Zmodyfikowana metoda Cholesky'ego - Banachiewicza

Jan Cichowlas

1 Wstęp

W poniższej pracy zajmiemy się rozwiązywaniem układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest trójdiagonalną macierzą symetryczną, dodatnio określoną, $b \in \mathbb{R}^n$, zmodyfikowaną metodą Cholesky'ego - Banachiewicza. Innymi słowy, posłużymy się rozkładem $A = UU^T$, gdzie U jest macierzą trójkątną górną. Następnie obliczymy wyznacznik macierzy A korzystając z własności tej metody. Na koniec porównamy zastosowaną metodę ze wbudowanymi funkcjami Matlaba, zarówno pod względem szybkości, jak i dokładności.

2 Opis metody

W standardowej metodzie Cholesky'ego - Banachiewicza posługiwaliśmy się rozkładem $A = LL^T$, gdzie L była macierzą trójkątną dolną.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Aby ją wyznaczyć korzystaliśmy z algorytmu:

for $k = 1, 2, ..., n$
$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$
for $i = k+1, k+2, ..., n$
$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}) / l_{kk}$
end
end,

gdzie a_{ij} są elementami macierzy $A, i, j = 1, ..., n$.

Czy powyższy algorym może się okazać pomocny do wyznaczenia zmodyfikowanego rozkładu? Tak, wystarczy tylko wyprowadzić zależność pomiędzy elementami macierzy U oraz L.

Rozważmy macierz permutacji W, która przeprowadza każde $k \in \{1, ..., n\}$ na $n+1-k$. Oczywistym jest, że $W = W^T$ oraz $WAW^T = A$. Ustalmy więc rozkład Cholesky'ego $WAW^T = LL^T$. Weźmy $U = WLW^T$. Wówczas U jest macierzą trójkątną górną spełniającą $A = UU^T$ oraz zachodzi zależność $u_{i,j} = l_{n-i+1, n-j+1}$ dla $i, j = 1, ..., n$.

W naszym szczególnym przypadku, gdy A jest macierzą trójdiagonalną symetryczną, implementacja tej metody znacznie się upraszcza. W pamięci komputera potrzebujemy przechowywać tylko główną i pierwszą przekątną. Oto zastosowany kod:

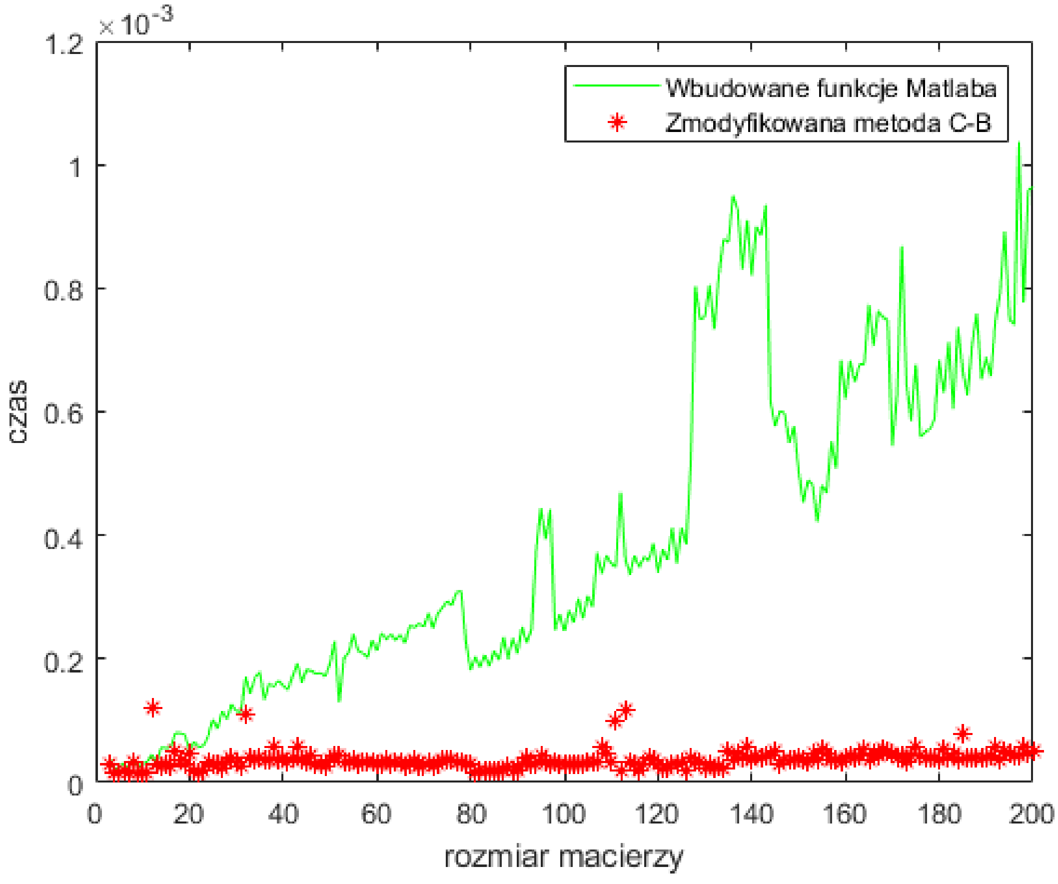
```
A_diag0 = diag(A, 0);
A_diag1 = diag(A, 1);
U_diag0(n) = sqrt(A_diag0(1));
U_diag1(n-1) = A_diag1(1) / U_diag0(n);

for k = 2:n
    U_diag0(n-k+1) = sqrt(A_diag0(k) - U_diag1(n-k+1)^2);
    if k == n
        break
    end
    U_diag1(n-k) = A_diag1(k) / U_diag0(n-k+1);
end.
```

Pozostaje tylko obliczyć wyznacznik A, co jest bardzo wygodne z uwagi na własności rozkładu Cholesky'ego. Wyznacznik wyraża się wzorem:

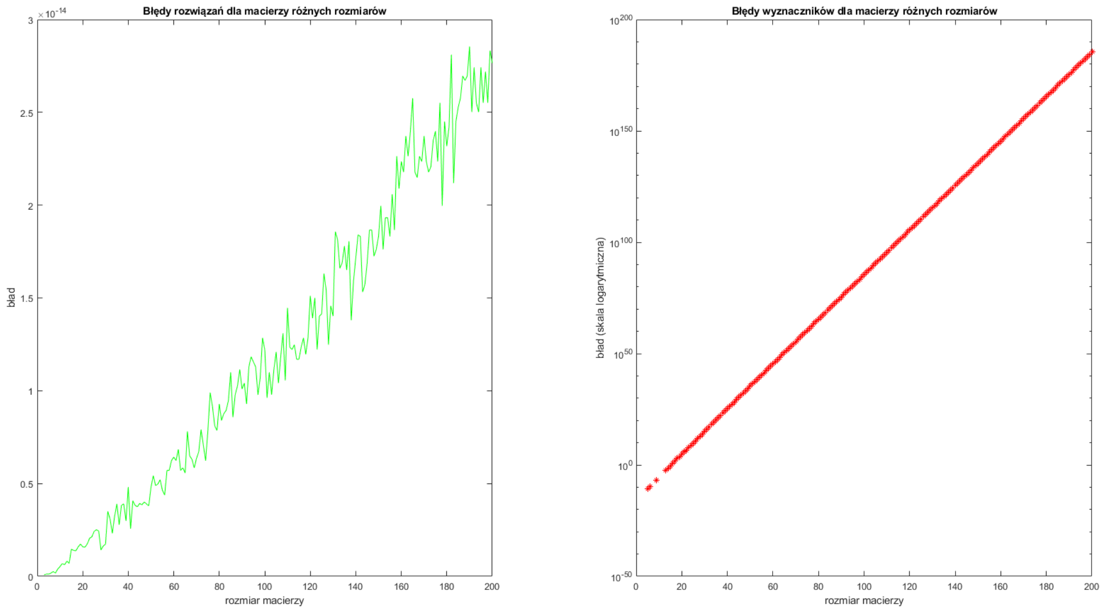
$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}^2.$$

3 Przykłady

Za przykładowe macierze, służą macierze różnych rozmiarów z 10 na głównej przekątnej i -1 na pozostałych dwóch.



Rysunek 1: Wykres czasu



Rysunek 2: Wykresy błędów

4 Wnioski

Zmodyfikowana metoda Cholesky'ego - Banachiewicza okazała się dosyć dobra pod względem dokładności rozwiązania układu równań. Zaprogramowana przez nas metoda nie jest jednak odpowiednia do obliczania wyznaczników, szczególnie dla macierzy dużych wymiarów. Bardzo dobrze sprawdziła się zaś, biorąc pod uwagę czas wykonywanych obliczeń. Ze względu na uwzględnienie w zastosowanym algorytmie specyficznej struktury macierzy wejściowych, okazała się szybsza nawet od wbudowanych funkcji Matlaba i szybko zyskuje nad nimi przewagę.

5 Bibliografia

[1] Iwona Wróbel *Notatki do wykładu Metody Numeryczne*, 2022.

[2] *math.stackexchange.com*