

Resumen Física A

November 17, 2025

1 Unidad N°1: Cinemática de la partícula

a

2 Unidad N°2: Dinámica de la partícula

b

3 Unidad N°3: Trabajo y Energía

c

4 Unidad N°4: Sistemas de partículas

4.1 Definición

Un **sistema de partículas** se refiere a un conjunto de partículas sometidas a fuerzas como se ve en la figura las cuales pueden o no pertenecer al sistema. Aquellas con un solo índice son ejercidas por partículas que no componen el sistema mientras que aquellas que tienen dos índices sí pertenecen.

Las llamadas **fuerzas internas** serán aquellas cuya acción y reacción estén dentro del sistema mientras que las **fuerzas externas** serán aquellas cuya reacción se encuentre en partículas fuera del sistema de partículas.

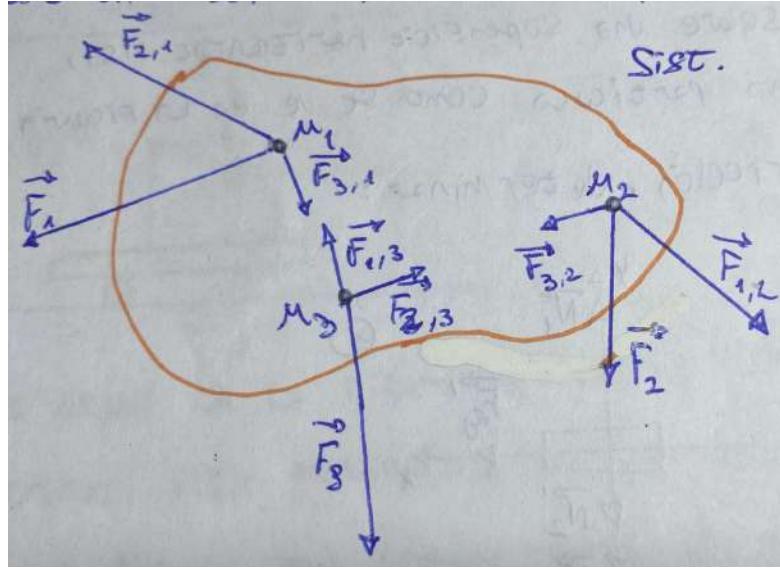


Figure 1: Gráfico Genérico de un Sistema de Partículas

Podemos entonces plantear la Segunda Ley de Newton para cada una de las partículas que contiene el sistema quedando entonces:

$$\sum F_1 = F_1 + F_{2,1} + F_{3,1} = \frac{\delta p}{\delta t}$$

$$\sum F_2 = F_2 + F_{1,2} + F_{3,2} = \frac{\delta p}{\delta t}$$

$$\sum F_3 = F_3 + F_{2,3} + F_{1,3} = \frac{\delta p}{\delta t}$$

Figure 2: Sumatoria de Fuerzas Sist. de Partículas 1

Sumando las tres ecuaciones, por la 3era Ley de Newton, las fuerzas internas desaparecerán ya que su sumatoria es igual a cero (debido a que como ejercen acción y reacción entre sí las partículas, las fuerzas ejercidas se anulan). Teniendo en cuenta que la aceleración puede escribirse como la derivada de la velocidad en función temporal y que, teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, ésta está multiplicada por la masa de cada partícula nos termina dando la

cantidad de movimiento de la partícula en el sistema. Quedando la siguiente sumatoria:

$$\underline{p} = \underline{m}\underline{v}$$

Figure 3: Definición de Cantidad de Movimiento

$$\sum \underline{F}_{ext} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \frac{d}{dt} (\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3)$$

Figure 4: Sumatoria de Fuerzas Externas

$$\underline{\underline{p}}_{sist} = \sum \underline{\underline{p}}$$

Figure 5: Cantidad de Movimiento del Sistema

En el primer miembro aparecen la suma de fuerzas externas mientras que en el segundo la derivada temporal de la suma vectorial de las cantidades de movimiento de las partículas que componen el sistema. Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2 llegamos entonces a la Segunda Ley de Newton para un *Sistema de Partículas*.

$$\sum \underline{F}_{ext} = \frac{d\underline{\underline{p}}_{sist}}{dt}$$

Figure 6: Segunda Ley de Newton para un Sistema de Partículas

Si en algún eje donde se trabaje con la ecuación 4, se encuentra igualado a cero esto indica que se conserva la cantidad de movimiento en dicho eje.

En los siguientes ejemplos, se aplica la definición de cantidad de movimiento para distintos propósitos:

1. Una plataforma se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa, sobre ella se arroja en forma horizontal una partícula (como se ve en la figura), entre la partícula y la plataforma hay fricción. Determinar:

(a) La velocidad del conjunto.

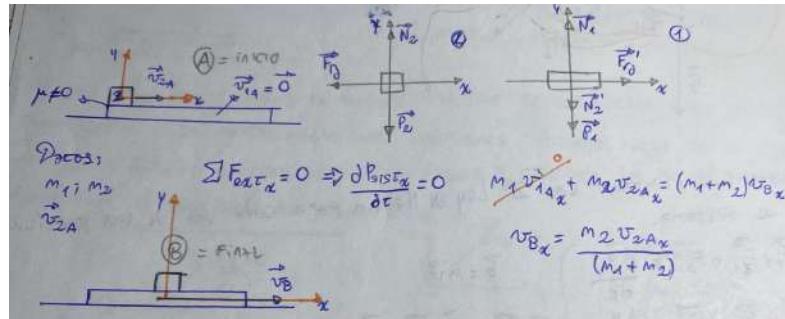


Figure 7: Ejemplo 1. Sistema de partículas y cantidad de movimiento

2. Un hombre se mueve sobre una patineta, la suma total de las masas es de 80 kg. Se mueve a $1 \frac{m}{s}$, en un instante le arrojan una pesa de 10 kg que se mueve a $4 \frac{m}{s}$ como se ve en la figura, ¿qué velocidad tendrá el hombre cuando tenga la pesa en sus manos?

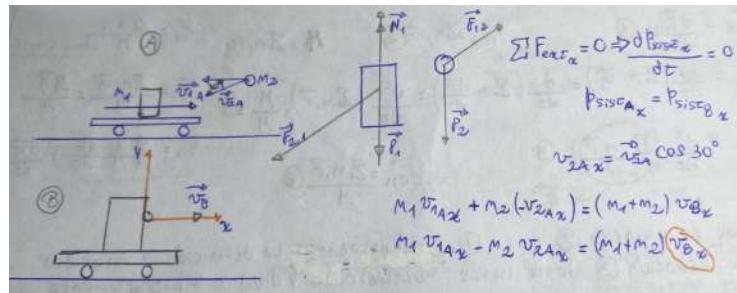


Figure 8: Ejemplo 3. Sistema de partículas y cantidad de movimiento

3. Los tejos de la figura de masas idénticas se encuentran sobre una superficie horizontal lisa moviéndose en las condiciones indicadas, luego de la interacción el tejo 1 se desvía un ángulo β perdiendo la mitad de su velocidad. Determinar la velocidad del segundo tejo.

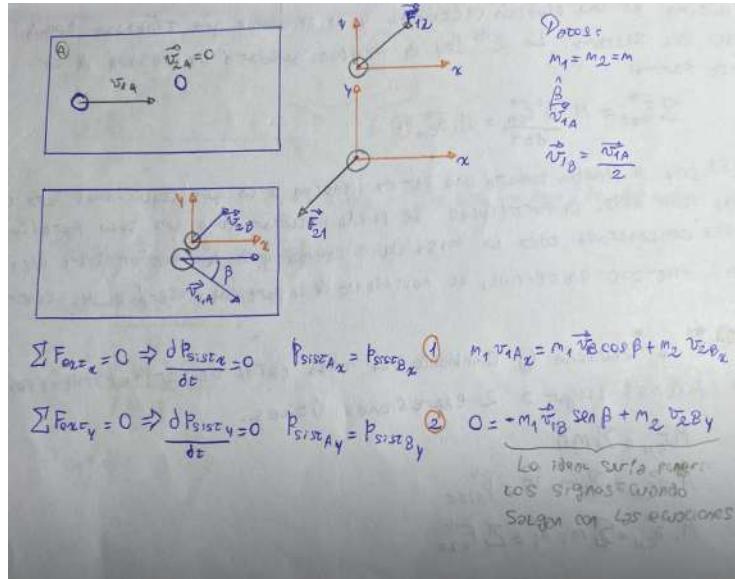


Figure 9: Ejemplo 1. Sistema de partículas y cantidad de movimiento

4.2 Centro de Masa

Si partimos de la Segunda Ley de Newton para un sistema, llegaremos a la definición de **centro de masas** tratando de llevar la ecuación 1 a la Segunda Ley de Newton en forma tradicional ($\sum \vec{F} = m \vec{a}$)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d \vec{p}_{sist}}{dt} \quad (\text{Ec. 1})$$

$$p_{sist} = \sum m_i \vec{v}_i \quad (\text{Ec. 2})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt} (\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \frac{d^2}{dt^2} (\sum m_i \vec{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (M \vec{r}_{cm}) \quad (\text{Ec. 3})$$

$$M = \sum m_i \quad (\text{Ec. 4})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{cm}) \quad (\text{Ec. 5})$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (\text{Ec. 6})$$

Sustituyendo la ecuación 2 en la ecuación 1 y reemplazando la definición de velocidad llegamos a la ecuación 3 donde hemos multiplicado y dividido arbitrariamente por la masa del sistema dada por la ecuación 4. Sacando la derivada de la posición de la ecuación 5 fuera del paréntesis, obtenemos la ecuación 5 en donde el término indicado es una posición ya que su derivada segunda tiene que ser una aceleración. Teniendo esto en cuenta, podemos concluir que dicho punto es la **posición del centro de masas** (ecuación 6) siendo esta última una ecuación vectorial y teniendo que trabajarla aún más según los ejes del sistema. La 2^{da} Ley de Newton quedará expresada de la siguiente forma:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} \quad (\text{Ec. 7})$$

La 2^{da} Ley de Newton tomará una forma idéntica a la que conocíamos para una partícula, todo sistema de partículas se puede estudiar como una

Esta sumatoria define a la posición del centro de masas, la cual se aclara en la ecuación a continuación

derivando sucesivamente esta igualdad, puede obtenerse tanto la velocidad del CM como la aceleración del CM

sola partícula donde está concentrada toda la masa del sistema y donde actúan sobre ella **todas** las fuerzas externas, el movimiento de la partícula será el del **centro de masas**.

1. Determinar la posición del centro de masa de las masas de 1, 2 y 3 kg de las masas de la figura.

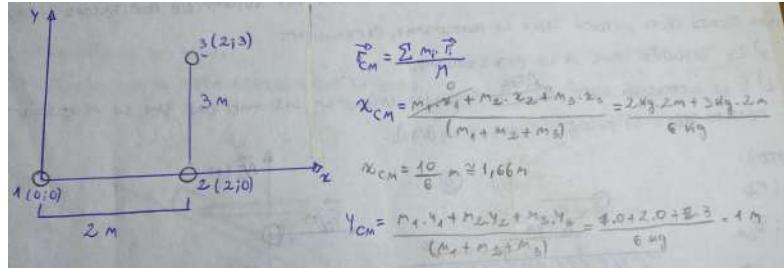


Figure 10: Ejemplo 1. Centro de Masas con 3 Partículas

Si se trata de cuerpos, la sumatoria que figura en la ecuación 6 se transforma en una integral ya que un cuerpo estará formado por infinitas partículas. Teniendo esto en cuenta, se buscará encontrar la posición del centro de masas de una barra de sección triangular de longitud y lados "a" y "b" respectivamente.

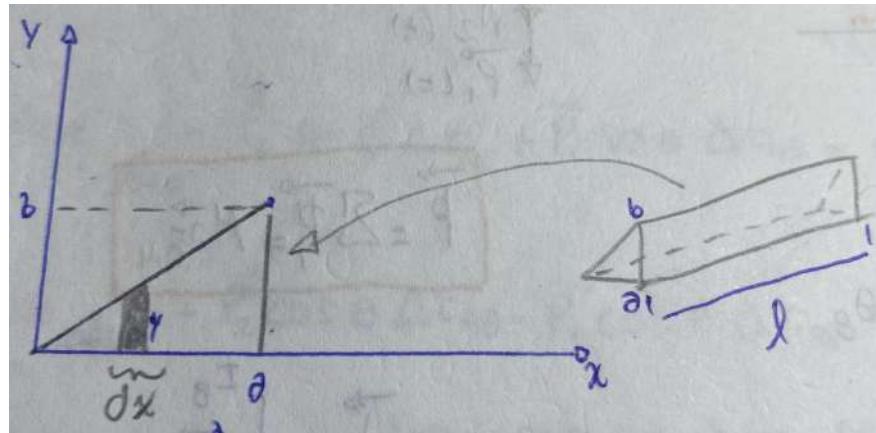


Figure 11: Ejemplo 2. Ejemplo de una barra (sist. de partículas)

$$x_{cm} = \frac{\int_0^a x dm}{M} \quad dV = y \times l \times dx$$

$$\delta = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \delta \times dV = \delta \times l \times y \times dx = \delta \frac{b}{a} \times x \times l \times dx$$

$$x_{cm} = \frac{\delta \times \frac{b}{a} \times l \times \int_0^a x^2 dx}{M} \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad y = \frac{bx}{a}$$

$$x_{cm} = \frac{\delta \times \frac{b}{a} \times l \times \frac{a^3}{3}}{M}$$

$$x_{cm} = \frac{\delta \times \frac{b}{a} \times l \times \frac{a^3}{3}}{\delta \times \frac{ab}{2} \times l}$$

$$x_{cm} = \frac{2a}{3}$$

El siguiente es un ejemplo de parcial.

1. Una plataforma se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa, una pelota choca y rebota sobre la plataforma, determinar:
 - (a) La velocidad final de la plataforma.
 - (b) Si la interacción duró Δt_{ab} segundos, encontrar las fuerzas que la plataforma realizó sobre la pelota (fuerzas medias).

Los datos son:

1. m_1 y m_2 ;
2. $v_{1A} = \vec{0}$; v_{2A} ; v_{2B}
3. Δt_{ab}
4. θ_A y θ_B

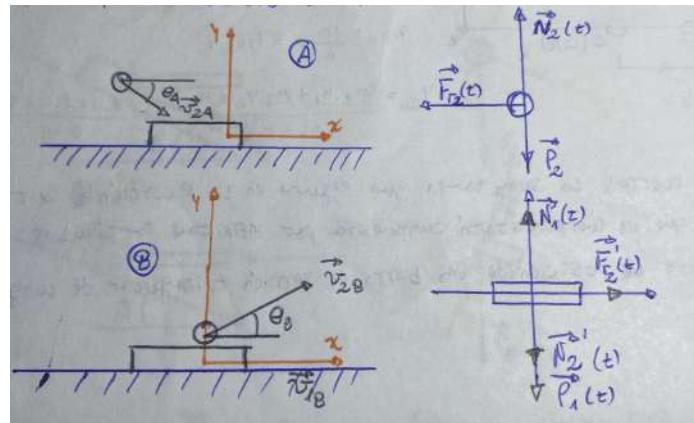


Figure 12: Ejemplo 3. Ejemplo Sistema de Partículas de Parcial.

1. (a) $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow p_{sistAx} = p_{sistBx}$
 $m_2 \times v_{2A} \times \cos \theta_A = m_1 \times v_{1B} + m_2 v_{2B} \cos \theta_B$
- (b) $\sum J_{1_{AB}X} = \Delta p_{1_{XAB}}$
 $\sum J_{1_{AB}Y} = \Delta p_{1_{AY}}$
 $\sum J_{2_{AB}X} = \vec{F}_{r2_{media}} \times \Delta t_{ab} = m_2 \times v_{2B} \times \cos \theta_B - m_2 \times v_{2A} \times \cos \theta_A$
 $\sum J_{2_{AB}Y} = (\vec{N}_{2_{media}} - \vec{P}_2) \times \Delta t_{ab} = m_2 \times v_{2B} \times \sin \theta_B - (-m_2 \times v_{2A} \times \cos \theta_A)$

El miembro de la ecuación donde está la fuerza multiplicada por un delta de tiempo, es el impulso de la fuerza (el primer miembro si no tenemos

1. Un cañón cae con v_{1A} como se ve en la figura, en un instante dispara una bala (m_2) en forma horizontal con una velocidad tal que el cañón se detiene por un instante, determinar:
- La velocidad de la bala.
 - La fuerza que el cañón ejerció sobre la bala.

Los datos son:

- m_1 y m_2 .
- v_{1A} y v_{2A}
- Δt_{ab}
- $v_{1B} = \vec{0}$

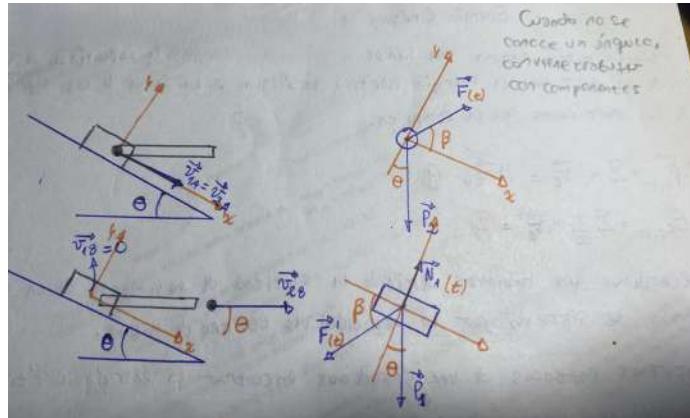


Figure 13: Ejemplo 4. Disparo de un cañón en un plano inclinado

$$\begin{aligned}\Sigma J_{sist_{xAB}} &= (\vec{P}_2 + \vec{P}_1) \times \sin \theta \times \Delta t_{ab} = m_2 v_{2B} \times \cos \theta - (m_1 + m_2) \times v_{1A} \\ \Sigma J_{sist_{YAB}} &= (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times \cos \theta \times \Delta t_{ab} + N_{med} \times \Delta t_{ab} = m_2 v_{2B} \times \sin \theta - 0\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas dos sumatorias, podremos despejar tanto la velocidad de la bala (teniendo en cuenta la primera de ellas) como la fuerza ejercida por el cañón (teniendo en cuenta la segunda).

4.3 Masa Reducida de un Sistema

Supongamos tener un sistema de 2 partículas sometido únicamente a fuerzas internas, podemos escribir entonces la 2^{da} Ley de Newton para cada una de las fuerzas según la siguiente ecuación:

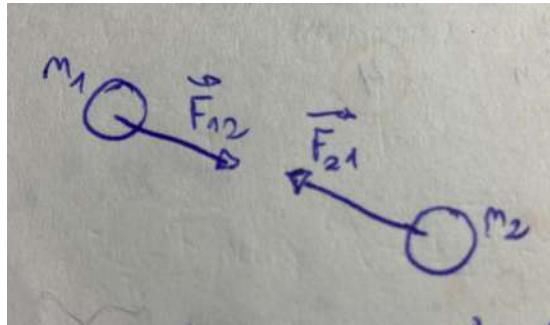


Figure 14: Sistema de 2 Partículas

$$\vec{F}_{1,2} = m_1 \times \vec{a}_{1/tierra} \quad \vec{F}_{2,1} = m_2 \times \vec{a}_{2/tierra}$$

Podemos también plantear la ecuación de las aceleraciones relativas:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1,2} + \vec{a}_2 \rightarrow \vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} \quad \vec{a}_{1,2} = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_2}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_2} \quad \vec{a}_{1,2} = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} - \left(-\frac{\vec{F}_{1,2}}{m_2} \right) = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_2}$$

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \quad \vec{a}_{1,2} = \vec{F}_{1,2} \times \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \rightarrow \vec{F}_{1,2} = \vec{a}_{1,2} \times \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\vec{F}_{1,2} = \mu_R \vec{a}_{1,2} \quad (\text{Ec. 2})$$

Trabajando con las ecuaciones llegamos a relacionar la fuerza interna con la aceleración relativa de las partículas (ec. 1), el término entre paréntesis tiene dimensiones de masa y se denomina "**masa relativa del sistema**" llegando así a la ecuación 2 que relaciona las magnitudes de las cuales habíamos hablado.

4.4 Energía Cinética de un Sistema de Partículas

Tal como se define que la cantidad de movimiento del sistema es la suma de la cantidad de movimiento de todas las partículas del sistema, la **energía cinética del sistema** será igual a la suma de las energías cinéticas de las partículas que la componen.

$$\vec{p}_{sist} = \sum m_i \vec{v}_i = M \times \vec{v}_{cm} \quad (\text{Ec. 1})$$

$$E_{c,sist} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{Ec. 2})$$

Esto también se debe a que aunque la variación de cantidad de movimiento del sistema sea nula, la variación de **energía mecánica** puede **no** serlo. Las fuerzas internas del sistema (que son aquellas que no cambian la cantidad de movimiento del mismo) pueden ser fuerzas **no conservativas** lo que hace que varíe la energía mecánica del sistema en sí mismo.

Se había definido previamente a la cantidad de movimiento de un sistema (\vec{p}_{sist}) como el producto de la masa del sistema (M) por la velocidad del centro de masas (\vec{v}_{cm}). Se buscará encontrar la **energía cinética del sistema** a partir de la velocidad del centro de masas.

Esta ecuación hace referencia a la masa reducida del sistema.

La aceleración es la aceleración relativa y el coeficiente representa a la masa relativa.

Partiendo de la ecuación 2 se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$E_{sist} = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad \vec{v}_{i/tierra} = \vec{v}_{CM/tierra} + \vec{v}_{i/CM} \quad (\text{Ec. 3})$$

$$E_{sist} = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i/CM}) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i/CM})$$

$$E_{sist} = \sum \frac{1}{2} m_i (v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{i/CM} + \vec{v}_{i/CM}^2)$$

$$E_{sist} = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i (\vec{v}_{i/CM} \cdot \vec{v}_{i/CM}) + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i/CM}^2$$

$$E_{sist} = \sum \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + 0 + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i/CM}^2 \quad (\text{Ec. 4})$$

El primer término de la ecuación 4 es la **Energía de Traslación u Orbital**, el segundo es el término que debía anularse por propiedad vectorial y el tercero es la **Velocidad Relativa de las Partículas respecto del Centro de Masas**.

Trabajando con las ecuaciones 2 y 3 llegamos a la ecuación 4, en ella aparecen tres términos: el primero es la energía cinética asociada al centro de masas, el segundo es nulo porque la sumatoria sería la cantidad de movimiento del sistema respecto del centro de masas ($\vec{v}_{CM/CM} = \vec{0}$) y el tercer término es la energía interna del sistema la cual se tiene en cuenta desde cada partícula (y su correspondiente velocidad relativa). Ejemplo:

1. Supongamos tener dos partículas que en un instante tienen velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , se determinará para este sistema lo siguiente:
 - (a) Velocidad del centro de masas.
 - (b) Velocidad de las partículas respecto del centro de masas.
 - (c) Cantidad de movimiento de las partículas respecto del centro de masas.
 - (d) Energía cinética de las partículas respecto del centro de masas.



Figure 15: Sistema de 2 Partículas

$$1. \quad (a) \vec{v}_{CM} = \sum \frac{m_i}{M} \vec{v}_i = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$(b) \vec{v}_1 = \vec{v}_{1/CM} + \vec{v}_{CM} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{1/CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 - \left[\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \right] = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \\ \vec{v}_{1/CM} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/CM} + \vec{v}_{CM} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{2/CM} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_2 - \left[\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \right] = \frac{m_1 \vec{v}_2 + m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \\ \vec{v}_{2/CM} = \frac{-m_1}{(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

El término central resulta nulo ya que se refiere al producto escalar del movimiento lineal de las partículas referidas al centro de masas lo que necesariamente da cero.

Esta igualdad tiene un paso previo donde las velocidades tienen el orden invertido debido al signo "-" que se aprecia delante

$$\begin{aligned}
 (c) \vec{p}_{1/CM} &= m_1 \vec{v}_{1/CM} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{v}_{1,2} \\
 p_{1/CM} &= \mu_R \vec{v}_{1,2} \\
 \vec{p}_{2/CM} &= \frac{-m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{v}_{1,2} \\
 p_{2/CM} &= -\mu_R \vec{v}_{1,2} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{2/CM} + \vec{p}_{1/CM} = 0 \\
 (d) E_{1/CM} &= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1/CM}^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1,2}^2 m_2 \\
 E_{2/CM} &= \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2/CM}^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} v_{1,2}^2 m_1 \\
 E_{sist} &= \frac{1}{2} \frac{(m_1 m_2)}{(m_1 + m_2)^2} v_{1,2}^2 (m_2 + m_1) \\
 E_{sist} &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} v_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \mu_R v_{1,2}^2
 \end{aligned}$$

4.5 Teorema de Trabajo y Energía para un Sistema de Partículas

Supongamos tener un sistema sobre el cual actúan fuerzas internas y externas y las partículas desplazan bajo la acción de dichas fuerzas:

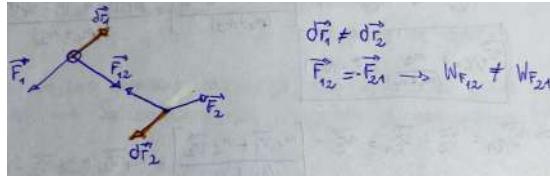


Figure 16: Gráfico Teórico Sistema de 2 Partículas

A diferencia de la 2^{da} Ley de Newton donde sólo impulsaban las fuerzas externas, en el Teorema de Trabajo y Energía el trabajo de las fuerzas **NO** será nulo ya que los desplazamientos elementales de las partículas serán independientes.

$$\Sigma W_{F_{ext AB}} + \Sigma W_{F_{int AB}} = \Delta E_{sist AB}$$

1. Dos cuerpos de masa m_1 y m_2 se mueven sobre un plano horizontal liso con \vec{v}_A , entre ellos hay un resorte de constante K , que se encuentra comprimido por la acción de la cuerda que une los cuerpos, en un instante la cuerda se corta. ¿Cuál será la velocidad de los cuerpos luego de la interacción con el resorte?

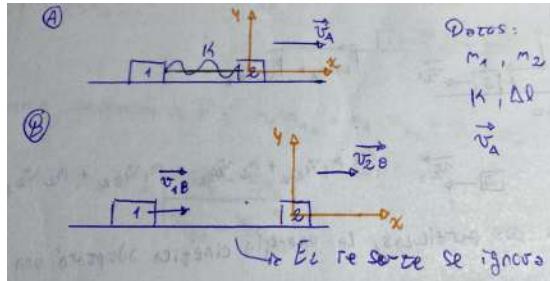


Figure 17: Ejemplo 1. Sistema con 2 cuerpos y un resorte

Sabemos que las fuerzas externas son verticales y las internas horizontales (se ubican en el eje x). → **Se conserva la cantidad de movimiento (\vec{p})**

$$\Rightarrow \Sigma F_{ext_x} = 0 \Rightarrow p_{sist_{A_x}} = p_{sist_{B_x}}$$

$$(m_1 + m_2)\vec{v}_A = m_1\vec{v}_{1_B}^2 + m_2\vec{v}_{2_B}^2$$

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}_A^2 + \frac{1}{2}K\Delta l_A^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1_B}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2_B}^2$$

El Centro de Masas se mueve con \vec{v}_A en TODO MOMENTO

4.6 Teoría de Choque

Llamaremos **choque** a la interacción entre dos partículas, sometidas exclusivamente a fuerzas **internas** (*en un eje*) pero este tipo de interacciones no son exclusivamente de contacto, se cumplirá lo siguiente:

1. Se conservará la cantidad de movimiento (\vec{p}) del sistema en el eje donde no haya fuerzas externas.

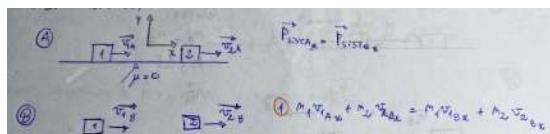


Figure 18: Gráfico Teórico Sistema de 2 Partículas

2. Al estudiar dos partículas, la energía cinética adoptará una forma particular:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = \sum \frac{1}{2}m_i \vec{v}_{i/CM}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu_R \vec{v}_{1,2}^2 \quad (\text{Ec. 2})$$

$$\mu_R = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

La ecuación 2 nos da la E_c de las dos partículas en un estado genérico, podemos escribirla para los estados "A" y "B" pudiendo calcular su variación:

Tanto esta ecuación como la correspondiente a la de las cantidades de movimiento tiene como incógnitas a las velocidades finales de los cuerpos.

$$\Delta E_{c_{AB}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\vec{v}_{CM_B}^2 - \vec{v}_{CM_A}^2) + \frac{1}{2}\mu_R(\vec{v}_{1,2/B}^2 - \vec{v}_{1,2/A}^2) \quad (\text{Ec. 3})$$

Como la velocidad del CM del estado "B" es igual a la del estado "A", estas terminan anulándose ocasionando que solamente quede el término donde figura la masa reducida por ser el único donde la velocidad cambia (ya que se trata de una velocidad relativa y esta cambia gracias a la distinta ubicación que presenta cada partícula/cuerpo en los distintos instantes de su movimiento respecto del otro), quedando la siguiente expresión:

$$\Delta E_{c_{AB}} = \frac{1}{2}\mu_R(\vec{v}_{1,2/B}^2 - \vec{v}_{1,2/A}^2) \quad (\text{Ec. 4})$$

Teniendo en cuenta que gracias al ΔE_c , podemos decir que esta ecuación corresponde a la **energía cinética del choque**, donde la \vec{v}_{CM} es constante, quedando solamente en la ecuación 4 la energía referente a la posición relativa de las partículas y, por conseciente, la energía referente a las energías internas de las mismas. La energía interna será la única que intervendrá en los choques.

Puede trabajarse con la ecuación 4 de la siguiente forma:

$$\Delta E_{c_{AB}} = \frac{1}{2}\mu_R[(\frac{\vec{v}_{1,2/B}}{\vec{v}_{1,2/A}})^2 - 1]\vec{v}_{1,2/A}^2 \quad (\text{Ec. 5})$$

Observando que la variación de energía cinética depende de un cociente de velocidades ya que $\vec{v}_{1,2/A}$ puede considerarse constante. El cociente de ambas velocidades relativas recibe el nombre de **coeficiente de restitución**. Donde se coloca un signo menos para que sea siempre positivo ya que las velocidades relativas tendrán signos opuestos esto no tendrá implicación en la ecuación 5 ya que figura el cuadrado como se ve en la ecuación 6.

$$\Delta E_{c_{AB}} = \frac{1}{2}\mu_R(r^2 - 1)\vec{v}_{1,2/A} \quad (\text{Ec. 6}) \quad r = (-\frac{\vec{v}_{1,2/B}}{\vec{v}_{1,2/A}})$$

Puede clasificarse a los choques según su coeficiente de restitución y su variación de energía cinética, la clasificación sería la siguiente:

1. **Choque Elástico ($r=1$)**: las velocidades relativas tienen mismo módulo por lo que no hay variación de energía cinética ($\Delta E_{c_{AB}}=0$);
2. **Choque Explosivo ($r<1$)**: la velocidad relativa del estado "B" (o estado final) será mayor que la del estado "A" (o estado inicial) ($\Delta E_{c_{AB}}>0$);
3. **Choque Inelástico ($r<1$)**: la velocidad relativa del estado "B" (o estado final) será menor que la del estado "A" (o estado inicial) ($\Delta E_{c_{AB}}<0$);
4. **Choque Plástico o Completamente Inelástico ($r=0$)**: la velocidad relativa del estado final es nula ($E_c = -\frac{1}{2}\mu_R\vec{v}_{1,2/A}^2$).

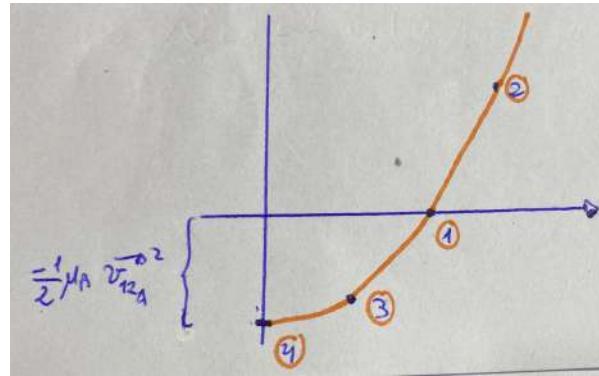


Figure 19: Comparación de la variación de ΔE_c de cada caso

En los siguientes ejemplos, se apreciará cómo varían las velocidades según cómo cambien las masas de los cuerpos que se tengan en cuenta:

1. Las masas m_1 y m_2 de la figura en condiciones iniciales indicadas, producen entre ellas un choque elástico. Determinar sus velocidades finales suponiendo que:
 - (a) $m_1 = m_2$;
 - (b) $m_1 \ll m_2$;
 - (c) $m_1 \gg m_2$.

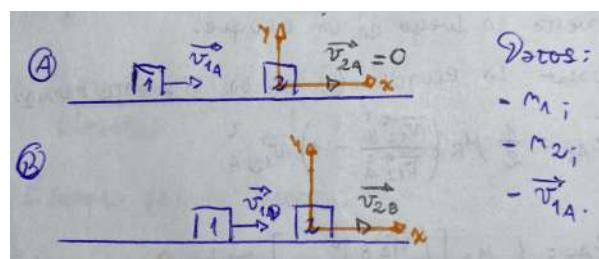


Figure 20: Ejemplo Choque Elástico

Punto de conservación de \vec{P} : $m_1 v_{1A_x} = m_1 v_{1B_x} + m_2 v_{2B_x}$

$$\Gamma = 1 = \frac{v_{1B_x} - v_{2B_x}}{v_{1A_x} - v_{2B_x}}$$

$$\Rightarrow v_{1A_x} = v_{1B_x} + v_{2B_x}$$

$$v_{2B_x} = v_{1A_x} + v_{1B_x}$$

$$m_1 v_{1A_x} = m_1 v_{1B_x} + m_2 (v_{1A_x} + v_{1B_x})$$

$$m_1 v_{1A_x} = (m_1 + m_2) v_{1B_x} + m_2 v_{1A_x}$$

$$\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1A_x} = v_{1B_x}$$

$$\Rightarrow v_{2B_x} = \frac{(m_1 - m_2 + m_1 + m_2) v_{1A_x}}{(m_1 + m_2)}$$

$$\boxed{v_{2B_x} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1A_x}}$$

Figure 21: Resolución Ejemplo Choque Elástico

2. Una masa parte del punto "A" con una velocidad \vec{v}_A , recorre una distancia d_{AB} hasta chocar con una pared con un coeficiente de restitución de 0,5. ¿Cuál será la distancia entre "C" y "D" si en "D" se detiene? (Despreciar la fricción en el momento del choque "B → C").

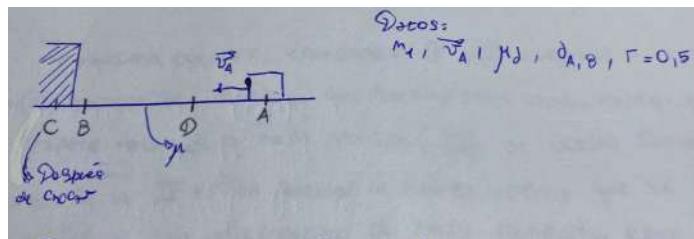


Figure 22: Gráfico Choque de un cuerpo con una pared

$$"A \rightarrow B" - \mu mg d_{AB} = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2$$

$$"B \rightarrow C" r = -\frac{v_{cx}}{v_{bx}}$$

En esta ecuación la incógnita es la \vec{v}_B .

NUNCA aplicar Teorema de Trabajo y Energía con un CHOQUE (PRIMERO choque y luego TyE.)

4.7 Fuerza de Retropropulsión

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{\text{SIST}} &= (M - dm) \cdot (\vec{v} + \delta \vec{v}) + dm \vec{v}_m - M \vec{v} \quad (1) \\ \vec{v}_m &= \vec{v}_m/M + (\vec{v} + \delta \vec{v}) \quad (2) \\ u &= \vec{v}_m/M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{\text{SIST}} &= M \vec{v} + M \delta \vec{v} - dm \vec{v} - dm \delta \vec{v} + dm \cdot \vec{v}_m - M \vec{v} \\ d\vec{p}_{\text{SIST}} &= M \delta \vec{v} - dm \vec{v} - dm \delta \vec{v} + dm \cdot \vec{v}_m + dm \cdot \vec{v} + dm \delta \vec{v} \\ d\vec{p}_{\text{SIST}} &= M \delta \vec{v} + dm \cdot \vec{v}_m/M \end{aligned}$$

$$d\vec{F}_{\text{ext}} = M \delta \vec{v} + dm \vec{u} \rightarrow \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\partial}{\partial t} (M \vec{v}) + \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right) \vec{u} \quad (4)$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\partial \vec{p}_{\text{SIST}}}{\partial t} \quad (3)$$

Figure 23: Planteos y Gráficos referentes a retropropulsión

Trabajando las ecuaciones 1 y 2 llegamos a las ecuaciones 3 y 4, en la 4 aparece una definición que denominaremos **caudal másico** q_m que es la rapidez con que se expela masa de la masa principal ($\frac{kg}{s}$), el último sumando que contiene el caudal en la IV es en realidad la fuerza interna que se ejerce entre la masa principal y el diferencial de masa expelida, este término suele pasarse al primer miembro de la IV tomándolo como una fuerza externa, llamada **Fuerza de Retropropulsión** pudiendo escribir la ecuación 4 de la siguiente forma:

$$\vec{f}_{\text{ret}} = -q \vec{u}$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}_{\text{ret}} = M \vec{a}$$

\vec{q} = caudal \rightarrow es la cantidad de masa por segundo que sale del cuerpo.

\vec{f}_{ret} : fuerza de retropropulsión

1. Supongamos un carro de masa m_0 lleno de arena y en un instante comienza a salir arena con un caudal "q" y una velocidad relativa " \vec{u} " como se ve en la figura. Se buscará encontrar la aceleración del carro (suponer que parte del reposo).

$$\sum \vec{F}_x = q \cdot \vec{u} = M(t) \cdot \dot{v}_x$$

$$M_0 = M + m$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dt} + \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$$

$$M(t) = M_0 - q \cdot t$$

$$q \cdot \vec{u} = (M_0 - q \cdot t) \dot{v}_x$$

$$\dot{v}_x = \frac{q \cdot \vec{u}}{(M_0 - q \cdot t)} dt$$

$$\dot{v}_x = \frac{q \cdot \vec{u}}{(M_0 - q \cdot t)} = \frac{dv_x}{dt}$$

Figure 24: Ejemplo de ejercicio de Retropropulsión

4.8 Cantidad de Movimiento Angular

Supongamos tener una partícula de masa "m" que se mueve con una velocidad \vec{v} y supongamos tener un sistema de referencia como se ve en la figura.

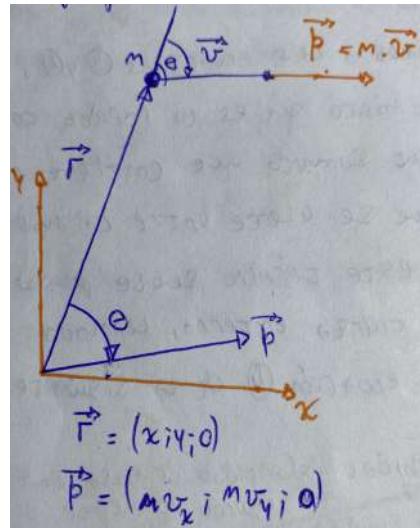


Figure 25: Sistema de Referencia Cantidad de Movimiento Angular

Se define a la **cantidad de movimiento angular** (\vec{L}) como el producto vectorial entre el vector desplazamiento (\vec{r}) y la cantidad de movimiento lineal (\vec{p}).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad (\text{Ec. 1})$$

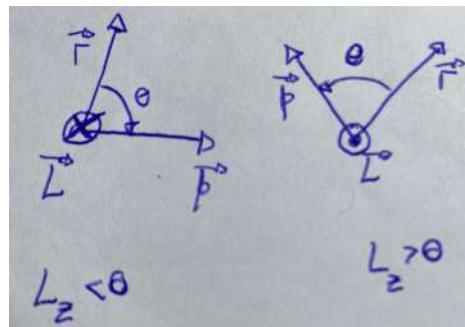
Como \vec{L} está definido por un producto vectorial, este tendrá las siguientes características:

1. Su módulo surgirá de la ecuación 2 donde θ es el ángulo comprendido entre los 2 vectores (\vec{r} y \vec{p});

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta \text{ (Ec. 2)}$$

2. Su dirección será perpendicular a la de los vectores que lo forman (\vec{r} y \vec{p});

3. Cumplirá la regla de la mano derecha: si abatimos \vec{p} por el camino más corto y seguimos este giro sobre los dedos de la mano derecha, el pulgar nos indicará el sentido de giro de \vec{L} .



Cruz sen-
tido horario
y punto sen-
tido ANTI
horario

Figure 26: Regla de la Mano derecha

4.9 Torque o Momento de una Fuerza

Supongamos tener una fuerza y un sistema de referencia, se define el **torque de una fuerza** \vec{T} como el producto vectorial entre la posición y la fuerza (posición del punto de aplicación de la fuerza).

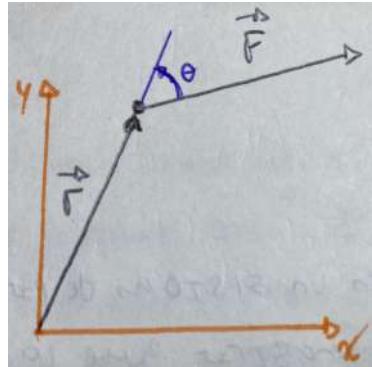


Figure 27: Sistema de Referencia Torque

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow [\text{Nw.m}]$$

El torque podría definirse como la fuerza que es necesario ejercer para hacer algo a la distancia (ejemplo usar una francesa para desenroscar una tuerca).

El torque cuantifica la tendencia a rotar que tiene una fuerza respecto al origen del sistema. Para encontrar el torque podríamos utilizar un determinante, para nuestro caso, si trabajamos en el plano "xy" el torque será perpendicular a ambos estando en el eje "z", obteniendo lo siguiente:

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

Una forma muy utilizada para calcular el torque es el concepto de **distancia mínima**.

No existe la letra tau mayúscula por lo que voy a usar "T" como reemplazo

Las unidades son DISTINTAS a las de Joules.

Los términos que contienen "z" (tanto el eje como la fuerza son nulos.

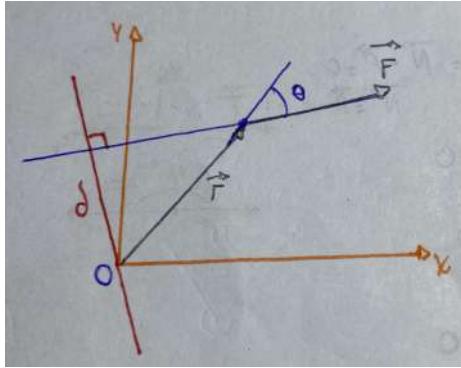


Figure 28: Gráfico teórico de Torque y Distancia Mínima

$$|\vec{T}| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \theta = |\vec{F}| d$$

Existe una relación entre las dos magnitudes definidas, si diferenciamos en el tiempo la cantidad de movimiento angular, obtendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r} \times \Sigma \vec{F} \rightarrow \Sigma \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{aligned}$$

Esto último está definido para una partícula pero si fuera un sistema de partículas los torques serían las fuerzas externas, podríamos demostrar que los torques de las fuerzas internas se anulan y la cantidad de movimiento angular sería la del sistema. Ejemplo:

1. Supongamos tener una partícula de masa "m" que está tomada a una cuerda y se mueve con MCU sobre un plano horizontal liso, inicialmente se mueve con " \vec{v}_A " ubicada en un radio " R_A ", si la cuerda pasa por un orificio y tiramos de ella hasta llegar a un radio " R_B " nos preguntamos qué pasara con " \vec{v}_B ".

En esta ecuación el término que contiene a la velocidad lineal multiplicada por la cantidad de movimiento LINEAL se hace nula porque el ángulo comprendido entre ellas es 0.

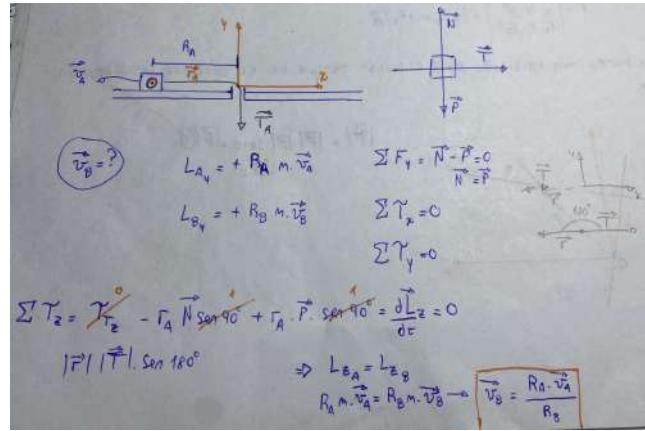


Figure 29: Ejemplo de Torque y MCU

La cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve en una trayectoria circular de radio "R" puede escribirse también en función de la velocidad angular de la siguiente manera:

$$|\vec{L}| = Rm |\vec{v}| \sin 90^\circ = Rm \frac{|\vec{v}|}{R} R \quad |\vec{r}| = R$$

$$|\vec{L}| = mR^2 \vec{\omega} \quad (\text{Ec. 1})$$

$$I = mR^2$$

El término que tiene a la masa multiplicada por el radio al cuadrado en la ecuación 1 recibe el nombre de **Momento de Inercia** y lo designaremos como $I = mR^2$, es equivalente a la masa en movimientos circulares pudiendo escribir la ecuación 2:

$$|\vec{L}| = I |\vec{\omega}| \quad (\text{Ec. 2})$$

El producto de la masa por el radio "R" al cuadrado se define como la Inercia.

5 Unidad N°5: Cuerpo Rígido

Entendemos por **cuerpo rígido** a un conjunto muy grande de partículas que mantendrán sus distancias invariables, ocasionando que el cuerpo no se pueda deformar. Para estudiar sistemas de partículas tenemos 2 ecuaciones vectoriales:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F}_{ext} &= M \vec{a}_{CM} \\ \vec{T}_{ext} &= \frac{d\vec{L}}{dt}\end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones derivarán en otras 6 ecuaciones (3 referentes a cada eje coordenado para cada ecuación) pero usaremos solamente 3 de esas ecuaciones para trabajar las cuales serán:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{ext_x} &= Ma_{CMx} \text{ (Ec. 1)} \\ \Sigma F_{ext_y} &= Ma_{CMy} \text{ (Ec. 2)} \\ \Sigma T_{ext_z} &= \frac{dL_z}{dt} \text{ (Ec. 3)}\end{aligned}$$

5.1 Grados de Libertad

Entendemos por **grado de libertad** de una partícula al número de ecuaciones linealmente independientes que necesitaremos para describir su movimiento, para una partícula necesitaremos 3 ecuaciones para determinar su posición $[x(t), y(t), z(t)]$, decimos entonces que una partícula tiene 3 grados de libertad.

Si queremos fijar la posición de un CR, lo haremos fijando la posición de 3 puntos, 9 grados de libertad pero la condición de invariancia de la distancia entre las partículas hará que haya 3 grados de libertad que no se puedan tener en cuenta lo que nos deja con un total de 6 grados de libertad.

Si las fuerzas que actúan sobre el CR están sobre el plano "xy", los torques actuarán en el eje "z".

5.2 Estática del Cuerpo Rígido

Si el CR se encuentra en reposo, las ecuaciones 1, 2 y 3 se igualarán a cero dando un sistema homogéneo a resolver:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{ext_x} &= 0 \\ \Sigma F_{ext_y} &= 0 \\ \Sigma T_z &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo:

1. Un cuerpo de 4 m de longitud y 100 Nw de peso se coloca sobre 2 piedras separadas 3 metros entre sí como se ve en la figura. Determinar las fuerzas que las piedras ejercen sobre el cuerpo.

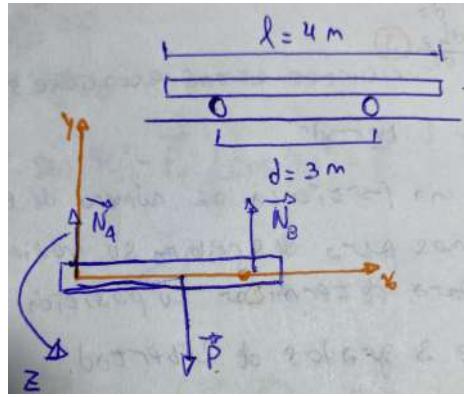


Figure 30: Diagrama del problema y Diagrama de Cuerpo Aislado Ej. 1

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = \vec{N}_A + \vec{N}_B = \vec{P}$$

$$\Sigma T_z = -\vec{P} \frac{l}{2} + \vec{N}_B d = 0$$

2. Una escalera de 6 m pesa 200 Nw , se apoya contra una pared como se ve en la figura, la pared es lisa y la escalera tiene con el suelo $\mu_e = 0,3$. Un hombre de 80 kg comienza a subir la escalera, ¿podrá subir a lo largo de toda la escalera?

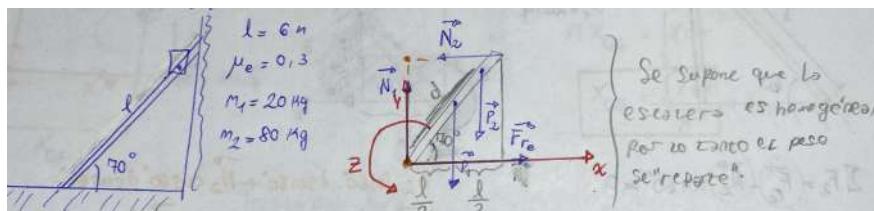


Figure 31: Ejemplo Escalera y Suelo 1

$$\Sigma F_x = \vec{F}_{re} - \vec{N}_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = \vec{N}_1 - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = 0$$

$$\Sigma T_z = \vec{N}_2 l \sin(70^\circ) - \vec{P}_1 \frac{l}{2} \cos(70^\circ) - \vec{P}_2 \frac{l}{2} \cos(70^\circ) = 0$$

$$\text{Si } d = l = 6 \text{ m} \rightarrow \vec{F}_{re} = \vec{N}_2$$

$$\vec{F}_{re_{max}} = \mu_e \vec{N}_1 = 0,3 (\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0,3 \times 1000 \text{ Nw} = 300 \text{ Nw}$$

Igualando las fricciones, se puede obtener el d_{max}

3. Una escalera se coloca contra una pared, determinar las fuerzas que la pared lisa y el suelo ejercen sobre la escalera.

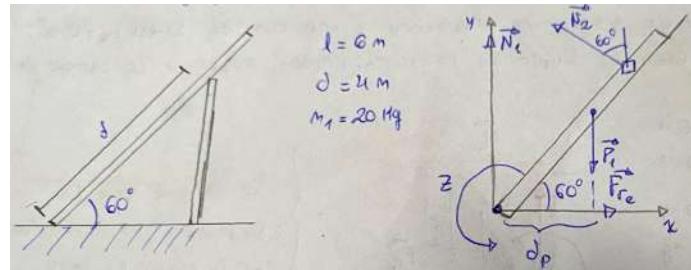


Figure 32: Ejemplo Escalera y Suelo 2

$$\Sigma F_x = \vec{F}_{re} - \vec{N}_2 \sin(60^\circ) = 0$$

$$\Sigma F_y = \vec{N}_1 - \vec{P}_1 + \vec{N}_2 \cos(60^\circ) = 0$$

$$\Sigma T_z = \vec{N}_2 d - \vec{P}_1 \frac{l}{2} \cos(60^\circ) = 0$$

4. Las 2 barras de la figura son idénticas, se las suelda en forma de "T" simétrica, ¿cuál será la tensión en la cuerda y las fuerzas que el suelo ejerce para mantener el equilibrio?

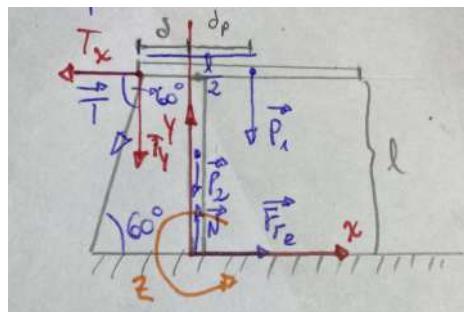


Figure 33: Ejemplo Barra, soga y suelo

Datos: $l = 6 \text{ m}$; $d = 2 \text{ m}$; $m = 20 \text{ kg}$

$$\Sigma F_x = \vec{F}_{re} - \vec{T}_x = 0$$

$$\Sigma F_y = \vec{N} - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 - \vec{T}_y = 0$$

$$\Sigma T_z = -\vec{P}_1 \left(\frac{l}{2} - d\right) + \vec{T}_x l + \vec{T}_y d = 0$$

5.3 Centro de Gravedad

El **centro de gravedad** de un cuerpo rígido es el punto donde actúa la resultante de los pesos elementales de las partículas que componen al CR.

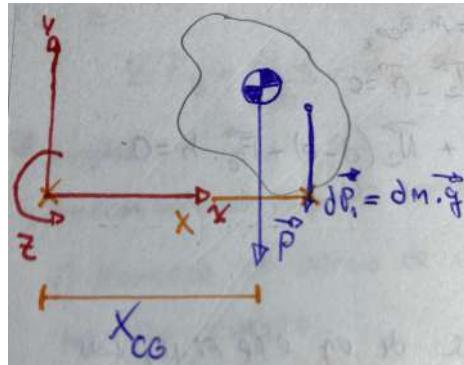


Figure 34: Diagrama Centro de Gravedad

$$T_{Pz} = -mgX_{CG} = -\int_0^M gdmX$$

$$MX_{CG} = \int_0^M Xdm$$

$$X_{CG} = \frac{\int_0^M Xdm}{M} = X_{CM}$$

5.4 Traslación Pura

Este movimiento nos está indicando que el cuerpo rígido no puede rotar, podrá acelerar teniendo todas las partículas que componen al CR la **misma** aceleración y describiendo exactamente el mismo desplazamiento entre dos instantes cualquiera de tiempo.

Las ecuaciones que resultarán de estas condiciones serán las siguientes:

$$\Sigma F_x = ma_{cmx}$$

$$\Sigma F_y = ma_{cmy}$$

$$\Sigma T_z = 0$$

Ejemplo:

1. El cuerpo rígido de la figura de 10 kg tiene con el plano $\mu_d=0,2$ se le aplica una fuerza horizontal como se le aplica en la figura. Determinar:
 - (a) La aceleración del cuerpo rígido.
 - (b) La ubicación de la fuerza normal.

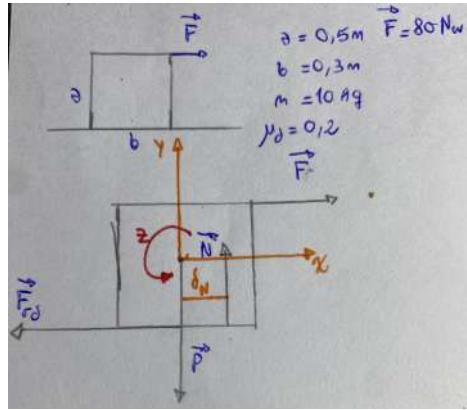


Figure 35: Ejemplo Traslación Pura

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \vec{F} - \vec{F}_{rd} = ma_{cmx} & \rightarrow & \quad \vec{F}_{rd} = \mu_d \vec{N} \\ \Sigma F_y &= \vec{N} - \vec{P} = ma_{cmy} = 0 & \rightarrow & \quad \vec{N} = \vec{P} \\ \Sigma T_z &= \vec{N} d_N - \vec{F} \frac{a}{2} - \vec{F}_{rd} \frac{a}{2} = 0 & \rightarrow & \quad d_N = \frac{(\vec{F} \frac{a}{2} + \vec{F}_{rd} \frac{a}{2})}{\vec{N}}\end{aligned}$$

2. La moto de la figura acelera en forma horizontal, determinar:

- (a) Las fuerzas que el suelo ejerce sobre la rueda trasera y delantera (despreciando la fricción sobre la rueda delantera).

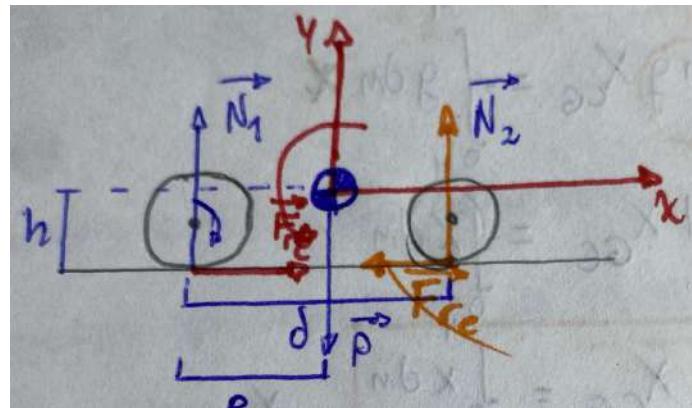


Figure 36: Gráfico Centro de Gravedad Moto

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \vec{F}_{re} = ma_{cmx} \\ \Sigma F_y &= \vec{N}_1 + \vec{N}_2 - \vec{P} = 0 \\ \Sigma T_z &= -\vec{N}_1 e + \vec{N}_2 (d - e) + \vec{F}_{re} h = 0\end{aligned}$$

5.5 Rotación Pura

Este movimiento tiene lugar cuando el CR **rota** respecto de un *eje fijo*, las poleas de eje fijo tienen este movimiento, para estudiar la rotación pura colocaremos un sistema de referencia sobre el eje fijo ya que sino se convertiría en un sistema NO inercial.

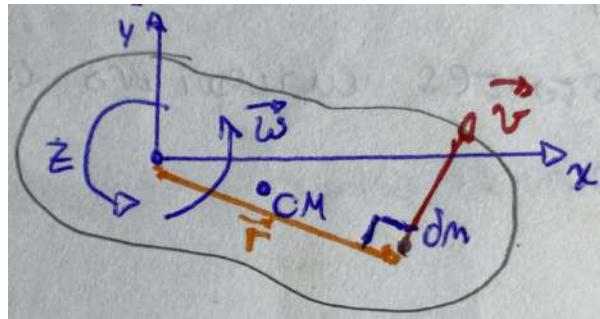


Figure 37: Gráfico Genérico Eje de Rotación

Cada punto del CR describirá una trayectoria circular de igual velocidad angular ($\vec{\omega}$) pero distinto radio según de qué partícula estemos hablando lo que ocasionará que su velocidad tangencial cambie. Si tomamos una masa elemental, podremos definir su cantidad de movimiento elemental ($d\vec{L}$).

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\vec{v}$$

Si el CR es plano y se encuentra en el plano "xy", \vec{L} estará sobre el eje "z".

$$L_z = \int_0^m r v dm \operatorname{sen}(90^\circ)$$

$$L_z = \int_0^m r v \frac{r}{r} dm = [\int_0^m r^2 dm] \vec{\omega} = I_z \omega_z$$

La cantidad de movimiento angular (\vec{L}) para un cuerpo rígido plano puede expresarse como el producto de la integral entre corchetes (llamada momento de inercia) y la velocidad angular del cuerpo rígido. Esto se expresa en unidades sobre el eje "z".

$$\Sigma T_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha_z$$

A mayor radio dentro del CR, mayor será la velocidad tangencial de la partícula.

Determinaremos algunos momentos de inercia típicos:

1. Momento de Inercia de un **anillo** de masa "m" y radio "R" respecto de un eje que pasa por su centro:

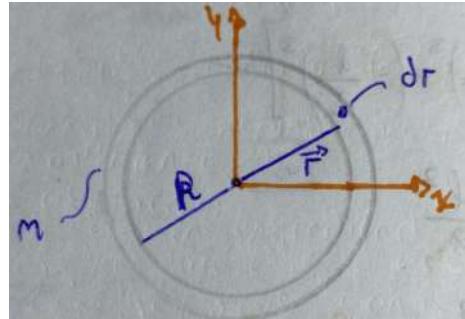


Figure 38: Gráfico Anillo de radio R con un eje

$$|\vec{r}| = R$$

$$I_z = \int_0^m r^2 dm = R^2 \int_0^m dm = MR^2$$

2. Momento de inercia de un disco de masa "m" y radio "R" respecto de su centro:

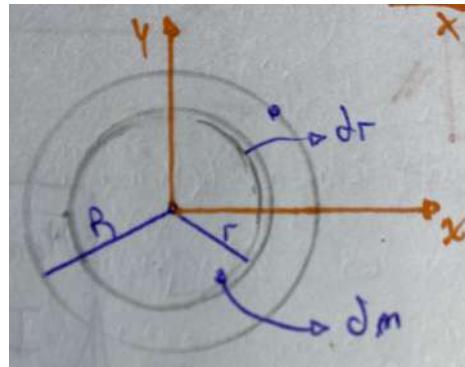


Figure 39: Gráfico Anillo de radio R en su centro

$$dI_z = dm r^2$$

$$\delta = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \delta dV \quad dV = 2\pi r e dr \quad dm = \delta 2\pi r e dr$$

$$I_z = \int_0^M \delta 2\pi e r dr r^2$$

$$I_z = \delta 2\pi e \int_0^M r^3 dr$$

$$I_z = \delta 2\pi e \frac{R^4}{4}$$

$$I_z = M \frac{1}{2} R^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$

3. Inercia de una barra respecto de su centro de masas:

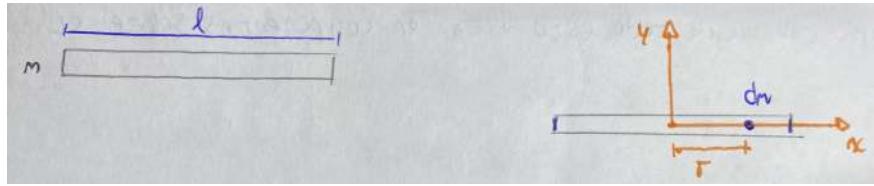


Figure 40: Diagrama Barra de longitud "l"

$$dI_z = r^2 dm \rightarrow r = x$$

$$\delta = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \delta dV = \delta S dx$$

$$dV = S dx$$

$$dI_z = x^2 \delta S dx$$

$$I_z = \delta S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx$$

$$I_z = \delta S \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \delta S \left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3 \right]$$

$$I_z = \frac{\delta S}{3} 2 \frac{l^3}{8}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \delta S l^3 \quad \rightarrow \quad \delta S l = m$$

$$I_z = \frac{1}{12} m l^2$$

Ejemplo:

- Una polea de masa m_1 y radio R está tomada de un eje fijo que pasa por su centro, un cuerpo de masa m_2 se toma de una cuerda que se encuentra enroscada en la polea y no desliza. Determinar la aceleración del cuerpo 2. Datos: $m_1; m_2; R$

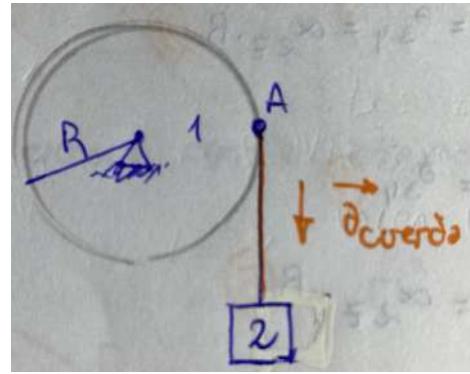


Figure 41: Diagrama Polea y Cuerpo

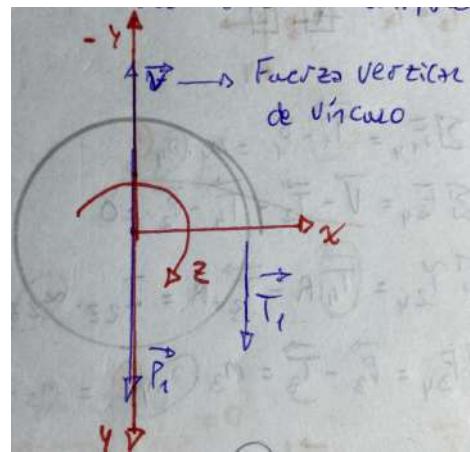


Figure 42: Diagrama de Cuerpo Aislado Polea

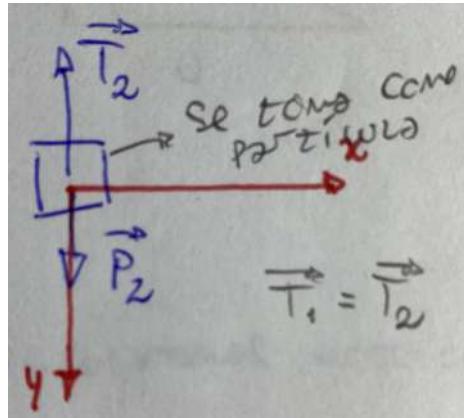


Figure 43: Diagrama Cuerpo Aislado Cuerpo 2

$$\Sigma F_{1y} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 - \vec{V} = m_1 a_{cm_y} = 0 \rightarrow \vec{V} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 \text{ (Ec. 1)}$$

$$\Sigma T_{1z} = \vec{T}_1 R = I_{1z} \alpha_{1z} = \frac{1}{2} m_1 R \alpha_{1z} \text{ (Ec. 2)}$$

$$\Sigma F_{2y} = \vec{P}_2 - \vec{T}_2 = m_2 a_{2y} \text{ (Ec. 3)}$$

$$\vec{a}_{cuerda} = \vec{a}_2 = \vec{a}_{T_A}$$

$$a_{2y} = \alpha_{1z} R$$

2. Determinar la aceleración de los cuerpos de la figura.

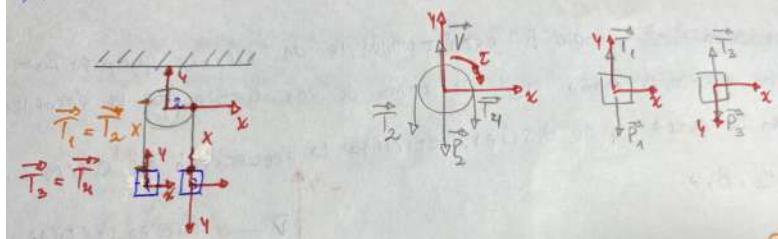


Figure 44: Diagrama de Polea con 2 cuerpos

$$\Sigma F_{1y} = \vec{T}_1 - \vec{P}_1 = m_1 a_y \text{ (Ec. 1)}$$

$$a_{1y} = a_{3y} = \alpha_{2z} R$$

$$\Sigma T_{2y} = \vec{T}_4 R - \vec{T}_2 R = I_{2z} \alpha_{2z} \text{ (Ec. 2)}$$

$$\Sigma F_{2y} = \vec{V} - \vec{T}_2 - \vec{T}_4 - \vec{P}_2 = 0$$

$$\Sigma F_{3y} = \vec{P}_3 - \vec{T}_3 = m_3 a_{3y} = m_3 a_{1y} \text{ (Ec. 3)}$$

$$\vec{T}_4 - \vec{T}_2 = \frac{1}{2} m_2 a_{1y}$$

5.6 Teorema de Steiner

Este teorema relaciona los momentos de inercia de cuerpos rígidos planos siendo estos dos ejes paralelos y uno de ellos pasa por el centro de masas.

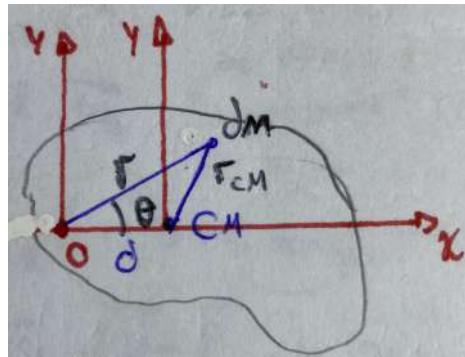


Figure 45: Diagrama Genérico del Teorema de Steiner

$$dI_{CM} = r_{CM}^2 dm$$

$$dI_o = r^2 dm$$

Relacionando con el teorema del coseno:

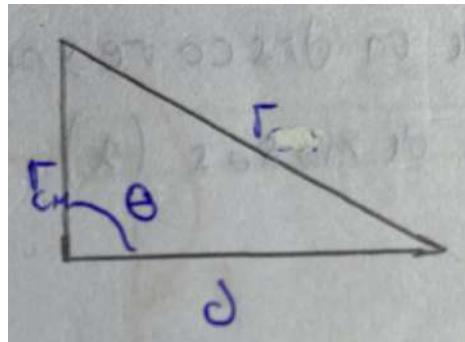


Figure 46: Triángulo Rectángulo representativo

$$r^2 = r_{CM}^2 + d^2 - r_{CM}d \cos \theta$$

$$r^2 dm = r_{CM}^2 dm + d^2 dm - r_{CM}d \cos \theta dm$$

$$I_o = I_{CM} + M d^2 - d \int_0^m r_{CM} \cos \theta dm$$

$$I_o = I_{CM} + M d^2$$

El término que posee la integral se anula ya que representa a la posición del CM respecto del CM.

Calcularemos entonces 2 inercias utilizando el teorema de Steiner:

1. Un disco respecto de un eje que pasa por su periferia.
2. Momento de inercia de una barra que pasa por uno de sus extremos.

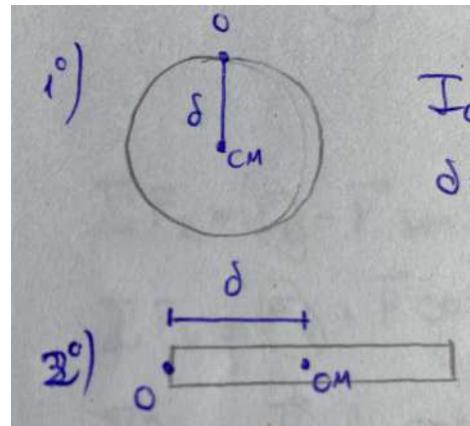


Figure 47: Diagramas Disco y Barra Steiner

$$1. \quad I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2 \quad d = R$$

$$I_o = I_{CM} + mR^2$$

$$I_o = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$2. \quad d = \frac{l}{2}$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_o = I_{CM} + md^2$$

$$I_o = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

5.7 Teorema de la Figura Plana

Supongamos tener un cuerpo rígido plano y un sistema de referencia que pasa por su centro de masas.

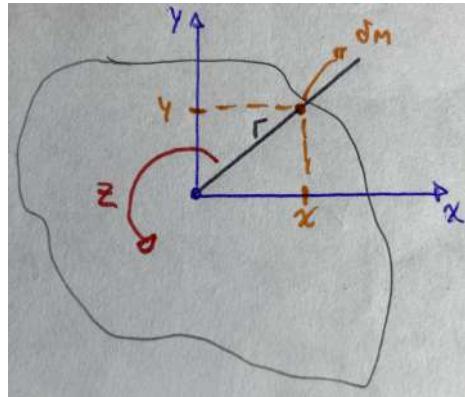


Figure 48: Caption

$$dI_z = r^2 dm \qquad dI_x = y^2 dm \qquad dI_y = x^2 dm$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 dm = x^2 dm + y^2 dm$$

$$I_z = I_y + I_x$$

Como aplicación de este teorema calcularemos el momento de inercia de un disco respecto de un eje que se encuentra en su plano y que pasa por el centro de masas (x).

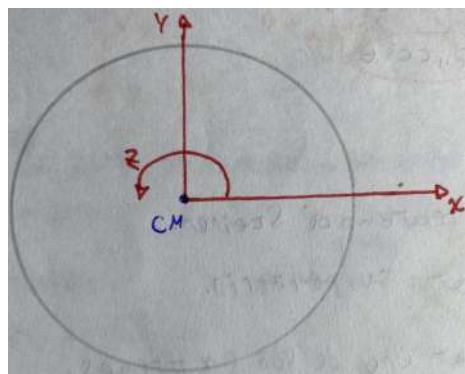


Figure 49: Disco Teorema Figura Plana

$$I_x = I_y \rightarrow I_z = 2I_x$$

$$\frac{I_z}{2} = I_x$$

$$I_x = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_x = \frac{1}{4} m R^2$$

Ejemplo:

1. La barra de la figura está tomada de un eje en un extremo, al pasar por la horizontal tiene una velocidad angular de $\vec{\omega} = 10 \frac{RAD}{s}$, determinar las fuerzas en el eje.

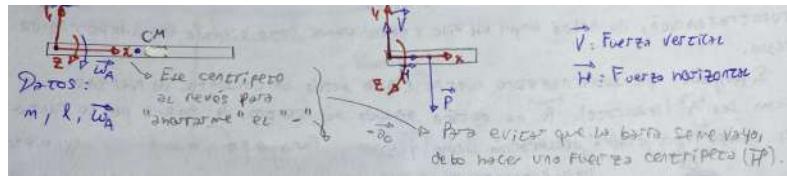


Figure 50: Ejemplo Figura Plana Barra

$$\Sigma F_x = \vec{H} = ma_{CMx}$$

$$\Sigma F_y = \vec{V} - \vec{P} = ma_{cmy} \rightarrow \vec{V} - \vec{P} = ma_{tA} \quad \vec{a}_{tA} = \alpha_z \frac{l}{2}$$

$$\Sigma T_z = \vec{P} \frac{l}{2} = I_z \alpha_z$$

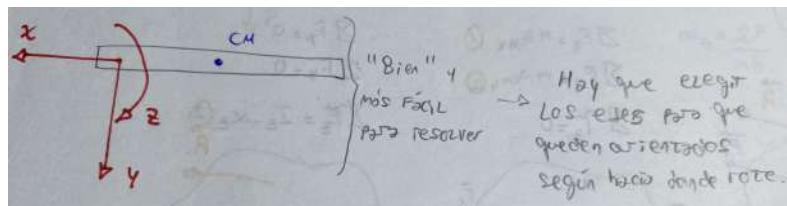


Figure 51: Alternativa al mismo ejemplo

2. La barra del problema anterior se encuentra en el punto "B" con $\vec{\omega}_B$ como se ve en la figura.

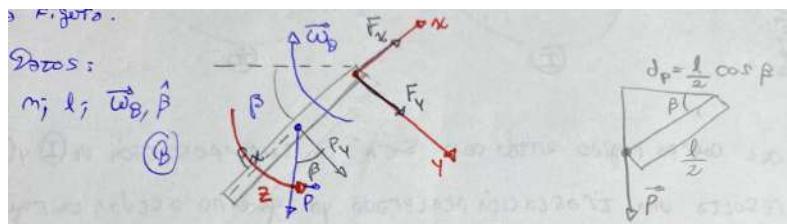


Figure 52: Ejemplo Figura Plana Barra 2

$$\sum F_x = F_x - \vec{P} \sin \beta = m a_{CMx} = m(\bar{\omega}^2 \frac{l}{2}) \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\sum F_y = F_y + \vec{P} \cos \beta = m a_{CMy} = m \alpha_z \frac{l}{2} \quad (\text{Ec. 3})$$

$$\sum T_z = \vec{P} \frac{l}{2} \cos \beta = I_z \alpha_z = \frac{1}{3} ml^2 \alpha_z$$

5.8 Rototraslación

Este movimiento se trata de uno donde no hay un eje fijo y es un CR plano. Suponiendo que sobre el CR se aplica un conjunto de fuerzas y que su resultante (\vec{R}) es distinta de cero, esta no estará aplicada sobre el centro de masas ocasionando que tenga una aceleración lineal y una angular. Para estudiar este movimiento se aplicará el *principio de superposición* y se aplicará al CR dos fuerzas idénticas pero opuestas sobre su CM del mismo valor de \vec{R} .

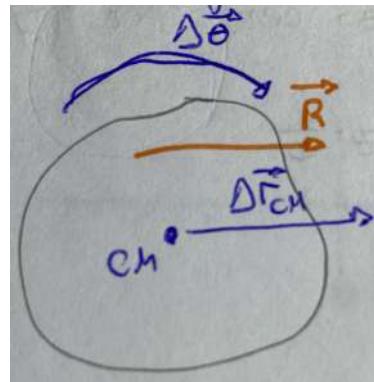


Figure 53: Diagrama CR plano y su resultante

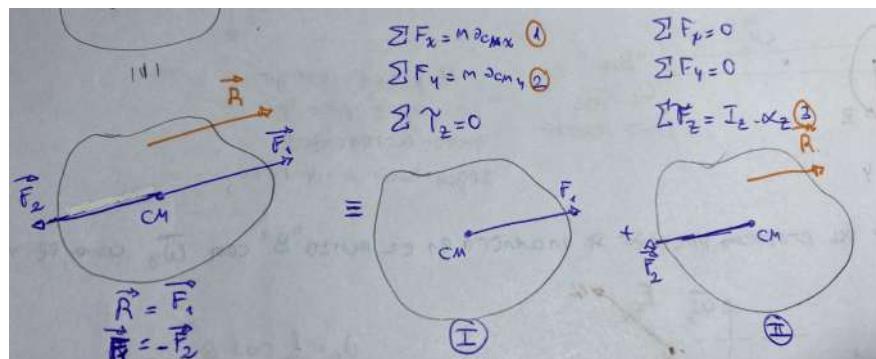


Figure 54: Diagrama CR plano, resultante y suma de fuerzas "artificiales"

El movimiento del CR será la superposición de I y II. El movimiento de I resulta de una traslación acelerada ya que no actúan torques impidiendo que haya una rotación. Mientras que el movimiento de II será una rotación pura alrededor de un eje que pasaría por su centro de masas. Por lo tanto para rototraslación utilizaremos las tres ecuaciones indicadas (1, 2 y 3) teniendo en cuenta que el sistema tendrá que estar colocado en el CM del CR.

Ejemplo:

1. El cilindro se encuentra sobre una superficie horizontal lisa, por medio de una cuerda se le aplica una fuerza horizontal \vec{F} , determinar la aceleración del CR.

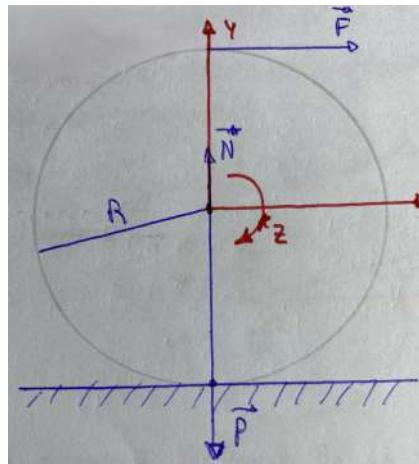


Figure 55: Diagrama Rototraslación de un cilindro

Datos: m, R, \vec{F}

$$\Sigma F_x = \vec{F} = ma_{cmx} \quad a_{cmx} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\Sigma F_y = \vec{N} - \vec{P} = ma_{cmy} = 0$$

$$\Sigma T_z = \vec{F}R = I_z \alpha_z = \frac{1}{2}mR^2 \alpha_z \quad \rightarrow \quad \alpha_z = \frac{2\vec{F}}{mR}$$

5.9 Velocidades y Aceleraciones de distintos puntos de un CR

Suponiendo tener un CR que en un instante se mueve en las condiciones indicadas.

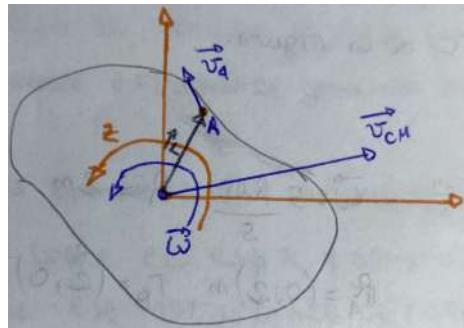


Figure 56: Gráfico Cuerpo Rígido

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A/CM} + \vec{v}_{CM} \quad (\text{Ec. 1})$$

La ecuación 1 nos da la velocidad del punto en función de la velocidad del CM y la velocidad del punto "A" respecto del CM que será tangencial ya que "A" respecto del CM describirá un movimiento circular. Se puede escribir esa misma ecuación en función de la velocidad angular del CR:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A + \vec{v}_{CM} \quad (\text{Ec. 2})$$

Derivando la ecuación 2, llegamos a la aceleración del punto A la cual constará de:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{a}_{CM} \\ \vec{a}_A &= \vec{\alpha} \vec{r}_A + \vec{\omega} \vec{v}_{A/CM} + \vec{a}_{CM} \quad (\text{Ec. 3}) \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_{t/CM} + \vec{a}_{C_{A/CM}} + \vec{a}_{CM} \end{aligned}$$

La ecuación 2 adoptará una forma particular para un cuerpo rígido plano con \vec{v}_{CM} en el plano "xy" y $\vec{\omega}$ sobre el eje "z".

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A + \vec{v}_{CM} \quad (\text{Esta ecuación deriva en el siguiente sistema de ecuaciones})$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = v_{CMx} - \omega_z y_A \\ v_{Ay} = v_{CMy} + \omega_z x_A \end{cases}$$

El primer término corresponde a la aceleración tangencial del punto "A" respecto del CM y el segundo corresponde a la aceleración centrípeta del punto "A" respecto del CM.

Ejemplo:

1. Supongamos tener un disco que se mueve en las condiciones indicadas y determinar las velocidades de los puntos "A", "B" y "C" de la figura.

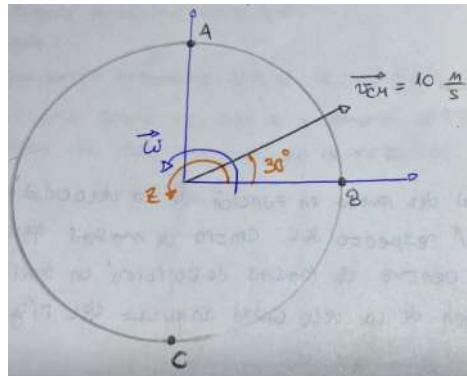


Figure 57: Ejemplo Disco y velocidades

Datos:

$$\bar{\omega} = 5 \frac{RAD}{S}$$

$$R = 2 \text{ m}$$

$$r_A = (0; 2) \text{ m}$$

$$r_B = (2; 0) \text{ m}$$

$$r_C = (0; -2) \text{ m}$$

$$v_{Ax} = \vec{v}_{CM} \cos 30^\circ - \bar{\omega} R$$

$$v_{Ay} = \vec{v}_{CM} \sin 30^\circ + \bar{\omega} x_A = v_{Ay} = \vec{v}_{CM} \sin 30^\circ + \bar{\omega} \cdot 0$$

$$v_{Bx} = \vec{v}_{CM} \cos 30^\circ - \bar{\omega} y_B$$

$$v_{By} = \vec{v}_{CM} \sin 30^\circ + \bar{\omega} R$$

$$v_{Cx} = \vec{v}_{CM} \cos 30^\circ - \bar{\omega} \cdot 0$$

$$R = x_B$$

Cuando un rígido se encuentra rototrasladando, existe un punto donde, por un instante, no tendrá velocidad ya que al observar la ecuación 2 esta será la opuesta a la \vec{v}_{CM} . Este punto estará sobre una recta perpendicular a dicha velocidad pudiendo estar incluso fuera del CR recibiendo el nombre de **eje instantáneo de rotación**, todo el movimiento del rígido puede estudiarse como una rotación pura alrededor de dicho eje. Ejemplo:

1. Supongamos que la velocidad del CR del problema anterior estuviera sobre el eje "x", tomando los valores indicados, encontraremos el *eje instantáneo de rotación*.

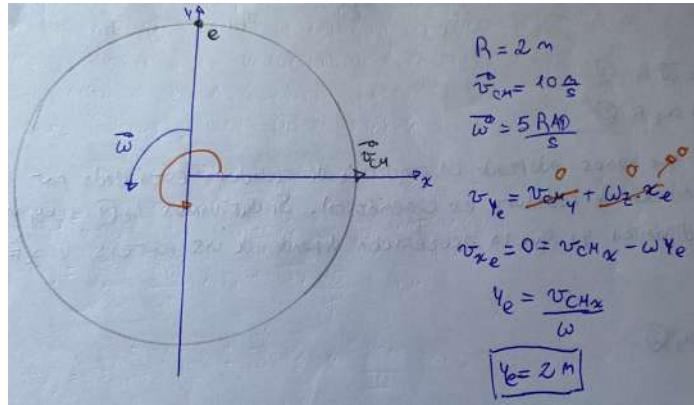


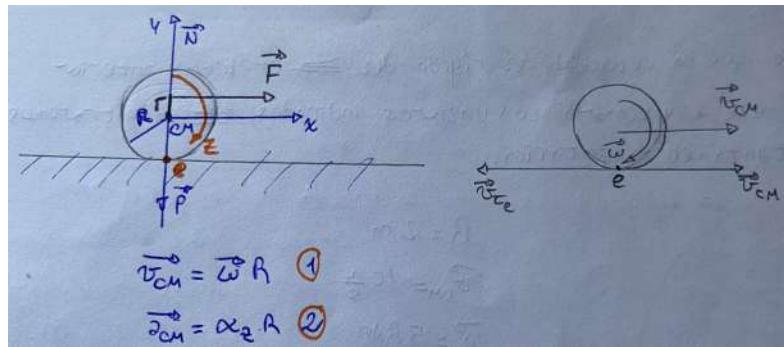
Figure 58: Ejemplo resuelto "Eje instantáneo de rotación"

5.10 Rodadura

Decimos que un CR está en **rodadura** cuando la velocidad del *eje instantáneo de rotación* es nula.

Ejemplo:

1. ¿Desde qué posición "r" hay que tirar el cilindro con la fuerza \vec{F} para que el cuerpo ruede en una superficie lisa?



El punto de contacto de, por ejemplo, una rueda con el suelo "no tiene" velocidad.

Figure 59: Ejemplo Rodadura 1

Teniendo en cuenta el convenio adoptado en la ecuación 1, podemos afirmar que la condición de rodadura está dada por esta misma ecuación.

Derivando la ecuación 1 llegamos a una condición dinámica ya que la aceleración depende de las fuerzas y alfa (α_z) de sus torques.

La condición de rodadura es cinemática.

$$\Sigma F_x = \vec{F} = m \cdot a_{CMx} \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = \vec{N} - \vec{P} = 0$$

$$\Sigma T_z = \vec{F} \cdot r = I_z \alpha_z$$

$$\vec{F} \cdot r = \frac{1}{2} m R^2 a_{CMx} \quad (1)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{\vec{F} \cdot r}{\vec{F}} = \frac{\frac{1}{2} m R \cdot a_{CMx}}{m \cdot a_{CMx}} \rightarrow r = \frac{R}{2}$$

Si existiera fricción entre el cilindro y la superficie, si está en rodadura la fricción que actuaría sería la estática por lo cual podrá tomar un rango de valores tratando siempre de que el punto de contacto no deslice para que el cuerpo pueda rodar.

Supongamos que en el problema anterior $r=R$, ¿cuál será la fricción necesaria y cuál el coeficiente mínimo de fricción?

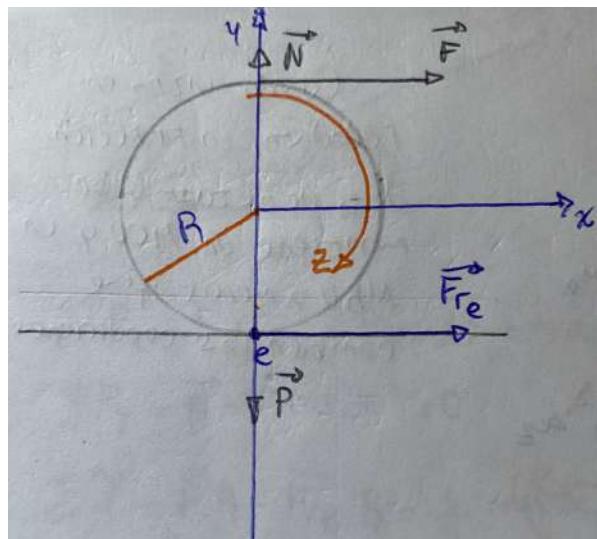


Figure 60: Ejemplo Rodadura 2

$$\Sigma F_x = \vec{F} + \vec{F}_{re} = m \cdot a_{CMx} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = \vec{N} - \vec{P} = 0$$

$$\Sigma T_z = \vec{F} \cdot R - \vec{F}_{re} \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \alpha_z \quad (2)$$

$$(1) = 2 \cdot (2) \rightarrow \vec{F} + \vec{F}_{re} = 2 \cdot \vec{F} - 2 \cdot \vec{F}_{re}$$

$$\vec{F}_{re} = \frac{\vec{F}}{3}$$

$$\vec{F}_{re} = \vec{F}_{remax} = \mu_e \vec{N} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

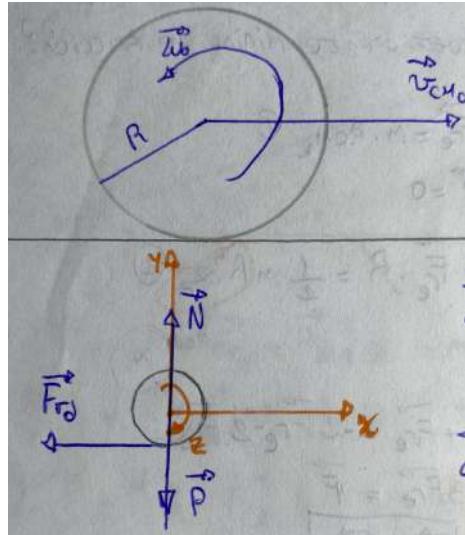
$$\frac{\vec{F}}{3} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

$$\mu_e = \frac{\vec{F}}{3 \cdot m \cdot g}$$

La aceleración angular por el radio nos da la aceleración del CM.

Ejemplo:

- El cilindro del problema anterior se arroja en las condiciones iniciales indicadas, tiene con el plano μ_d , determinar para qué tiempo entrará en rodadura.



Cuando entra en rodadura, la fricción deja de actuar y se mantiene con MCU y MRU a menos que cambien las condiciones.

Figure 61: Ejemplo Cilindro y rodadura (fricción dinámica)

Datos: m ; μ_d ; $\vec{\omega}_o$; \vec{v}_{CMo} ; R

$$\begin{cases} \sum F_x = -\vec{F}_{rd} = m \cdot a_{CMx} \\ \sum F_y = N - P = 0 \\ \sum Tz = \vec{F}_{rd} \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \alpha_z \end{cases}$$

$$\vec{F}_{rd} = \mu_d \cdot m \cdot g \rightarrow a_{CMx} = \mu_d \cdot g \quad \alpha_z = 2 \cdot \frac{\mu_d \cdot g}{R}$$

$$\Rightarrow a_{CMx} = \alpha_z \cdot R$$

$$\begin{cases} v_{CMx_B} = v_{CMx_0} - \mu_d \cdot g \cdot t_B \\ \omega_z = -\omega_0 + 2 \cdot \frac{\mu_d \cdot g}{R} \cdot t_B \end{cases} \rightarrow \text{Se impone condición de rodadura}$$

$$v_{CMx_B} = \omega_z \cdot R$$

$$v_{CMx_0} - \mu_d \cdot g \cdot t_B = -\omega_0 \cdot R + 2 \cdot \mu_d \cdot g \cdot t_B$$

$$v_{CMx_0} + \omega_0 \cdot R = 3 \cdot \mu_d \cdot g \cdot t_B$$

$$t_B = \frac{v_{CMx_0} + \omega_0 \cdot R}{3 \mu_d \cdot g}$$

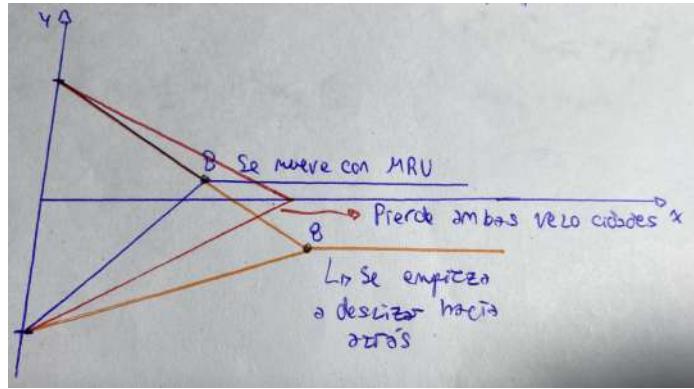


Figure 62: Gráfico de Comparación de Movimientos

Ejemplos:

1. El cilindro de la figura se encuentra en reposo y tiene con el plano μ_e . Determinar la fuerza máxima y la aceleración del cilindro para que suba rodando.

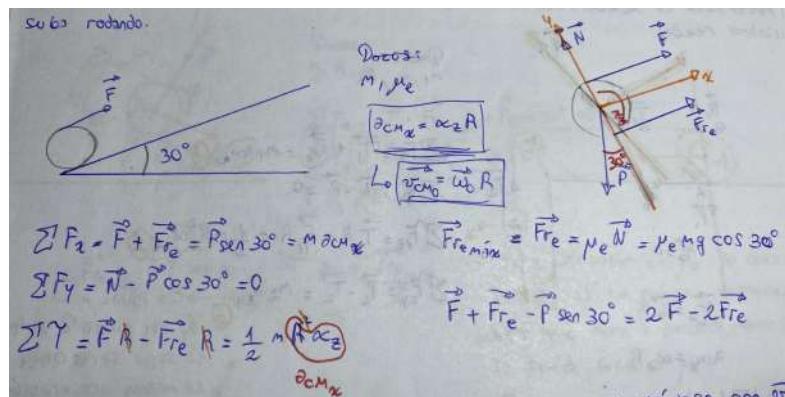


Figure 63: Ejemplo Rodadura Plano Inclinado

2. El cilindro de la figura rueda sobre el plano rugoso moviéndose con \vec{v}_{CMo} . Determinar la fuerza máxima que podemos aplicar hasta detenerlo rodando y el desplazamiento del centro de masas hasta detenerse.

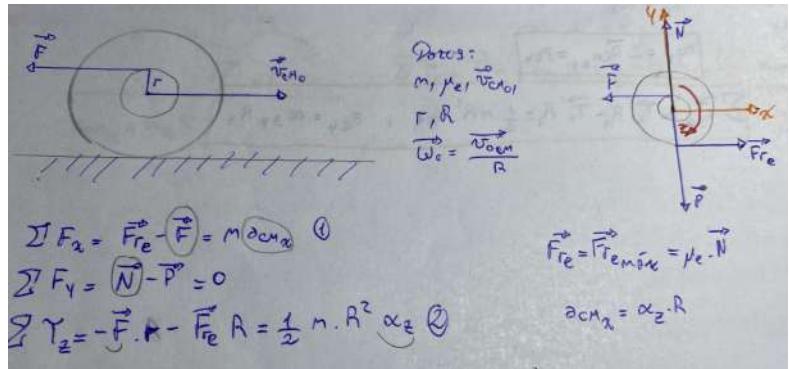


Figure 64: Ejemplo Rodadura Plano Rugoso

3. Determinar la aceleración de los cuerpos de la figura si la polea no tiene masa y el cilindro rueda.

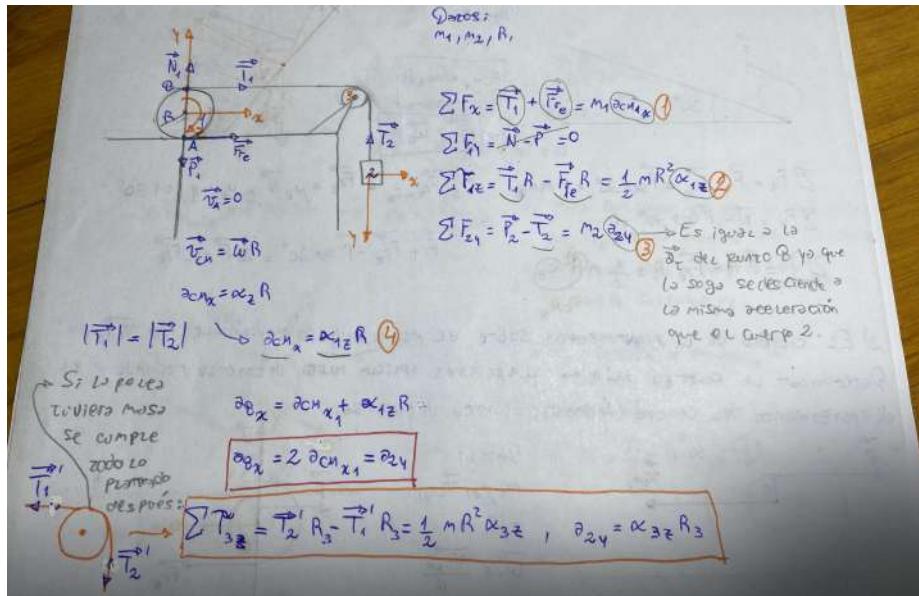


Figure 65: Ejemplo Rodadura y Polea

4. El cilindro de la figura se encuentra tomado de una cuerda apoyado sobre un plano rugoso. Determinar:
- ¿Cuál será el coeficiente de fricción mínimo para que se mantenga en equilibrio?
 - Si tuviera μ_d , ¿qué aceleración tendría el CR si cae deslizando?

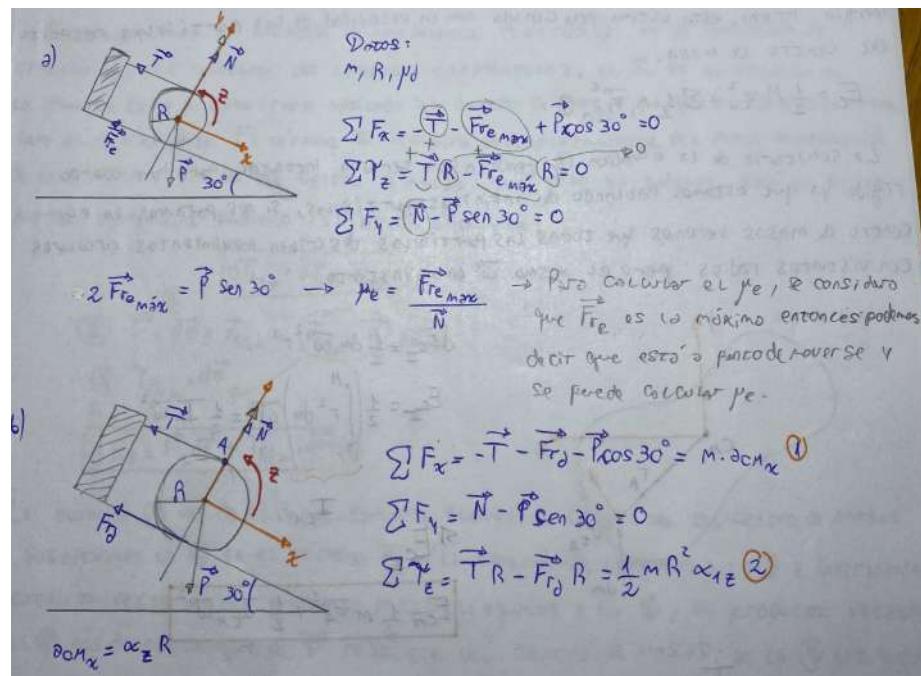


Figure 66: Plano inclinado, soga y deslizamiento

5.11 Energía Cinética de un Cuerpo Rígido

El análisis parte de la expresión de la energía cinética de un *sistema de partículas*, el cual estaba dividido en 2 términos: el de la energía de *traslación* y el de la energía *interna* relacionada a la velocidad de las partículas respecto del centro de masas.

$$E_c = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2_{CM} \quad (\text{Ec. 1})$$

La sumatoria de la ecuación 1 tendría que ser una integral al tener en cuenta que se trata de un CR debido a que se tratan de infinitas partículas, al pararse en el CM se puede observar que todas las partículas describen un movimiento circular con el mismo $\vec{\omega}$ pero distinto radio en el mismo instante de tiempo quedando la siguiente ecuación:

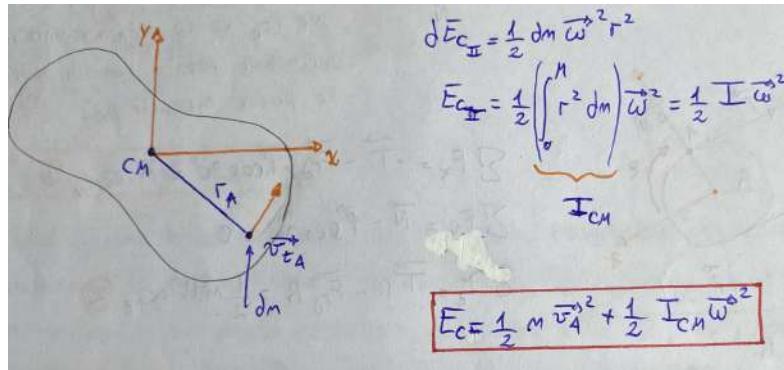


Figure 67: Diagrama CR genérico y Ecuación Energía Cinética CR

5.12 Trabajo de una Fuerza Aplicada a un CR

La definición de trabajo nos habla de una fuerza y el desplazamiento de su punto de aplicación sin especificar la importancia en una partícula específica o en un rígido.

$$dW_F = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A \quad (\text{Ec. 1})$$

Cuando se trabaje con un rígido, se reemplazara al desplazamiento elemental de la ecuación 1 en 2 términos utilizando el CM siempre como punto intermedio.

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{A/CM}$$

$$(\text{Ec. 2}) d\vec{r}_A = d\vec{r}_{CM} + d\vec{r}_{A/CM} \Rightarrow dW_F = \vec{F} \cdot d\vec{r}_{CM} + \vec{F} \cdot d\vec{r}_{A/CM} \quad (\text{Ec. 3})$$

El primer término corresponde al trabajo de la fuerza como si estuviera aplicada al centro de masas ya que el desplazamiento será el de este punto y el segundo es el correspondiente al desplazamiento desde el punto de aplicación de la fuerza respecto del centro de masas. Este segundo término será tangencial pudiendo escribir lo siguiente:

$$d\vec{r}_{A/CM} = d\vec{\theta} \times \vec{r}_{A/CM} \quad (\text{Ec. 4})$$

Reemplazando la ecuación 4 en la ecuación 3 nos queda:

$$\vec{F} \cdot d\vec{\theta} \times \vec{r}_{A/CM} = \vec{r}_{A/CM} \times \vec{F} \cdot d\vec{\theta}$$

$$dW_F = \vec{F} d\vec{r} + T_{CM} \cdot d\vec{\theta} \quad (\text{Ec. 7})$$

La ecuación 4 nos da el desplazamiento elemental respecto del centro de masas, sustituyendo la 4 en el segundo término de la 3 llegamos a la 5 e invirtiendo y realizando el producto vectorial de la 6 llegamos a la 7 luego de girar un ángulo elemental. El trabajo elemental está definido por dos términos: el primero en donde aparecen todas las fuerzas aplicadas al centro de masas y en el segundo aparecen los torques de las fuerzas respecto del centro de masas multiplicado por el desplazamiento angular elemental.

Demostraremos que las fuerzas internas no trabajan en un cuerpo rígido y para esto utilizaremos la ecuación 7:

El lado izquierdo es la ecuación 5 y el segundo es la 6 que el producto vectorial corresponde al torque de la fuerza.

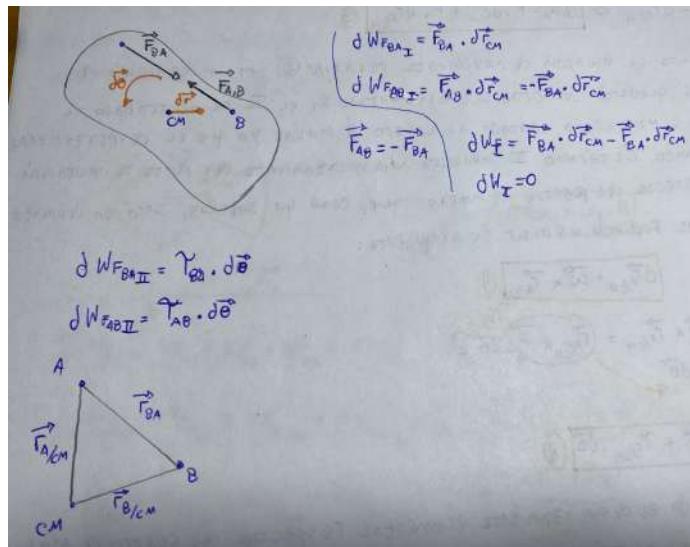


Figure 68: Diagrama CR genérico

Ejemplo:

- El cuerpo rígido de la figura se encuentra en reposo, se le aplica una fuerza \vec{F} como se ve en la figura.
- (a) ¿Cuál será la velocidad del rígido al haber dado una vuelta si rueda en todo el desplazamiento?

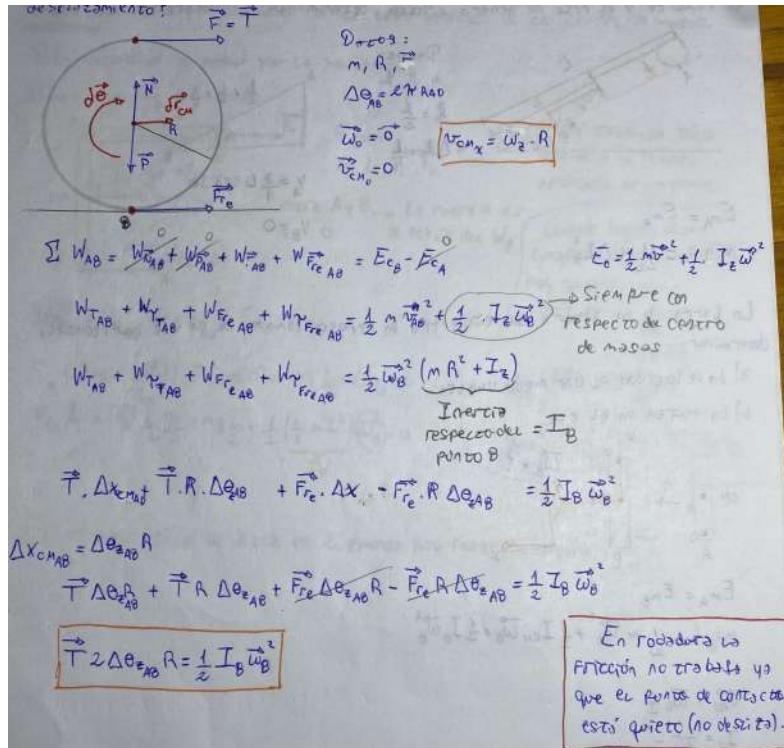


Figure 69: Ejemplo Rodadura y Tensión

- El CR rueda en el plano inclinado partiendo del reposo desde el punto "A" de la figura, el plano tiene una longitud "L" en la mitad del plano hay un resorte de constante desconocida, el rígido choca contra él frenándose y quedando el resorte en la mitad de su longitud natural, si asumimos que la superficie entre el resorte y el piso no genera fricción, determinar la constante del resorte.

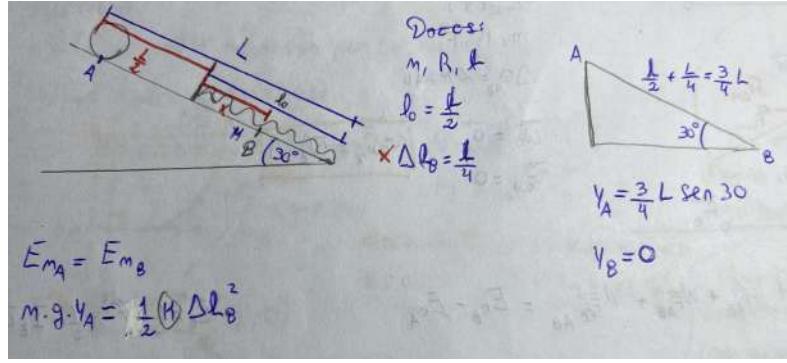


Figure 70: Ejemplo Rodadura y Resorte

3. La barra de la figura se encuentra en reposo tomada de un eje horizontal, determinar:
- La velocidad al dar media vuelta.
 - La fuerza en el eje.

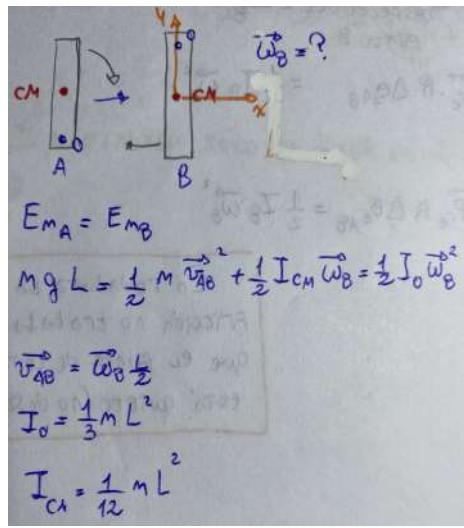


Figure 71: Ejemplo barra y eje

4. La barra de la figura se encuentra en reposo tomada de un eje horizontal, se le aplican dos fuerzas: una horizontal aplicada en su extremo inferior y una que se mantendrá perpendicular a la barra aplicada en el centro de masas. Determinar:
- La velocidad al pasar por la horizontal.

(b) Las fuerzas en el eje.

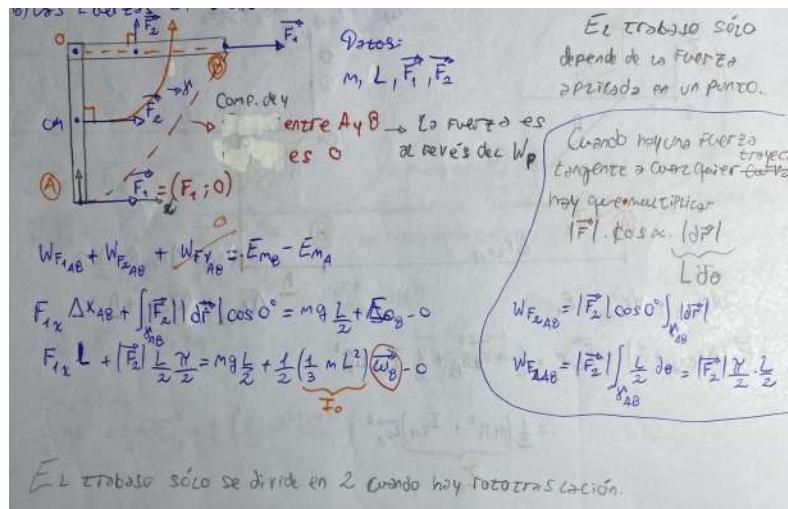


Figure 72: Ejemplo barra y eje fijo 2

5. El cilindro de la figura se encuentra en reposo, rodará en toda su trayectoria y se le aplican 2 fuerzas como se ve en la figura. Determinar:

(a) La velocidad del cilindro al desplazar 1/4 de vuelta.

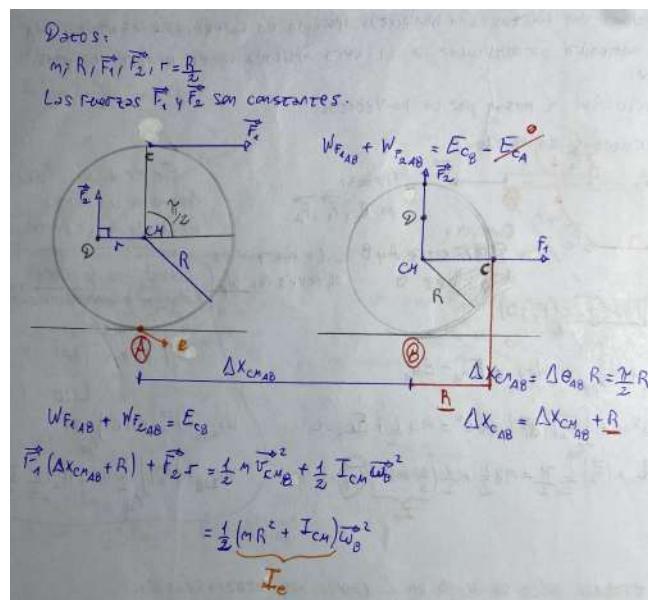


Figure 73: Ejemplo cilindro y rodadura

6. El cilindro de la figura se encuentra sobre una superficie rugosa teniendo μ_e con ella, del eje del cilindro se toma un resorte de constante K . Determinar:
- ¿Cuál será la máxima deformación posible del resorte para que al dejarlo en libertad el cilindro ruede en toda su trayectoria?
 - ¿Cuál será la velocidad máxima del movimiento?

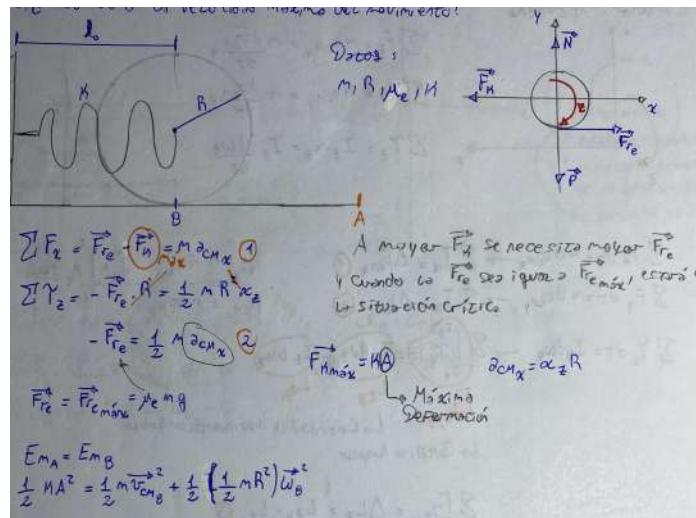


Figure 74: Ejemplo cilindro, resorte y rodadura

5.13 Teorema de Impulso para un Cuerpo Rígido

Este teorema surge de integrar en el tiempo la 2^{da} Ley de Newton, para un CR se usan 3 ecuaciones: 2 lineales y una angular.

$$\begin{cases} \sum F_x = m \cdot a_{CMx} = m \cdot \frac{dv_{CMx}}{dt} \\ \sum F_y = m \cdot a_{CMy} = m \cdot \frac{dv_{CMy}}{dt} \\ \sum T_z = I_z \cdot \alpha_z = I_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x \cdot dt = m \cdot a_{CMx} \cdot dt = m \cdot dv_{CMx} \\ \sum F_y \cdot dt = m \cdot a_{CMy} \cdot dt = m \cdot dv_{CMy} \\ \sum T_z \cdot dt = I_z \cdot \alpha_z \cdot dt = I_z \cdot d\omega_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum J_x = \Delta p_{CMx}(1) \\ \sum J_y = \Delta p_{CMy}(2) \\ \sum \int_{t_A}^{t_B} T_z \cdot dt = I_z \cdot \omega_{zB} - I_z \cdot \omega_{zA} \quad (3) \rightarrow \sum G_{ZAB} = \Delta L_{ZAB} \end{cases}$$

El lado de la integral corresponde al impulso angular mientras que el otro lado corresponde a la variación de cantidad de movimiento angular.

Las ecuaciones 1, 2 y 3 corresponden conforman el teorema de impulso generalizado (se dice de esta forma ya que puede tratarse de una fuerza o torque y puede ser lineal o angular).

Ejemplos:

- La barra del problema se encuentra en reposo y le aplicamos un golpe en su extremo como se ve en la figura.
- (a) ¿Cuál será la magnitud del golpe si la barra gira hasta quedar horizontal y se detiene?

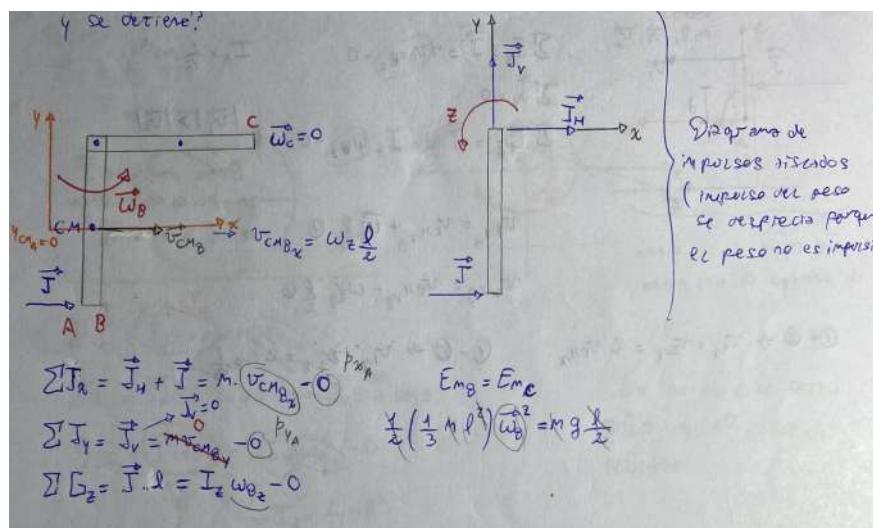


Figure 75: Ejemplo Impulso Angular en un CR

2. La barra de la figura se encuentra en reposo sobre un plano horizontal liso, se le aplica un impulso \vec{J} perpendicular a la barra horizontal de forma tal que sus extremos se mueven a velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Determinar:

- (a) El impulso aplicado y su punto de aplicación.

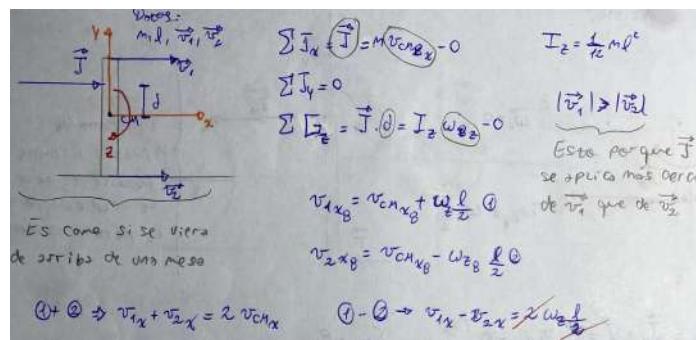


Figure 76: Ejemplo Impulso Aplicado a una Barra

3. El cilindro de la figura se encuentra en reposo y la superficie horizontal es lisa, se le aplica un impulso como se ve en la figura. Determinar:

- (a) Las velocidades del cilindro luego del impulso.
 (b) Los impulsos con la superficie.

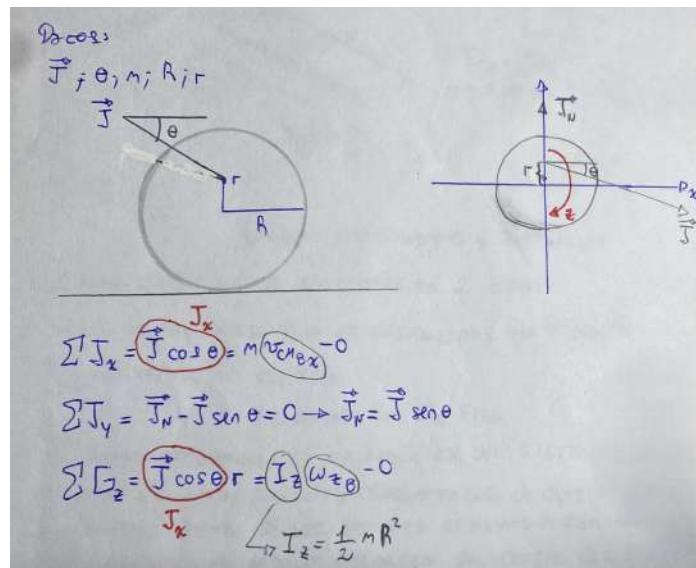


Figure 77: Ejemplo Cilindro e Impulso

5.14 Choques entre cuerpos y partículas

Podríamos dividir estos problemas en 2 tipos:

1. Cuando no hay un eje fijo en los cuerpos que interactúan.
 2. Cuando existe un eje fijo.

5.14.1 Sistemas sin Eje Fijo

En este tipo de problemas, si no hay fuerzas externas o su suma es nula, se hará presente su conservación de cantidad de movimiento ($\Delta\vec{p}=0$). Lo mismo sucede si los torques externos suman cero, es decir, se conserva la cantidad de movimiento angular respecto del centro del sistema.

Supongamos tener una barra sobre una superficie horizontal lisa y una partícula que choca contra la barra plásticamente como se ve en la figura:

Diagram of two rotating disks with centers at CM_1 and CM_2 . The system rotates with angular velocity $\vec{\omega}_{2A}$ around axis z .

Angular velocities at centers:

$$\vec{\omega}_{CM_1} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec{\omega}_{2A}$$

$$\vec{\omega}_{CM_2} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \vec{\omega}_{2A}$$

Angular momentum about CM_1 :

$$I_{CM_1} \vec{\omega}_{CM_1} = I_{CM_1} \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec{\omega}_{2A}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} - d\right)^2 + m_2 d^2 \quad \text{Inertia massica}$$

Angular momentum about CM_2 :

$$I_{CM_2} \vec{\omega}_{CM_2} = I_{CM_2} \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \vec{\omega}_{2A}$$

$$= I_{CM_2} \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \vec{\omega}_{2A}$$

Angular momentum about center of mass:

$$I_{CM} \vec{\omega}_{CM} = I_{CM} \vec{\omega}_{2A}$$

$$= I_{CM} \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec{\omega}_{2A}$$

Figure 78: Ejemplo Choque Barra y Partícula

5.14.2 Sistema con Eje Fijo

No se conservará la cantidad de movimiento lineal ya que en el eje estará colocado el sistema de referencia y en este aparecerá un impulso lineal externo, la cantidad de movimiento angular **sí** se conservará respecto del eje rotante.

Supongamos entonces que la barra del problema anterior se encuentra colgada del punto superior y la masa 2 choca plásticamente.

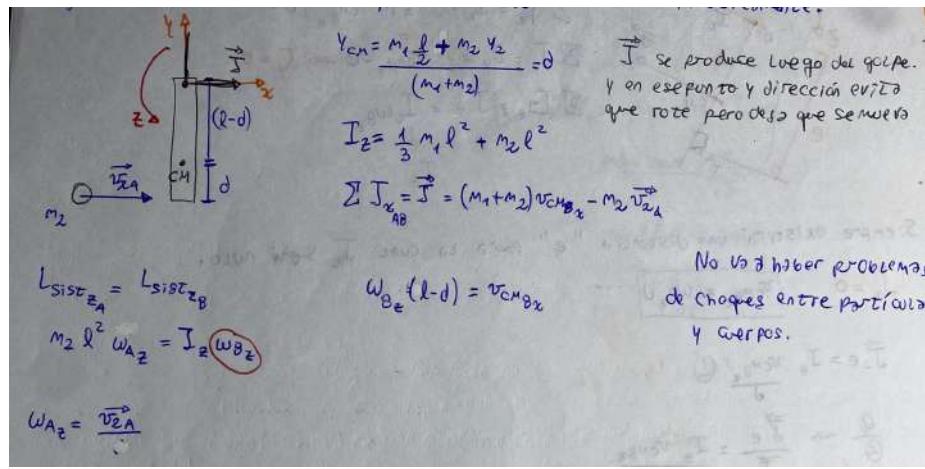


Figure 79: Ejemplo Barra y Partícula 2

5.15 Centro de Percusión

Supongamos tener un CR sobre un plano horizontal liso tomado de un eje vertical y aplicamos un impulso perpendicular a la recta que une al eje rotante con el CM, podemos escribir entonces lo siguiente:

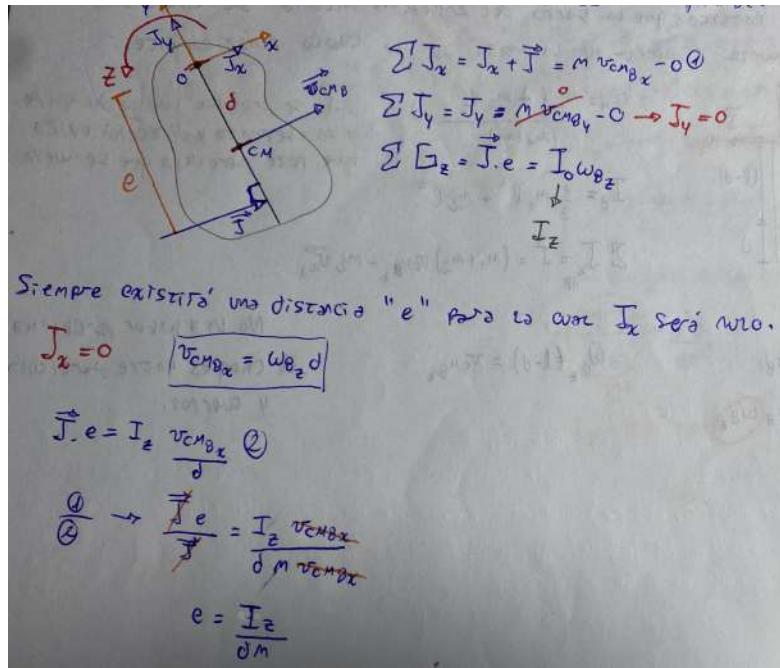


Figure 80: Diagrama Centro de Percusión

5.16 Péndulo Físico o Real

Supongamos tener un CR tomado de un eje vertical, si lo apartamos de la posición de equilibrio y lo dejamos en libertad describirá un movimiento periódico, trataremos de encontrar la ecuación de movimiento:

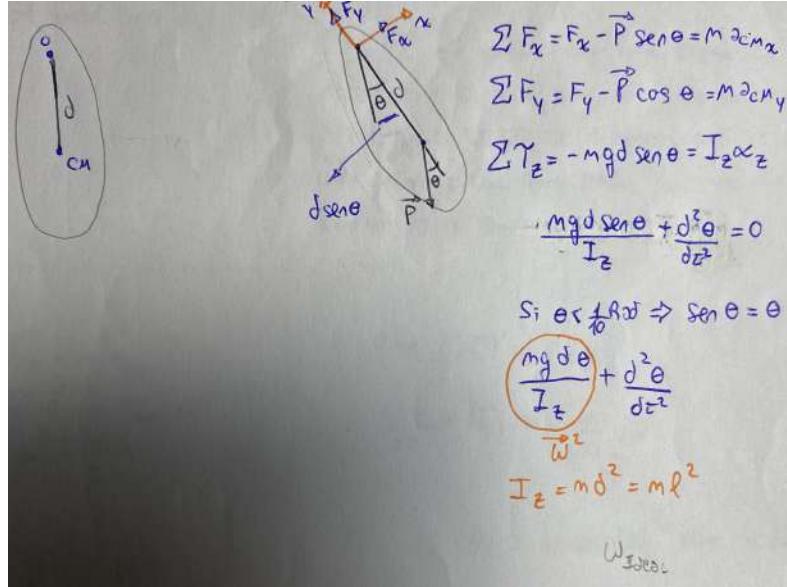


Figure 81: Péndulo Real

5.17 Precesión

Supongamos tener un cuerpo que rota respecto a su eje de simetría e inicialmente gira con $\vec{\omega}_o$.

\vec{L} es un vector que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{\omega}_o$. El movimiento de este rígido se desarrollará alrededor de un eje vertical que pasa por el punto de apoyo en el suelo.

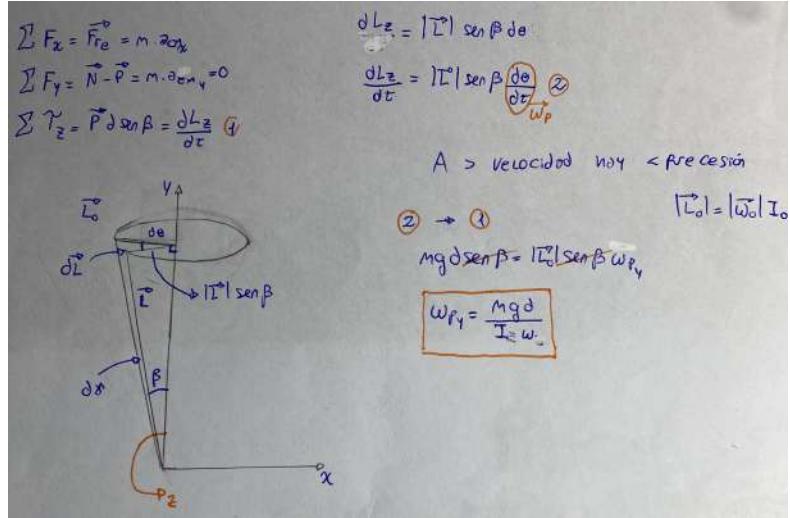


Figure 82: Diagrama Precesión

6 Unidad N°6: Fluidos