Lista 2

2. (Exemplo 7.3.2)

$X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, pois $X_i = 1$, se o i-ésimo é defeituoso e $X_i = 0$, caso contrário. $\xi(\theta)$ (priori de θ) é pdf de Uniforme$[0,1]$ ou, de forma equivalente, Beta com $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Sabemos que $\xi(\theta)$ pertence a uma família conjugada. Logo $\xi(\theta|x)$ será pdf de Beta também. Se $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$, teremos que $\xi(\theta|x)$ é pdf Beta$(1+y, 1+n-y)$. Logo:

$$\text{Var}(\theta|X) = \frac{(1+y)(1+n-y)}{(2+n)^2(3+n)} = \left[\frac{(1+y)}{(2+n)} \cdot \frac{(1+n-y)}{(2+n)}\right] \cdot \frac{1}{3+n} = \frac{f(y,n)}{3+n}$$

Temos que para cada n,
$$\max_y f(y,n) = \frac{1}{(2+n)^2} \max_y [(1+y)(1+n-y)]$$
$$= \frac{1}{(2+n)^2} \max_y [-y^2 + ny + 1 + n]$$
$$= \frac{1}{(2+n)^2} \cdot \frac{(n^2 + 4(1+n))}{4} = \frac{1}{4}$$

Logo $\text{Var}(\theta|x) \le \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3+n}$. Se $n \ge 22$, $\frac{1}{3+n} \le \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{4(3+n)} \le 0.01$,

e portanto $\text{Var}(\theta|x) \le 0.01$

Agora quero mostrar que $f(y,n) \ge \frac{1}{10}$. Se $n \le 7$, $6n + 6 \ge n^2$ (Verifique!)

e, então $10n + 10 \ge n^2 + 4n + 4 \Rightarrow \frac{n+1}{(2+n)^2} \ge \frac{1}{10}$. Como $f(y,n)$, para cada n,

e $\min_{n \ge y \ge 0} f(y,n) = \frac{n+1}{(2+n)^2}$, quando $y = 0$ ou n. Assim $\text{Var}(\theta|x) \ge \frac{n+1}{(2+n)^2} \cdot \frac{1}{3+n} \ge \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3+n}$

Para que $\frac{1}{10(3+n)} > 0.01 \Rightarrow \frac{100}{10} > 3+n \Rightarrow 7 > n$. Como queríamos mostrar.

3.

$\theta \sim \text{Beta}(2, 200)$ → priori

$X_1, \dots, X_{100} \sim \text{Bernoulli}(\theta)$

$y = \sum_{i=1}^{100} x_i = 3$. → Teorema 7.3.1

Assim $\theta|X \sim \text{Beta}(\underset{\alpha}{2} + \underset{y}{3}, \underset{\beta}{200} + \underset{n}{100} - \underset{y}{3}) = \text{Beta}(5, 297)$

↳ posteriori

6. θ → valor médio de defeituosos (valor esperado)

$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \beta = 10)$ → priori

$X_1, \dots, X_{12} \sim \text{Poisson}(\theta)$. Lembre que $E[X] = \theta$

Veja que estou contando a cada 100 e θ é a média nesses 100. A hipótese da Poisson é ligada com a palavra média de frequência

Pelo Teorema 7.3.2, $\theta|X \sim \text{Gamma}(\alpha = 2 + 4, \beta = 10 + 12)$

15. $$\xi(\theta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\theta}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \le 0 \end{cases}$$ Inverse Gamma

a. $$\int_0^\infty \xi(\theta)\, d\theta = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\theta}\, d\theta, \quad \theta = 1/x, \quad d\theta = -1/x^2\, dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+1} e^{-\beta x} \left|-\frac{1}{x^2}\right| dx$$ → Transformação de V.A., lembrar do módulo

Gamma
$$= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx$$
$$= 1$$

b. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \theta)$, μ conhecido, θ desconhecido.

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) \propto \frac{1}{\theta^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\theta}\right\}$$
$$\xi(\theta) \propto \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\theta}$$
$$\xi(\theta | x_1, \dots, x_n) \propto f(x_1, \dots, x_n | \theta)\, \xi(\theta)$$
$$\propto \theta^{-n/2} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\theta}\right\} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\theta}$$
$$= \theta^{-((\alpha + n/2) + 1)} \exp\left\{-\left[\beta + 1/2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right] 1/\theta\right\}$$

Observe que essa é a distribuição da inversa de Gamma com parâmetros $\alpha + n/2$ e $\beta + 1/2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

Não precisamos da constante para ver isso.

17. $M \sim \text{Unif}[0, \theta]$, θ desconhecido, M = nº minutos de espera

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 192/\theta^4, & \theta \ge 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$ → é uma dist. de probabilidade?

$m_1 = 5$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 8$

$$f(m_1, m_2, m_3 | \theta) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{m_i \in [0, \theta]\} = \frac{1}{\theta^3} \mathbb{1}\{m_1, m_2, m_3 \in [0, \theta]\}$$

Logo $\xi(\theta|x) \propto f(m_1, m_2, m_3 | \theta)\, \xi(\theta) \propto \frac{1}{\theta^7}$, mas isso ocorre

em qual intervalo? $\theta \ge 4$ e $m_1 = 5$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 8 \in [0, \theta]$, logo $\theta \ge 8$. Vamos averiguar a constante $c(x)$

$$\int_8^\infty \xi(\theta|x)\, d\theta = \int_8^\infty c(x) \frac{1}{\theta^7}\, d\theta = \frac{c(x)\, \theta^{-6}}{-6}\Bigg]_8^\infty = 0 + c(x) \cdot \frac{8^{-6}}{6}$$
$$= \frac{c(x)}{6 \cdot 8^6} = 1 \Rightarrow c(x) = 6 \cdot 8^6$$

↓ PDF

Então
$$\xi(\theta|x) = \begin{cases} 6 \cdot 8^6/\theta^7, & \theta \ge 8 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

19. $$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta - 1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta - 1} \propto \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta}$$

↳ $0 < x_i < 1$, $1 \le i \le n$

$$\xi(\theta) \propto \theta^{\alpha - 1} e^{-\beta\theta}$$

Logo:
$$\xi(\theta | x_1, \dots, x_n) \propto \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta - 1} \theta^{\alpha - 1} \exp(-\beta\theta)$$
$$\propto \theta^n \exp\{\theta \sum \ln x_i\} \theta^{\alpha - 1} \exp\{-\beta\theta\}$$
$$= \theta^{(\alpha + n) - 1} \exp\{-[\beta - \sum \ln x_i]\theta\}$$

Observe que $\xi(\theta | x_1, \dots, x_n)$ é uma Gamma, exceto por uma constante, que depende de x. Os parâmetros dessa Gamma são $\alpha + n$ e $\beta - \sum \ln x_i$. Portanto:

$$E[\theta | x_1, \dots, x_n] = \frac{\alpha + n}{\beta - \sum \ln x_i}, \quad 0 < x_i < 1, \quad 1 \le i \le n$$
$$\text{Var}[\theta | x_1, \dots, x_n] = \frac{\alpha + n}{(\beta - \sum \ln x_i)^2}$$

21. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\theta)$

$$\xi(\theta) = \begin{cases} \theta^{-1}, & \theta > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^n \theta \exp\{-\theta x_i\} = \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\right\}$$

$$\xi(\theta | x_1, \dots, x_n) \propto \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\right\} \cdot \theta^{-1}, \quad \theta > 0$$
$$= \theta^{n-1} \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\right\},$$

que é pdf, a uma constante, de uma Gamma com parâmetros $\alpha = n$ e $\beta = \sum_{i=1}^n x_i$

$$E[\theta | x_1, \dots, x_n] = \alpha/\beta = 1/(\beta/\alpha) = 1/\overline{x_n}$$