Cap 7.6

3. $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\beta)$. Queremos M.L.E. para a mediana φ da distribuição.
Como temos uma distribuição contínua, $P(X_1 \geq \varphi) = 0.5 \Rightarrow e^{-\beta\varphi} = 0.5$, pois $P(X \le \varphi) = 1 - e^{-\beta x}$.
Logo $\log(e^{-\beta\varphi}) = \log(1/2) \Rightarrow -\beta\varphi = -\log 2 \Rightarrow \varphi = (\log 2)/\beta$

Veja que se $S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\hat\beta = 1/S$ é MLE para β. Defina $g(\beta) = (\log 2)/\beta$. Pela invariância do estimador e $\varphi = g(\beta) \Rightarrow \hat\varphi = g(\hat\beta) = \log 2/\hat\beta = S\cdot\log 2$.

Concluo que $S\cdot\log 2$ é MLE para φ.

5. $X_1,\dots,X_n \sim Unif[a,b]$
Queremos MLE para $\mu = (a+b)/2$, média da distribuição. $\begin{cases} 1, & x_i \in [a,b] \\ 0, & x_i \notin [a,b] \end{cases}$

Temos que $f_n(\vec{x}|a,b) = \prod_{i=1}^n f(x|a,b) = \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{1}\{x_i \in [a,b]\}}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}\mathbb{1}\{x_1,\dots,x_n \in [a,b]\}$

Note que se para algum x_i, temos que $x_i \notin [a,b]$, $f_n(x|a,b) = 0$, o que é péssimo! Logo queremos que se $1 \le i \le n$, $x_i \in [a,b]$. Nesse caso $f_n(x|a,b) > 0$, que é melhor! Por outro lado, queremos minimizar $(b-a)^n$, para isso basta minimizar $b-a$. Nesse caso, tomarei $\hat b = \max\{x_i\}$ e $\hat a = \min\{x_i\}$. Se $b < \hat b$, existe i tal que $b < x_i$, logo $f_n(x_i|a,b) = 0$. Se $b > \hat b$, o denominador fica maior e reduz a verossimilhança.
O mesmo vale para $\hat a$!
Logo $\hat\mu = \frac{\max\{x_i\} + \min\{x_i\}}{2}$ é MLE para μ dada a invariância do estimador.

11. $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} Unif[0,\theta]$. Temos mostrar que $\hat\theta_n \xrightarrow{P} \theta$
Pelo exercício anterior, sabemos que $\hat\theta_n = \max\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ é MLE para θ.

Sabemos que $P(X_i \le \theta) = 1$, para todo i. Logo $P(\hat\theta_n \le \theta) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Tome $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
P(\theta - \hat\theta < \varepsilon) &= P(\hat\theta > \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(\hat\theta \le \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_1 \le \theta - \varepsilon, \dots, X_n \le \theta - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_1 \le \theta - \varepsilon) \cdots P(X_n \le \theta - \varepsilon), \text{ independência} \\
&= 1 - P(X_1 \le \theta - \varepsilon)^n, \quad \text{mesma distribuição} \\
&= 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \longrightarrow 1, \quad \text{quando } n \to \infty,
\end{aligned}$$

pois $\theta - \varepsilon < \theta$.
Concluímos que $\hat\theta_n \xrightarrow{P} \theta$.

20. $X_1,\dots,X_n \sim Poisson(\theta)$

MLE: $f_n(x|\theta) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i} \Rightarrow \overset{\text{log verossimilhança}}{L(\theta|x)} = -n\theta + \sum x_i \cdot \ln\theta + \sum \ln(x_i!)$

Assim $\frac{d}{d\theta}L(\hat\theta|x) = -n + \frac{\sum x_i}{\hat\theta} = 0 \Rightarrow \hat\theta = \bar{X}_n$

Momentos: Temos θ é 1-dimensional. Além disso $E[X_1] = \theta$ é finito. Podemos usar o método. O método amostral é $m_1 = 1/n\sum_{i=1}^n x_i$ e $\mu_1(\theta) = E[X_1|\theta] = \theta$.
Logo pelo método dos momentos $\bar{X}_n = m_1 = \mu_1(\hat\theta) = \hat\theta$

Concluo que são os mesmos estimadores.

22. $X_1,\dots,X_n \sim Unif[0,\theta]$

a) Temos que θ é 1-dimensional e $E[X|\theta] = \theta/2$ é finito. Logo podemos usar esse método. O momento amostral é $m_1 = 1/n\sum X_i = \bar{X}_n$. Além disso, $\mu_1(\theta) = E[X_1|\theta] = \theta/2$, logo $\hat\theta = 2\bar{X}_n$ é o estimador dos momentos.

b) Veja que $2\bar{X}_n \neq \max\{X_1,\dots,X_n\} = \hat\theta_{MLE}$

23. $X_1,\dots,X_n \sim Beta(\alpha,\beta)$

a) Agora $\theta = (\alpha,\beta)$ é 2-dimensional. Como média e variância estão definidos, posso usar o método. $m_1 = \bar{X}_n$ e $m_2 = 1/n\sum_{i=1}^n X_i^2$. Além disso,
$\mu_1(\theta) = E[X_1|\theta] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ e $\mu_2 = E[X_1^2|\theta] = Var[X_1|\theta] + E[X_1|\theta]^2$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^2}\left[\frac{\beta}{(\alpha+\beta+1)} + \alpha\right]$$

Pelo método:

$$\bar{X}_n = \frac{\hat\alpha}{\hat\alpha+\hat\beta}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \overset{\bar{X}_n}{\boxed{\frac{\hat\alpha}{(\hat\alpha+\hat\beta)}}}\left[\frac{\cancel{(\hat\alpha+\hat\beta)}(\hat\alpha+1)}{(\hat\alpha+\hat\beta+1)}\right]$$

$$\hat\alpha(1-\bar{X}_n) = \hat\beta\bar{X}_n \Rightarrow \hat\alpha = \hat\beta\frac{\bar{X}_n}{(1-\bar{X}_n)}$$

Logo,
$$\frac{1}{\bar{X}_n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{\hat\beta\bar{X}_n/(1-\bar{X}_n) + 1}{\hat\beta\bar{X}_n/(1-\bar{X}_n) + \hat\beta + 1} = \frac{\hat\beta\bar{X}_n + 1 - \bar{X}_n}{\hat\beta + 1 - \bar{X}_n}$$

$$\Rightarrow (\hat\beta + 1 - \bar{X}_n)\sum_{i=1}^n x_i^2 = n\bar{X}_n(\hat\beta\bar{X}_n + 1 - \bar{X}_n)$$

$$\Rightarrow \hat\beta[\sum X_i^2 - n\bar{X}_n\cdot\bar{X}_n] = n\cdot\bar{X}_n - n\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n\overbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}^{\overline{X_n^2}\cdot n} - \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\Rightarrow \hat\beta = \frac{\cancel{n}[\bar{X}_n - \bar{X}_n^2 + \bar{X}_n\cdot\overline{X_n^2} - \overline{X_n^2}]}{\cancel{n}[\overline{X_n^2} - \bar{X}_n^2]} = \frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - \overline{X_n^2}(1-\bar{X}_n)}{[\overline{X_n^2} - \bar{X}_n^2]}$$

$$= \frac{(1-\bar{X}_n)(\bar{X}_n - \overline{X_n^2})}{\overline{X_n^2} - \bar{X}_n^2}$$

Por fim $\hat\alpha = \frac{\cancel{(1-\bar{X}_n)}(\bar{X}_n - \overline{X_n^2})}{\overline{X_n^2} - \bar{X}_n^2}\cdot\frac{\bar{X}_n}{\cancel{(1-\bar{X}_n)}}$

b) $f_n(x|\theta) = \frac{(\prod x_i)^{\alpha-1}(\prod(1-x_i))^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)^n} =$

$$\begin{aligned}
L(\theta|x) &= (\alpha-1)\sum\ln(x_i) + (\beta-1)\sum\ln(1-x_i) - n\cdot\ln(B(\alpha,\beta)) \\
&= (\alpha-1)\sum\ln(x_i) + (\beta-1)\sum\ln(1-x_i) - n[\ln(\Gamma(\alpha)) + \ln(\Gamma(\beta)) - \ln(\Gamma(\alpha+\beta))]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = \sum\ln(x_i) - n\cdot\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\overset{\frac{d}{d\alpha}(\alpha+\beta)}{1} = 0$$

Note que o valor envolverá $\sum\ln(x_i)$ que não aparece no método de momentos, logo não será o mesmo.