Capítulo 7.9

2. $X_1, \dots, X_n \sim Unif[0,\theta]$, $n \geq 2$, θ desconhecido.
Tenho que provar que $\delta_1(\mathbf{X}) = 2\bar{X}_n$ é inadmissível, isto é, que existe δ_0 com $R(\theta,\delta_0) \leq R(\theta,\delta_1)$, $\forall \theta \in \Omega$ e $\exists \theta \in \Omega$ tal que $R(\theta,\delta_0) < R(\theta,\delta_1)$.

Conhecemos a estatística suficiente $T = \max\{X_1,\dots,X_n\}$. Ela é suficiente, pois:
$f_n(x|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{x_1,\dots,x_n \leq \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{T \leq \theta\}$ é fatorizável em u e v.

Por Rao-Blackwell, defino $\delta_0(\mathbf{X}) := E_\theta[2\bar{X}_n | T]$. Nesse caso, como $2\bar{X}_n \neq g(T)$, isto é, não é uma função de T, e $R(\theta,2\bar{X}_n) = E_\theta[(2\bar{X}_n - \theta)^2] < \infty$, vale a desigualdade estrita:

$$R(\theta,\delta_0) < R(\theta, 2\bar{X}_n)$$

Concluo que $\bar{X}_n$ é inadmissível, segundo MSE.

3. Temos que determinar $R(\theta,\delta_1) = E_\theta[(2\bar{X}_n - \theta)^2] \overset{\times 4/4 = \frac{4}{2^2}}{=} 4E_\theta[(\bar{X}_n - \theta/2)^2]$
Sabemos que $E_\theta[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \theta/2$.
Mas então, o que parece $E[(\bar{X}_n - \theta/2)^2]$? A variância! Obs.: $Var(X) = E[(X - EX)^2]$
Logo $R(\theta,\delta_1) = 4Var_\theta(\bar{X}_n) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n Var_\theta(X_i)$, dada a Independência

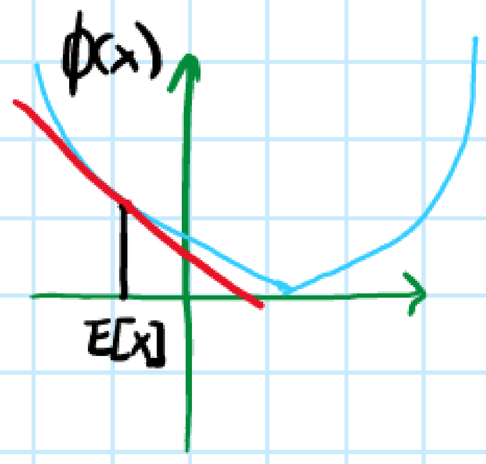
$$= \frac{4}{n} \cdot Var_\theta(\underbrace{\boxed{X_i}}_{\text{Uniforme}}) = \frac{\cancel{4}^1}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{12}\,3} \cdot \theta^2 = \boxed{\frac{\theta^2}{3n}}$$

6. $X_1,\dots,X_n \sim Gamma(\alpha,\beta)$, α desconhecido e β conhecido. Vou mostrar que $\bar{X}_n$ é inadmissível para estimar a média da distribuição segundo MSE.

O caminho é equivalente ao 2!
1. Conhecer estatística Suficiente T
2. Ver que $\bar{X}_n \neq g(T)$
3. Aplicar Rao-Blackwell!

1. Já provamos que $T = \prod_{i=1}^n X_i$ é estatística suficiente para a média:
$$f_n(x|\alpha) = \frac{\beta^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha)^n} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)}_{T}^{\alpha-1} e^{-\beta\sum x_i} = \underbrace{\left[e^{-\beta\sum x_i}\right]}_{u} \underbrace{\left[\frac{\beta^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha)^n} (T)^{\alpha-1}\right]}_{v}$$
2. De fato $\bar{X}_n$ não pode ser obtido como uma função de $\prod_{i=1}^n X_i$
3. Se definirmos $\delta_0 := E_\theta[\bar{X}_n | T]$, e vemos que $R(\alpha/\beta, \bar{X}_n) = E[(\bar{X}_n - \alpha/\beta)^2] < \infty$, por Rao-Blackwell, $R(\alpha/\beta, \delta_0) < R(\alpha/\beta, \bar{X}_n)$ o que implica $\bar{X}_n$ não ser admissível.

9. Sabemos que $|\cdot|$ é função convexa$(|\alpha x + (1-\alpha)y| \leq \alpha|x| + (1-\alpha)|y|)$. Vou provar a desigualdade de Jensen que é $E[\phi(X)] \geq \phi(E[X])$ para toda ϕ convexa e X com média finita $(E(X) < \infty)$
Defina $g(x) = ax + b$, tal que $g(E[X]) = \phi(E[X])$ e $g(x) \leq \phi(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Sabemos, pois a convexidade de ϕ permite a separação pelo Teorema do Hiperplano Suporte.
Logo $E[\phi(X)] \geq E[g(X)] = E[aX + b] = aE[X] + b = g(E[X]) = \phi(E[X])$.



Para o caso do módulo, suponha $E[X] \leq 0$: $|E[X]| = \int_{-\infty}^0 (-x) f(x)\,dx - \int_0^\infty x f(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^\infty |x| f(x)\,dx = E[|X|]$

Analogamente para $E[X] > 0$.

10. $X_1,\dots,X_n$ tem pdf $f(x|\theta)$, $\theta \in \Omega$. Seja T estatística suficiente para θ. Seja δ estimador arbitrário e $\delta_0 := E[\delta | T]$.

Dem.: Sabemos que $E[|\delta - \theta| | T] \geq |E[\delta - \theta | T]|$, pelo exercício 9.
$= |E_\theta[\delta|T] - \theta|$, pois θ é um valor
$= |\delta_0 - \theta|$, pela definição de δ_0.
Portanto $E_\theta[|\delta_0 - \theta|] \leq E_\theta[E_\theta(|\delta - \theta| | T)] = E_\theta(|\delta - \theta|)$

Lei da Probabilidade Total para Valor Esperado
Pg. 258 (De Groot)