UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

TIP8419 - Álgebra Linear e Multilinea
Homework 01 – 2025.2
LSKRF-LSKP-KPSVD –
Professor: Bruno Sokal

1 Instruções

- Este homework deverá ser entregue em forma de relatório, isto é, discutindo o problema e comentando os resultados.
- No caso dos códigos, as únicas funções nativas permitidas serão as funções de geração de matrizes ”randn”(exmplo MATLAB), e as funções de plotagem.
- **Data entrega: 21/10/2025**.
- Entregar em arquivo compactado contendo os códigos e o relatório . Por favor, coloquem como nome ou parte do nome do arquivo, o seu nome.
- Email de entrega: **brunosokal@gtel.ufc.br**.
- Quaisquer dúvidas por favor não hesitem de me contactar.

Fatoração de Khatri-Rao por Mínimos Quadrados (LSKRF)

Problema 01

Gere $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{20\times 4}$, para matrizes escolhidas aleatoriamente $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{5\times 4}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Em seguida, implemente o algoritmo de Fatoração de Khatri-Rao por Mínimos Quadrados (LSKRF), que estima $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ resolvendo o seguinte problema:

$$(\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{B}}) = \arg\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}} \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B}\|_F^2.$$

Compare as matrizes estimadas $\hat{\boldsymbol{A}}$ e $\hat{\boldsymbol{B}}$ com as originais. O que você pode concluir? Explique os resultados.

```
I = 5;
J = 4;
R = 4
%---- Geracao Fatores
A = randn(I,R); % Matriz aleatoria I x J
B = randn(M,R); % Matriz aleatoria M x N
X = minha_func_khatri_rao(A,B);
%---- Estimacao Fatores com LSKRF
[A_est,B_est_X_est] = minha_func_lskrf(X,I,J,R);
%---- Calculo NMSE
nmse_X = minha_func_nmse(X,Xest);
nmse_A = minha_func_nmse(A,Aest);
nmse_B = minha_func_nmse(B,Best);
%----
```

Problema 02

Considerando 1000 experimentos de Monte Carlo, gere $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{IJ\times R}$, para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{I\times R}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{J\times R}$ com $R = 6$, cujos elementos são extraídos de uma distribuição normal.

Defina $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \alpha\boldsymbol{V}$ como uma versão ruidosa de $\boldsymbol{X}_0$, onde $\boldsymbol{V}$ é o termo de ruído aditivo, cujos elementos são extraídos de uma distribuição normal. O parâmetro α controla a potência (variância) do termo de ruído, e é definido em função da razão sinal-ruído (SNR), em dB, da seguinte forma:

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{\|\boldsymbol{X}_0\|_F^2}{\|\alpha\boldsymbol{V}\|_F^2}\right).$$

Assumindo a faixa de SNR $[0, 5, 10, 15, 20, 25, 30]$ dB, obtenha as estimativas $\hat{\boldsymbol{A}}$ e $\hat{\boldsymbol{B}}$ pelo algoritmo LSKRF para as seguintes configurações:

$$(I, J) = (10, 10) \quad \text{e} \quad (I, J) = (30, 10), \quad R = 6.$$

Defina o erro quadrático médio normalizado (NMSE) como:

$$\text{NMSE}(\boldsymbol{X}_0) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} \frac{\|\hat{\boldsymbol{X}}_0(i) - \boldsymbol{X}_0(i)\|_F^2}{\|\boldsymbol{X}_0(i)\|_F^2}.$$

Para cada valor de SNR e configuração, plote a curva NMSE vs. SNR. Discuta os resultados obtidos.

Exemplo de código

```
I = 10; % linhas matriz A
J = 10; % linha matriz B
R = 6   % colunas A e B
L   = 1000; %Numero de realizacoes Monte Carlo
snr = [0 5 10 15 20 25 30]; % snr em dB
SNR = 10.^(snr./10); % SNR linear
for ll = 1: L
    for ii = 1:length(SNR)
    %---- Geracao Fatores
    A = randn(I,R); % Matriz aleatoria I x J
    B = randn(M,R); % Matriz aleatoria M x N
    X0 = minha_func_khatri_rao(A,B);
    V  = randn(I,R); % Gaussiano, media 0 variancia 1.
    alpha = frob(X0)^2/(SNR(ii) * frob(V)^2);
    V = sqrt(alpha) * V; % atualizando o valor do ruido para SNR %desejada
    %---- Estimacao Fatores com LSKRF
    [A_est,B_est_X_est] = minha_func_lskrf(X,I,J,R);
    %---- Calculo NMSE
    nmse_X(ii,ll) = minha_func_nmse(X,Xest);
    nmse_A(ii,ll) = minha_func_nmse(A,Aest);
    nmse_B(ii,ll) = minha_func_nmse(B,Best);
    %----
    end
end
%---- Plot das figuras, Exemplo:
NMSE_X = mean(nmse_X,2); %Calcula a media da nmse para os L experimentos
NMSE_A = mean(nmse_A,2); %Calcula a media da nmse para os L experimentos
NMSE_B = mean(nmse_B,2); %Calcula a media da nmse para os L experimentos
figure
plot(snr,10*log10(NMSE_X)); % plotando em dB
hold on
plot(snr,10*log10(NMSE_A)); % plotando em dB
hold on
plot(snr,10*log10(NMSE_B)); % plotando em dB
xlabel('SNR[dB]');
ylabel('NMSE')
legend('X','A','B');
```

Fatoração de Produto de Kronecker por Mínimos Quadrados (LSKronF)

Problema 01

Gere $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{24\times 6}$, para matrizes escolhidas aleatoriamente $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{4\times 2}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{6\times 3}$.

Em seguida, implemente o algoritmo de Fatoração de Produto de Kronecker por Mínimos Quadrados (LSKronF), que estima $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ resolvendo o seguinte problema:

$$(\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{B}}) = \arg\min_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}} \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}\|_F^2.$$

Compare as matrizes estimadas $\hat{\boldsymbol{A}}$ e $\hat{\boldsymbol{B}}$ com as originais. O que você pode concluir? Explique os resultados.

Problema 02

Considerando 1000 experimentos de Monte Carlo, gere $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{IJ\times PQ}$, para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{I\times P}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{J\times Q}$ escolhidos aleatoriamente, cujos elementos são extraídos de uma distribuição normal.

Defina $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \alpha \boldsymbol{V}$ como uma versão ruidosa de $\boldsymbol{X}_0$, onde $\boldsymbol{V}$ é o termo de ruído aditivo, cujos elementos são extraídos de uma distribuição normal. O parâmetro α controla a potência (variância) do termo de ruído, e é definido como uma função da razão sinal-ruído (SNR), em dB, da seguinte forma:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{\|\boldsymbol{X}_0\|_F^2}{\|\alpha\boldsymbol{V}\|_F^2}\right).$$

Considerando a faixa de SNR $[0, 5, 10, 15, 20, 25, 30]$ dB, obtenha as estimativas $\hat{\boldsymbol{A}}$ e $\hat{\boldsymbol{B}}$ pelo algoritmo LSKronF para as seguintes configurações:

(I) $(I, J) = (6, 8), \quad (P, Q) = (7, 5)$

(II) $(I, J) = (12, 16), \quad (P, Q) = (7, 5)$

Defina a métrica do erro quadrático médio normalizado (NMSE) da seguinte forma:

$$\mathrm{NMSE}(\boldsymbol{X}_0) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} \frac{\|\hat{\boldsymbol{X}}_0(i) - \boldsymbol{X}_0(i)\|_F^2}{\|\boldsymbol{X}_0(i)\|_F^2},$$

onde $\boldsymbol{X}_0(i)$ e $\hat{\boldsymbol{X}}_0(i)$ representam, respectivamente, a matriz de dados original e a reconstruída no i-ésimo experimento.

Para cada valor de SNR e configuração, plote a curva NMSE vs. SNR. Discuta os resultados obtidos.

Decomposição em Valores Singulares via Produto de Kronecker (KPSVD)

Problema 01

Gere uma matriz em blocos de acordo com a seguinte estrutura:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{X}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{X}_{M,1} & \cdots & \boldsymbol{X}_{M,N} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_{i,j} \in \mathbb{C}^{P\times Q},\ 1 \le i \le M,\ 1 \le j \le N.$$

Implemente a decomposição KPSVD para a matriz $\boldsymbol{X}$, calculando σ_k, $\boldsymbol{U}_k$ e $\boldsymbol{V}_k$ tais que:

$$\boldsymbol{X} = \sum_{k=1}^{r_{KP}} \sigma_k \boldsymbol{U}_k \otimes \boldsymbol{V}_k.$$

Problema 02

No problema acima, considere $M = N = P = Q = 4$ e gere aleatoriamente $\boldsymbol{X}_{i,j} = \text{randn}(P, Q)$, para $1 \leq i \leq M,\ 1 \leq j \leq N$.

Em seguida, calcule a KPSVD e o posto-Kronecker r_{KP} de $\boldsymbol{X}$ utilizando a função protótipo desenvolvida. Considere $r \leq r_{KP}$. Calcule a aproximação de posto-r mais próxima da matriz $\boldsymbol{X}$.