Capítulo_8.3

Wednesday, October 7, 2020 5:04 PM

8. $X \sim \chi^2(200)$

Observe que $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$, onde $Z_i \sim N(0,1)$ e $n = 200$.

Temos que $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, tal que $\mu = E[Z_i^2] = 1$ e $\sigma^2 = Var[Z_i^2] = 2$

Pelo Teorema central do Limite,

converge em distribuição.

$$\frac{1/n \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - 1}{\sqrt{2/n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Isto é, $\frac{X/n - 1}{\sqrt{2}/n^{1/2}} = \frac{X \cdot n^{-1/2} - n^{1/2}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

Usando essa aproximação para $n = 200$, cdf da normal.

$$\mathbb{P}\left(\frac{X \cdot 200^{-1/2} - 200^{1/2}}{\sqrt{2}} \leq x \right) \approx \Phi(x)$$

Logo

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{\sqrt{2}x + 200^{1/2}}{200^{-1/2}} \right) \approx \Phi(x)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 20x + 200) \approx \Phi(x)$$

Faça $y = 20x + 200 \Rightarrow x = \frac{y}{20} - 10$

$$\mathbb{P}(X \leq y) \approx \Phi\left(\frac{y}{20} - 10\right)$$

Em particular, $\mathbb{P}(160 < X < 240) = \mathbb{P}(X < 240) - \mathbb{P}(X \leq 160)$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2)$$
$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$
$$= 2\Phi(2) - 1$$
$$\approx 0.9545$$