Capítulo_9.1

Thursday, October 15, 2020 1:20 AM

3. $X_1, \dots, X_{20} \sim Be(p)$ → Proporção em uma população grande

$Y := \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p)$

$H_0: p = 0.2$ Procedimento de teste (δ):

$H_1: p \neq 0.2$ $T = Y$ → Teste

$R = \{0, 1, 7, 8, \dots, 20\}$ → Região de Rejeição

$S_1 = \{(x_1, \dots, x_{20}) : Y \in R\}$ → Região Crítica

Função de Poder

Porquê são disjuntos

a) $\pi(p|\delta) := \mathbb{P}(X \in S_1 | p) = \mathbb{P}(Y \leq 1 \text{ ou } Y \geq 7 | p)$

$= \mathbb{P}(Y \leq 1 | p) + \mathbb{P}(Y \geq 7 | p)$

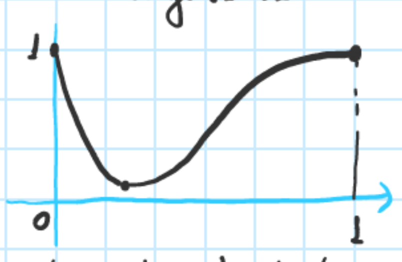
PMF da Binomial

$= \mathbb{P}(Y = 0 | p) + \mathbb{P}(Y = 1 | p) + 1 - \mathbb{P}(Y \leq 6 | p)$

$= (1-p)^{20} + 20(1-p)^{19} p + 1 - \mathbb{P}(Y \leq 6 | p)$

Basta fazer as contas computacionalmente.
Usando Python:

```
from stats.scipy import binom
X = lambda p: binom(20,p)
π = lamdda p: X(p).cdf(1) - X(p).cdf(6) + 1
[π(0.1n) for n in range(11)]
```



b) Queremos saber o tamanho do teste:

$$\alpha(\delta) = \sup_{p \in \Omega_0 = \{0.2\}} \pi(p|\delta) = \pi(0.2|\delta) \approx 0.15$$

8. $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, 1)$

$H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

Procedimento de teste: Rejeitamos H_0 se $Z \geq c$,

$Z = n^{1/2} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}$ → Nesse caso $\sigma = 1$

a) Queremos provar que $\mathbb{P}(Z \geq c | \mu)$ é crescente em μ.
Sabemos que $\frac{\bar{X}_n - \mu}{1/n^{1/2}} \sim N(0,1)$. Portanto:

$n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu_0) = n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu) + n^{1/2}(\mu - \mu_0)$

Logo $Z \sim N(n^{1/2}(\mu - \mu_0), 1)$, $Z^* = Z - n^{1/2}(\mu - \mu_0) \sim N(0,1)$

Portanto $\mathbb{P}(Z \geq c | \mu) = \mathbb{P}(Z^* \geq c - n^{1/2}(\mu - \mu_0) | \mu)$

$= 1 - \Phi(c - n^{1/2}(\mu - \mu_0))$, Φ é cdf de $N(0,1)$

$(*) = \Phi(n^{1/2}(\mu - \mu_0) - c)$

(*) Lembre que a normal é simétrica em 0, logo:
$\mathbb{P}(Z^* \geq \alpha) = \mathbb{P}(Z^* \leq -\alpha)$

Tome $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow n^{1/2}(\mu_1 - \mu_0) - c < n^{1/2}(\mu_2 - \mu_0) - c$
A CDF da normal é sempre crescente, pois a pdf é sempre positiva, logo $\Phi(n^{1/2}(\mu_1 - \mu_0) - c) < \Phi(n^{1/2}(\mu_2 - \mu_0) - c)$
o que implica que $\mathbb{P}(T \geq c | \mu)$ é crescente.

Argumento 2: $\frac{d}{d\mu} \mathbb{P}(Z^* \geq n^{1/2}(\mu - \mu_0) - c | \mu) = \frac{d}{d\mu} \int_{n^{1/2}(\mu - \mu_0) - c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Note que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ pelo TFC.

Nesse caso temos que ter cuidado com o $+\infty$. Por isso precisamos de um pouco mais (Teorema da Convergência Dominada). Supondo isso:

$$\frac{d}{d\mu} \mathbb{P}(Z \geq c | \mu) = \frac{d}{d\mu} \int_c^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - n^{1/2}(\mu - \mu_0))^2}{2}} dx$$

Teorema

$$= \int_c^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial \mu} e^{-\frac{(x - n^{1/2}(\mu - \mu_0))^2}{2}} dx$$

$$= \int_c^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x - n^{1/2}(\mu - \mu_0)) n^{1/2} e^{-\frac{(x - n^{1/2}(\mu - \mu_0))^2}{2}} dx$$

$$= -\frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - n^{1/2}(\mu - \mu_0))^2}{2}} \Big]_c^{\infty} > 0$$

Logo está provado!

b) Queremos que $\alpha_0 = \sup_{\mu \leq \mu_0} \pi(\mu | \delta) = \sup_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}(Z \geq c | \mu)$ → crescente ⇒ Atinge supremo na borda

$Z \sim N(\underbrace{n^{1/2}(\mu - \mu_0)}_{0}, 1)$ $= \mathbb{P}(Z \geq c | \mu_0)$

$= 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) \Rightarrow c = -\Phi^{-1}(\alpha_0)$

$\Rightarrow \Phi(c) = 1 - \alpha_0 \Rightarrow c = \Phi^{-1}(1 - \alpha_0)$

13. $X \sim Poi(\theta)$

$H_0: \theta \leq 1$

$H_1: \theta > 1$

Procedimento de teste (δ_c): Rejeita H_0 se $X \geq c$

Queremos $\alpha(\delta_c) = \sup_{\theta \leq 1} \pi(\theta | \delta_c) \leq 0.1$

Por que $\theta = 1$?
Porque $\mathbb{P}(X \geq c | \theta)$ é crescente em θ:

$\mathbb{P}(X \geq c | \theta) = 1 - \mathbb{P}(X \leq c | \theta)$
$= 1 - e^{-\theta} \sum_{i=0}^{\lfloor c \rfloor} \frac{\theta^i}{i!}$
$= 1 - \frac{\Gamma(\lfloor c \rfloor + 1, \theta)}{\lfloor c \rfloor !}$ Gamma incomplete upper
$= 1 - \frac{1}{\lfloor c \rfloor !} \int_\theta^{\infty} t^{\lfloor c \rfloor} e^{-t} dt$ → Decresente em θ.

$= \sup_{\theta \leq 1} \mathbb{P}(X \geq c | \theta)$

$= \sup_{\theta \leq 1} \sum_{j=\lceil c \rceil}^{\infty} \frac{\theta^j e^{-\theta}}{j!}$

$= \sum_{j=\lceil c \rceil}^{\infty} \frac{e^{-1}}{j!}$ → O ideal é testar para $c=2$, $c=3$, $c=4$

O teste pode ser feito com Python também. Veremos que $c = 3$

19. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ e σ^2 desconhecidos.

$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

Seja δ o procedimento de teste: rejeito H_0 se $\bar{X}_n \leq c$

Estatística de Teste ($\bar{X}_n$); Região de Rejeição $(-\infty, c]$

Queremos que $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$, onde $\alpha(\delta)$ é o tamanho do teste.

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\alpha(\delta) = \sup_{\mu \geq \mu_0} \pi(\mu | \delta) = \sup_{\mu \geq \mu_0} \mathbb{P}(\bar{X}_n \leq c)$$

Vamos lembrar que $n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma' \sim t_{n-1}$, onde $\sigma' = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}\right]^{1/2}$
e t_{n-1} é t-student com $n-1$ graus de liberdade.

Assim: $\alpha(\delta) = \sup_{\mu \geq \mu_0} \mathbb{P}(\bar{X}_n \leq c)$

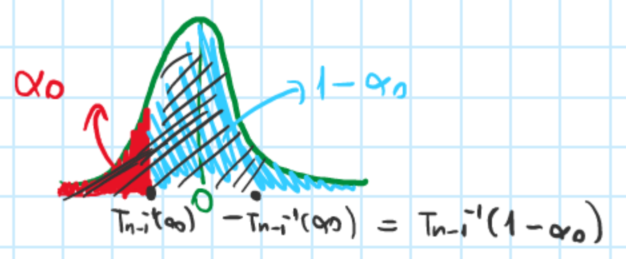
$= \sup_{\mu \geq \mu_0} \mathbb{P}(n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma' \leq \underbrace{n^{1/2}(c - \mu)/\sigma'}_{x})$

Uma CDF é cresente em x, logo queremos maximizar x. Mas x decresce com μ, logo devo minimizar μ.

$= T_{n-1}(n^{1/2}(c - \mu_0)/\sigma')$ T_{n-1}

$\leq \alpha_0$

Portanto $c \leq \frac{\sigma'}{n^{1/2}} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) + \mu_0 \equiv \mu_0 - \frac{\sigma'}{n^{1/2}} T_{n-1}^{-1}(1 - \alpha_0)$



Agora queremos maximizar $\pi(\mu | \delta)$ quando $\mu < \mu_0$, variando c.
$\pi(\mu | \delta) = T_{n-1}(n^{1/2}(c - \mu)/\sigma')$ que cresce com c. Logo tomo c como seu máximo:

$$c = \mu_0 + \frac{\sigma'}{n^{1/2}} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$$

Logo se $\bar{X}_n \leq \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) \Leftrightarrow \mu_0 \geq \bar{X}_n - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$

$\Leftrightarrow$ Rejeitamos H_0

Vamos construir o intervalo de confiança usando o Teorema 9.1.3.

$\omega(x) := \{\mu_0 : \delta_{\mu_0} \text{ não rejeita } H_{0,\mu_0} \text{ se } X = x \text{ é observado}\}$ → $H_{0,\mu_0}: \mu \geq \mu_0$

Então $\mathbb{P}[\mu_0 \in \omega(X) | \mu = \mu_0] \geq 1 - \alpha_0$

Portanto $(-\infty, \bar{X}_n - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0))$ determina o intervalo de confiança.

21. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconhecidos.

Queremos comparar $H_0: \mu \leq \mu_0$ versus $H_0: \mu \geq \mu_0$

a) Suponha que $\alpha_0 < 0.5$. Como vimos no item anterior e no livro:

Se $H_0: \mu \geq \mu_0$: Rejeitamos se $\bar{X}_n \leq \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$

Se $H_0: \mu \leq \mu_0$: Rejeitamos se $\bar{X}_n \geq \mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$

Se $\alpha_0 < 0.5$, $T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) < 0$. Logo

$\mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) > \mu_0 > \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$

Suponha que rejeitamos ambas. Então

$\bar{X}_n > \mu_0 > \bar{X}_n$,

absurdo.

Obs.: $T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) < 0$, pois $T_{n-1}^{-1}(0.5) = 0$. → Simetria

b) Como visto em a), $\mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) > \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$.
Tomo $\bar{X}_n \in (\mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0), \mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0))$. Assim falhamos em rejeitar as hipóteses nulas, que garante a existência.

De fato se $\bar{X}_n$ não pertence a esse intervalo, ele vai rejeitar a uma hipótese e somente uma, como visto em (a).

c) Agora é o contrário de a, logo basta tomar
$\bar{X}_n \in (\mu_0 - \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0), \mu_0 + \sigma' n^{-1/2} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0))$
e rejeitamos a hipótese nula. Note que esse intervalo é não vazio pois $T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) > 0$ quando $\alpha_0 > 0.5$.