Autovalores complexos e repetidos

Autovalores Complexos.

- Seja $X' = Ax$. Para resolver, procuramos os autovalores de A. E se eles tiverem parte complexa? Isto é, $\lambda_1 = a+bi$ e $\lambda_2 = a-bi$, $b \neq 0$?

Vamos ver o que acabamos de falar:
Suponha que λ_1 é autovalor e v_1 autovetor correspondente. Seja $\lambda_1 = a+bi$.
$\det(A-\lambda_1 I) = 0$, logo $(A-\lambda_1 I)v_1 = 0$. Logo:

$$\overline{(A-\lambda_1 I)v_1} = \overline{0}$$
$$= \overline{(A-\lambda_1 I)}\cdot \overline{v_1}$$
$$= (\bar{A} - \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{I})\cdot \overline{v_1}$$
$$= (A - \bar{\lambda}_1 \cdot I)\cdot \overline{v_1} = 0$$

A é real

Assim $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ é autovalor e $v_2 = \bar{v}_1$ seu autovetor.

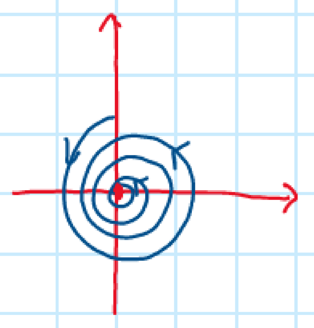
- Assim, na notação do livro: $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ é solução geral. Seja $\lambda_1 = \lambda + i\mu$ $(\lambda_2 = \bar{\lambda}_1)$ e $v_1 = a + bi$ $(v_2 = \bar{v}_1)$

Função par

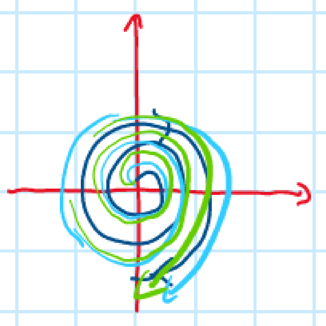
$$\begin{aligned}X(t) &= c_1(a+bi)e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\,\mathrm{sen}\,\mu t) + c_2(a-bi)e^{\lambda t}(\cos(-\mu t) + i\,\mathrm{sen}(-\mu t))\\ &= c_1 e^{\lambda t}[(a\cos\mu t - b\,\mathrm{sen}\,\mu t) + i(a\,\mathrm{sen}\,\mu t + b\cos\mu t)] + c_2 e^{\lambda t}[(a\cos\mu t - b\,\mathrm{sen}\,\mu t) - i(a\,\mathrm{sen}\,\mu t + b\cos\mu t)]\\ &= e^{\lambda t}(a\cos\mu t - b\,\mathrm{sen}\,\mu t)(c_1+c_2) + e^{\lambda t}(a\,\mathrm{sen}\,\mu t + b\cos\mu t)(c_1\cdot i - c_2\cdot i)\\ &= e^{\lambda t}(a\cos\mu t - b\,\mathrm{sen}\,\mu t)\cdot d_1 + e^{\lambda t}(a\,\mathrm{sen}\,\mu t + b\cos\mu t)\cdot d_2\end{aligned}$$

Então a solução geral é combinação linear de funções reais!

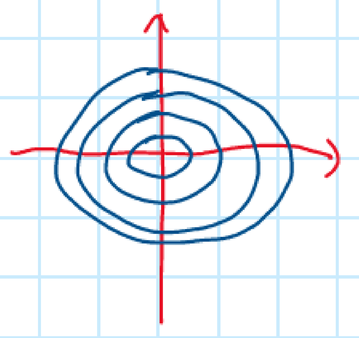
- Se $a < 0$



- Se $a > 0$



- $a = 0$



Exercícios da Lista:

17. $x' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$

a) Autovalores:

$$p_\lambda = (-1-\lambda)(-1-\lambda) - \alpha\cdot(-1) = 0$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = (-2 + \sqrt{4 - 4(1+\alpha)})/2$$
$$= -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha}$$
$$\lambda_2 = -1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha}$$

b) Valor de α onde o comportamento qualitativo muda.

- Se $\alpha > 0$:
  λ_1 e λ_2 tem parte real negativa e parte complexa diferente de zero.
- Se $\alpha = 0$:
  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
- Se $\alpha \leq -4$
  $\lambda_1 \leq -1 + 1/2\sqrt{4} = 0$
  $\lambda_2 < 0$
- Se $-4 < \alpha < 0$
  Raízes reais diferentes negativas

Autovalores Repetidos

Suponha que você encontre em $X' = AX$ autovalores $\lambda_1 = \lambda_2$ e autovetores $v_1 = v_2$. A solução geral será:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$= (c_1 + c_2) v_1 e^{\lambda_1 t}$$

Logo as soluções não são linearmente independentes.

Nesse caso $A \sim B$ (existe P tal que $AP = PB$), e $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Seja $P = [v_1\ v_2]$

$$A[v_1\ v_2] = [v_1\ v_2]B$$
$$[Av_1\ \ Av_2] = [\lambda_1 v_1\ \ v_1 + \lambda_1 v_2]$$

Logo $Av_2 = v_1 + \lambda_1 v_2 \Rightarrow Av_2 - \lambda_1 I v_2 = v_1$
$\Rightarrow \boxed{(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1}$

Sistema Linear!

$P = [v_1\ v_2]$
$X(t) = Pe^{Bt}P^{-1}X_0$ é solução geral.

No Livro
$x^{(1)}(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$
$x^{(2)}(t) = v_1 t e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_1 t}$
onde $(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$

10- $X' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$p_\lambda = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 9 = 0$$
$$= \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
$$\Rightarrow v_1 = (3, -1) = v_2$$

Livro:
$x^{(1)}(t) = (3,-1)e^{0\cdot t} = (3,-1)$
$x^{(2)}(t) = (3,-1)\cdot t\cdot e^{0\cdot t} + v_2 e^{0\cdot t}$
$(A - 0\cdot I)v_2 = v_1 \Rightarrow$ Queremos encontrar v_2
$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = (4, -1)$

$x(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} = c_1(3,-1) + c_2(3,-1)\cdot t + c_2(4,-1)$

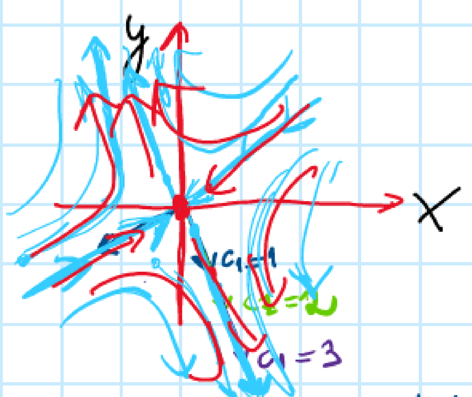
- Gráfico:

- $x' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X$

$$p_\lambda = (1-\lambda)(4-\lambda) - 3\cdot 2 = 0$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$
$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot(-2)}}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{33}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{33}}{2} < 0 \end{cases}$$

$v_1 = (0.41, -0.82)$
$v_2 = (-0.91, -0.56)$



$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$