Lucas Moschen

# Monitoria 7

15 de dezembro de 2020

## Definições e Teoremas

- Quando uma linha é substituída pela soma dela com um múltiplo de outra, a nova linha pertence ao mesmo subespaço gerado pelas primeiras. Mais do que isso, o subespaço gerado é o mesmo. (*Michels*)
- **Nulidade da Matriz:** Dimensão do espaço anulado da matriz $A$ ($anul(A)$). Você sabe encontrar a nulidade de uma matriz? **Teorema do Posto**! $anul(A) + posto(A) = n$.
- Considere $Ax = v_E$. Então, $A$ é a matriz de passagem da base $B$ para a base $E$, canônica. Assim, $v_B = A^{-1}v_E$.
- Transformação Linear é uma função linear entre os espaços vetorias $E$ e $F$ com as propriedades de soma $T(u + v) = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.
- Lembre que $T(v) = T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = \alpha_1 T(e_1) + ... + \alpha_n T(e_n)$. Logo, a transformação linear está definida quando conhcemos as imagens dos elementos de uma base. Daí saí a matriz de transformação.
- O escalonamento mantém a relação entre as colunas das matrizes. Para se ter a intuição, basta pensar que para resolver sistemas, escalonamos as matrizes, e as incógnitas permanecem as mesmas para o sistema escalonado.
- Suponha que temos uma vetor $w_\beta = (a, b)_\beta$ e queremos reescrever $w_E = (a', b')$, na base canônica. Para isso, precisamos fazer uma mudança de bases que envolve uma matriz de tranformação. Essa matriz é simples, pois é composta pelos vetores da base $\beta$.
- **Teorema:** Seja uma transformação linear $A : E \to F$. A cada vetor $u \in \beta$ base de $E$, façamos corresponder um vetor $u' \in F$. Então essa tranformação, tal que $Au = u'$, é única.

## Importante

1. Saber encontrar bases do espaço-coluna, do espaço-linha e do espaço-anulado (logo suas dimensões).
2. Um funcional linear é $T : E \to \mathbb{R}$.
3. Um operador linear é $T : E \to E$.
4. Lembrar de conjunto gerador.

# Exercícios:

1. Prove que os seguintes polinômios são linearmente independentes: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1, q(x) = 2x^4 + 5x - 6, r(x) = x^2 - 5x + 2$. *Considere a base* $X = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

2. Seja $X$ um conjunto de polinômios. Se dois polinômios quaisquer de $X$ têm graus diferentes, $X$ é LI.

3. Mostre que os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

4. Avalie as afirmações:
   ( ) Seja $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i = 3 \cdot x_{i-1}, i = 2, ..., 5\}$. É um subespaço do $\mathbb{R}^5$. (Se verdadeiro, apresente uma base).
   ( ) É possível encontrar dois planos do $\mathbb{R}^4$ que se interesectem em apenas um ponto. (*Pense em planos com dois parâmetos livres).*
   ( ) O conjunto de todas as matrizes cujo determinante é maior do que zero é um subespaço das matrizes.
   ( ) A união de dois conjuntos LI é um conjunto LI, se um deles é disjunto do subespaço gerado pelo outro.
   ( ) Existe apenas uma transformação linear com $T(0, 0, 1) = (1, 2), T(0, 1, 0) = (2, 3), T(1, 0, 0) = (4, 7)$, onde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Isto é, não existem $x, y, z$, tal que $T(x, y, z) \neq T'(x, y, z)$ com essas propriedades.
   ( ) Se $u, v, w \in E$ são colineares, então $Au, Av, Aw$ também são.
   ( ) Se $Aw = Au + Av$, então $w = u + v$.

5. Encontre os espaços linha, coluna e anulado da matriz:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Seja $U = \{u_1, u_2, u_3\}$. Como representar o vetor $(a, b, c)$, como combinação linear dos vetores de $U$.

7. Exiba uma base para o espaço vetorial formado pelos polinômios de grau $\leq n$ que se anulam em $x = 2$ e $x = 3$. Qual a dimensão dessa base?

8. Tem-se uma transformação linear $A(-1, 1) = (1, 2, 3)$ e $A(2, 3) = (1, 1, 1)$. Qual a matriz de tranformação de $A$, em relação às bases canônicas.

# Aplicação: Quadrados Mágicos

Na semana passa, observamos a imagem da Melancolia I, de Albrecht Durer de 1514, em que apareceia um quadrado mágico clássico.

*Para lembrar: definimos uma matriz $n \times n$ como quadrado mágico quando a soma de cada linha, coluna e diagonal é igual. Essa soma se chama peso. $Mag_n$ o conjunto de todos os quadrados mágicos de ordem $n$.O quadrado será clássico se usarmos os todos on números entre 1 e $n^2$.*

Considere $Mag_2$. Você conseguiria encontrar uma base para esse subespaço das matrizes 2 por 2 (provamos que é um subespaço na semana passada)? E $Mag_3$?

**Exemplo:** $X = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1)\}, Y = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$