Kapitel 6

Stichprobentheorie

6.1 Summen von Zufallsgrößen

Gegeben seien zwei Zufallsgrößen X, Y mit gemeinsamer Verteilung $F_{XY}(x, y)$. Wir fragen nach der Verteilung $F_Z(z)$ der Summe $Z = X + Y$.

Beispiel 6.1 Ein typisches Anwendungsbeispiel aus der Ablaufplanung ist die Dauer von zwei Prozessen. Werden zwei Prozesse mit Dauern X, Y hintereinander ausgeführt, so ist die Gesamtdauer gerade $Z = X + Y$.

Satz 6.2 Für Erwartungswert und Varianz der Summe zweier Zufallsgrößen gilt:

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y),$$

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{COV}(X,Y).$$

Sind X und Y unkorreliert, so gilt

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$

Bei kontinuierlichen Zufallsgrößen erhält man die Begründung leicht aus der Additivität des Integrals:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X+Y) &= \iint (x+y) f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint x f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint y f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

und analog für diskrete Größen mit Hilfe der Summendarstellung. Die Formel für die Varianz erhält man aus

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big((X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2\big) &= \mathrm{E}\big((X-\mu_X)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) + (Y-\mu_Y)^2\big) \\ &= \mathrm{E}\big((X-\mu_X)^2\big) + \mathrm{E}\big((Y-\mu_Y)^2\big) + 2\mathrm{E}\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big). \end{aligned}$$

Merkregel:

Der Erwartungswert der Summe ist die Summe der Erwartungswerte. Im Falle unkorrelierter Zufallsgrößen ist die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen.

Wie schaut es mit der Verteilung von $Z = X + Y$ aus? Es ist möglich, eine allgemeine Formel für die Verteilungsfunktion der Summe zweier Zufallsgrößen anzugeben. Diese Formel kann man wie folgt herleiten.

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \iint_M f_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

mit

$$M = \big\{(x, y) : x + y \le z\big\} = \big\{(x, y) : y \in \mathbb{R},\ x \le z - y\big\}.$$

Daher folgt weiter

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Durch Ableiten erhält man daraus die Dichte

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z - y, y)\,\mathrm{d}y.$$

Im Falle der Unabhängigkeit gilt also

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = f_X * f_Y(z).$$

Dieses Integral nennt man die **Faltung** der Dichten f_X, f_Y.

Im Allgemeinen ist dieses Integral aber nicht so einfach explizit auszurechnen; man behilft sich dann oft mit einer numerischen Auswertung durch Monte-Carlo-Simulation. Im Spezialfall zweier Gauß'scher Dichten kann man jedoch zeigen, dass die Faltung wieder eine Gauß'sche Dichte ergibt. Daher ist die Summe zweier Normalverteilungen ebenfalls eine Normalverteilung. Dasselbe gilt für die Differenz.

Satz 6.3 Ist X nach $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und Y nach $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ verteilt und sind X, Y unabhängig, so ist $X + Y$ nach $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ und $X - Y$ nach $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ verteilt.

6.2 Die mathematische Stichprobe

Gegeben sei eine Zufallsgröße X mit Verteilung $F_X(x)$. Wir wollen nun das **mathematische Modell** einer Stichprobe vom Umfang n mit den Realisierungen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ entwerfen. Wir erinnern daran, dass die Ergebnisse $\xi_1, \ldots, \xi_n$ der Stichprobe durch n unabhängige, zufällige Versuchen unter identischen Bedingungen erhalten werden.

Wir fassen diese als Realisierungen von n unabhängigen Zufallsgrößen auf:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

die alle dieselbe Verteilung $F_X(x)$ wie X haben.

Das Ergebnis etwa des ersten Versuchs ist eben selbst eine Zufallsgröße X_1. Man kann sich das so erklären: macht man mehrere Stichproben vom Umfang n, dann wird die erste Messung X_1 jeweils unterschiedliche Werte haben. Deren Verteilung ist aber identisch mit der Verteilung von X und auch mit der von $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Ebenso ist das Stichprobenmittel

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

eine Zufallsgröße und wird bei verschiedenen Stichproben verschieden ausfallen.

Wir können daher vom *Erwartungswert* und der *Varianz* des Stichprobenmittels sprechen und erhalten:

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \frac{1}{n}\big(\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)\big) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X),$$

weil ja alle X_i identisch wie X verteilt sind.

Die Eigenschaft

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X)$$

nennt man **Erwartungstreue**. Für die Varianz folgt unter Zuhilfenahme der Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\overline{X}) &= \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\, n\, \mathrm{V}(X) = \frac{1}{n}\mathrm{V}(X).
\end{aligned}$$

Es gilt daher die wichtige Formel

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{V}(X).$$

Insbesondere geht die Varianz des Stichprobenmittels mit wachsendem Stichprobenumfang gegen 0.

6.3 Die Gesetze der großen Zahlen

Gegeben sei Zufallsgröße X mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \mu$ und Varianz $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$. Für eine mathematische Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit dem Stichprobenmittel $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt, wie eben gezeigt:

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu.$$

Der Erwartungswert des Stichprobenmittels ist allerdings ein Begriff des mathematischen Modells. In der realen Stichprobe wird das Stichprobenmittel $\overline{x}$ erhoben, nicht dessen Erwartungswert. Die Frage – und diese liegt der frequentistischen Interpretation der Wahrscheinlichkeitstheorie zu Grunde – ist, ob sich die Stichprobenmittel bei wachsendem Stichprobenumfang dem Erwartungswert μ der gegebenen Zufallsgröße annähern. Die Gesetze der großen Zahlen besagen, dass dies jedenfalls auf die mathematische Stichprobe zutrifft:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu. \tag{6.1}$$

Die Frage bleibt, in welchem Sinne die Konvergenz in (6.1) zu verstehen ist.

Satz 6.4 (Starkes Gesetz der großen Zahlen) Die Konvergenzaussage (6.1) gilt *fast sicher*, das heißt,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1.$$

Der Nachweis dieses Gesetzes bedarf tieferer Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie. Insbesondere muss gesagt werden, um was für eine Wahrscheinlichkeit P es sich handeln soll.[1] Leichter zu zeigen (und zu interpretieren) ist:

Satz 6.5 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen) Die Konvergenz in (6.1) erfolgt *in der Wahrscheinlichkeit*, das heißt, es gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Wir können das schwache Gesetz der großen Zahlen leicht beweisen, wenn wir annehmen, dass $\overline{X}$ eine Verteilungsdichte $f_{\overline{X}}(x)$ besitzt. Dann ist

$$P\big(|\overline{X} - \mu| > \alpha\big) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2}\left(\int_{\mu+\alpha}^{\infty} f_{\overline{X}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\mu-\alpha} f_{\overline{X}}(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Ist aber $x > \mu + \alpha$, so auch $(x-\mu)^2 > \alpha^2$. Für $x < \mu - \alpha$ ist $x - \mu < -\alpha$, also ebenfalls $(x-\mu)^2 > \alpha^2$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
P\big(|\overline{X} - \mu| > \alpha\big) &\leq \frac{1}{\alpha^2}\left(\int_{\mu+\alpha}^{\infty} (x-\mu)^2 f_{\overline{X}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\mu-\alpha} (x-\mu)^2 f_{\overline{X}}(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_{\overline{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^2}\,\mathrm{V}(\overline{X}) \\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^2\, n} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

[1]Es handelt sich um die so genannte *Produktwahrscheinlichkeit* auf dem unendlichen Produkt des der Zufallsvariablen X zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraums.

Es sei nun A ein Ereignis. Wir definieren die Zufallsgröße X als

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ tritt auf } (\textit{Erfolg}) \\ 0, & A \text{ tritt nicht auf.} \end{cases}$$

Wir setzen $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1-p$ und erhalten somit eine Alternativverteilung für das Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses A. Früher haben wir schon gezeigt, dass $\mathrm{E}(X) = p$ ist. In einer Stichprobe vom Umfang n ist

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{\sharp(1\text{−er})}{n} = h_1^{(n)}$$

gerade die relative Häufigkeit des Ereignisses A. Wenden wir darauf das schwache Gesetz der großen Zahlen an, so erhalten wir das *Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli.*

Satz 6.6 (Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli) Die relative Häufigkeit $h_1^{(n)}$ eines Ereignisses konvergiert gegen dessen Wahrscheinlichkeit p in dem Sinne, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|h_1^{(n)} - p| > \varepsilon\big) = 0.$$

Dies ist also die mathematische Rechtfertigung unserer Übersetzung

relative Häufigkeit $\sim$ Wahrscheinlichkeit

Bemerkung:

Achtung, dies gilt für die mathematische Stichprobe! Ob die reale Stichprobe dem näherungsweise entspricht, ist eine andere Frage. Trotzdem werden diese Sätze zur Rechtfertigung der **frequentistischen Interpretation** der Wahrscheinlichkeitstheorie herangezogen.

6.4 Der zentrale Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass Summen unabhängiger Zufallsgrößen näherungsweise normalverteilt sind, wenn die Anzahl der Summanden groß ist, und dass das Stichprobenmittel bei großem Stichprobenumfang näherungsweise normalverteilt ist. Um diesen Sachverhalt zu präzisieren, nehmen wir unabhängige Zufallsgrößen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ mit $\mathrm{E}(X_k) = \mu_k$, $\mathrm{V}(X_k) = \sigma_k^2$.

Satz 6.7 (Zentraler Grenzwertsatz) Unter geeigneten Bedingungen an die Varianzen σ_k^2 gilt

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{\mathrm{V}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathcal{N}(0,1),$$

genauer, die Verteilungsfunktion der zentrierten Summe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen die Standardnormalverteilung $\Phi(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-y^2/2}\, \mathrm{d}y.$$

Bevor wir weitere Folgerungen ziehen, wollen wir den zentralen Grenzwertsatz etwas anschaulicher umformulieren. Wir schreiben

$$\tilde{\mu}_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k, \qquad \tilde{\sigma}_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\,.$$

Folgerung 6.8 Summen unabhängiger Zufallsgrößen sind asymptotisch normalverteilt. Es gilt

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \tilde{\mu}_n}{\tilde{\sigma}_n} \;\sim\; \mathcal{N}(0,1)$$

beziehungsweise

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \;\sim\; \mathcal{N}(\tilde{\mu}_n, \tilde{\sigma}_n^2),\ n \to \infty.$$

Da viele reale Merkmale sich additiv aus anderen zufälligen Beiträgen zusammensetzen, erklärt dies das häufige Auftreten der Normalverteilung in der Praxis.

Folgerung 6.9 Sind $X_1, X_2, X_3, \cdots$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathrm{E}(X_k) = \mu$, $\mathrm{V}(X_k) = \sigma^2$, dann ist $\mathrm{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = n\mu$, $\mathrm{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = n\sigma^2$ und es gilt

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1),\ n \to \infty.$$

Nach Kürzen des Bruches durch n erhalten wir:

Folgerung 6.10 Das Stichprobenmittel ist für hinreichend große n näherungsweise normalverteilt:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1),\ n \to \infty,$$

das heißt,

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n),\ n \to \infty.$$

Folgerung 6.11 (Satz von Moivre-Laplace) Besitzen die Größen X_k eine Alternativverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, so gilt $\mathrm{E}(X_k) = p$, $\mathrm{V}(X_k) = p \cdot (1-p)$ und

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1), \ n \to \infty.$$

Insbesondere gilt für den Anteilswert $h_1^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ der Erfolge bei n Versuchen:

$$\frac{h_1^{(n)} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1), \ n \to \infty.$$

Die Gesetze der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz bilden die Grundlage der statistischen Schätz- und Testmethoden, die wir in den nächsten Kapiteln behandeln werden.

6.5 Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation (MCS) ist ein Näherungsverfahren zur numerischen Berechnung von Verteilungsfunktionen. Die MCS beruht auf dem Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli, wonach die relative Häufigkeit eines Ereignisses in einer Stichprobe großen Umfangs eine Annäherung an dessen Wahrscheinlichkeit ist. Bei der MCS wird diese Stichprobe künstlich mittels Zufallszahlen erzeugt.

Die numerischen Modelle des Ingenieurwesens sind in der Regel Input-Output-Modelle. Zu gegebenen Eingangswerten (Stoffparameter, Dimensionen, Dauern, Kosten,...) sind Ausgangswerte zu berechnen (Verschiebungen, Spannungen, Gesamtdauern, Gesamtkosten). Sind die Eingangswerte deterministische Einzelwerte, so errechnet das Modell einen deterministischen Ausgangswert. Schwanken die Eingangswerte, so werden auch die Ausgangswerte schwanken. Modelliert man nun die Eingangswerte als Zufallsgrößen, so ist auch der Ausgangswert eine Zufallsgröße, und man möchte dessen Verteilung oder zumindest wichtige Parameter, wie Erwartungswert und Varianz kennen. Prinzipiell determinieren die Eingangsverteilung und das Input-Output-System die Verteilung der Ausgangswerte. Jedoch ist es schon bei einfachsten System praktisch undurchführbar, die Ausgangsverteilung explizit zu berechnen. Sie muss daher numerisch angenähert werden. Dazu kann die Monte-Carlo-Simulation dienen.

Das Grundprinzip der Monte-Carlo-Simulation besteht darin, eine künstliche Stichprobe der Eingangswerte herzustellen, etwa für jede Eingangsgröße N Werte, welche den gegebenen Eingangsverteilungen gehorchen. Anschließend wird das Input-Output-Modell N-mal durchgerechnet. Die N Werte für die Ausgangsgröße werden dann statistisch ausgewertet: Das Histogramm ist eine Näherung an die Ausgangsverteilung, das Stichprobenmittel eine Schätzung für den Erwartungswert der Ausgangsgröße, usw.

Erzeugung von Zufallszahlen: Da heute jede mathematische Software Zufallszahlengeneratoren für praktisch jede gebräuchliche Verteilung schon einprogrammiert hat, ist es nicht mehr notwendig, selbst Zufallszahlen herzustellen. Daher nur ein paar Andeutungen, wie dies im Prinzip funktioniert. Zufallsgeneratoren beruhen auf der Konstruktion von *gleichverteilten Folgen*. Betrachten wir die Zahlenfolge

$$a_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor, \; n \geq 1.$$

Dabei bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x, sodass also a_n als Vielfaches einer festen Zahl α entsteht, wobei aber nur die Nachkommastellen erhalten werden. Zum Beispiel ist die Folge für $\alpha = 1/3$

$$\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \dots\right)$$

klarerweise periodisch, wie immer, wenn α eine rationale Zahl ist. Nimmt man allerdings α irrational, dann ist die Folge a_n für $n \to \infty$ im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt, das heißt, die relative Anzahl der Folgenglieder, die in ein Teilintervall von $[0, 1]$ fallen, ist näherungsweise gleich der Teilintervalllänge. In Abbildung 6.1 wurden die ersten $n = 1000$ Folgenglieder der Folge mit $\alpha = \sqrt{2}$ erzeugt. Man sieht, dass ganz gut eine Gleichverteilung entstanden ist. Mittelwert und Standardabweichung dieser 1000 Zahlenwerte sind übrigens gleich 0.4999 und 0.2887, was recht gut mit den theoretischen Werten einer Gleichverteilung (0.5 und $1/\sqrt{12}$) übereinstimmt.

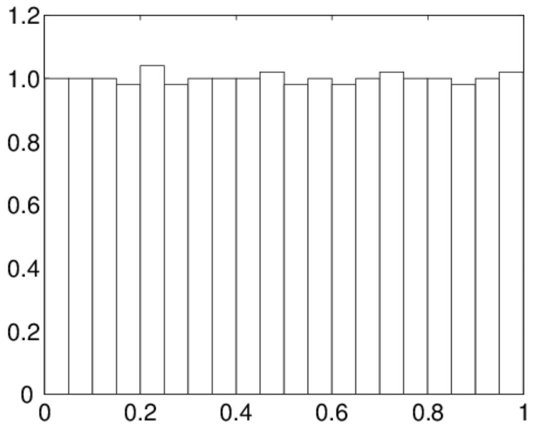

Abbildung 6.1: Histogramm von 1000 Zufallszahlen aus einer Gleichverteilung.

Da mittels Computerarithmetik nur endliche Dezimalzahlen, also rationale Zahlen, erzeugt werden können, ist die Folge der Zufallszahlen, soferne von einem Computer berechnet, tatsächlich periodisch – allerdings mit riesiger Periodenlänge. Man spricht daher oft von *Pseudozufallszahlen*.

Es gibt zahlreiche Methoden, aus gleichverteilten Zufallszahlen solche mit anderen Verteilungen zu berechnen. Die wichtigste ist wohl die *Inversionsmethode*. Sei F eine Verteilungsfunktion, gemäß derer Zufallszahlen erzeugt werden sollen. Hat man N gleichverteilte Zufallszahlen $x_1, \dots, x_N$, so besagt die Inversionsmethode, dass die Zufallszahlen

$$F^{-1}(x_1), \dots, F^{-1}(x_N)$$

die durch F definierte Verteilung besitzen.

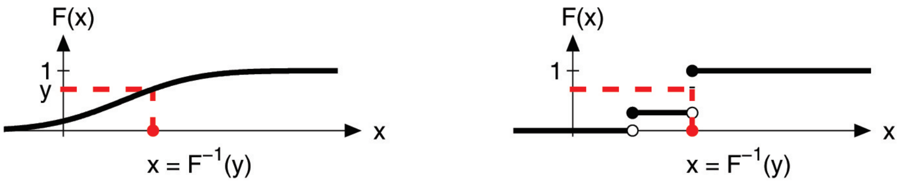

Abbildung 6.2: Illustration der Inversionsmethode.

In der Tat, die Verteilungsfunktion einer gleichverteilten Größe X ist

$$F_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir setzen $Y = F^{-1}(X)$. Dann ist

$$F_Y(y) = P\big(Y \leq y\big) = P\big(F^{-1}(X) \leq y\big) = P\big(X \leq F(y)\big) = F_X(F(y)) = F(y).$$

Somit stimmt die Verteilungsfunktion von Y tatsächlich mit der gegebenen Verteilungsfunktion F überein.

In Abbildung 6.3 wurden standardnormalverteilte Zufallszahlen aus den obigen 1000 gleichverteilten Zufallszahlen mittels der Transformation $Y = \Phi^{-1}(X)$ erzeugt. Das Ergebnis ist zufrieden stellend; auch Mittelwert und Standardabweichung stimmen mit -0.0012 und 0.9984 mit den theoretischen Werten 0 und 1 gut überein.

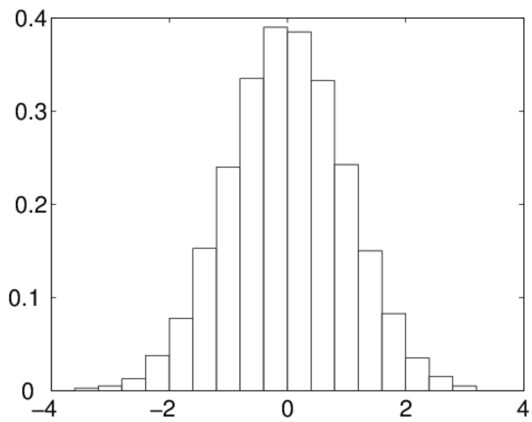

Abbildung 6.3: Histogramm von 1000 Zufallszahlen aus einer Normalverteilung.

Ein Simulationsbeispiel: Gegeben seien drei unabhängige Zufallsgrößen X, Y, Z, welche eine Gleichverteilung im Intervall $[0, 1]$ besitzen mögen. Gesucht ist die Verteilung der Größe $V = XY + Z$. Mittels Monte-Carlo-Simulation gehen wir folgendermaßen vor. Wir erzeugen durch einen Zufallsgenerator je $N = 10000$ gleichverteilte Zufallszahlen x, y, z.

Wir berechnen N-mal $v = xy + z$; die empirische Verteilung der N Werte v ist eine Näherung an die Verteilung der Zufallsgröße V. Die Abbildung 6.4 zeigt Histogramme der 10000 Realisierungen der drei gleichverteilten Input-Größen X, Y, Z und der Output-Größe V.

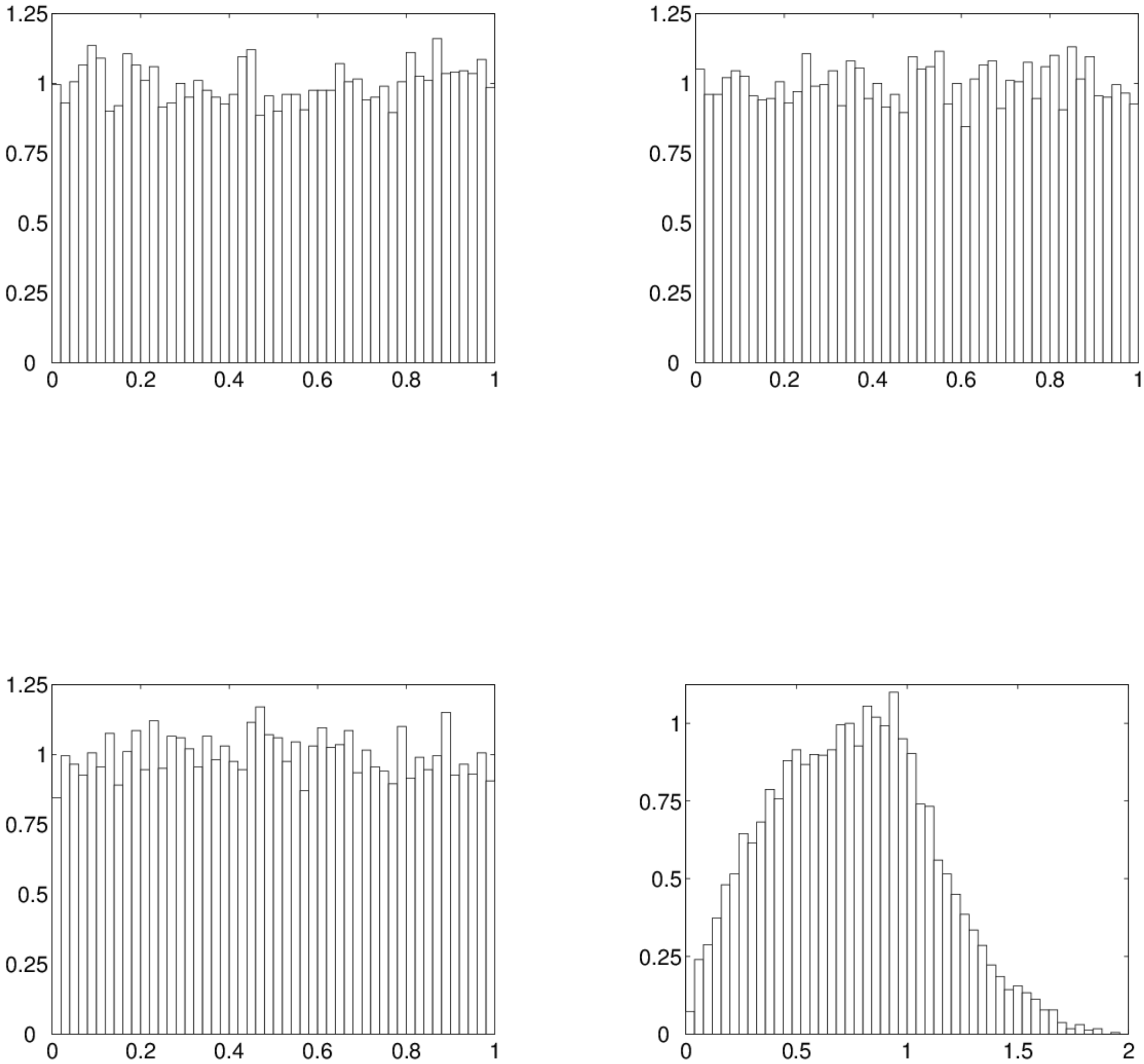

Abbildung 6.4: Histogramm von 1000 Zufallszahlen aus drei Gleichverteilungen sowie deren Verknüpfung.

Abbildung 6.5 zeigt beispielhaft zwanzig (mit Excel erzeugte) Realisierungen der Zufallsgrößen X, Y, Z und die zugehörigen Werte von $V = XY + Z$.

Nummer	X	Y	Z	X*Y + Z
1	0,194525	0,328623	0,252541	0,316466
2	0,401898	0,990875	0,212134	0,610365
3	0,786340	0,241859	0,164678	0,354861
4	0,556688	0,312937	0,506485	0,680693
5	0,261147	0,324778	0,650594	0,735408
6	0,124577	0,843837	0,275552	0,380674
7	0,672597	0,523484	0,988769	1,340863
8	0,607105	0,005921	0,658742	0,662336
9	0,819849	0,475570	0,098575	0,488470
10	0,936827	0,366314	0,547624	0,890797
11	0,187567	0,436232	0,523881	0,605703
12	0,242042	0,198401	0,334086	0,382108
13	0,400525	0,817591	0,107547	0,435013
14	0,943693	0,828272	0,962127	1,743762
15	0,799005	0,269845	0,322336	0,537944
16	0,040498	0,946104	0,488113	0,526428
17	0,268868	0,656758	0,950407	1,126989
18	0,253792	0,622181	0,686758	0,844662
19	0,467971	0,247749	0,893124	1,009064
20	0,438032	0,555010	0,864193	1,107305

Abbildung 6.5: Illustration der numerischen Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation.