Lucas Moschen

# Monitorias 12 e 13

15 de dezembro de 2020

## 1 Autovalores e Autovetores

**Definição:** Autovetor é um vetor ($\neq \vec{0}$) que tem como imagem de uma transformação linear um vetor proporcional. A proporção é chamada de autovalor.

**Polinômio Característico:** Polinômio cujas raízes são os autovalores de uma transformação linear.

**Subespaço invariante:** Também conhecido como auto-espaço, é formado pela combinação dos autovetores associados ao mesmo autovalor.

**Teorema 1:** Seja $A$ um operador linear, $\lambda$ um autovalor e $v$ um autovetor. $Av = \lambda v \implies A^n v = \lambda^n v$.

**Teorema 2:** A autovalores diferentes do mesmo operador correspondem autovetores linearmente independentes.

## 2 Mudança de Base

Considere as seguintes bases:

$E = \{e_1, ..., e_n\}$

$U = \{u_1, ..., u_n\}$

$V = \{v_1, ..., v_n\}$

Considere $w = (x_1, ..., x_n)$. Isso significa que $w$ é escrito como uma combinação linear dos vetores da base $E$, canônica, e os coeficientes são $x_1, ..., x_n$. Imagine que queiramos escrever na base $U$. Para isso, basta encontrarmos os coeficientes de cada vetor da base $U$. Para isso, basta resolver o sistema linear onde cada vetor de $U$ é uma coluna e o vetor restultado é o vetor na base canônica.

Assim, a matriz formada pelos vetores da base $U$ formam uma matriz que transforma vetores da base $U$ em vetores da base canônica. A inversa faz o processo contrário.

Se quiséssemos mudar da base $E$ para a base $U$ sem o uso da inversa, só precisamos saber a transformação dos vetores da base canônica.

Para fazer a transformação de uma base em outra, basta transformarmos na canônica como intermédio.

## 3 Matrizes Semelhantes e Diagonalização

**Definição:** Duas matrizes são semelhantes se existe $P$ invertível tal que $B = P^{-1}AP (AP = PB)$, que tem o mesmo polinômio característico e o mesmo determinante.

**Diagonalização:** Uma matriz é diagonalizável se existe uma matriz semelhante que seja diagonal. $A$ é diagonálizável se, e só se, tiver $n$ autovetores LI. Nesse caso $P$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de $A$ e $D$ os autovalores correspontes.

Observe que $P^{-1}AP = D$, logo para transformar um vetor na base $V$ em outro na base $V$ correspondente a imagem desse vetor na base canônica da matriz $A$, basta usar a transformação $D$.

# 4 Recorrências

Podemos utilizar matrizes para representar recorrências. Um exemplo famoso é a sequência de Fibonight.

# 5 Produto Interno

Seja $E$ um espaço vetorial e $u, v \in E$. Define-se produto interno com $< u, v >$ com um número real que satisfaz as seguintes condições:

- $< u, v + v' >=< u, v > + < u, v' >$ e $< u + u', v >=< u, v > + < u', v >$
- $< u, v >=< v, u >$
- $< \alpha u, v >= \alpha < u, v >$ e $< u, \alpha v >= \alpha < u, v >$
- Se $u \neq 0$, $< u, u >> 0$

## 5.1 Projeções

Já sabemos que $p = (\frac{u \cdot v}{v \cdot v})v$ é a projeção do vetor $u$ sobre a reta gerada por $v$. Quando queremos projetar um vetor $v$ sobre um hiperplano $\pi$, com vetor nornal $n$, temos que $v = p + tn$, onde $t$ é uma constante. Logo, podemos montar um sistema com $n$ equações.

## 5.2 Ortogonalidade

Se $< u, v >= 0$, dizemos que $u$ e $v$ são ortogonais. Um conjunto é dito ortogonal se a cada par de vetores, eles são ortogonais. Ele será ortonormal quando seus vetores ortogonais forem normalizados. Note que se $X$ é um conjunto ortogonal, então é LI.

## 5.3 Ortogonalização de Gram-Schimidt

Lembre-se: Defina um vetor inicial e utilize a ideia de que cada outro vetor será subtraído das projeções do vetor calculado previamente.

### 5.4 Projeção de um vetor sobre um subespaço

Seja $W$ um subespaço de $E$ e $\alpha$ uma base ortogonal desse subespaço.
$p = proj_W v = \sum_{i=1}^{n} proj_{\alpha_i} v$

# 6 Informações Adicionais

**Extendendo a ideia dos autovalores:** Dado um operador linear $A : E \to E$ ou existe um vetor $u \in E$ tal que $Au = \lambda u$. Ou, então, existem $u, v \in E$ linearmente independentes, tais que $Au = \alpha u + \beta v$ e $Av = \gamma u + \delta v$.

**Invariante:** Diz-se que um subespaço vetorial $F \subset E$ é invariante pelo operador $A : E \to F$ quando $A(F) \subset F$. Isto é, quando a imagem dos vetorres desse subespaço estão nesse subespaço. Um subespaço de dimensão 1 é invariante por $A$ se, e somente se, existe um número $\lambda$ tal que $Av = \lambda v, \forall v \in F$. Se $u, v$ formam um subespaço de dimensão 2, ele será invariante se, e só se, $Au \in F$ e $Av \in F$.

**Teorema:** Todo operador linear num espaço vetorial de dimensão finita possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2. Para provar esse teorema, temos que provar o lema que diz que existem um polinômio de grau 1 ou 2 e um vetor $v$ tal que $p(A) \cdot v = 0$.

# 7 Cadeias de Markov

**Definição:** É uma série temporal discreta no qual a distribuição de uma população pode ser calculada por recorrência. Ad condições são que a população nunca torna-se negativa e que a população total é fixa. Podemos utilizar uma matriz de tranição que descreva a movimentação probilística dessa população. Requere-se que a soma de cada coluna seja 1 e que não haja entradas negativas. O elemento $ij$ da matriz descreve a probabilidade da população passar do estado $j$ para o estadp $i$. Se $T$ possui alguma potêncua com todas as entradas positivas, é dito regular. Uma matrzi de transição regular terá um estado estacionário. $Ts = s$. É possível mostrar que qualquer matriz de transição com as condições dadas deve ter um autovalor 1.