Capítulo_11

Thursday, November 19, 2020 3:36 PM

11.1

3. Mostrar que $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ passa por $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) + \hat{\beta}_1 x = \bar{y}$$

Logo a equação é satisfeita.

11.2

2. Lembre que $E[Y \mid x] = \beta_0 + \beta_1 x$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i - \bar{y} \cancelto{0}{\left(-n\bar{x} + \sum_{i=1}^n x_i\right)}\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}E[\hat{\beta}_1] &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) E[Y_i]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad = E[E[Y_i \mid x]] = E[\beta_0 + \beta_1 x] = \beta_0 + \beta_1 x \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\cancel{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\beta_0} + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \beta_1 \quad \text{pois}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \overbrace{\sum_{i=1}^n x_i}^{n \cdot \bar{x}} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2\bar{x} x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}E[\hat{\beta}_0] &= E[\bar{Y}_n] - E[\hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_i x_i) - \beta_i \cdot \bar{x} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \bar{x} - \beta_1 \bar{x} \\ &= \beta_0\end{aligned}$$

6. Suponha $\bar{x} = 0$. Pelo Teorema 11.2.2, $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = 0$
Precisamos provar que $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ é uma distribuição normal variada e nesse caso, o Teorema 11.3.2 faz o trabalho.
Pelo Teorema 5.10.3, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são independentes.

$(X_1, X_2) \sim$ Normal bivariada, denotada por $N\left([\mu_1, \mu_2], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$

Onde ρ = correlação(X_1, X_2). Se $\rho = 0 \Rightarrow X_1$ e X_2 são independentes.

↳ Isso só acontece com a normal