Capitulo_8.1

1. $X_1, \dots, X_n \sim Unif[0,\theta]$ e θ desconhecido. Defina $M := \max\{X_1, \dots, X_n\}$
Como $X_i \leq \theta, \forall i$, temos que $M \leq \theta$. Logo $|M-\theta| = \theta - M$
Assim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|M-\theta| \leq 0.1\theta) &= \mathbb{P}(\theta - M \leq 0.1\theta) \\
&= \mathbb{P}(0.9\theta \leq M) \\
&= 1 - \mathbb{P}(M \leq 0.9\theta) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq 0.9\theta, \dots, X_n \leq 0.9\theta) \quad \} \; M \leq \theta \Leftrightarrow X_i \leq \theta, \forall i \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq 0.9\theta) \quad \text{Independência} \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq 0.9\theta)^n \quad \text{Distribuições idênticas} \\
&= 1 - \left(\frac{0.9\theta}{\theta - 0}\right)^n \quad \text{cdf uniforme: } F(x|a,b) = \frac{x-a}{b-a} \\
&= 1 - 0.9^n \\
&\geq 0.95
\end{aligned}$$

Prove

Logaritmo crescente

Para que $1 - 0.9^n \geq 0.95 \Rightarrow 0.05 \geq 0.9^n \rightarrow \log(0.05) \geq n \cdot \log 0.9$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log(0.05)}{\log(0.9)}$$

Inverte pois $\log 0.9 < 0$

2. $X \overset{iid}{\sim} N(\theta, 2^2)$. Queremos $E_\theta(|\bar{X}_n - \theta|^2) \leq 0.1, \forall \theta$
$\bar{X}_n \sim N(\theta, 4/n)$. Para checar isso podemos usar a função característica ou convolução.
$E \; \frac{4}{n} = Var(\bar{X}_n) = E_\theta[|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]|^2) = E_\theta[|\bar{X}_n - \theta|^2]$ //

Para que $4/n \leq 0.1 \Rightarrow n \geq 40$

3. Agora queremos $E_\theta[|\bar{X}_n - \theta|] \leq 0.1$. Temos que $Y = \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{4/n}} \sim N(0,1)$. Assim

$$\begin{aligned}
E_\theta[|\bar{X}_n - \theta|] &= E[|Y|]\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \, dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} |y| \exp\{-y^2/2\} \, dy, \quad \text{simetria de } |y| e^{-y^2/2} \quad y \geq 0 \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \int_0^\infty y \exp\{-y^2/2\} \, dy, \quad \frac{y^2}{2} = z, \quad y\,dy = dz \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \int_0^\infty e^{-z} \, dz = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \left[\cancel{-e^{-\infty}} + e^{-0}\right] \quad {}^{\to 0}\;{}^{\to 1} \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 \leq (0.1)^2
\end{aligned}$$

abuso de linguagem ($\lim_{z \to \infty} e^{-z}$)

$$\Rightarrow \frac{8}{\pi n} \leq 0.01 \Rightarrow \frac{8 \cdot 100}{\pi} \leq n \Rightarrow n \geq \frac{800}{\pi}$$

9. $X_1, \dots, X_n \sim exp(\theta)$. CDF do MLE para θ.
O MLE para θ já foi calculado em exercício 7, 7.5 e é $1/\bar{X}_n$
Logo, $\forall t > 0$, queremos:
Defina $S := \sum_{i=1}^n X_i$, logo $\mathbb{P}(1/\bar{X}_n \leq t) = \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq 1/t) = \mathbb{P}(S \geq n/t)$

S é soma de n exponenciais, ou seja, Gamma(n, θ). Seja G cdf da Gamma.
Portanto $\mathbb{P}(S \geq n/t) = 1 - \mathbb{P}(S \leq n/t) = 1 - G(n/t)$