4.)

a.) Tanker (Poisson verteilt) $\lambda = 4$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- $\max\limits_{k} \{P(X=k)\} = ?$ (Modalwert)

<u>Überlegung:</u> Wo gilt: $P(X=k-1) \leq P(X=k) \geq P(X=k+1)$

- $P(X=k-1) \leq P(X=k) \Leftrightarrow \frac{P(X=k-1)}{P(X=k)} \leq 1$

<u>NR:</u>

$$\frac{P(X=k-1)}{P(X=k)} = \frac{\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cancel{e^{-\lambda}}}{\frac{\lambda^k \cancel{e^{-\lambda}}}{k!}} = \frac{\lambda^{k-1}\, k!}{\cancel{(k-1)!}\, \cancel{\lambda^k}} = \frac{k}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\lambda} \leq 1 \Rightarrow k \leq \lambda$$

- $P(X=k+1) < P(X=k) \Leftrightarrow \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} < 1$

<u>NR:</u>

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \cancel{e^{-\lambda}}}{\frac{\lambda^k}{k!} \cancel{e^{-\lambda}}} = \frac{\lambda^{k+1}\, \cancel{k!}}{(k+1)\cancel{!}\, \cancel{\lambda^k}} = \frac{\lambda}{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{k+1} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq k+1 \Rightarrow \lambda - 1 \leq k$$

$$\Rightarrow \lambda - 1 \leq k \leq \lambda$$

$\lambda = 4$: $\Rightarrow 3 \leq k \leq 4 \Rightarrow \underline{\underline{k = \{3, 4\}}}$

Die Wahrscheinlichste Anzahl an Tanker ist 3 oder 4.

- $P(X \geq 6)$ (Wahrscheinlichkeit mind. eine Tochter erreichen!)

$$P(X \geq 6) = 1 - \sum_{k=0}^{5} P(X=k) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{5} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{5} \frac{\lambda^k}{k!} \overset{\text{Maple } (\lambda=4)}{=} 0,215$$

$\Rightarrow$ 21,5 %

6.)

X ... Zeit zwischen 2 Mails.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{mit } x \geq 0 \quad (\text{in Stunden})$$

$$\text{und } \lambda = \frac{1}{3}$$

- $P(X > 2)$ ... Wahrscheinlichkeit, dass man mindest 2 h auf ein Mail wartet
(Es gibt kein Mail in der Zeitdauer von 2)

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 \lambda \cdot e^{-\lambda x} \, dx = 1 - \cancel{\lambda} \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\cancel{\lambda}} \Big|_{x=0}^{2} \right)$$

$$= 1 + e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{2} = 1 + e^{-2\lambda} - 1 = e^{-2\lambda} = e^{-\frac{2}{3}} = 0,513$$

$\Rightarrow \sim$ 51,3 %

- $P(X \leq 1)$ ... Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens 1 h auf ein weiteres Mail wartet.
(Es trifft mindestens ein Mail in 1 h ein)

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda \cdot e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \cdot \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right) \Big|_{x=0}^{1} = \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0,283$$

$\Rightarrow$ 28,3 %

d.) $U = X^3$ $\qquad X \sim \text{Gleich}(a, b) \Rightarrow f_X = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a,b]$

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \int_a^b x^3 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{x^4}{4} \Big|_{x=a}^{b} \right) =$$

$$= \frac{1}{b-a} \; \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^4 - a^4}{(b-a)\,4}$$

$$E(U^2) = \int_a^b x^6 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^7 - a^7}{7(b-a)}$$

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2$$