Kapitel 7

Schätzen von Parametern

In diesem Kapitel führen wir die Methoden der beschreibenden Statistik und der wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellbildung zusammen und gehen damit den entscheidenden Schritt, der die **schließende Statistik** möglich macht.

Ziel ist der Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit (etwa in der Sozial- und Wirtschaftsstatistik) oder auf die Verteilung der untersuchten Größe (etwa bei Boden- oder Materialparametern in den Ingenieurwissenschaften).

Gegenstand der Untersuchung ist eine Zufallsgröße X mit bekanntem oder zunächst postulierten Verteilungstyp, z.B.

- eine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Parametern μ und σ^2,
- eine Alternativverteilung mit Parameter p,
- eine Exponentialverteilung mit Parameter λ.

Die Parameter sind unbekannt und sollen aus einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ geschätzt werden.

Beispiel 7.1 (Die Sonntagsfrage) Es soll erhoben werden, welcher Anteil p der wahlberechtigten Österreicher (Grundgesamtheit) eine Partei XXX wählen würde. Es handelt sich offenbar um eine Alternativverteilung mit Ausgängen *ja* – 1 und *nein* – 0. Der Verteilungstyp ist in diesem Beispiel bekannt. Der Wert p soll aus einer Stichprobe von n wahlberechtigten Personen geschätzt werden.

Beispiel 7.2 (Mittelwert einer Grundgesamtheit) Zu Vergleichszwecken ist oft verlangt, den Mittelwert als Kenngröße einer Grundgesamtheit zu ermitteln, etwa das mittlere Bruttoeinkommen unselbständig Beschäftigter oder das mittlere Körpergewicht von Schülern. Wir fassen diesen Mittelwert als Parameter μ der Grundgesamtheit auf und wollen ihn aus einer Stichprobe kleineren Umfangs schätzen. Für diese Schätzung spielt der Verteilungstyp der Grundgesamtheit keine Rolle, wie wir sehen werden.

Beispiel 7.3 (Lebensdauer von Bauteilen) Aus theoretischen Überlegungen kann hergeleitet werden, dass Lebensdauern von technischen Geräten und Bauteilen näherungsweise exponentialverteilt sind. Die Geräteausfälle, über einen längeren Zeitraum beobachtet, können als Stichprobe herangezogen werden, um den Parameter λ der Exponentialverteilung zu schätzen.

Beispiel 7.4 (Hochwasserstatistik) Zur Bemessung von Dämmen an einem Fließgewässer muss das 100- oder 1000-jährige Hochwasser abgeschätzt werden. Man nimmt oft eine Gumbelverteilung an, für die es eine gewisse plausible Herleitung gibt. Andere Extremwertverteilungen sind ebenfalls in Gebrauch. Jedenfalls wird aus einer Reihe von gemessenen Jahresmaxima auf die Parameter der Extremwertverteilung geschlossen. Daraus können die Jährlichkeiten als Quantile abgelesen werden.

Beispiel 7.5 (Aus der Bodenmechanik) Zur Bemessung eines Fundaments nach den probabilistischen Normen sind die statistischen Kennwerte der Bodenparameter zu erheben. Die Quantile der Verteilung gehen direkt in die Bemessung nach Norm ein. In Tabelle 7.2 sind die Ergebnisse für den Reibungswinkel von $n = 20$ Rahmenscherversuchen angegeben. Für die Bemessung interessiert der Reibungskoeffizient $\nu = \tan\varphi$. Um die Quantile abschätzen zu können, wird in der Regel angenommen, dass der Reibungskoeffizient normalverteilt ist. Die Parameter μ, σ^2 der Normalverteilung werden aus der Stichprobe geschätzt.

In den letzten beiden Beispielen ist der Verteilungstyp ein plausibles Postulat. Es sollte überprüfbar sein, ob solche Postulate zutreffend sind. Die schließende Statistik liefert auch dazu Entscheidungskriterien: aus der Stichprobe kann abgeleitet werden, ob die postulierte Verteilung akzeptabel ist: dies wird im im nächsten Kapitel behandelt.

7.1 Punktschätzungen

Im Abschnitt **??** haben wir die Bedeutung der Parameter der wichtigsten Verteilungen beschrieben. Wir verwenden nun die Entsprechungen Modell – Stichprobe mit

$$\mathrm{E}(X) \approx \overline{x}, \qquad \mathrm{V}(X) \approx s^2$$

der frequentistischen Sichtweise, um so genannte **Schätzer** für die Verteilungsparameter zu gewinnen. In statistischer Tradition werden die Schätzer mit einem **Hut** gekennzeichnet, um sie von den Modellparametern zu unterscheiden. Einige wichtige Beispiele sind:

(i) Parameter $\mu = \mathrm{E}(X)$

Schätzung $\widehat{\mu} = \overline{x}$, das Stichprobenmittel;

(ii) Parameter $\sigma^2 = \mathrm{V}(X)$

Schätzung $\widehat{\sigma^2} = s^2$, die Stichprobenvarianz;

(iii) Alternativverteilung, Parameter $p = P(X = 1)$
Schätzung $\widehat{p} =$ Anteil der 1-Ausgänge;

(iv) Exponentialverteilung, Parameter $\lambda = 1/\mathrm{E}(X) = 1/\sqrt{\mathrm{V}(X)}$
Schätzung $\widehat{\lambda} = 1/\overline{x}$ oder $\widehat{\lambda} = 1/s$.

Beispiel 7.6 (Begleitendes Beispiel) Wir verwenden in der Folge als Illustrationsbeispiel eine Erhebung der Körpergröße von 44 männlichen Bauingenieurstudenten aus 1998 (Tabelle 7.1). Wir fassen diese Erhebung als Stichprobe vom Umfang $n = 44$ für das Merkmal *Körpergröße männlicher österreichischer Studenten* auf. Wir postulieren (und werden dies im nächsten Kapitel überprüfen), dass diese Grösse X einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unterliegt.

Gesucht ist der Erwartungswert μ (der Mittelwert der Grundgesamtheit aller österreichischen Studenten) und die Varianz σ^2.

Die Stichprobe vom Umfang $n = 44$ ergab:

$$\sum_{i=1}^{44} x_i = 7915, \qquad \overline{x} = \frac{7915}{44} = 179.9,$$

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 2459, \qquad s^2 = \frac{2459}{43} = 57.2, \qquad s = 7.6.$$

Somit ist die Punktschätzung

$$\widehat{\mu} = 179.9, \qquad \widehat{\sigma} = 7.6.$$

Die *geschätzte Verteilung* ergibt sich somit als Normalverteilung $\mathcal{N}(179.9, 57.2)$. In der Abbildung 7.1 ist der ein- und zweifache Streubereich ablesbar.

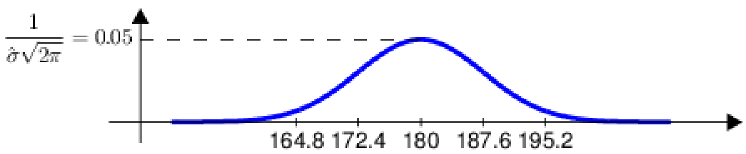

Abbildung 7.1: Verteilungsdichte der Körpergröße von Studenten, Anpassung gemäß Stichprobe.

Gütekriterien für Punktschätzungen: Es gibt meistens verschiedene Schätzer $\widehat{\theta}$ für denselben Parameter θ, zum Beispiel für den Parameter λ einer Exponentialverteilung (Punkt (iv) oben) oder für die Normalverteilung, bei der man auch den Median der Stichprobe als Schätzer für den Zentralwert μ nehmen könnte. Somit stellt sich die Frage, welcher Schätzer vorzuziehen ist. Dazu stellt die Schätztheorie *Gütekriterien* auf. Einige dieser Gütekriterien sind die Erwartungstreue, die Effizienz und die Plausibiliät:

(i) *Erwartungstreue:* $\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta$. Das heißt, wird $\widehat{\theta}$ aus vielen Stichproben wiederholt bestimmt, so sollte im Mittel θ herauskommen.

Beispiel 7.7 Ist $\mu = \mathrm{E}(X)$, so ist $\widehat{\mu} = \overline{X}$ erwartungstreu, da nach Abschnitt **??** gilt:

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X).$$

Beispiel 7.8 Ist $\sigma^2 = \mathrm{V}(X)$, so liefert die Stichprobenvarianz

$$\widehat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

einen erwartungstreuen Schätzer. Aus diesem Grund erscheint der Faktor $(n-1)$ in der Formel für die Stichprobenvarianz.

Zur Begründung machen wir die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\sigma^2}) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big((X_i-\overline{X})^2\big) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big(\big(X_i-\mu-(\overline{X}-\mu)\big)^2\Big)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big((X_i-\mu)^2\big) - 2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big((X_i-\mu)\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-\mu\big)\Big) + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big((\overline{X}-\mu)^2\big)\right).
\end{aligned}$$

Als Realisierungen in der Stichprobe sind die X_i unabhängig und identisch wie X verteilt, daher gilt

$$\mathrm{E}\big((X_i-\mu)^2\big) = \sigma^2, \quad \mathrm{E}\big((X_i-\mu)(X_j-\mu)\big) = 0 \text{ für } i \neq j, \quad \mathrm{E}\big((\overline{X}-\mu)^2\big) = \mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

und somit weiter

$$\mathrm{E}(\widehat{\sigma^2}) = \frac{1}{n-1}\Big(n\cdot\sigma^2 - 2n\cdot\frac{1}{n}\sigma^2 + n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\Big) = \frac{1}{n-1}\Big(n\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2\Big) = \sigma^2.$$

(ii) *Effizienz:* Die Schätzvarianz

$$V(\widehat{\theta}) = \mathrm{E}\big((\widehat{\theta}-\theta)^2\big)$$

sollte möglichst klein sein.

Beispiel 7.9 $\widehat{\mu} = \overline{X}$ ist der effizienteste (lineare) Schätzer für $\mu = \mathrm{E}(X)$.

(iii) *Plausibilität (Maximum Likelihood):* Der Schätzer $\widehat{\theta}$ sollte jenen Parameterwert θ treffen, für den die vorliegende Stichprobe die größte Wahrscheinlichkeit hat.

Beispiel 7.10 Das Stichprobenmittel $\overline{X}$ ist Maximum-Likelihood-Schätzer für μ. Für σ^2 ist jedoch $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ der Maximum-Likelihood-Schätzer.

Parameterschätzungen sind mit zwei Fehlerquellen behaftet.

1. *Modellfehler:* Annahme oder Vorgabe des Verteilungstyps. Dies liegt in der Verantwortung der Bearbeiter. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, wie die Berechtigung einer Verteilungsannahme überprüft werden kann.

2. *Zufälliger Fehler der Stichprobenparameter:* Zum Beispiel wird das Stichprobenmittel $\overline{X}$ bei verschiedenen Stichproben verschieden sein. Dieser Fehler kann statistisch abgeschätzt werden und führt auf den Begriff der *Konfidenzschätzung*.

7.2 Konfidenzschätzungen

Die so genannten Konfidenzschätzungen ergänzen die Punktschätzungen durch Angabe einer Schwankungsbreite, die den statistischen Fehler abgrenzt, der durch die zufällige Wahl der Stichprobe entsteht.

Gegeben sei eine Zufallsgröße mit Erwartungswert und Varianz

$$\mathrm{E}(X) = \mu, \quad \mathrm{V}(X) = \sigma^2.$$

Aus einer Stichprobe vom Umfang n werde der Parameter μ durch das Stichprobenmittel

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

geschätzt. Wie oben erwähnt, würde das Ziehen einer anderen Stichprobe einen anderen Wert für $\overline{X}$ ergeben. Somit ergibt sich die Frage nach dem Fehler des Schätzers $\overline{X}$ – wie weit ist $\overline{X}$ von μ entfernt? Um eine Abschätzung des Fehlers herzuleiten, erinnern wir daran, dass gilt:

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu, \quad \mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist $\overline{X}$ für großes n näherungsweise $\mathcal{N}\big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\big)$-verteilt (falls X nach $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist, sogar exakt). Die zentrierte Größe

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ist demnach $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt.

Frage: Gibt es eine Schranke β, sodass mit 95%-Sicherheit (oder auch 90%, 99% ...) der tatsächliche Wert μ zwischen $\overline{X} - \beta$ und $\overline{X} + \beta$ liegt? So eine Schranke liefert das 95%-*Konfidenzintervall* $[\overline{X} - \beta, \overline{X} + \beta]$.

Das 95%-Konfidenzintervall gibt eine *Bereichsschätzung* für μ an mit der Zusatzaussage, dass es in $\sim$ 95% aller Fälle (aller Stichproben vom Umfang n) den tatsächlichen Wert μ enthält. Mögliche Ergebnisse von solchen Intervallen für fünf Stichproben sind in Abbildung 7.2 dargestellt.

Berechnung von β : Wir bestimmen zunächst α so, dass gilt:

$$P(-\alpha \le U \le \alpha) = 0.95.$$

Wegen der Symmetrie der Gaußkurve ist dies gleichbedeutend mit

$$P(-\infty < U \le \alpha) = 0.975,$$

man vergleiche dazu Abbildung 7.3. Aus der Tabelle erhält man $\alpha = 1.96$. Also gilt mit $\sim$ 95% Sicherheit

$$-1.96 \;\le\; \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\le\; 1.96.$$

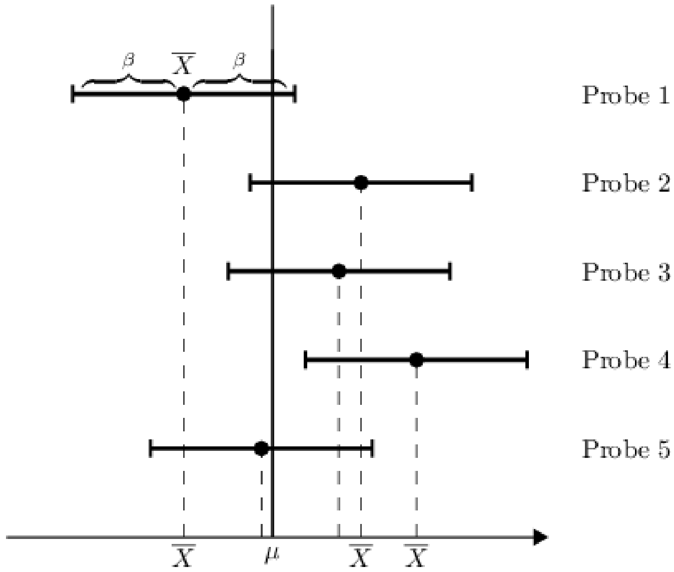

Abbildung 7.2: Verschiedene Stichprobenmittel derselben Zufallsgröße und zugehörige Konfidenzintervalle.

Weiteres Auflösen der Ungleichung führt auf

$$-1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \leq\ \overline{X}-\mu \ \leq\ 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{X}-1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \leq\ \mu \ \leq\ \overline{X}+1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Damit ist die Schranke

$$\beta = 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

und das 95%-Konfidenzintervall $[\overline{X}-1.96\,\sigma/\sqrt{n},\ \overline{X}+1.96\,\sigma/\sqrt{n}]$ gefunden.

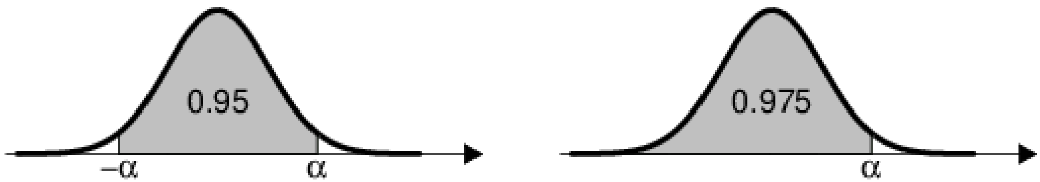

Abbildung 7.3: Quantile der Standardnormalverteilung; Symmetrieeigenschaft.

Wie geht man nun vor, wenn man eine Stichprobe vom Umfang n genommen hat? Zunächst wird das Stichprobenmittel $\overline{x}$ berechnet. Ist die Streuung σ bekannt, so kann man $[\overline{x}-\beta, \overline{x}+\beta]$ berechnen. Ist σ unbekannt, so kann man für großes n ($n \geq 50$) stattdessen die Stichprobenvarianz nehmen, also $\sigma \approx s$ setzen (für kleines n siehe unten).

Beispiel 7.11 Wir setzen das begleitende Beispiel fort (Körpergröße X männlicher Studierender) und berechnen das 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ. Aus den Stichprobenparametern

$$\overline{x} = 179.9, \quad s = 7.6, \quad n = 44$$

erhalten wir

$$\beta = 1.96\,\frac{7.6}{\sqrt{44}} \approx 2.2.$$

Also gilt mit 95% Sicherheit (Irrtum nur bei 5% aller Stichproben) für den Erwartungswert:

$$179.9 - 2.2 \leq \mu \leq 179.9 + 2.2, \qquad \text{d.h.} \qquad 177.7 \leq \mu \leq 182.1.$$

Bemerkung: (a) Das Konfidenzintervall wird schmäler, wenn n größer wird. (b) Für erhöhte Sicherheit der Aussage, etwa 99%, wird es breiter. Für 99%ige Aussagesicherheit erhält man aus $P(U \leq \alpha) = 0.995$ die Lösung $\alpha = 2.575$ und

$$\beta = 2.575\,\frac{7.6}{\sqrt{44}} \approx 3.0,$$

also das 99%-Konfidenzinterall

$$176.9 \leq \mu \leq 182.9.$$

Modifikation für kleine Stichproben: Falls X nach $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist, so besitzt die Größe

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

eine so genannte *t-Verteilung mit* $(n-1)$ *Freiheitsgraden.* Für Stichproben vom Umfang $n < 50$ sollte man statt der Näherung durch die Normalverteilung die t-Verteilung verwenden und die Stichprobenvarianz einsetzen. Die Dichte der t-Verteilung ist glockenförmig, aber flacher als die Normalverteilung. Die Quantile sind tabelliert (vgl. Tabelle 7.4). Ansonsten verfährt man genauso wie oben.

Beispiel 7.12 Wir machen die Rechnung aus Beispiel 7.11 mit Hilfe der t-Verteilung. Bei $n = 44$ hat man 43 Freiheitsgrade. Man erhält $\alpha = t_{0.975} = 2.017$. Somit ist genauer

$$\beta = 2.017\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.017\,\frac{7.6}{\sqrt{44}} \approx 2.3.$$

Unter Verwendung der t-Verteilung erhält man also als 95%-Konfidenzintervall

$$179.9 - 2.3 \leq \mu \leq 179.9 + 2.3, \qquad \text{d.h.} \qquad 177.6 \leq \mu \leq 182.2.$$

7.3 Hochwasserstatistik

Die Hochwasserstatistik mit ihrer Prognose der Jährlichkeiten beruht auf der so genannten Extremwertstatistik, welche die Verteilung maximaler oder minimaler Messwerte beschreibt. Wir beginnen zunächst mit einer theoretischen Einführung.

7.3.1 Extremwertverteilungen

Eine der grundlegenden Fragestellungen der Extremwertstatistik ist die Ermittlung der Verteilung des Stichprobenmaximums, also des größten Werts einer Stichprobe beliebigen Umfangs n. Das heißt, nimmt man N Stichproben vom Umfang n und ist X_j der größte Wert der Stichprobe Nummer j, so ist die Verteilung dieser größten Werte $X_1, \ldots, X_N$ gesucht.

Die *Gumbelverteilung* ist eine der Standardverteilungen zur Beschreibung der Stichprobenmaxima. Sie trifft asymptotisch zu, wenn die zu Grunde liegende Größe exponentialverteilt ist, wird aber häufig auch angewendet, wenn man annehmen kann, dass die Verteilungsdichte der zu Grunde liegenden Größe im Unendlichen exponentiell abfällt. Für anderes Abklingverhalten werden andere Extremwertverteilungen herangezogen; bekannt sind zum Beispiel die *Weibullverteilung* oder die *Pearson-3-Verteilung*.

Die Dichte der Gumbelverteilung wird durch zwei Parameter λ und x_0 beschrieben:

$$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-x_0)} \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-\lambda(x-x_0)})}.$$

Dabei ist x_0 der Modalwert und λ ein Skalierungsfaktor. Die Transformation $y = \lambda(x-x_0)$ ergibt die Standardform

$$f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y} \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-y})}.$$

Die Verteilungsfunktion der Gumbelverteilung ist

$$F_X(x) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-\lambda(x-x_0)})}.$$

Ihr Erwartungswert und ihre Varianz sind gegeben durch (vgl. Abbildung **??** für $x_0 = 0$, $\lambda = 1$):

$$\mu = \mathrm{E}(X) = x_0 + \gamma/\lambda, \quad \sigma^2 = \mathrm{V}(X) = \pi^2/(6\lambda^2); \quad \gamma \approx 0.577216\ldots$$

Diese Formeln bilden die Grundlage der *Parameterschätzung*, mit deren Hilfe die Spezifikation der an die Messdaten angepassten Gumbelverteilung vorgenommen wird. Es folgt nämlich aus den Formeln:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{6}}, \qquad x_0 = \mu - \frac{\gamma}{\lambda} \tag{7.1}$$

und μ bzw. σ lassen sich aus der Liste der Extremwerte als Mittelwert und Streuung schätzen.

Herleitung der Gumbelverteilung: Sei T exponentialverteilt mit Verteilungsfunktion

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Die Verteilung des größten Werts $X = T_{\max}$ einer Stichprobe $T_1, T_2, \ldots, T_n$ vom Umfang n erhält man durch die Überlegung, dass X genau dann kleiner gleich einem gegebenen x ist, wenn alle $T_1, T_2, \ldots, T_n$ kleiner gleich x sind. Also:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \;=\; P(T_1 \leq x, T_2 \leq x, \ldots, T_n \leq x) \\ &= P(T_1 \leq x) \cdot P(T_2 \leq x) \cdots P(T_n \leq x) \;=\; \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^n \end{aligned}$$

für $x > 0$, da sich die Wahrscheinlichkeiten wegen der Unabhängigkeit der Größen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ multiplizieren. Wir benützen nun die Euler'sche Formel $\lim_{n\to\infty}(1+y/n)^n = \mathrm{e}^y$ und erhalten asymptotisch für $n \to \infty$

$$\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^n \approx \mathrm{e}^{-n(\mathrm{e}^{-\lambda x})}.$$

Schreibt man nun n in der Form $n = \mathrm{e}^{\lambda x_0}$, so ergibt sich nach Umformung des Exponenten die gesuchte Formel für die Gumbelverteilung

$$F_X(x) \approx \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-\lambda(x-x_0)})}.$$

7.3.2 Hochwasserprognose

In der Hochwasserstatistik betrachtet man die Liste der Monatswerte für HQ (Monatsmaxima) eines Jahres als Stichprobe vom Umfang $n = 12$. Beobachtet man N Jahre, so erhält man für Jahr Nummer j das Jahresmaximum X_j. Diese Jahresmaxima können durch eine Gumbelverteilung näherungsweise beschrieben werden.

Ihre Parameter erhält man, indem man den Erwartungswert aus einer mehrjährigen Reihe durch deren Mittelwert schätzt und analog die Varianz. Die Parameter der Gumbelverteilung lassen sich dann aus Formel (7.1) berechnen. An der kumulativen Verteilungsfunktion der Maxima lassen sich die Quantile ablesen. Dabei ist das $p \cdot 100\%$-Quantil Q_p einer Zufallsgröße X mit Verteilung F_X definiert durch

$$F_X(Q_p) = P(X \le Q_p) = p, \qquad Q_p = F_X^{-1}(p).$$

Im Falle der Gumbelverteilung erhält man

$$Q_p = x_0 - \frac{1}{\lambda}\log(-\log p). \tag{7.2}$$

Das Ereignis, dass ein Messwert oberhalb des 99%-Quantils liegt, hat die Wahrscheinlichkeit von $0.01 = 1/100$. Dies ist die so genannte *Überschreitungswahrscheinlichkeit*, deren Kehrwert die *Jährlichkeit* darstellt. Man spricht dann von einem 100-jährigen Ereignis.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen Quantilen, Überschreitungswahrscheinlichkeit und Jährlichkeit genauer ansehen.

Unterschreitungswahrscheinlichkeit: p;

Überschreitungswahrscheinlichkeit: $p_{\text{ü}} = 1 - p$;

Jährlichkeit: $J = 1/p_{\text{ü}} = 1/(1-p)$;

J-jähriges Hochwasser: $\mathrm{HQ}_J = Q_p$.

Das 100-jährige Hochwasser erhält man als das 99%-Quantil der kumulativen Verteilungsfunktion, das 50-jährige als das 98%-Quantil usw., tabellarisch:

p	0.5	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
$p_{ü}$	0.5	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
J	2	10	20	50	100	1000
HQ	HQ_2	HQ_{10}	HQ_{20}	HQ_{50}	HQ_{100}	HQ_{1000}
Q_p	$Q_{0.5}$	$Q_{0.9}$	$Q_{0.95}$	$Q_{0.98}$	$Q_{0.99}$	$Q_{0.999}$

Beispiel 7.13 Als Beispiel nehmen wir die Jahresmaxima 1971 – 1980 des Inns am Pegel Innsbruck nach Tabelle 7.3. Wir erhalten

$$\overline{x} = 675.5, \quad s = 171.234, \quad \widehat{\lambda} = 0.0075, \quad \widehat{x_0} = 598.4.$$

Die angepasste Gumbelverteilung sowie die Prognose auf 1000 Jahre ist den Abbildungen 7.4 und 7.5 zu entnehmen.

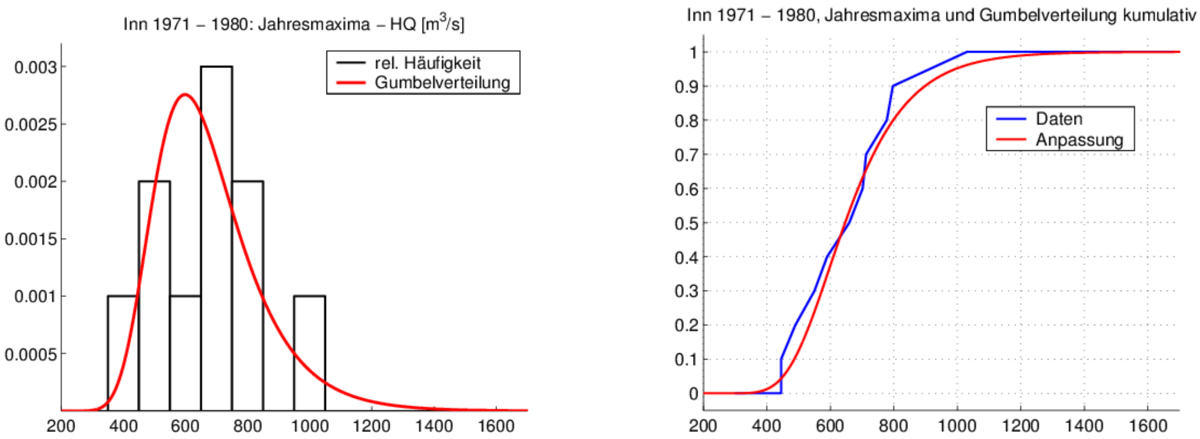

Abbildung 7.4: Jahresmaxima: Histogramm und Dichte (links), empirische Summenkurve und Verteilungsfunktion (rechts).

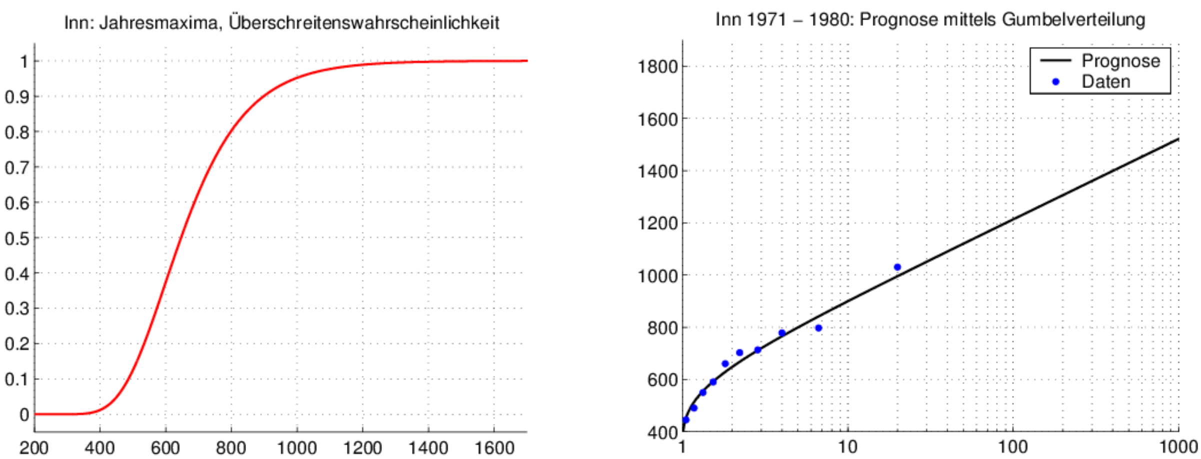

Abbildung 7.5: Jahresmaxima: Verteilungsfunktion der Gumbelveteilung (links) und Prognose der Jährlichkeit in halblogarithmischer Darstellung (rechts).

Die Quantile können mittels Formel (7.2) berechnet oder aus Abbildung 7.5 (links) abgelesen werden, zum Beispiel

$$Q_{0.9} = \mathrm{HQ}_{10} = 899\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}, \quad Q_{0.95} = \mathrm{HQ}_{20} = 995\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}, \quad Q_{0.99} = \mathrm{HQ}_{100} = 1213\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

Im Wasserbau ist die halblogarithmische Darstellung der Jährlichkeit in Abbildung 7.5 (rechts) gebräuchlich. Man erhält sie, indem man J gegen HQ_J aufträgt.

Bemerkung: Die Datenpunkte werden in Abbildung 7.5 (rechts) mit Hilfe einer modifizierten empirischen Verteilungsfunktion eingefügt. Dazu ordnet man zunächst die $N = 10$ Daten für HQ aus Tabelle 7.3 der Größe nach. Dann weist man HQ_i die Unterschreitenswahrscheinlichkeit $p_i = (2i-1)/2N$ und die Jährlichkeit $J_i = 1/(1-p_i)$ zu, $i = 1, \ldots, N$. Diese Punkte werden dann in halblogarithmischer Darstellung in der Abbildug geplottet. Der Grund für die Modifikation liegt darin, dass die undefinierten Fälle einer Jährlichkeit von $J = 1$ oder $J = \infty$, welche $p = 0$ bzw. $p = 1$ entsprechen, vermieden werden müssen.

7.3.3 Konfidenzgrenzen für die Quantile

Es erscheint etwas gewagt, von einer 10-jährigen Datenreihe auf 1000 Jahre zu schließen. Daher muss die Prognose mit einer Fehlerabschätzung versehen werden, die man aus den Konfidenzintervallen für das Quantil Q_p gewinnt. Unter der Annahme einer Normalverteilung für das Quantil erhält man für das 95%-Konfidenzintervall:

$$\left[Q_p - 1.96\,\widehat{\sigma}_{Q_p}, Q_p + 1.96\,\widehat{\sigma}_{Q_p}\right],$$

wobei $\widehat{\sigma}_{Q_p}$ eine Schätzung für die Standardabweichung des Quantils darstellt.

Allgemein kann die Varianz des Quantils einer Zufallsgröße X wie folgt abgeschätzt werden. Die Größe X besitze den Erwartungswert μ, die Varianz σ^2, den Schiefekoeffizienten C_s und die Kurtosis K (siehe unten). Das standardisierte Quantil ist

$$K_p = \frac{Q_p - \mu}{\sigma}.$$

Wird das Quantil Q_p aus einer Stichprobe vom Umfang n durch Anpassung der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ geschätzt, so kann für seine Varianz folgende Näherungsformel angegeben werden; wir folgen hier Plate(1993):

$$\sigma^2_{Q_p} = \mathrm{V}(Q_p) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + K_p C_s + \frac{K_p^2}{4}(K-1)\right).$$

Im Spezialfall der Gumbelverteilung gilt (unabhängig von deren Parametern)

$$C_\mathrm{s} = 1.1396, \qquad K = 5.4\,.$$

Damit erhält man folgende Schätzung der Varianz des Quantils Q_p einer Gumbelverteilung:

$$\widehat{\sigma}^2_{Q_p} \approx \frac{s^2}{n}\left(1 + 1.1396\,K_p + 1.1\,K_p^2\right)$$

mit

$$K_p \approx \frac{Q_p - \bar{x}}{s}, \qquad Q_p = x_0 - \log(-\log p)/\widehat{\lambda}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln können wir ein Plot der 1000-jährigen Prognose mit Konfidenzintervallen erzeugen (Abbildung 7.6).

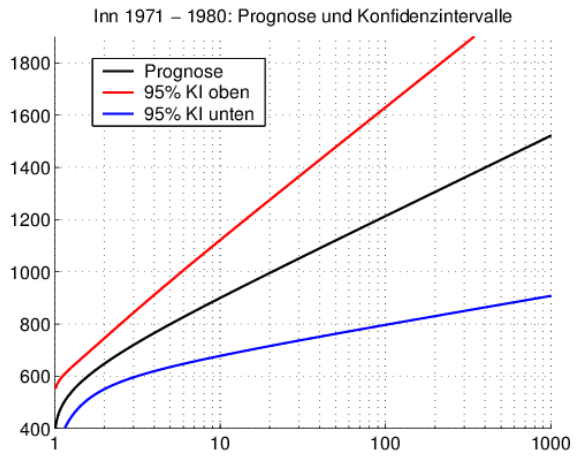

Abbildung 7.6: Jahresmaxima: Prognose der Jährlichkeit in halblogarithmischer Darstellung mit 95%-Konfidenzgrenzen.

Die Streuung der Prognose des 1000-jährigen Hochwassers ist enorm. Dies liegt an der Kürze der gemessenen Datenreihe. Macht man dieselbe Rechnung mit den Jahresmaxima des Inn von 1870 bis 2005, so erhält man die wesentlich aussagekräftigeren Ergebnisse von Abbildung 7.7 und 7.8.

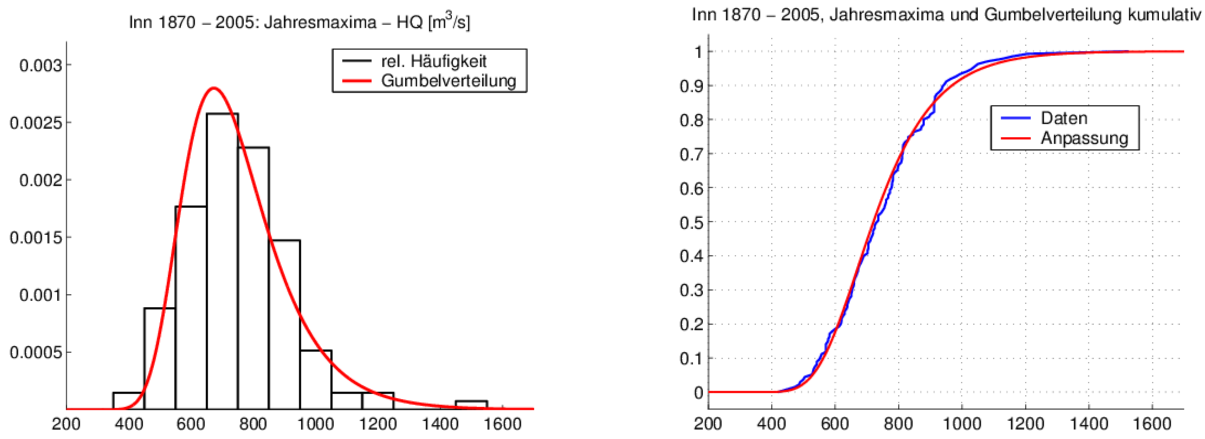

Abbildung 7.7: Jahresmaxima aus Datenreihe 1870 – 2005: Histogramm und Dichte (links), empirische Summenkurve und Verteilungsfunktion (rechts).

Erklärung von Schiefe und Kurtosis: Das *k-te Moment* einer Zufallsgröße ist definiert durch $m_k = \mathrm{E}(X^k)$. Es gilt insbesondere $m_0 = 1$, $m_1 = \mu$. Das *k-te zentrierte Moment*

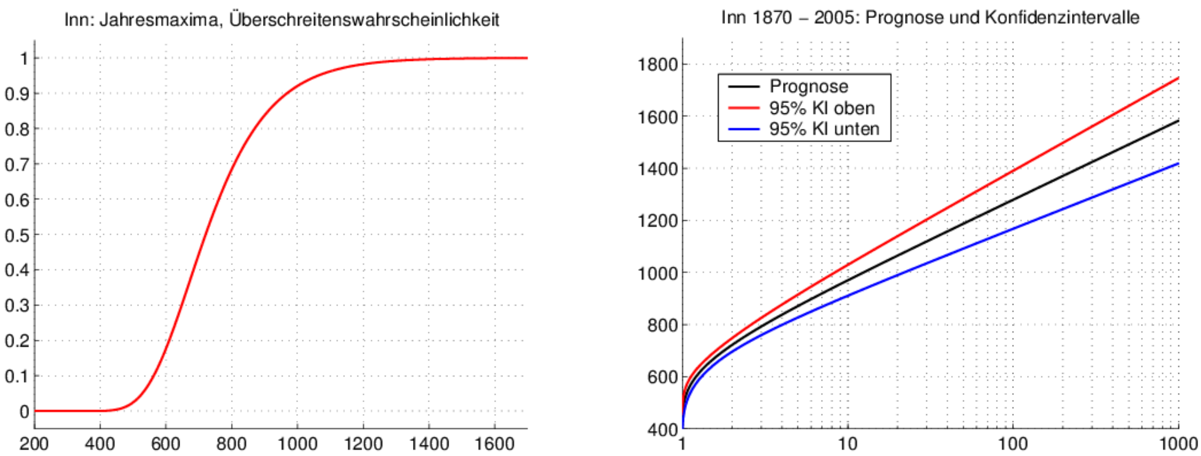

Abbildung 7.8: Jahresmaxima aus Datenreihe 1870 – 2005: Verteilungsfunktion der Gumbelveteilung (links) und Prognose der Jährlichkeit in halblogarithmischer Darstellung mit 95%-Konfidenzgrenzen (rechts).

einer Zufallsgröße ist definiert durch $m_{ck} = \mathrm{E}\big((X-\mu)^k\big)$. Es gilt insbesondere $m_{c0} = 1$, $m_{c1} = 0$, $m_{c2} = \sigma^2$. Der *Schiefekoeffizient* einer Verteilung ist definiert durch $C_s = m_{c3}/\sigma^3$, die *Kurtosis* durch $K = m_{c4}/\sigma^4$.

Tabellen

Nr.	cm	kg	Nr.	cm	kg	Nr.	cm	kg
1	186	73	16	178	73	31	199	93
2	168	60	17	187	83	32	184	73
3	176	74	18	176	68	33	176	71
4	170	57	19	176	68	34	186	80
5	169	55	20	178	70	35	174	60
6	178	78	21	169	70	36	190	92
7	170	60	22	167	70	37	183	80
8	176	68	23	167	71	38	189	85
9	173	69	24	180	73	39	186	84
10	180	70	25	176	73	40	189	69
11	178	66	26	175	70	41	184	80
12	186	80	27	185	69	42	191	85
13	185	95	28	193	70	43	178	72
14	187	82	29	182	66	44	179	71
15	173	63	30	183	75			

Tabelle 7.1: Körpergröße und Gewicht von 44 Bauingenieurstudenten 1998.

25.6	25.5	24.0	26.0	24.1	24.0	28.5	25.3	23.4	26.5
23.2	25.0	22.0	24.0	24.9	30.0	27.0	24.4	24.3	29.5

Tabelle 7.2: Reibungswinkel $\varphi[°]$ von $n = 20$ Rahmenscherversuchen an mittelplastischen Schluff. Nach: E. Bösinger, Serienuntersuchungen zum Vergleich verschiedenener Rahmenschergeräte, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe 1996.

Jahr	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
HQ	550	490	590	660	1030	445	713	797	702	778

Tabelle 7.3: Jahresmaxima [m^3/s] von 1971 bis 1980 des Inn am Pegel Innsbruck (Quelle: Hydrographischer Dienst Tirol).

Tabelle der t-Verteilung

FG	Wahrscheinlichkeit							
	0,75	0,875	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	1,000	2,414	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,817	1,604	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,423	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,741	1,344	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,301	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,273	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,254	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,240	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,230	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,221	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,214	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,209	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,204	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,200	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,197	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,194	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,191	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,189	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611
19	0,688	1,187	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,185	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,183	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,182	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,180	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,179	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,178	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,177	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,176	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,175	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0,683	1,173	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,167	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
50	0,679	1,164	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	0,679	1,162	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
70	0,678	1,160	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	0,678	1,159	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
90	0,677	1,158	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	0,677	1,157	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	0,676	1,154	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131
500	0,675	1,152	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
∞	0,674	1,150	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Tabelle 7.4: Quantile der t-Verteilung nach Freiheitsgraden und Wahrscheinlichkeiten.