25}\cos^2(s) + \sin^2(s) + \frac{9}{25}\cos^2(s) = 1$$

o que mostra que o centro é dado por $(0, 1, 0)$.

Referências

[1] Pressley, Andrew N. Elementary differential geometry. Springer Science & Business Media, 2010.