# Capitulo_8.8

**5.** $X \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2$ desconhecido. Queremos encontrar $I(\sigma^2)$ em $X$.
Temos que $f(x|\sigma^2)$ é definido em $\mathbb{R}$ e $\forall \sigma^2 > 0$, $f(x|\sigma^2) > 0$ em toda reta. E

$$\lambda(x|\sigma^2) = \log (\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-1} \exp\{-1/2\, x^2/\sigma^2\}$$ , pois $\log(\exp(x)) = x$, $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ e $\log a^b = b \log a$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)$$ , pois $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{\sigma^2} + \log 2\pi + \log \sigma^2\right]$$ Enxergue $\sigma^2$ como um símbolo único!

é duas vezes diferenciável em $\sigma^2$. Agora:

$$\lambda'(x|\sigma^2) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{(\sigma^2)^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right]$$

$$\lambda''(x|\sigma^2) = -\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{(\sigma^2)^3} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\right] = -\frac{x^2}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}$$

Portanto $-I(\sigma^2) = E[\lambda''(X|\sigma^2)] = E\left[-\frac{x^2}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\right] = -\frac{E[x^2]}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^3}$

Atenção!

Linearidade do Valor Esperado

$$= -\frac{[Var(x) + E[x]^2]}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}$$

$$= -\frac{\sigma^2}{(\sigma^2)^3} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} = -\frac{1}{2(\sigma^2)^2}$$

Isto é, $I(\sigma^2) = \dfrac{1}{2\sigma^4}$

**7.** $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p$ desconhecido. Devemos mostrar que $\bar{X}_n$ é eficiente.
Para isso devo provar que $\forall p \in (0,1)$ vale $Var(\bar{X}_n) = 1/nI(p)$ ou, de forma equivalente, que $\bar{X}_n = u(\theta)\lambda_n'(x|\theta) + v(\theta)$ para $u$ e $v$ (Tomando $\theta = p$)

$$\lambda_n(x|\theta) = \log \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \log\theta + (n - \sum_{i=1}^n x_i)\log(1-\theta)$$

Logo $\lambda_n'(x|\theta) = \sum_{i=1}^n x_i/\theta - (n - \sum_{i=1}^n x_i)/(1-\theta)$

$$= n\bar{X}_n/\theta - n(1-\bar{X}_n)/(1-\theta)$$, pois $n \cdot \bar{X}_n = \sum_{i=1}^n x_i$

$$= [n\bar{X}_n(1-\cancel{\theta}) - n\theta(1-\cancel{\bar{X}_n})]/[\theta(1-\theta)]$$ $-n\bar{X}_n\theta + n\theta\bar{X}_n$

$$= [n(\bar{X}_n - \theta)]/[\theta(1-\theta)]$$, $u(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$, $v(\theta) = \theta$

$$u(\theta) \cdot \lambda_n'(x|\theta) + v(\theta) = \bar{X}_n - \theta + \theta = \bar{X}_n$$

O que prova que $\bar{X}_n$ é eficiente.

**10.** $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma$ desconhecido. Para encontrar o limite inferior, uso Cramér-Rao.
Seja $T$ um estimador não viesado para $\log\sigma$, isto é, $E_\theta[T] = \log\sigma = m(\sigma)$ e $m'(\sigma) = \sigma^{-1}$
Vou calcular $I(\sigma)$. Para isso:

$$\lambda(x|\sigma) = \log\{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-1/2\, x^2/\sigma^2\}\}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\left[\log 2\pi + \log\sigma^2\right]$$

$$\lambda'(x|\sigma) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{2x^2}{\sigma^3} + \frac{2\cancel{\sigma}}{\sigma^{\cancel{2}}}\right]$$

$$\lambda''(x|\sigma) = -\frac{1}{2}\left[\frac{6x^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2}\right]$$

$$\underbrace{Var(x)}_{\sigma^2} + \underbrace{E(x)^2}_{0}$$
$\parallel$

$$I(\sigma) = -E[\lambda''(x|\sigma)] = \frac{1}{2}E\left[\frac{6x^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{6}{\sigma^{\cancel{4}\,2}}E[x^2] - \frac{2}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2}$$

Isto é, $Var(T) \geq \dfrac{m'(\sigma)^2}{nI(\sigma)} = \dfrac{\cancel{\sigma^{-2}}}{n\,2\cancel{\sigma^{-2}}} = \dfrac{1}{2n}$