Capítulo 7.8

Thursday, September 3, 2020 12:31 AM

3. $X_1, \dots, X_n \sim$ Pareto (x_0, α) desconhecidos e $T_1 := \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $T_2 = \prod_{i=1}^n X_i$

$f(x \mid x_0, \alpha) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{1}\{x \geq x_m\} = \begin{cases} 1, & x \geq x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases}$

Vou usar o critério de fatorização:

$$f_n(x \mid x_0, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha x_0^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \frac{\alpha^n x_0^{\alpha n}}{(\prod_{i=1}^n x_i)^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{1}\{x_1, \dots, x_n \geq x_0\}$$

$$= 1 \cdot \frac{(\alpha x_0^\alpha)^n}{T_2^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{1}\{T_1 \geq x_0\}$$

$$= u(x) \cdot v[T_1, T_2, \alpha, x_0], \quad u, v \geq 0$$

8. $X_1, \dots, X_n \sim \exp(\beta)$, β desconhecido.

Qual o MLE de β? É $\hat{\beta} = 1/\overline{x_n}$, lembre-se disso.

$f(x \mid \beta) = \beta e^{-\beta x}$ é pdf.

$$f_n(x \mid \beta) = \beta^n e^{-\beta \sum x_i} = \beta^n e^{-\beta n \overline{x_n}} = \beta^n e^{-\beta \cdot n \cdot \frac{1}{1/\overline{x_n}}}$$

Logo, definindo $u(x) = 1$ e $v(r(x), \beta) = \beta^n e^{-\beta n \cdot \frac{1}{1/\overline{x_n}}}$, temos que o MLE é estatística suficiente. Como provamos no Teorema 7.8.3, como o MLE é suficiente, então é suficiente mínimo.

12. $X_1, \dots, X_n$ tem pdf $f(x \mid \theta) = \begin{cases} 2x/\theta^2, & x \in [0, \theta] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$, θ desconhecido.

Para encontrar o MLE, monto a verossimilhança:

$$f_n(x \mid \theta) = \prod_{i=1}^n 2x_i/\theta^2 \cdot \mathbb{1}\{x_i \in [0, \theta]\}$$

$$= \frac{2^n \cdot (\prod_{i=1}^n x_i)}{\theta^{2n}} \cdot \mathbb{1}\{x_1, \dots, x_n \in [0, \theta]\}$$

Quero $\theta \geq x_i$, $1 \leq i \leq n$. Mas quero e o menor possível, pois ele se encontra no denominador. Logo $\hat{\theta}_{MLE} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

A mediana dessa distribuição é o 1/2-quartil, isto é, o valor $m \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$, logo:

$$\int_{-\infty}^m f(x \mid \theta)\, dx \overset{!}{=} \int_0^m \frac{2x}{\theta^2}\, dx = \left.\frac{x^2}{\theta^2}\right]_0^m = \frac{m^2}{\theta^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |m| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \theta\right|$$

Mas $\theta \geq 0$ e m também. Assim $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta$ e, pela invariância do MLE,

$$\hat{m}_{MLE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}_{MLE}.$$

Pelo critério da fatorização, $f_n(x \mid \theta) = \underbrace{\boxed{2^n (\prod_{i=1}^n x_i)}}_{u(x)} \underbrace{\boxed{\frac{\mathbb{1}\{\hat{\theta}_{MLE} \leq \theta\}}{\theta^{2n}}}}_{v(\hat{\theta}_{MLE}, \theta)}$, logo $\hat{\theta}_{MLE}$ é estatística suficiente. Logo $\hat{m}_{MLE}$, função injetiva, também será.

Como $\hat{m}_{MLE}$ é MLE suficiente, será mínimo pelo Teorema 7.8.3.

16. $X_1, \dots, X_n \sim$ Poisson (λ), λ desconhecido

$\lambda \sim$ Gamma (α, β)

Se $T = \sum_{i=1}^n X_i$, sabemos que Gamma é de uma família conjugada. Logo:

$\lambda \mid X \sim$ Gamma $(\alpha + T, \beta + n)$

O estimador de Bayes segundo a perda quadrática é $E[\lambda \mid X] = \frac{\alpha + T}{\beta + n}$.

$$f(x \mid \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \mathbb{1}\{x > 0\} \Rightarrow f_n(x \mid \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \mathbb{1}\{x_1, \dots, x_n > 0\}$$

Assim, se $u(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$ e $v(T, \lambda) = \lambda^T e^{-\lambda n}$, temos que

T é estatística suficiente para λ. Logo o estimador de Bayes (função injetiva de T) também será. Pelo Teorema 7.8.3, ele será, portanto, mínimo.