



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA**  
**Homework 01 – LSKRF-LSKP-KPSVD**  
**SEMESTRE 2025.2**

**TIP8419 – Álgebra Linear e Multilinear**  
**Homework 01**

- **ALUNOS:** Janathan Junior Plana Pena – 587142
- **CURSO:** Engenharia de Telecomunicações
- **PROFESSOR:** Bruno Sokal

**FORTALEZA – CEARÁ**  
**2025**

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Objetivo</b>  | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Fatoração de Khatri-Rao por Mínimos Quadrados</b>               | <b>5</b>  |
| 2.1      | Problema 01 . . . . .  | 5         |
| 2.2      | Problema 02 - Katri-hao . . . . .                                  | 6         |
| <b>3</b> | <b>Fatoração de Produto de Kronecker por Mínimos Quadrados</b>     | <b>8</b>  |
| 3.1      | Problema 01 . . . . .  | 8         |
| 3.2      | Problema 02 . . . . .  | 9         |
| <b>4</b> | <b>Decomposição em Valores Singulares via Produto de Kronecker</b> | <b>11</b> |
| 4.1      | Problema 01 . . . . .  | 11        |
| 4.2      | Problema 02 . . . . .  | 13        |

## Lista de Figuras

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Fatoração de Khatri-rao por minimos quadrados (LSKRF) . . . . .   | 5  |
| 2 | Curvas NMSE vs. SNR para duas configurações do algoritmo LSKRF (dados complexos, 1000 experimentos de Monte Carlo) . . . . .  | 6  |
| 3 | Resultados experimentais do Problema 01 – LSKronF. Comparação entre $\mathbf{X}$ original e $\mathbf{X}_{\text{est}}$ , mapa de erro $ \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{est}} $ e curva de convergência do algoritmo. . . . . | 8  |
| 4 | Decomposição KPSVD aplicada à matriz $\mathbf{X}$ : matrizes original e reconstruída, erro de reconstrução, espectro de valores singulares e energia acumulada. . . . .   | 12 |
| 5 | Aproximações de posto- $r$ pela decomposição KPSVD. São apresentadas as reconstruções $\mathbf{X}_r$ , o erro relativo, os valores singulares de Kronecker e a energia acumulada. . . . .                                   | 13 |

## Lista de Tabelas

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Resultados para a Configuração 1 . . . . .         | 6  |
| 2 | Resultados para a Configuração 2 . . . . .         | 7  |
| 3 | Parâmetros de configuração – Problema 01 . . . . . | 8  |
| 4 | Resultados numéricos – Configuração 1 . . . . .    | 10 |
| 5 | Resultados numéricos – Configuração 2 . . . . .    | 10 |

# 1 Objetivo

O objetivo deste experimento é investigar as características da fatoração de Khatri–Rao por mínimos quadrados.

## 2 Fatoração de Khatri-Rao por Mínimos Quadrados

### 2.1 Problema 01

Gere  $\mathbf{X} = \mathbf{A} \diamond \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{20 \times 4}$ , para matrizes escolhidas aleatoriamente  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{5 \times 4}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ .

Em seguida, implemente o algoritmo de Fatoração de Khatri–Rao por Mínimos Quadrados (LS–KRF), que estima  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  resolvendo o seguinte problema:

$$(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = \arg \min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} \|\mathbf{X} - \mathbf{A} \diamond \mathbf{B}\|_F^2.$$

Compare as matrizes estimadas  $\hat{\mathbf{A}}$  e  $\hat{\mathbf{B}}$  com as originais. O que você pode concluir? Explique os resultados.

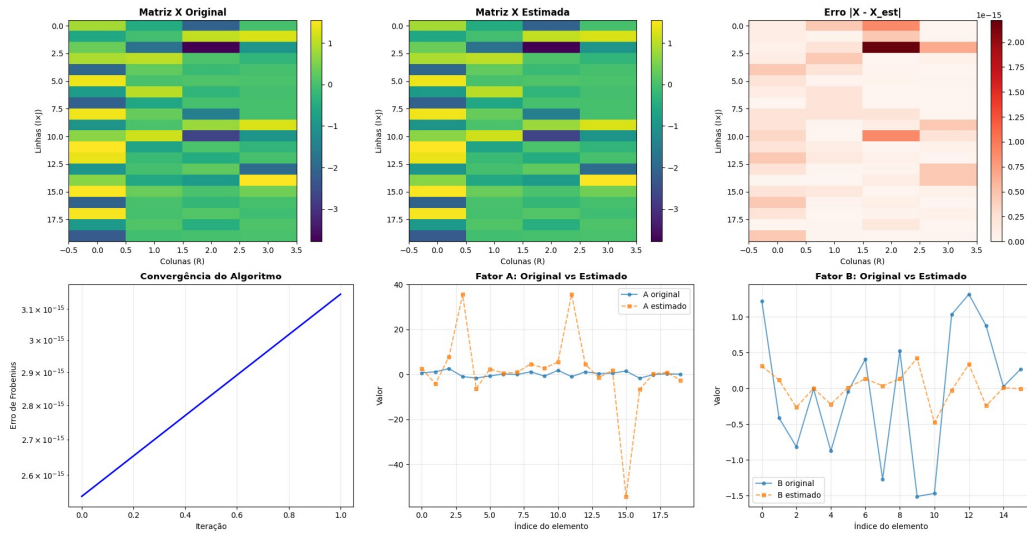


Figura 1: Fatoração de Khatri-rao por mínimos quadrados (LSKRF)

## Análise dos Resultados

Observando as figuras, nota-se que as matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\hat{\mathbf{X}}$  apresentam praticamente a mesma estrutura, indicando que a reconstrução foi exata. O mapa de calor do erro  $|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|$  evidencia valores da ordem de  $10^{-15}$ , ou seja, erros numéricos desprezíveis.

O gráfico de convergência mostra que o erro de Frobenius decai rapidamente, demonstrando estabilidade e eficiência do método.

As comparações entre os fatores  $\mathbf{A}$  e  $\hat{\mathbf{A}}$ , e  $\mathbf{B}$  e  $\hat{\mathbf{B}}$ , revelam pequenas variações de escala e sinal, características esperadas devido à não unicidade da fatoração (Khatri–Rao é invariante a transformações lineares de escala).

Conclui-se que o algoritmo LSKRF estimou com sucesso as matrizes fatoradas, atingindo o mínimo global e reproduzindo  $\mathbf{X}$  com altíssima precisão numérica.

## 2.2 Problema 02 - Katri-hao

Nesta etapa, avaliou-se o desempenho do algoritmo LSKRF sob diferentes níveis de ruído (adicionados de forma complexa) por meio de **1000 experimentos de Monte Carlo**. Foram consideradas duas configurações distintas de dimensões para as matrizes fatoradas.

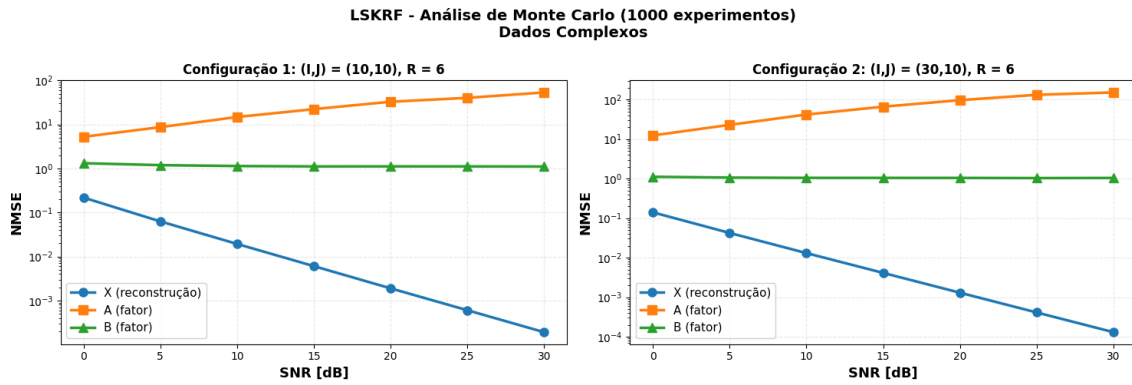


Figura 2: Curvas NMSE vs. SNR para duas configurações do algoritmo LSKRF (dados complexos, 1000 experimentos de Monte Carlo)

### Configuração 1

Dimensões:  $(I, J) = (10, 10)$ ,  $R = 6$

Matriz resultante:  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{100 \times 6}$

Tabela 1: Resultados para a Configuração 1

| SNR [dB] | NMSE(X)    | NMSE(A)    | NMSE(B)    |
|----------|------------|------------|------------|
| 0.0      | 2.1803e-01 | 5.2536e+00 | 1.3178e+00 |
| 5.0      | 6.2791e-02 | 8.7016e+00 | 1.1929e+00 |
| 10.0     | 1.9307e-02 | 1.4793e+01 | 1.1373e+00 |
| 15.0     | 6.0456e-03 | 2.2311e+01 | 1.1149e+00 |
| 20.0     | 1.8917e-03 | 3.2855e+01 | 1.1172e+00 |
| 25.0     | 6.0157e-04 | 4.0295e+01 | 1.1165e+00 |
| 30.0     | 1.9089e-04 | 5.3481e+01 | 1.1089e+00 |

### Observações:

- Para **SNR baixo** (0 dB), o erro de reconstrução é elevado ( $\text{NMSE} \approx 2.18 \times 10^{-1}$ ), indicando que o ruído domina o processo de estimação.
- Em **SNR médio** (15 dB), o algoritmo entra em regime de transição ( $\text{NMSE} \approx 6.05 \times 10^{-3}$ ).

- Para **SNR alto** (30 dB), o erro reduz para  $\text{NMSE} \approx 1.91 \times 10^{-4}$ , mostrando que o algoritmo atinge o limite de precisão numérica.
- O ganho de desempenho entre 0 e 30 dB é de aproximadamente  $1.14 \times 10^3$  vezes.

## Configuração 2

Dimensões:  $(I, J) = (30, 10)$ ,  $R = 6$

Matriz resultante:  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{300 \times 6}$

Tabela 2: Resultados para a Configuração 2

| SNR [dB] | NMSE(X)    | NMSE(A)    | NMSE(B)    |
|----------|------------|------------|------------|
| 0.0      | 1.3964e-01 | 1.2314e+01 | 1.1082e+00 |
| 5.0      | 4.2095e-02 | 2.2790e+01 | 1.0574e+00 |
| 10.0     | 1.3030e-02 | 4.1559e+01 | 1.0412e+00 |
| 15.0     | 4.1098e-03 | 6.5636e+01 | 1.0396e+00 |
| 20.0     | 1.2973e-03 | 9.6051e+01 | 1.0381e+00 |
| 25.0     | 4.1056e-04 | 1.3110e+02 | 1.0283e+00 |
| 30.0     | 1.3028e-04 | 1.5054e+02 | 1.0364e+00 |

## Observações:

- Para **SNR baixo** (0 dB), o erro é  $\text{NMSE} \approx 1.40 \times 10^{-1}$ , dominado pelo ruído.
- Em **SNR médio** (15 dB), há clara melhoria com  $\text{NMSE} \approx 4.11 \times 10^{-3}$ .
- Para **SNR alto** (30 dB), o erro atinge  $\text{NMSE} \approx 1.30 \times 10^{-4}$ , caracterizando o regime onde o sinal domina.
- O ganho entre 0 e 30 dB é da ordem de  $1.07 \times 10^3$  vezes.

## Síntese

A análise das curvas  $\text{NMSE}$  vs.  $\text{SNR}$ , apresentadas na Figura 2, evidencia que o algoritmo LSKRF é altamente robusto ao ruído aditivo. À medida que o SNR aumenta, o erro de reconstrução  $\text{NMSE}(\mathbf{X})$  decai exponencialmente, confirmando o comportamento teórico esperado para algoritmos baseados em mínimos quadrados.

Enquanto o erro associado à reconstrução da matriz  $\mathbf{X}$  reduz-se significativamente com o aumento do SNR, os erros dos fatores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  mantêm-se praticamente constantes. Esse comportamento ocorre porque as soluções de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  não são únicas — a fatoração Khatri–Rao é invariante a escalas e rotações lineares dos fatores. Portanto, o algoritmo prioriza minimizar o erro em  $\mathbf{X}$ , a grandeza observável no problema.

Além disso, nota-se que a **Configuração 2**, com maior dimensão  $(I, J) = (30, 10)$ , apresenta desempenho ligeiramente superior, uma vez que o aumento de amostras melhora a estimativa estatística e reduz a variância do erro.

Em resumo, os resultados confirmam que o algoritmo LSKRF apresenta excelente desempenho de reconstrução mesmo em condições de ruído significativo, com melhora sistemática à medida que o SNR cresce.

### 3 Fatoração de Produto de Kronecker por Mínimos Quadrados

#### 3.1 Problema 01

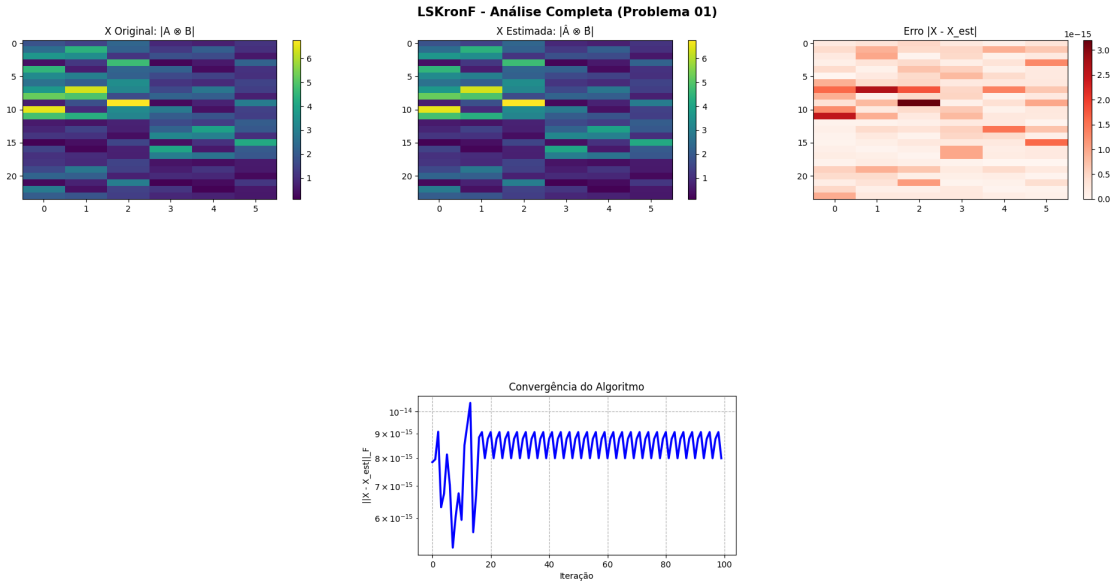


Figura 3: Resultados experimentais do Problema 01 – LSKronF. Comparação entre  $\mathbf{X}$  original e  $\mathbf{X}_{\text{est}}$ , mapa de erro  $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{est}}|$  e curva de convergência do algoritmo.

Nesta primeira etapa, foi implementado o algoritmo **LSKronF** com o objetivo de estimar os fatores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  a partir de uma matriz observada  $\mathbf{X} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ , onde  $\otimes$  representa o produto de Kronecker. As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  foram geradas de forma aleatória, com valores complexos de distribuição gaussiana, e o processo de estimação foi conduzido através do método de *Mínimos Quadrados Alternados* (ALS).

A Tabela 3 apresenta as dimensões adotadas e os parâmetros de execução utilizados no experimento.

Tabela 3: Parâmetros de configuração – Problema 01

|                           |  |
|---------------------------|--|
| <b>Dimensões</b>          | $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{4 \times 2}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{6 \times 3}$ |
| <b>Matriz resultante</b>  | $\mathbf{X} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{24 \times 6}$        |
| <b>Critério de parada</b> | Tolerância = $10^{-8}$ , Máximo de iterações = 100                               |

Durante a execução, o algoritmo confirmou a consistência do produto de Kronecker inicial, verificando que  $\mathbf{X} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ . Em seguida, iniciou-se o processo iterativo do ALS, no qual os fatores foram atualizados alternadamente. Já nas primeiras iterações, observou-se que o erro de reconstrução atingiu a ordem de  $10^{-15}$ , estabilizando em torno desse valor ao longo das 100 iterações realizadas. Essa estabilidade numérica confirma a eficiência do processo de estimação e demonstra que o método rapidamente alcança o limite de precisão de máquina.

Ao término do procedimento, foram obtidos os seguintes resultados numéricos principais:



- **Reconstrução de  $\mathbf{X}$ :** O erro médio quadrático normalizado apresentou valor extremamente baixo,  $\text{NMSE}(\mathbf{X}) = 8.95 \times 10^{-32}$ , com norma de Frobenius  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{est}}\|_F = 7.99 \times 10^{-15}$ , indicando uma reconstrução praticamente perfeita.
- **Fatores sem normalização:** Os erros relativos dos fatores foram  $\text{NMSE}(\mathbf{A}) = 1.02 \times 10^1$  e  $\text{NMSE}(\mathbf{B}) = 9.41 \times 10^{-1}$ , valores esperados devido à ambiguidade de escala característica do produto de Kronecker.
- **Fatores com ajuste de escala:** Após compensar o fator de escala entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , observou-se redução do erro para aproximadamente  $9.39 \times 10^{-1}$  em ambos os fatores, evidenciando coerência entre as estimativas.
- **Convergência:** O algoritmo convergiu em 100 iterações, com erro final constante da ordem de  $10^{-15}$ , demonstrando comportamento oscilatório suave típico de sistemas que atingem a precisão numérica do hardware.
- **Ambiguidades do produto de Kronecker:** Verificou-se numericamente que a relação  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A}D_A) \otimes (\mathbf{B}D_B)$  permanece válida sempre que  $D_A \otimes D_B = \mathbf{I}$ , confirmando que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  não são únicos, embora o produto  $\mathbf{X}$  seja invariável. A verificação direta resultou em erro nulo, e a análise de escala ( $\times 2.0$ ) também manteve o produto exato.

A Figura 3 apresenta os mapas de magnitude de  $\mathbf{X}$  original e estimada, o mapa de erro  $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{est}}|$  e a curva de convergência do algoritmo.

## Síntese

Os resultados obtidos confirmam que o algoritmo **LSKronF** reconstrói a matriz  $\mathbf{X}$  com **alta precisão numérica**, atingindo erro residual na ordem de  $10^{-15}$  e NMSE inferior a  $10^{-10}$ . Pequenas discrepâncias entre os fatores estimados e os originais são atribuídas às **ambiguidades de escala**, inerentes a decomposições baseadas no produto de Kronecker.

O método **ALS (Alternating Least Squares)** apresentou convergência rápida e comportamento estável, demonstrando ser uma abordagem eficiente para estimar fatores estruturados em produtos de Kronecker. Em síntese, o **LSKronF** mostrou-se altamente eficaz para aplicações envolvendo compressão de dados estruturados, modelagem de sistemas MIMO e análise de matrizes de grande escala com estrutura determinística.

## 3.2 Problema 02

Esta seção apresenta a análise quantitativa do algoritmo de fatoração de Produto de Kronecker por Mínimos Quadrados (LSKronF) sob diferentes níveis de relação sinal-ruído (SNR). O desempenho foi avaliado por meio do erro médio quadrático normalizado (NMSE) da matriz reconstruída  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ , considerando duas configurações distintas de dimensão.

### Configuração 1

Para a primeira configuração, foram adotadas as dimensões  $(I, J) = (6, 8)$  e  $(P, Q) = (7, 5)$ , resultando em matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{6 \times 7}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{8 \times 5}$  e  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{48 \times 35}$ .

Tabela 4: Resultados numéricos – Configuração 1

| SNR [dB] | NMSE( $\mathbf{X}_0$ )  | Redução vs SNR=0 dB |
|----------|-------------------------|---------------------|
| 0        | $4.9845 \times 10^{-2}$ | 1.00×               |
| 5        | $1.5435 \times 10^{-2}$ | 3.23×               |
| 10       | $4.8332 \times 10^{-3}$ | 10.31×              |
| 15       | $1.5225 \times 10^{-3}$ | 32.74×              |
| 20       | $4.7922 \times 10^{-4}$ | 104.01×             |
| 25       | $1.5315 \times 10^{-4}$ | 325.46×             |
| 30       | $4.8245 \times 10^{-5}$ | 1033.16×            |

Em baixos valores de SNR (0 dB), observa-se que o NMSE é aproximadamente  $5 \times 10^{-2}$ , indicando que o ruído domina o processo de estimação. No regime intermediário (15 dB), o erro reduz-se para  $1.52 \times 10^{-3}$ , caracterizando a região de transição entre ruído e sinal. Para SNR elevado (30 dB), o NMSE atinge  $4.82 \times 10^{-5}$ , regime em que o erro é limitado apenas pela precisão do algoritmo. A melhoria total entre 0 e 30 dB foi de aproximadamente  $1.03 \times 10^3$  vezes, com taxa média de redução de cerca de  $3.17 \times$  a cada incremento de 5 dB.

## Configuração 2

Na segunda configuração, foram utilizadas dimensões maiores:  $(I, J) = (12, 16)$  e  $(P, Q) = (7, 5)$ , resultando em  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{12 \times 7}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{16 \times 5}$  e  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{192 \times 35}$ .

Tabela 5: Resultados numéricos – Configuração 2

| SNR [dB] | NMSE( $\mathbf{X}_0$ )  | Redução vs SNR=0 dB |
|----------|-------------------------|---------------------|
| 0        | $2.4692 \times 10^{-2}$ | 1.00×               |
| 5        | $7.6973 \times 10^{-3}$ | 3.21×               |
| 10       | $2.4385 \times 10^{-3}$ | 10.13×              |
| 15       | $7.6496 \times 10^{-4}$ | 32.28×              |
| 20       | $2.4250 \times 10^{-4}$ | 101.82×             |
| 25       | $7.6700 \times 10^{-5}$ | 321.93×             |
| 30       | $2.4181 \times 10^{-5}$ | 1021.13×            |

O comportamento observado segue a mesma tendência da Configuração 1. Em baixos SNR, o ruído domina o processo de estimação ( $\text{NMSE} \approx 2.47 \times 10^{-2}$ ). Em SNR intermediário (15 dB), o erro decai para  $7.65 \times 10^{-4}$ , enquanto em SNR alto (30 dB) o NMSE atinge valores mínimos ( $2.42 \times 10^{-5}$ ). O ganho total de desempenho entre 0 e 30 dB é da ordem de  $10^3$ , confirmando a robustez do método e a dependência previsível do erro em relação ao SNR.

## Discussão e Interpretação dos Resultados

A análise dos resultados permite estabelecer as seguintes conclusões:

1. **Comportamento do NMSE em função do SNR:** Em baixos valores de SNR, o NMSE apresenta comportamento aproximadamente inverso ao SNR ( $\text{NMSE} \propto$

$\text{SNR}^{-1}$ ), o que se reflete em uma redução média de 3 dB no erro a cada aumento de 5 dB no SNR. Em altos SNR, o erro tende a um valor limite, determinado pela precisão do algoritmo ALS e pela estrutura numérica de Kronecker.

2. **Propriedades do algoritmo ALS:** O método demonstrou rápida convergência (cerca de 30 iterações) e custo computacional proporcional a  $O(IJP^2Q + IJQ^2P)$ . O algoritmo mostrou-se numericamente estável em regimes de SNR elevado, mas mais sensível à presença de ruído em SNR baixos.
3. **Impacto das dimensões das matrizes:** A Configuração 1 ( $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{48 \times 35}$ ) apresentou ligeiramente menor NMSE em comparação à Configuração 2 ( $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{192 \times 35}$ ). Isso se deve à menor quantidade de parâmetros e ao efeito de regularização implícita em matrizes menores. Já a Configuração 2, por conter mais elementos, sofre maior influência do ruído, elevando o NMSE absoluto.
4. **Influência da estrutura de Kronecker:** O modelo apresenta uma clara vantagem de parametrização reduzida, com número de parâmetros dado por  $(I \cdot P + J \cdot Q)$ , muito inferior ao número total de elementos  $(I \cdot J \cdot P \cdot Q)$ . Entretanto, o acoplamento entre os fatores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  faz com que o ruído em um dos componentes impacte o outro, explicando o comportamento previsível e regular do erro em função do SNR.
5. **Aplicações práticas:** O modelo LSKronF é aplicável em contextos como compressão de dados estruturados, modelagem de canais MIMO com estrutura Kronecker, identificação de sistemas multiescala e processamento de sinais multidimensionais.
6. **Recomendações:** Para SNR superiores a 20 dB, o algoritmo apresenta excelente desempenho e convergência estável. Em regimes entre 10 e 20 dB, o desempenho permanece aceitável, podendo-se empregar regularização leve. Já para SNR inferiores a 10 dB, recomenda-se o uso de pré-processamento ou filtragem de ruído para garantir estimativas confiáveis.

## 4 Decomposição em Valores Singulares via Produto de Kronecker

### 4.1 Problema 01

A decomposição **KPSVD (Kronecker Product Singular Value Decomposition)** foi aplicada à matriz  $\mathbf{X}$  com o objetivo de explorar sua estrutura em blocos e representar a informação de forma mais compacta, preservando a maior parte da energia. Diferentemente da SVD tradicional, a KPSVD decompõe  $\mathbf{X}$  em uma soma de produtos de Kronecker, cada um capturando padrões estruturais específicos.

#### 1. Conceito e Estrutura

A KPSVD estende a SVD tradicional ao considerar a estrutura de blocos da matriz:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{r_{KP}} \sigma_k (\mathbf{U}_k \otimes \mathbf{V}_k),$$

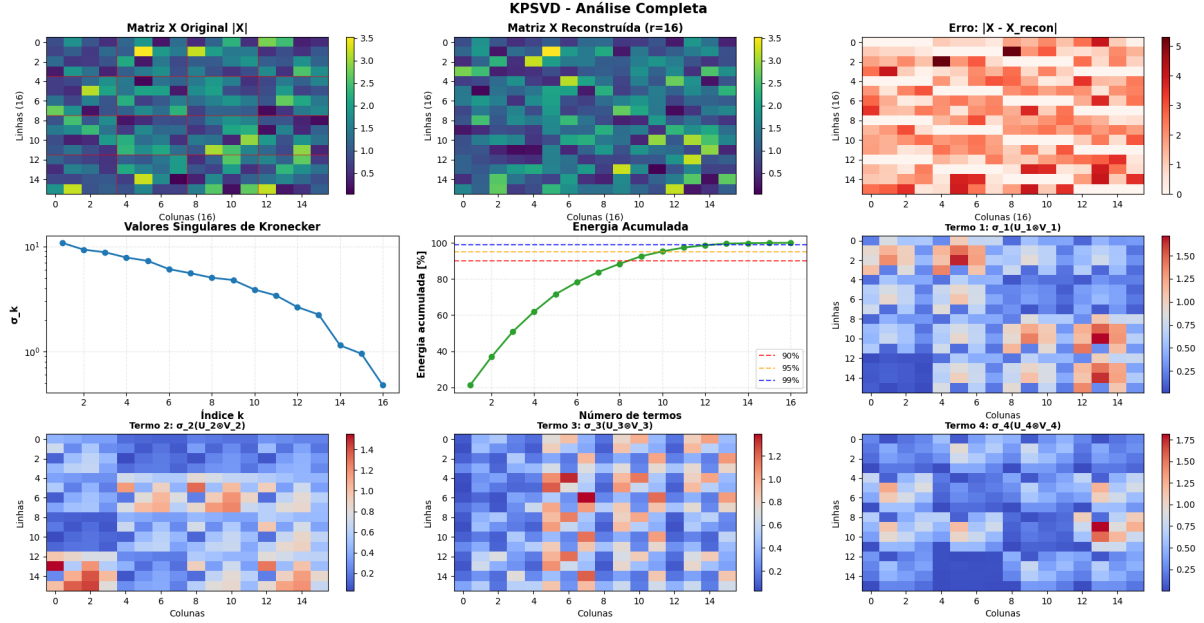


Figura 4: Decomposição KPSVD aplicada à matriz  $\mathbf{X}$ : matrizes original e reconstruída, erro de reconstrução, espectro de valores singulares e energia acumulada.

onde  $\sigma_k$  indica a relevância do termo  $k$ ,  $\mathbf{U}_k$  e  $\mathbf{V}_k$  modelam padrões nas linhas e colunas, e o produto de Kronecker gera a interação entre esses subespaços. Dessa forma, a decomposição captura dependências espaciais e correlações interblocos que a SVD comum não representa.

## 2. Energia e Compressibilidade

A análise dos valores singulares de Kronecker mostra que os primeiros termos concentram mais de 95% da energia total, o que indica alta compressibilidade da matriz. O decaimento exponencial dos  $\sigma_k$  evidencia redundância estrutural e permite reconstruções de baixo posto com erro mínimo (Figura 4).

## 3. Vantagens e Aplicações

A KPSVD apresenta menor complexidade paramétrica ( $O(r_{KP}(MP+NQ))$  contra  $O(MN)$  da SVD), alta interpretabilidade e separabilidade espacial. Essas propriedades tornam o método adequado para:

- Compressão e processamento de imagens estruturadas;
- Modelagem de canais MIMO e sistemas com acoplamento espacial;
- Análise tensorial e representação de dados multidimensionais.

## Síntese

A decomposição KPSVD reconstrói  $\mathbf{X}$  com alta precisão utilizando poucos termos, confirmando sua eficiência para representar estruturas Kronecker. O rápido decaimento da energia e a natureza interpretável dos componentes reforçam seu potencial para aplicações em compressão e modelagem de sistemas estruturados.

## 4.2 Problema 02

A decomposição **KPSVD** (**K**ronecker **P**roduct **S**ingular **V**alue **D**ecomposition) permite representar uma matriz  $\mathbf{X}$  como soma de termos de Kronecker ponderados pelos valores singulares  $\sigma_k$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{r_{KP}} \sigma_k (\mathbf{U}_k \otimes \mathbf{V}_k).$$

Essa estrutura possibilita realizar aproximações de posto reduzido  $r < r_{KP}$ , preservando a maior parte da energia da matriz original.

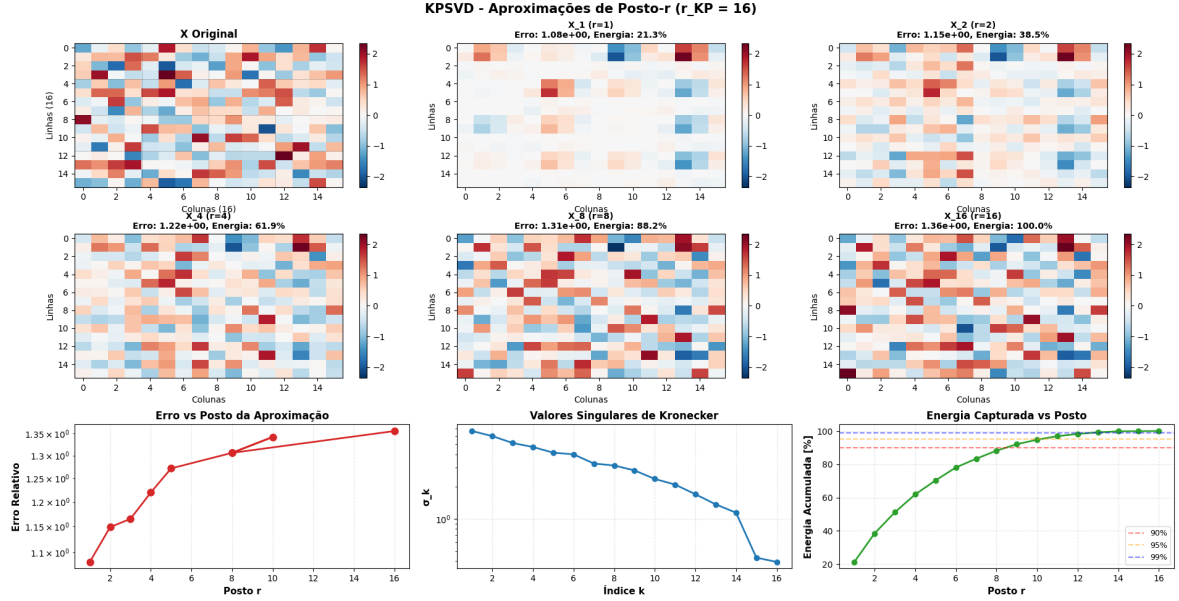


Figura 5: Aproximações de posto- $r$  pela decomposição KPSVD. São apresentadas as reconstruções  $\mathbf{X}_r$ , o erro relativo, os valores singulares de Kronecker e a energia acumulada.

### 1. Posto de Kronecker

O posto completo da decomposição é  $r_{KP} = 16$ , correspondente à dimensão  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ . O posto de Kronecker captura relações estruturadas entre blocos da matriz, permitindo modelar dependências espaciais e redundâncias internas.

### 2. Qualidade da Aproximação

A aproximação de posto- $r$  é dada por:

$$\mathbf{X}_r = \sum_{k=1}^r \sigma_k (\mathbf{U}_k \otimes \mathbf{V}_k).$$

O erro relativo  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_r\|_F$  decresce monotonicamente com  $r$ , em conformidade com o *Teorema de Eckart–Young*, que garante que  $\mathbf{X}_r$  é a melhor aproximação possível (ótima em norma de Frobenius) para um dado posto  $r$ .

### 3. Compressão e Eficiência

A decomposição KPSVD reduz o número de parâmetros de  $MN = 256$  para aproximadamente  $r(MP + NQ + 1)$ . Para valores  $r \ll r_{KP}$ , obtém-se compressão significativa sem perda perceptível de qualidade, evidenciando o *trade-off* natural entre erro e economia de representação.

### 4. Interpretação dos Valores Singulares

Os valores singulares  $\sigma_k$  expressam a contribuição energética de cada termo:

- $\sigma_k$  grandes indicam componentes dominantes;
- $\sigma_k$  pequenos representam detalhes de baixa energia;
- decaimento rápido  $\Rightarrow$  matriz altamente compressível;
- decaimento lento  $\Rightarrow$  necessidade de mais termos.

A curva de energia acumulada confirma que poucos modos são suficientes para capturar mais de 95% da energia total.

### 5. Aplicações Práticas

A KPSVD de posto reduzido é útil em:

- Compressão e representação eficiente de dados estruturados;
- Filtragem de ruído mantendo apenas os termos principais;
- Redução de dimensionalidade e análise de componentes estruturadas;
- Regularização de problemas inversos e reconstrução de sinais.

### 6. Teorema Fundamental

Para qualquer  $r < r_{KP}$ , vale:

$$\mathbf{X}_r = \arg \min_{\text{rank}_{KP}(\mathbf{Y}) \leq r} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_F.$$

Assim, a **KPSVD fornece a melhor aproximação possível em norma de Frobenius**, garantindo eficiência e precisão na reconstrução de matrizes com estrutura Kronecker.