

Práctica con Utilitario 1

Introducción al Procesamiento de Señales

Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Fecha límite: 10 de noviembre de 2022 (17 horas)

1323/7 Fernández, Francisco

2402/0 Hernández Mejía, Carlos Alejandro



Introducción

En el presente informe, se resuelven algunos problemas de aplicación concernientes al procesamiento de señales. Esto, con el objetivo que el desarrollo del presente sirva cómo complemento a las prácticas de la materia.

Para la resolución de dichos problemas, se hace énfasis en el uso de Octave, debido a que dicha herramienta se puede emplear en el análisis y la descripción de sistemas discretos, en particular, los sistemas de tipo lineal e invariantes al desplazamiento (o el tiempo).

También, se puede hacer uso de MATLAB, pero esta es software privativo, que requiere de una licencia para poder acceder a todas sus funcionalidades, mientras que Octave es Open Source y puede ser usada sin mayores inconvenientes y a su vez, es compatible con MATLAB.

Resolución

Ejercicio 1

La función *senal.m* retorna una señal de variable independiente discreta, y los instantes n en los que está definida la misma.

Inciso 1

Grafique esta señal. Obtenga la TFTD de la misma y grafíquela. ¿Qué componentes de frecuencia identifica?

Para el desarrollo de este punto, se invocará la función *senal.m* con el número de alumno 24020 y se grafican los resultados de la misma, cómo se puede apreciar en la siguiente imagen.

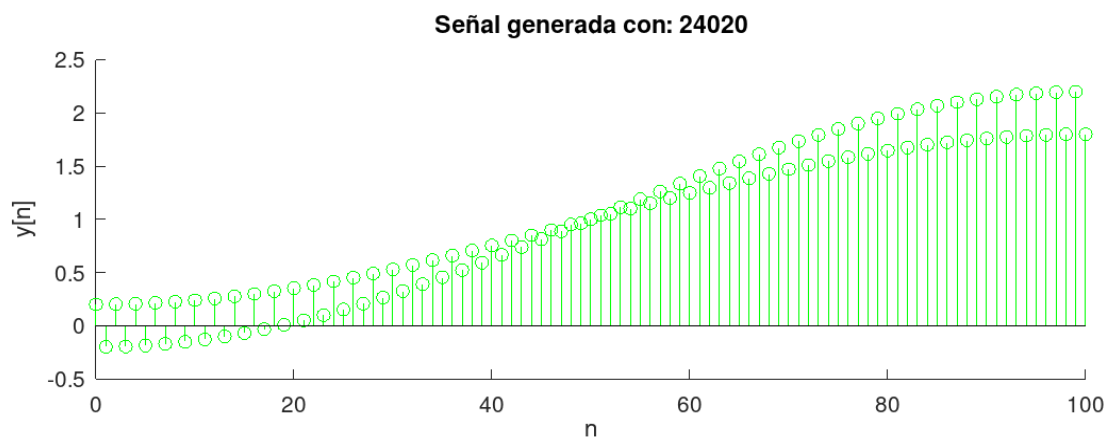


Fig. 1: Señal generada con el número de alumno 24020.

En la gráfica anterior se puede apreciar, en primer lugar, la existencia de dos funciones senoidales, una de ellas con frecuencia mayor, por otro lado, se observa cierto desplazamiento de algunos puntos hacia arriba, lo que nos da a intuir la existencia de una constante.

Posteriormente, se calcula la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) siguiendo las indicaciones del ejercicio 5, inciso a), correspondiente a la práctica 5 y se procede a graficarlo.

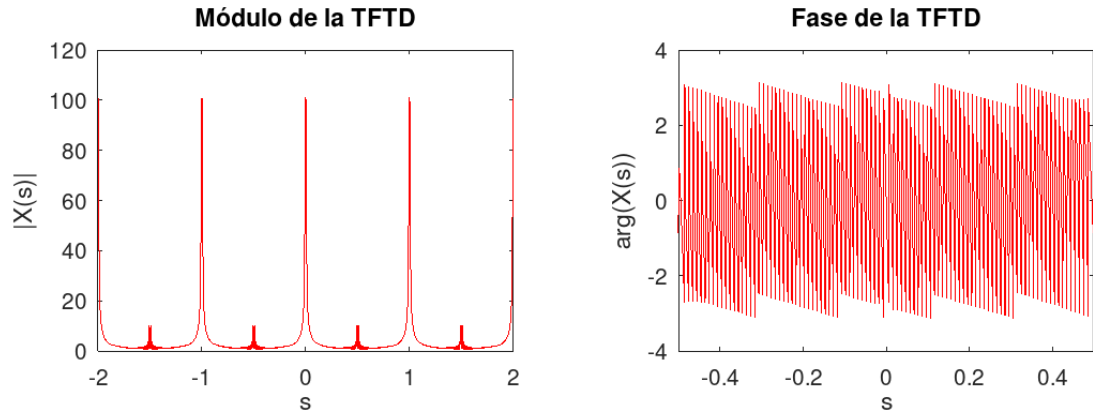


Fig. 2: Gráfica del módulo y la fase de la TFTD.

Gracias a la gráfica del módulo de la TFTD, se puede notar que las componentes correspondientes a uno de las funciones seno, son de baja amplitud, pero de alta frecuencia (respecto a la otra función senoidal).

Además, se puede corroborar la observación anterior, ya que se puede identificar los valores representativos de las deltas correspondientes a las transformadas de una constante (delta en cero) y en el seno principal (deltas en $f_0 = \pm\pi$).

Inciso 2

Se tienen cuatro sistemas descritos por las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

Con los cuales, se quiere procesar la señal anterior.

Obtenga la respuesta impulsional y la respuesta en frecuencia de cada uno de los sistemas (de manera analítica). Grafíquelas. ¿De qué tipo de sistemas se trata?

• Sistema 1

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Si aplicamos TFTD a ambos lados del sistema 1, se tiene lo siguiente:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2}X(e^{j2\pi s}) + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}X(e^{j2\pi s})$$

Aplicando la propiedad de convolución de la TFTD, se tiene:

$$y[n] = \{x * h\}[n] \leftrightarrow Y(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})H(e^{j2\pi s})$$

Entonces:

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s} = \frac{1}{2}(1 + e^{-j2\pi s})$$

Si anti-transformamos $H(e^{j2\pi s})$, obtendremos la respuesta impulsional de S1:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$$

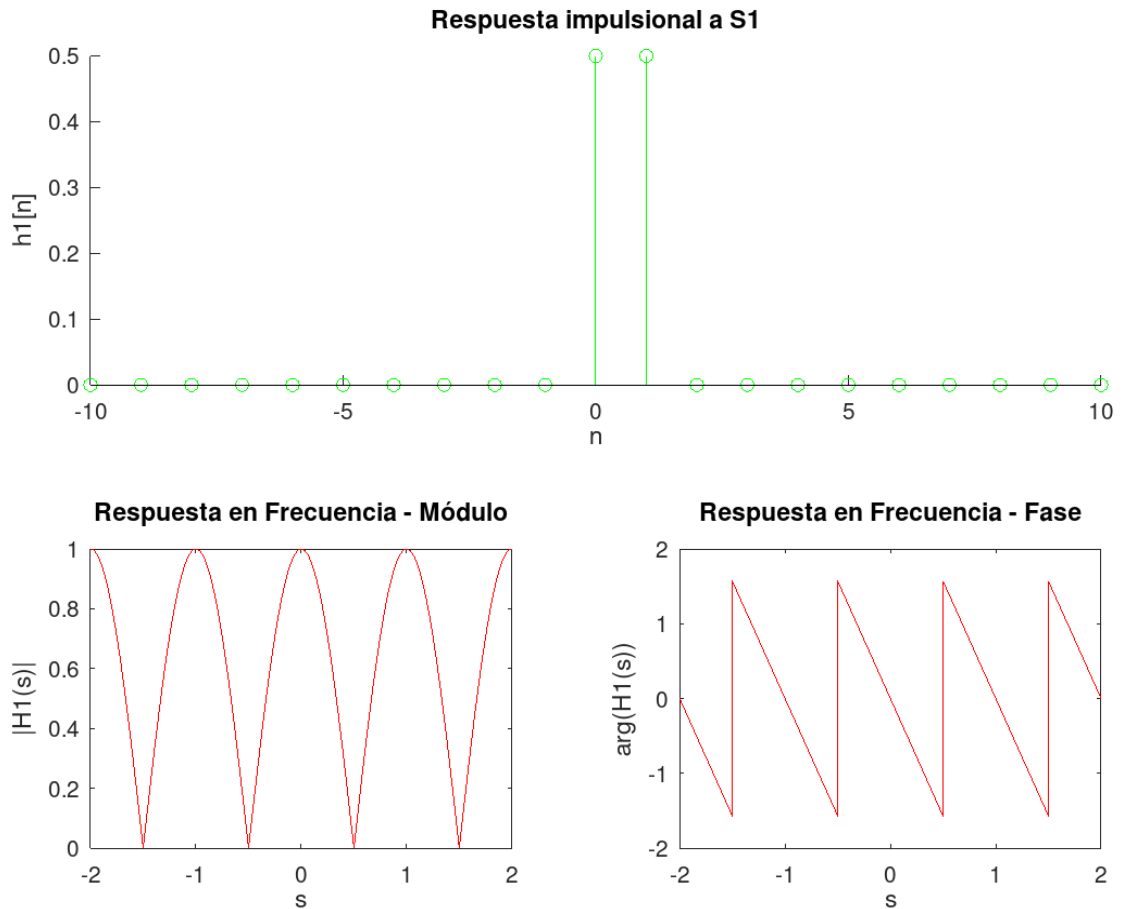


Fig. 3: Gráfica de la respuesta impulsional (analítica) del sistema 1, así como el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

Se puede apreciar que dicho sistema es un FIR pasa bajos.

● Sistema 2

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n - 1]$$

Si aplicamos TFTD a ambos lados del sistema 1, se tiene lo siguiente:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2}X(e^{j2\pi s}) - \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}X(e^{j2\pi s})$$

Aplicando la propiedad de convolución de la TFTD, se tiene:

$$y[n] = \{x * h\}[n] \leftrightarrow Y(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})H(e^{j2\pi s})$$

Entonces:

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi s} = \frac{1}{2}(1 - e^{-j2\pi s})$$

Si anti-transformamos $H(e^{j2\pi s})$, obtendremos la respuesta impulsional de S2:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - 1]$$

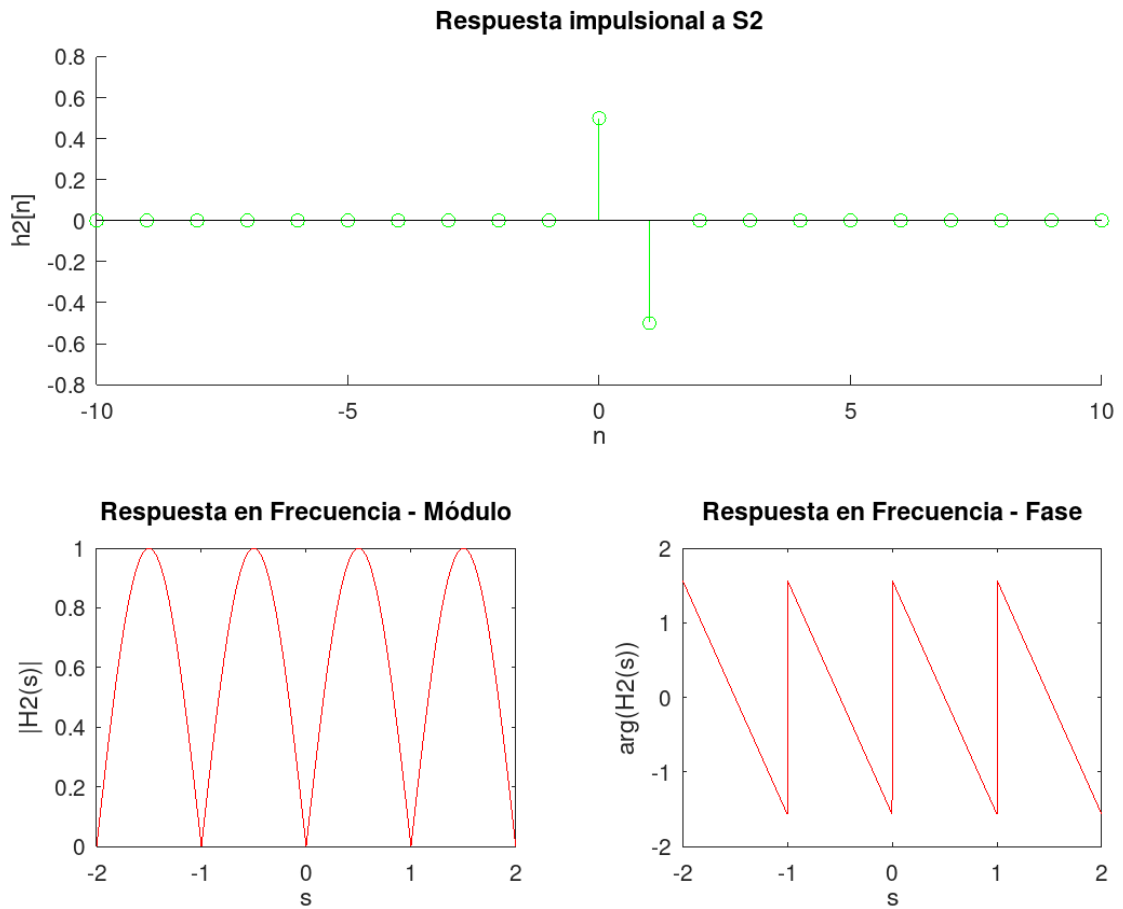


Fig. 4: Gráfica de la respuesta impulsional (analítica) del sistema 2, así como el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

Se puede apreciar que dicho sistema es un FIR pasa altos.

• Sistema 3

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n - 1] + \frac{1}{2}y[n - 1]$$

Si aplicamos TFTD a ambos lados del sistema 1, se tiene lo siguiente:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) + \frac{1}{4}e^{-j2\pi s}X(e^{j2\pi s}) + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}Y(e^{j2\pi s})$$

Despejando $Y(e^{j2\pi s})$ y reagrupando términos se tiene:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) * \frac{1+e^{-j2\pi s}}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi s}}$$

Aplicando la propiedad de convolución de la TFTD, se tiene:

$$y[n] = \{x * h\}[n] \leftrightarrow Y(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})H(e^{j2\pi s})$$

Entonces:

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4} * \frac{1+e^{-j2\pi s}}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi s}}$$

Para facilitar la búsqueda de la anti-transformada debemos reescribir $H(e^{j2\pi s})$ de la siguiente forma:

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4} * (1 + e^{-j2\pi s}) * \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi s}}$$

En el término anterior, podemos encontrar la siguiente transformada conocida:

$$\alpha^n * u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi s}}, |\alpha| < 1$$

En este caso en particular, $|\alpha| = \frac{1}{2}$, por lo tanto: $\frac{1}{2}^n * u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi s}}$

Y teniendo en cuenta la propiedad de diferenciación

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

Obtendremos la respuesta impulsional de S3:

$$h[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}^n u[n] + \frac{1}{2}^{n-1} \delta[n-1] \right)$$

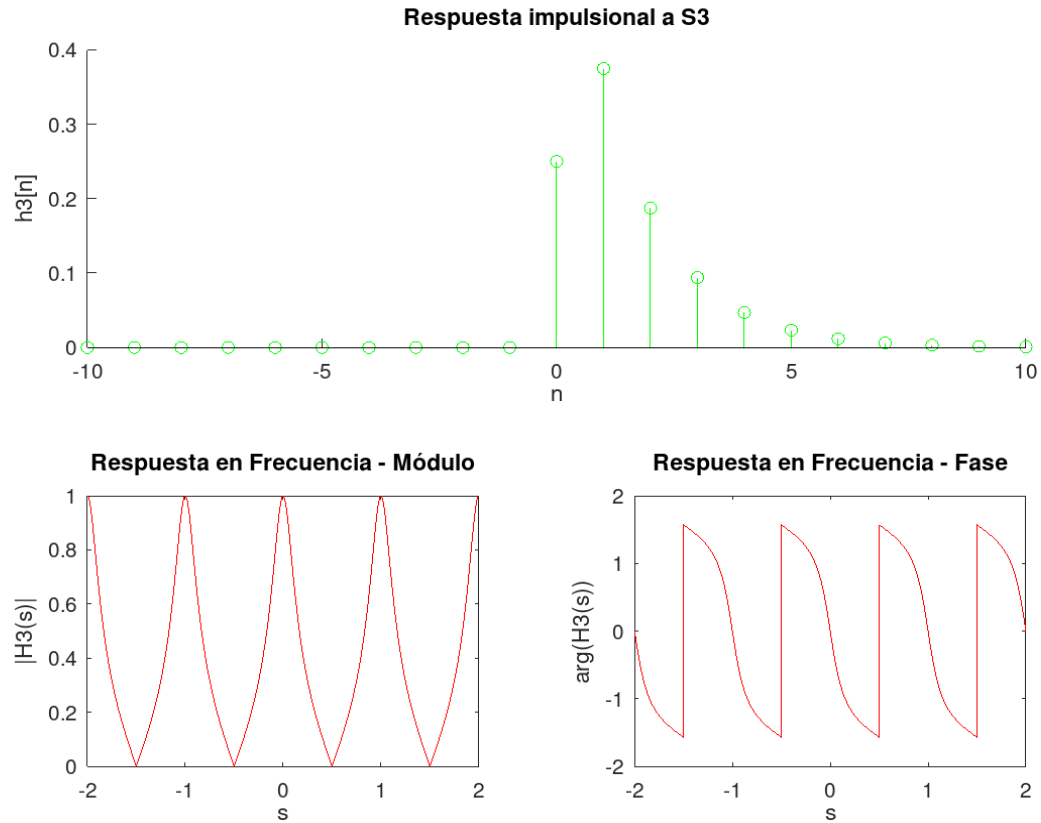


Fig. 5: Gráfica de la respuesta impulsional (analítica) del sistema 3, así cómo el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

Se puede apreciar que dicho sistema es un IIR pasa bajos.

- **Sistema 4**

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

Si aplicamos TFTD a ambos lados del sistema 1, se tiene lo siguiente:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) - \frac{1}{4}e^{-j2\pi s}X(e^{j2\pi s}) - \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}Y(e^{j2\pi s})$$

Despejando $Y(e^{j2\pi s})$ y reagrupando términos se tiene:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) * \frac{1-e^{-j2\pi s}}{1+\frac{1}{2}e^{-j2\pi s}}$$

Aplicando la propiedad de convolución de la TFTD, se tiene:

$$y[n] = \{x * h\}[n] \leftrightarrow Y(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})H(e^{j2\pi s})$$

Entonces:

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4} * \frac{1 - e^{-j2\pi s}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}} = \frac{1}{4} * (1 - e^{-j2\pi s}) * \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})e^{-j2\pi s}}$$

En el término anterior, podemos encontrar la siguiente transformada conocida:

$$\alpha^n * u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi s}}, |\alpha| < 1$$

En este caso en particular, $|\alpha| = -\frac{1}{2}$, por lo tanto: $(-\frac{1}{2})^n * u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s}}$

Y teniendo en cuenta la propiedad de diferenciación

$$x[n] - x[n - 1] \leftrightarrow (1 - e^{-j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

Obtendremos la respuesta impulsional de S4:

$$h[n] = \frac{1}{4} ((-\frac{1}{2})^n u[n] - (-\frac{1}{2})^{n-1} \delta[n - 1])$$

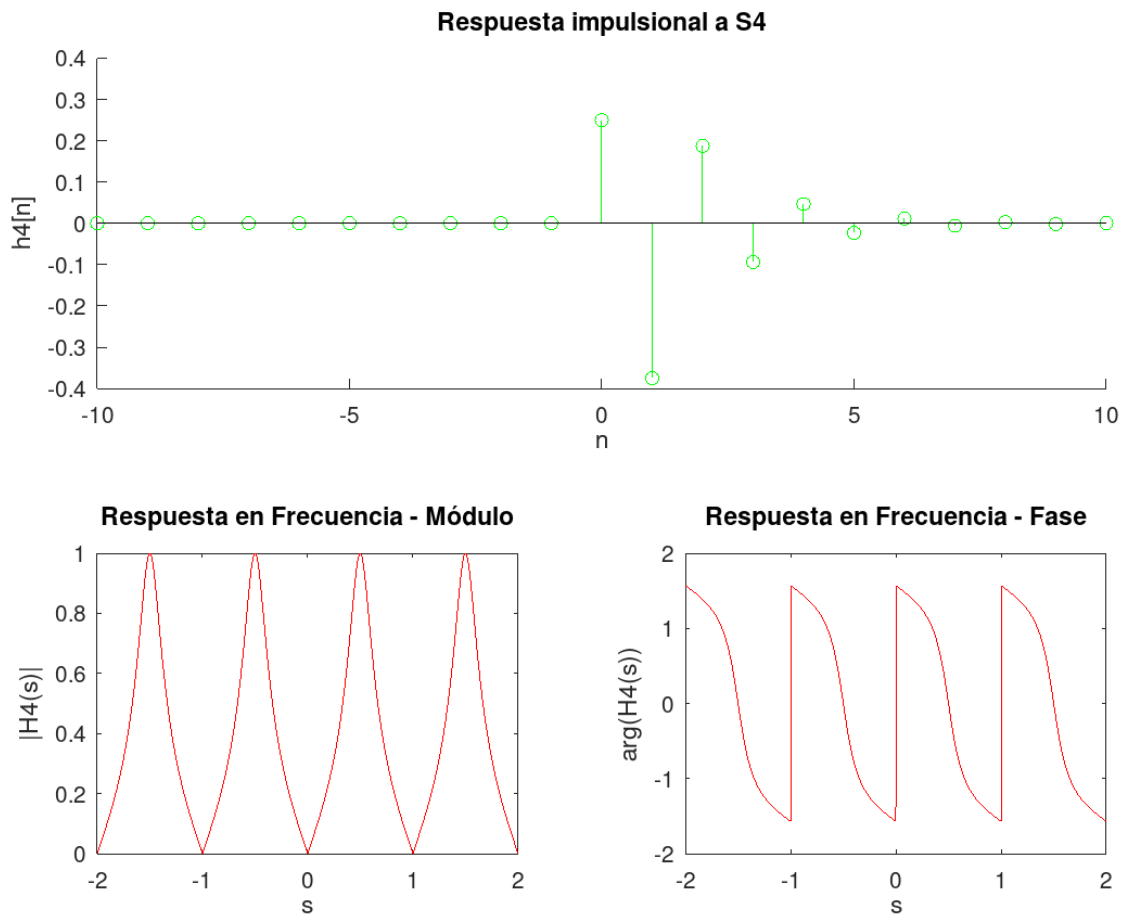


Fig. 6: Gráfica de la respuesta impulsional (analítica) del sistema 4, así como el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

Se puede apreciar que dicho sistema es un IIR pasa altos.

Inciso 3

Codifique funciones que implementen cada uno de los sistemas. Verifique que la respuesta impulsional de cada uno de los sistemas así implementados coincide con la obtenida analíticamente. Verifique que la TFTD de la respuesta impulsional coincida con la respuesta en frecuencia obtenida analíticamente.

Para resolver este inciso, será necesario codificar funciones en Octave que nos permitan definir los valores de salida para cada instante n , de acuerdo a la ecuación en diferencias de cada sistema.

Algo importante que se debe tener en cuenta es que todos los sistemas poseen memoria, ya que no dependen solamente de la entrada en ese mismo instante, sino también de la entrada anterior. También, estos sistemas son causales, puesto que no son anticipativos (su salida no anticipa valores futuros).

Lo anterior, puede presentar un problema, puesto que computacionalmente no se pueden tener infinitos valores de la serie cargados.

Otra cosa a tener en cuenta, es que en Octave, los índices de los vectores empiezan en uno, por lo cual, para obtener un valor del sistema para el instante $n = 1$, tendríamos que tener una entrada (y en S3 y S4, una salida) en $n = 0$, lo cual, no es posible.

Para resolver este problema, el primer valor de la salida (instante $n = 1$) se obtiene de la forma $y[1] = \alpha x[1]$ y luego en un ciclo *for* (que arranca en $n = 2$) se procede a calcular los valores restantes.

Para obtener la respuesta impulsional se define el vector delta que representa una delta de Kronecker en $n = 0$ y se aplica como entrada a cada uno de los sistemas anteriores. Luego calculamos las TFTD de cada una de la misma forma que en el primer inciso.

Cómo se puede observar en las gráficas que se muestran a continuación, los resultados analíticos obtenidos anteriormente coinciden con los cálculos hechos en este punto.

- **Sistema 1**

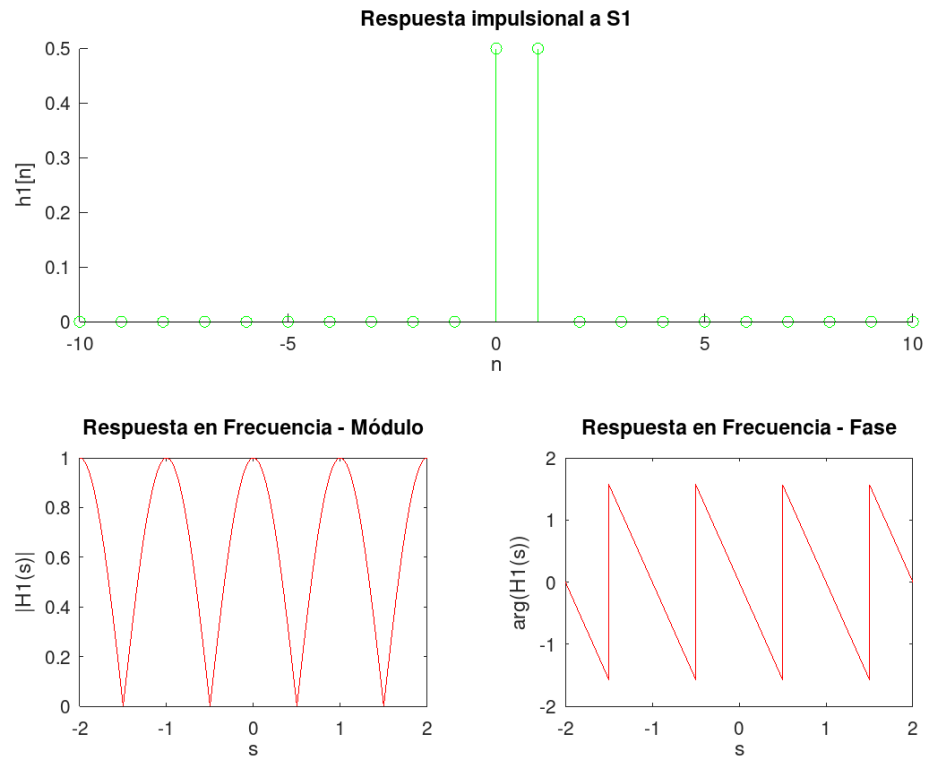


Fig. 7: Gráfica de la respuesta impulsional del sistema 1, así como el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

- **Sistema 2**

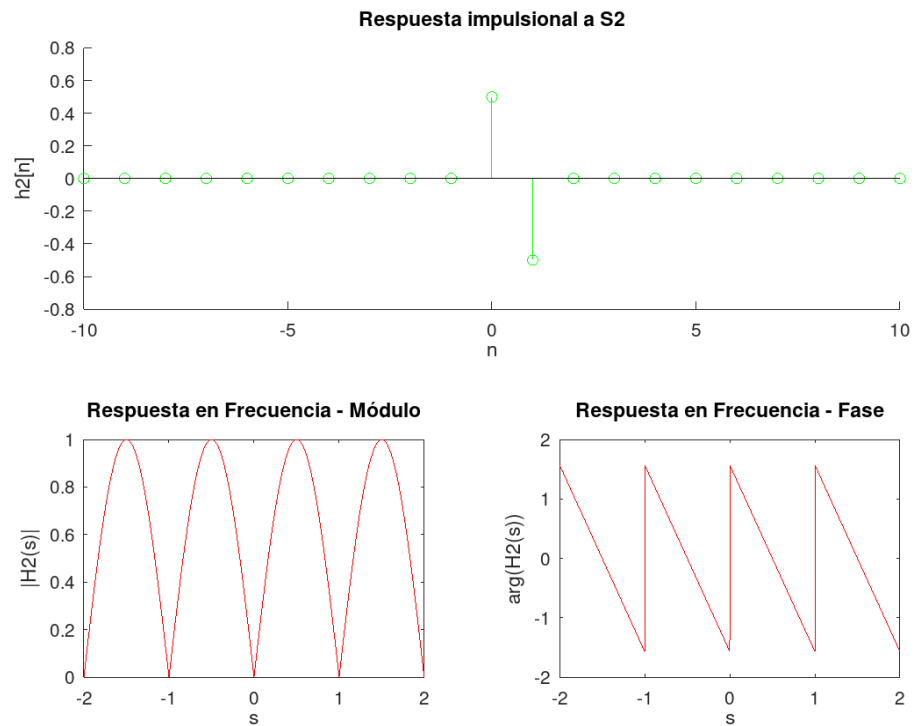


Fig. 8: Gráfica de la respuesta impulsional del sistema 2, así como el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

- **Sistema 3**

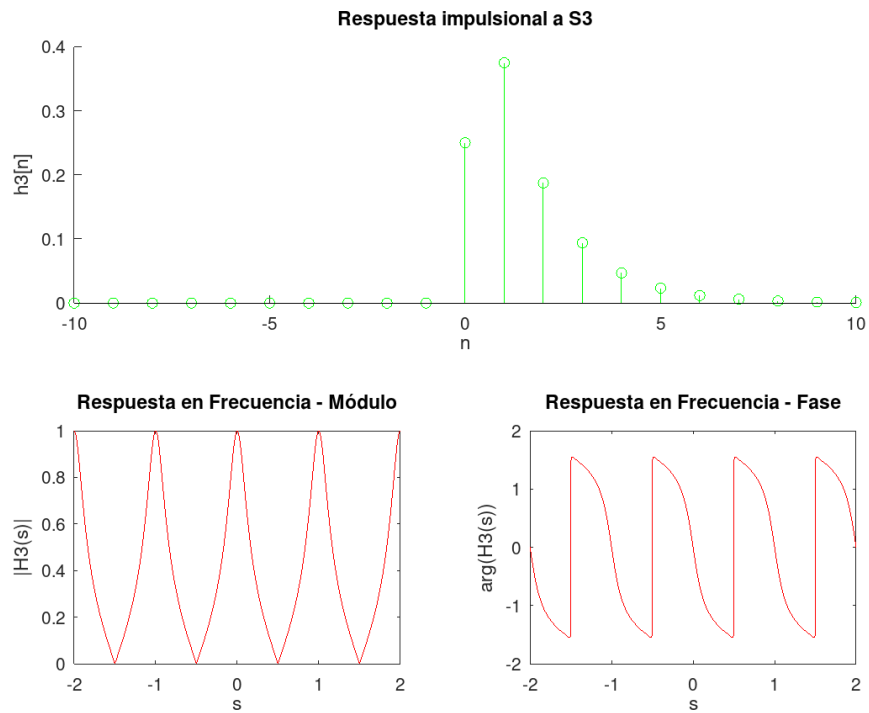


Fig. 9: Gráfica de la respuesta impulsional del sistema 3, así cómo el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

- **Sistema 4**

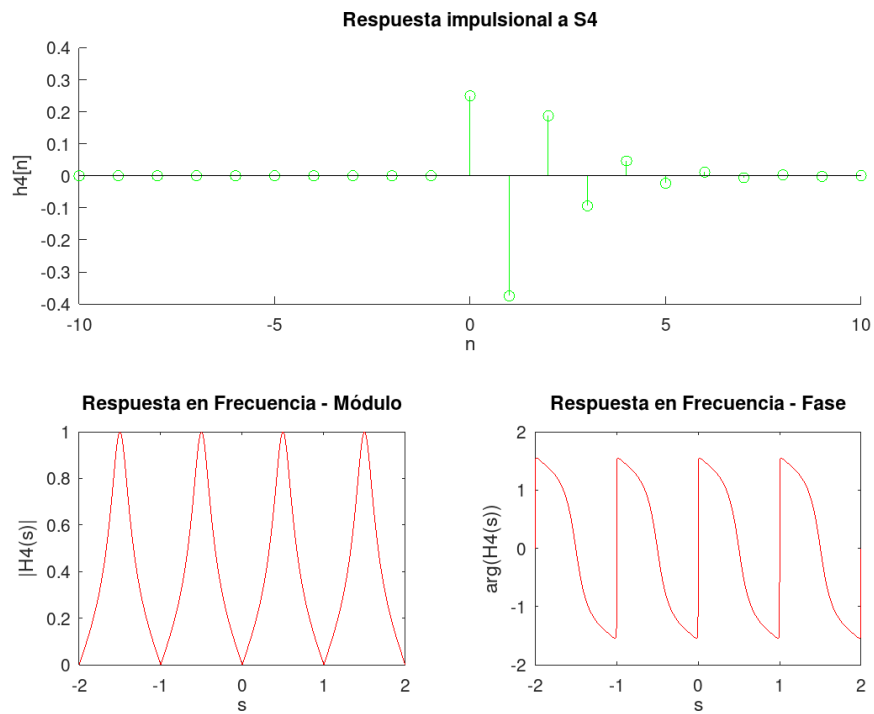


Fig. 10: Gráfica de la respuesta impulsional del sistema 4, así cómo el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.

Inciso 4

Utilizando sus implementaciones del inciso anterior, obtenga la señal de salida para cada sistema cuando se aplica a la entrada de la señal del inciso 1. Grafique en cada caso.

Para dar continuidad a lo que se hizo en el inciso 1, se hará uso del número de alumno 24020 como entrada de la señal.

Con dicho parámetro se obtuvieron los siguientes resultados:

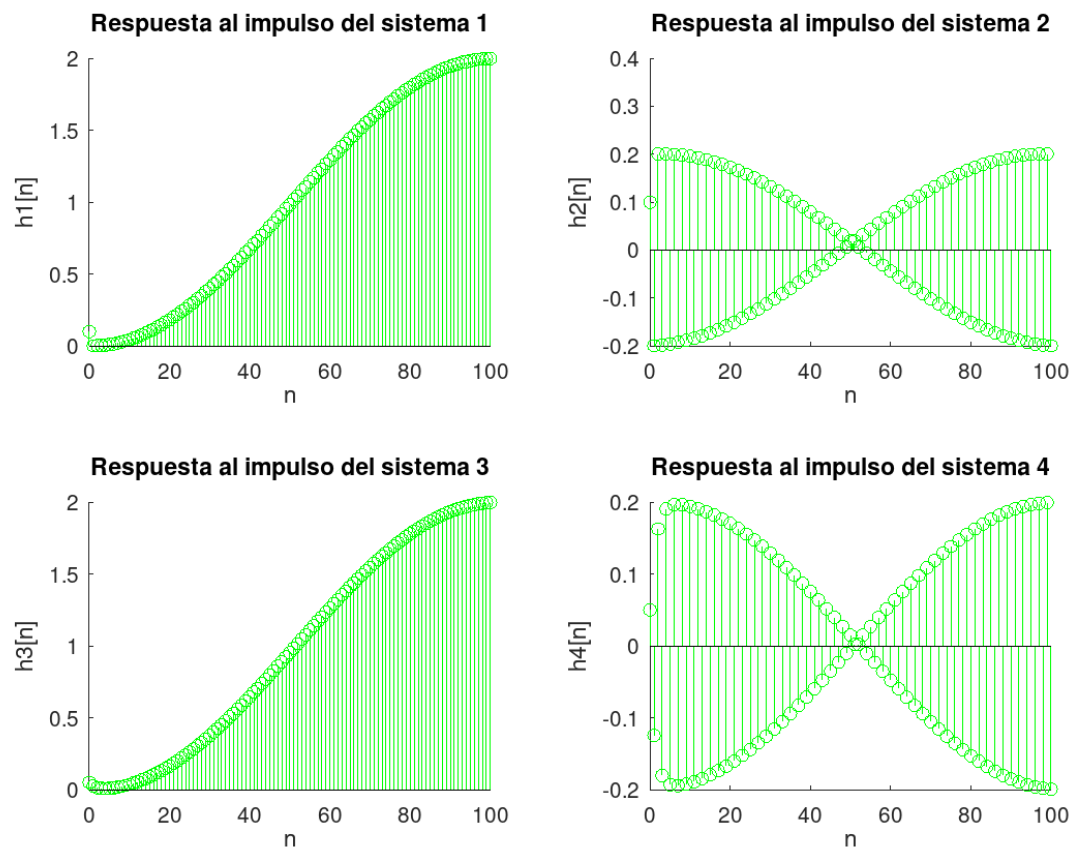


Fig. 11: Gráfica de las señales de salida para cada sistema, teniendo 24020 como parámetro de entrada de la señal.

Inciso 5

Obtenga la TFTD de las salidas, ¿qué componentes de frecuencia identifica?, ¿qué conclusiones puede sacar?

- Sistema 1

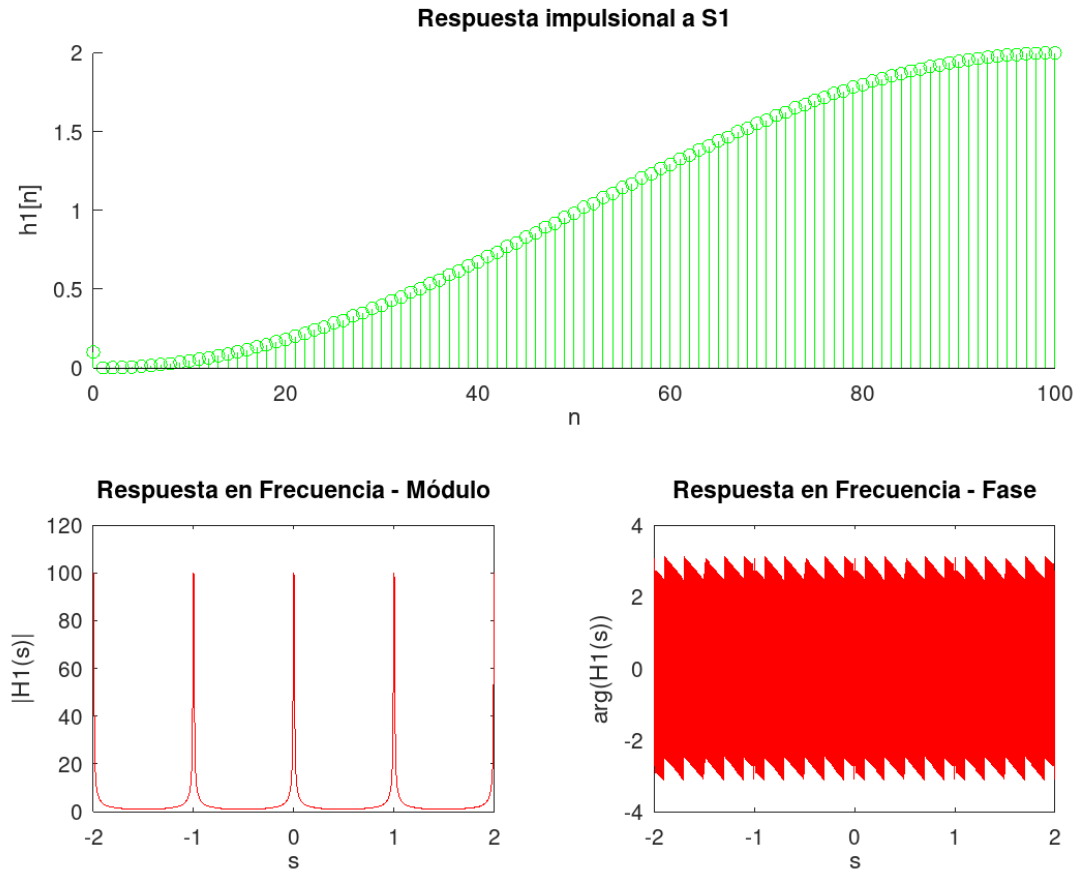


Fig. 12: Gráfica del sistema 1, del módulo y la fase de la TFTD.

En el gráfico anterior se pueden identificar componentes de bajas frecuencias, comprobando que este filtro actúa como pasa bajos.

- **Sistema 2**

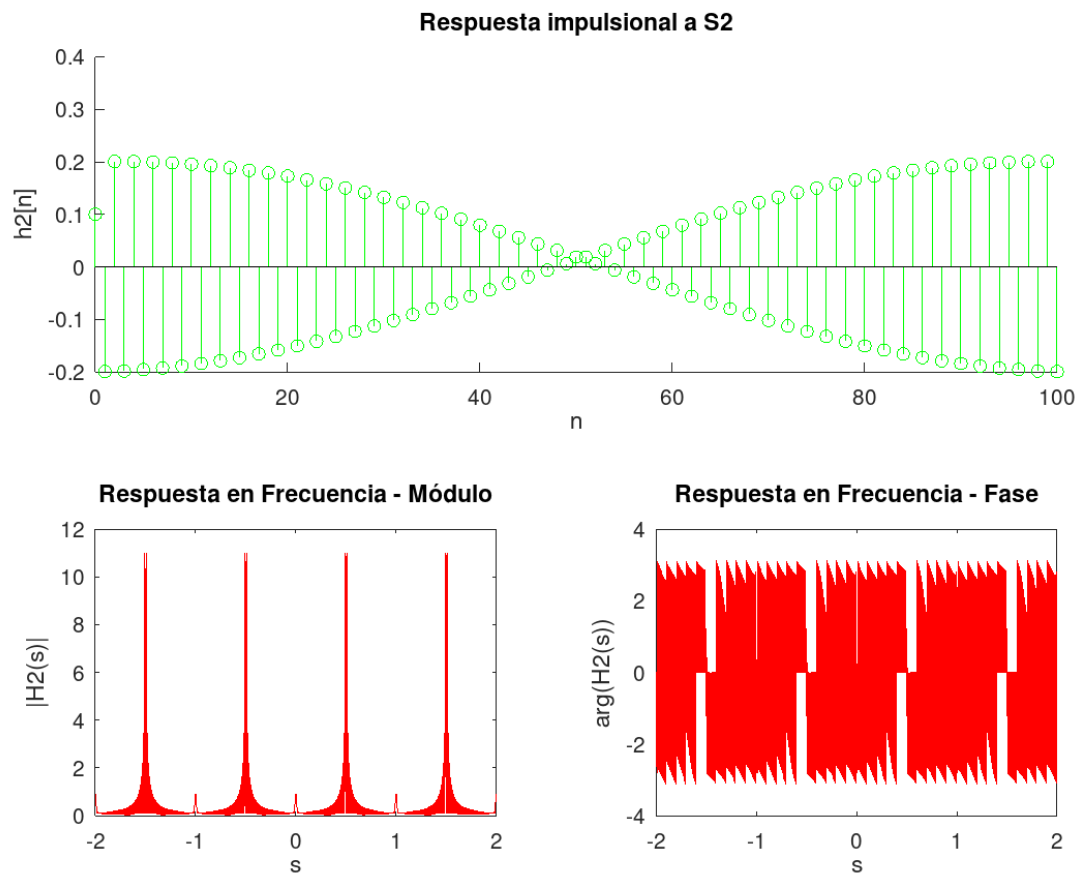


Fig. 13: Gráfica del sistema 2, del módulo y la fase de la TFTD.

En el gráfico anterior se pueden identificar componentes de altas frecuencias, comprobando que este filtro actúa como pasa altos.

- **Sistema 3**

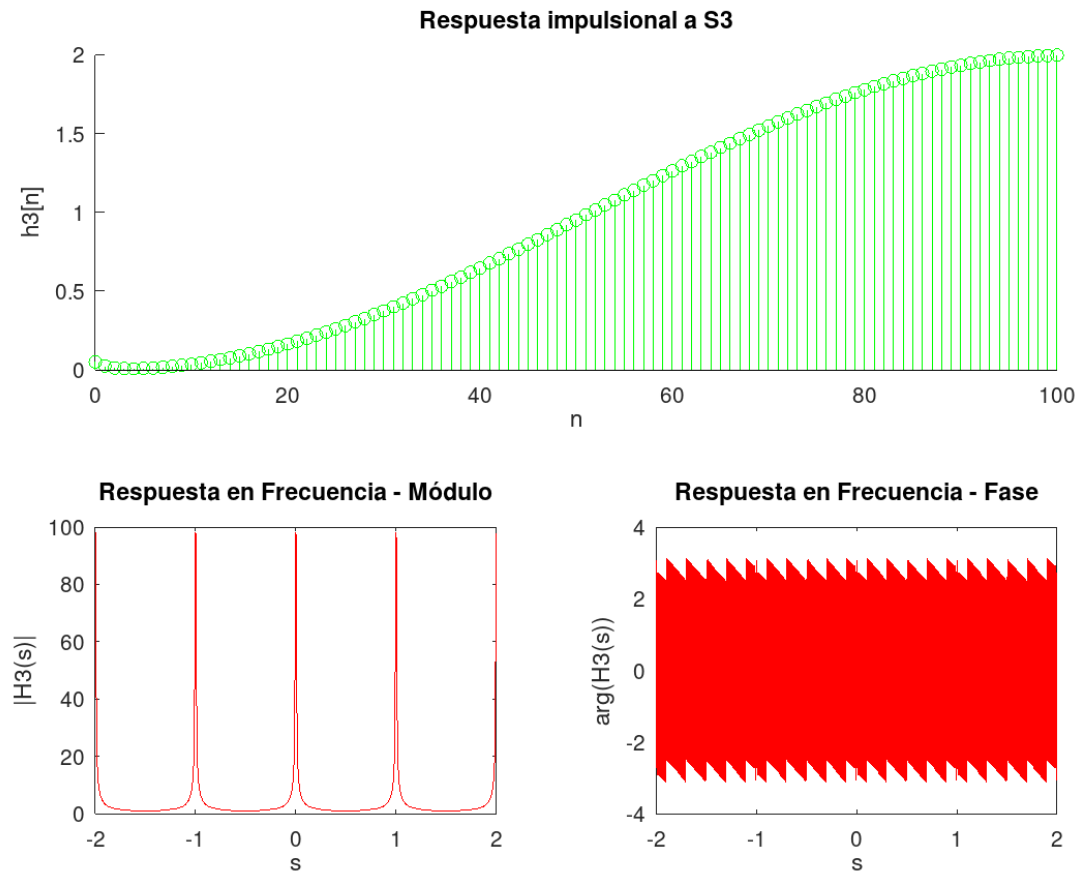


Fig. 14: Gráfica del sistema 3, del módulo y la fase de la TFTD.

En el gráfico anterior se pueden identificar componentes de bajas frecuencias, comprobando que este filtro actúa como pasa bajos.

- **Sistema 4**

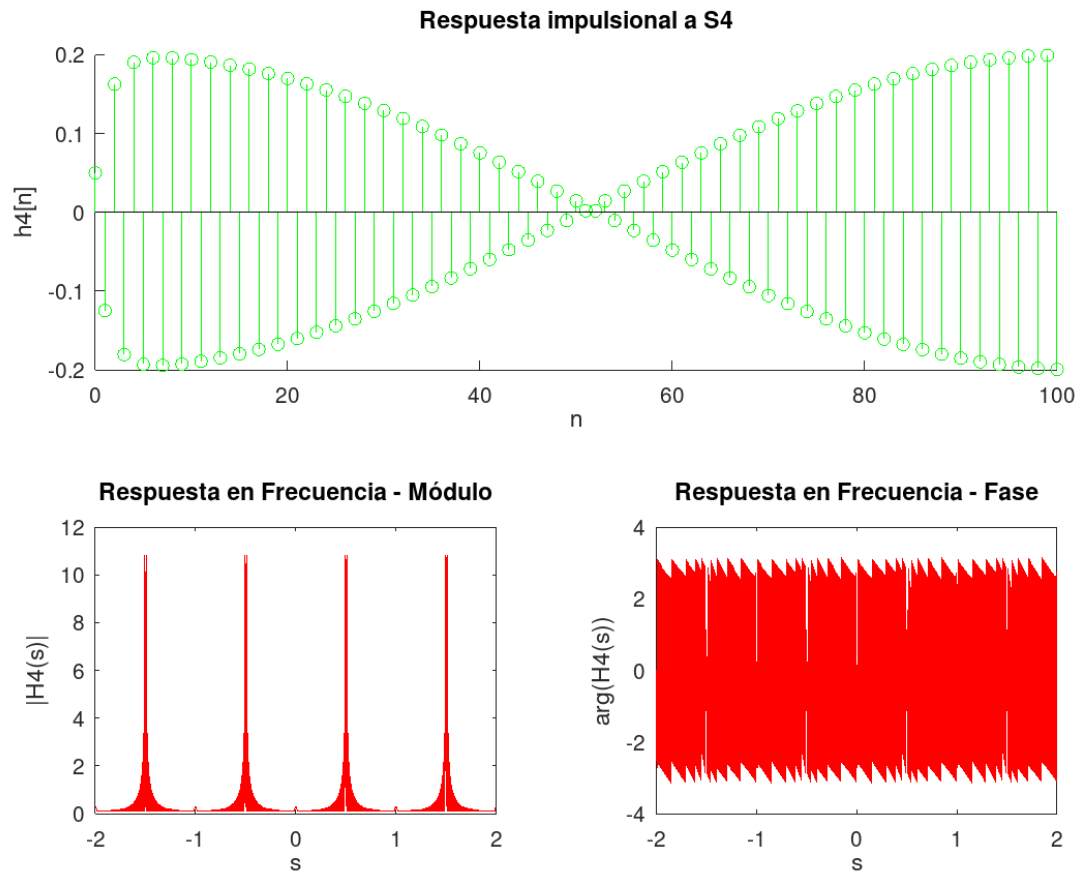


Fig. 15: Gráfica del sistema 4, del módulo y la fase de la TFTD.

En el gráfico anterior se pueden identificar componentes de altas frecuencias, comprobando que este filtro actúa como pasa altos.

Ejercicio 2

La señal $h_A[n]$ retornada por la función *hcanald.m* representa la respuesta impulsional de un sistema SLID FIR que modela el comportamiento de un canal digital con dos ecos.

Inciso 1

Grafique esta respuesta al impulso e interprete en qué consiste el modelo mencionado. Escriba la ecuación en diferencias que representa el sistema. ¿Qué puede decir acerca de la estabilidad del sistema?

A continuación, se presenta la gráfica correspondiente a la respuesta al impulso de la señal mencionada, usando 24020 como parámetro de entrada.

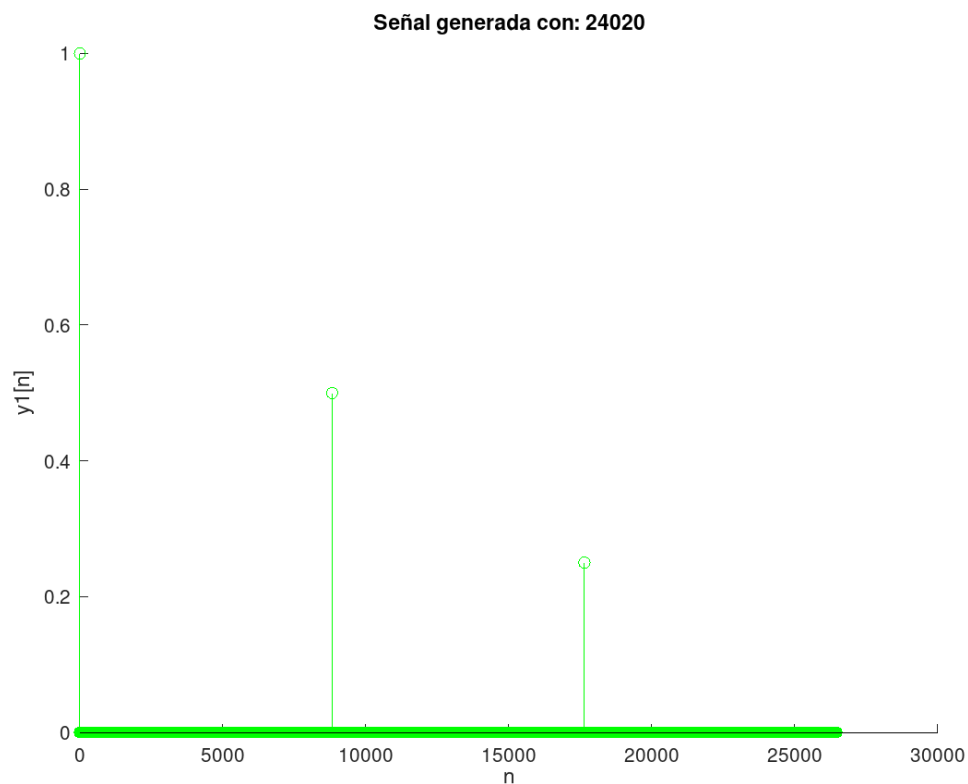


Fig. 16: Respuesta al impulso de la señal *hcanald*.

En el gráfico se pueden observar 3 deltas de Kronecker, en los instantes $n = 0$, $n = 8820$ y $n = 17640$, cada uno con respuesta impulsional $h[0] = 1$, $h[8820] = 0,5$ y $h[17640] = 0,25$, respectivamente.

La función de esta delta es replicar la señal de entrada cada vez más desplazada y atenuada, cumpliendo con lo indicado en la consigna respecto a la presencia de 2 ecos dentro del canal.

La ecuación en diferencias que representa a este sistema es la siguiente:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n - 8820] + \frac{1}{4}x[n - 17640]$$

Respecto a la estabilidad del sistema, basta con observar el gráfico para saber que dicho sistema es estable, en el sentido EA/SA, ya que un SLID es estable y EA/SA, sí y solo sí, su respuesta impulsional es absolutamente sumable, es decir:

$$\exists 0 < k_h < \infty / \sum_{k=0} |h[k]| \leq k_h$$

Para nuestro caso en concreto:

$$\sum_{k=0} |h[k]| = |h[0]| + |h[8820]| + |h[17640]| = 1 + 0,5 + 0.25 = 1,75 = k_h$$

Inciso 2

Escriba en MATLAB una función que implemente un sistema con esta ecuación en diferencias. Verifique que este sistema tiene la misma respuesta impulsional que la obtenida en 1.

Teniendo en cuenta las mismas observaciones realizadas en el Inciso 3, del ejercicio 1, se procede a definir una función que implemente el sistema anterior. Posteriormente, se obtuvo el gráfico que se muestra a continuación.

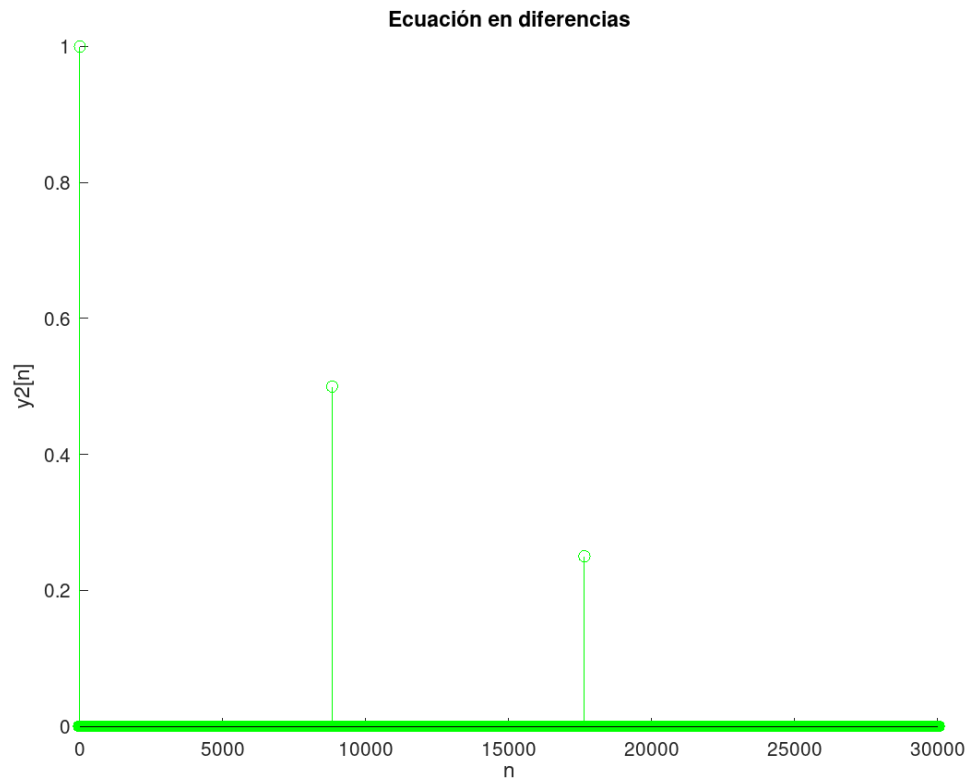


Fig. 17: Respuesta al impulso de la señal *hcanald*.

Se puede corroborar que los resultados obtenidos en el gráfico anterior coinciden con los obtenidos en el inciso 1, mediante la señal *hcanald*.

Inciso 3

Por otra parte, el comando `[x, fs] = audioread('audio.wav')` permite cargar un archivo de audio (en este caso, el provisto entre los archivos de la presente práctica) en la variable x . La variable fs indica la frecuencia de muestreo de la señal, concepto que estudiaremos más adelante. Como cualquier otra variable, se puede graficar utilizando el comando `plot(x)`. Es posible escuchar la señal mediante el comando `sound(x, fs)`.

Usando la función escrita en el inciso 2, halle la salida del sistema (que llamaremos y) cuando se aplica a su entrada la señal de audio x . ¿Cómo se escucha esta señal? Grafique la señal de entrada y de salida en el tiempo.

La gráfica correspondiente a la señal de audio es la siguiente:

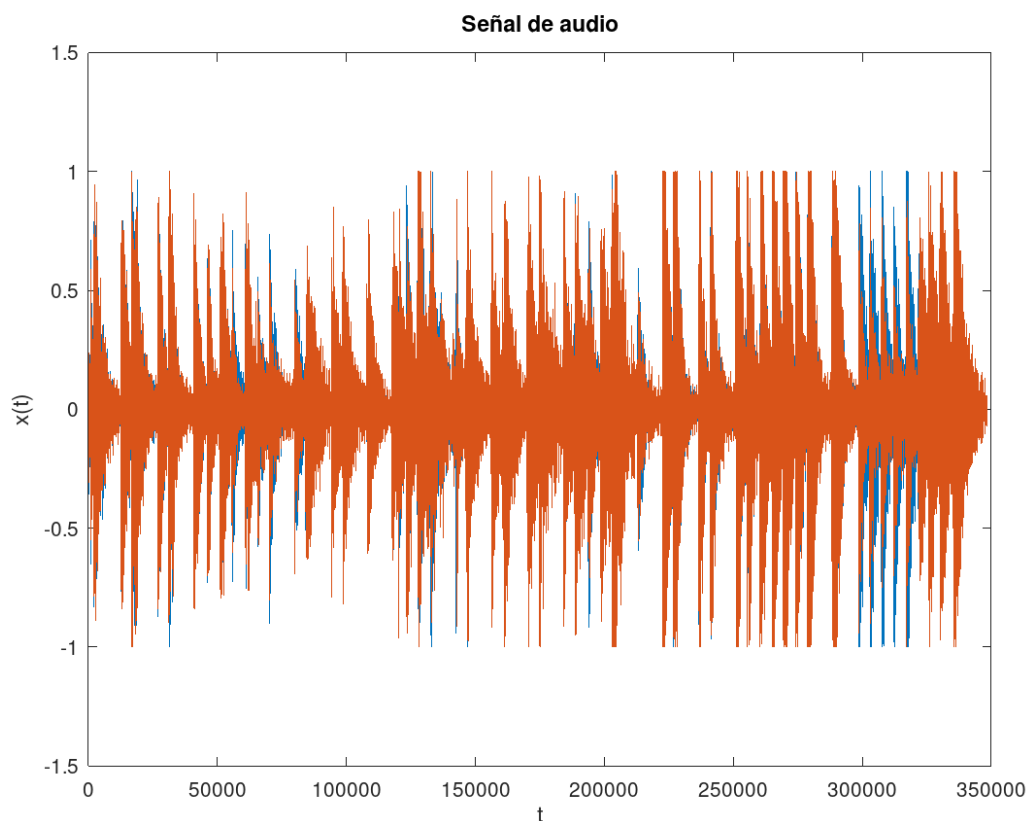


Fig. 18: Gráfica de la señal de audio x .

Luego, si aplicamos la ecuación en diferencias obtenida anteriormente a la señal de audio, se obtiene la siguiente gráfica.

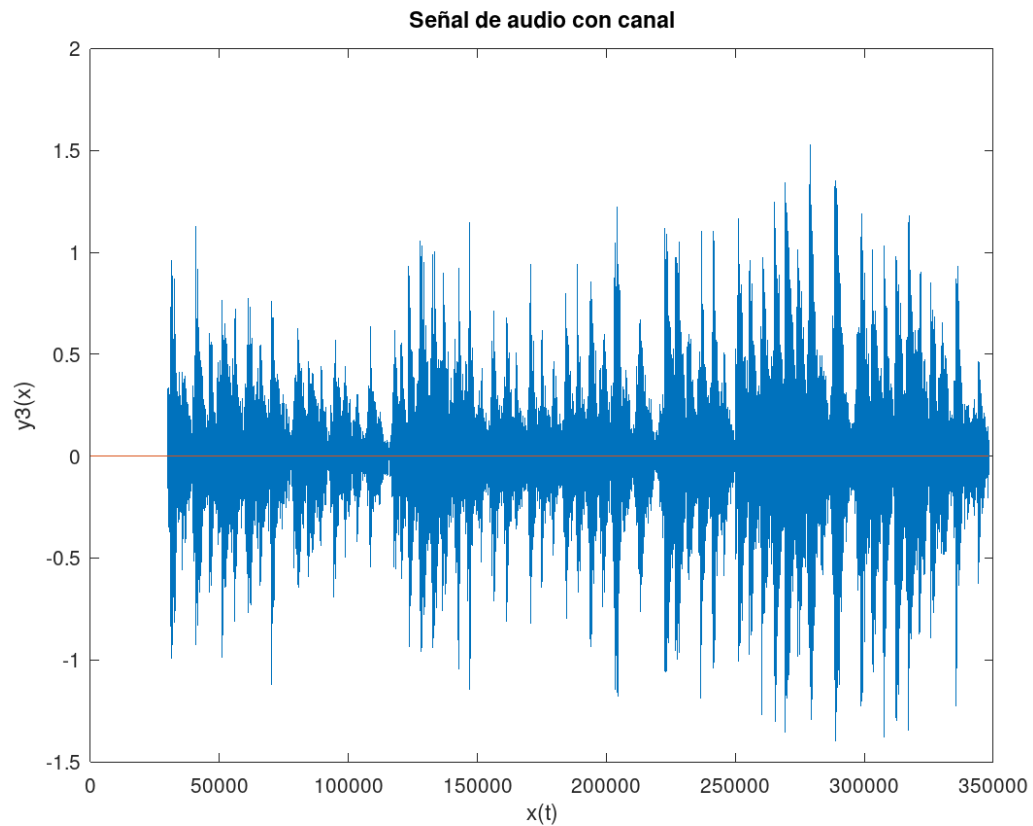


Fig. 19: Salida del sistema cuando se tiene la señal de audio x como entrada.

En la figura anterior se puede observar cómo la señal de audio es distorsionada debido a los ecos que se producen en el canal. Si reproducimos ambos audios, se puede apreciar la influencia de los ecos en la señal y cómo esta es distorsionada por los mismos.

Inciso 4

Una forma de intentar corregir el efecto que introduce el canal consiste en colocar un filtro FIR en cascada con el canal intentando que la respuesta impulsional total se aproxime lo más posible a una única delta de Kronecker. ¿Por qué querríamos lograr esto? Por ejemplo, si la respuesta impulsional del canal fuese $h_c[n] = \delta[n] + \alpha_1 \delta[n - n_0]$, un filtro con una sola rama de retardo sería de la forma $y[n] = x[n] - \alpha_1 x[n - n_0]$. ¿Qué efecto tiene este sistema? ¿Por qué la corrección no es perfecta? ¿Cómo añadiría una segunda rama de retardos que mejore esto?

Con esta idea implemente un sistema que intente corregir el efecto del canal. Pruebe con 2 y 3 ramas de retardo. Explícite la ecuación en diferencias. En cada caso gráfique la respuesta impulsional de la cascada (canal + filtro).

Sí, se tiene una respuesta impulsional de la forma:

$$h_c[n] = \delta[n] + \alpha_1 \delta[n - n_0]$$

El efecto producido por un filtro con una sola rama de retardo de la forma $y[n] = x[n] - \alpha_1 x[n - n_0]$, sería el siguiente:

$$y[n] = \delta[n] + \alpha_1 \delta[n - n_0] - \alpha_1 \delta[n - n_0] - \alpha_1 \delta[n - n_0 - n_0]$$

$$y[n] = \delta[n] - \alpha_1 \delta[n - 2n_0]$$

Donde el efecto producido consiste en anular el término que genera una distorsión, pero con la consecuencia de agregar un término que genera una distorsión menor.

Esto se debe a que al estar conectados en cascada, el resultado no es una suma lineal de las respuestas de cada sistema, sino la convolución entre estas. Lo que genera siempre una delta de menor valor y más desplazada que la anterior.

Para mejorar el efecto del filtro con una rama de retardo, tomamos el resultado de este y al ver qué componente era necesario anular del resultado, lo hacemos mediante un filtro con dos ramas de retardo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se pueden obtener los filtros con una y dos ramas de retardo y de la misma forma se puede proceder para obtener un filtro de tres ramas de retardo. Las ecuaciones en diferencia resultantes son las siguientes:

$$y[n] = x[n] + 0,5x[n - 8820] \text{ (1 rama)}$$

$$y[n] = x[n] + 0,5x[n - 8820] - 0,125x[n - 26460] \text{ (2 ramas)}$$

$$y[n] = x[n] + 0,5x[n - 8820] - 0,125x[n - 26460] - 0,0625x[n - 35280] \text{ (3 ramas)}$$

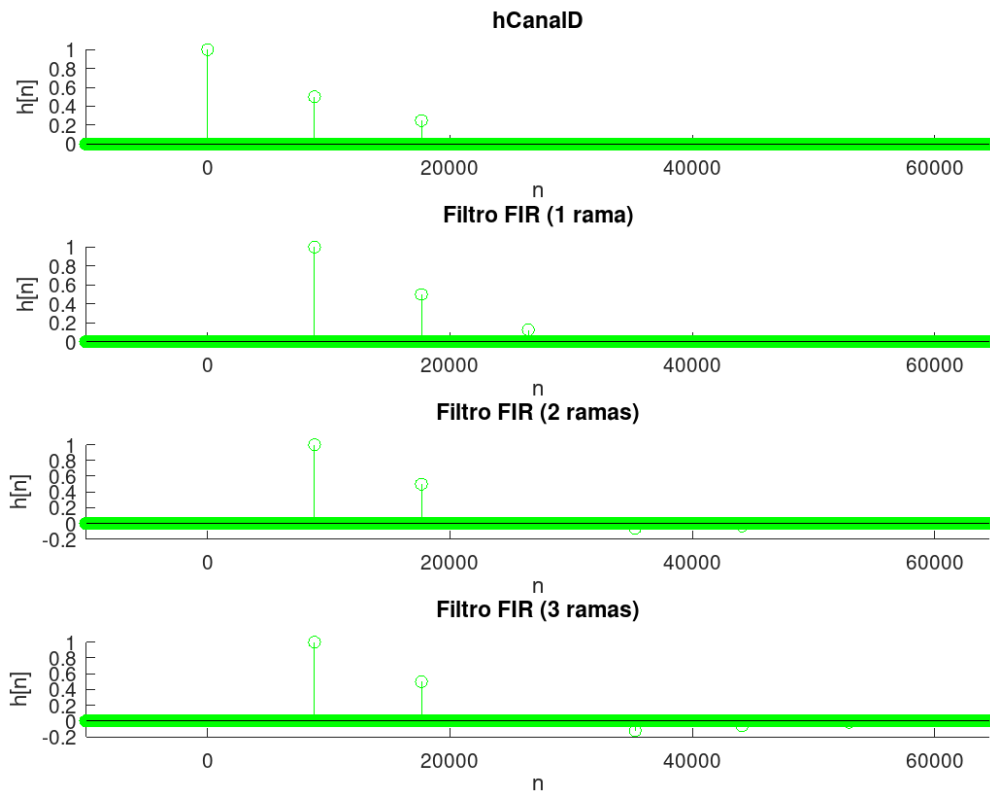


Fig. 20: Señal con filtro FIR, con 1, 2 y 3 ramas de retardo.

Inciso 5

Filtre la señal y con estos sistemas y escuche como suena. Compare cada una de estas señales con la señal x original.

A continuación, se muestran las gráficas con los resultados obtenidos:

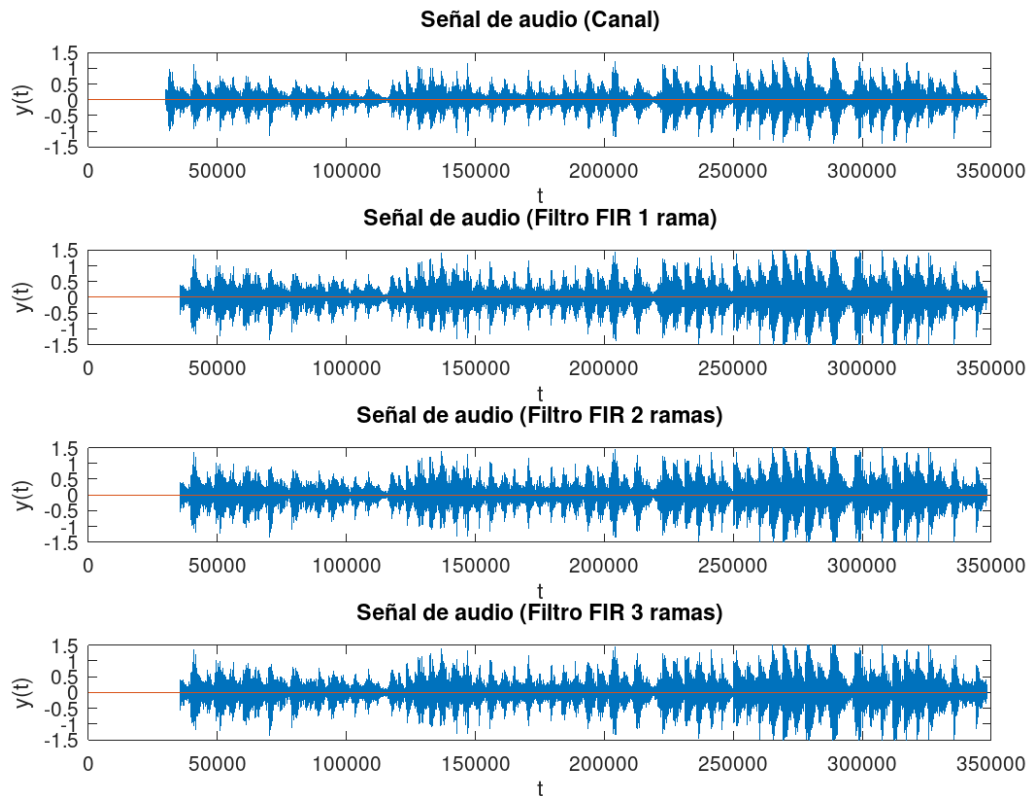


Fig. 19: Salida del sistema cuando se tiene la señal de audio x como entrada.

Al reproducir el audio resultante de pasar la señal por el filtro de una rama se pudo percibir una notable mejora con respecto al ruido producido por los ecos de la señal, mientras que con los filtros de 2 y 3 ramas, las diferencias eran leves con respecto al filtro con 1 rama, pero más notables respecto a la señal con ruido.

Una pequeña observación es que el ruido era más notable al finalizar el audio, que al inicio.

Conclusiones

Durante la resolución de los problemas planteados se pudo usar Octave como herramienta para facilitar la resolución de los mismos.

Dicha herramienta nos permitió desarrollar scripts que nos permitieron analizar y describir sistemas discretos lineales e invariantes al desplazamiento, planteados en las consignas de los ejercicios.

Lo cual, nos permitió comparar los resultados y los correspondientes gráficos obtenidos de manera analítica, con los resultados calculados y gráficos realizados mediante Octave, y así verificar nuestros procedimientos.

También, llevamos a cabo el procesamiento de un archivo de audio y mediante el uso de las funcionalidades que nos brinda Octave, pudimos reproducir su contenido, así como también modificar la señal de audio con dos ecos, simulando la utilización de un canal que le genera dos ecos al transmitirlo.

Además, intentamos reducir el efecto del ruido colocando filtros de distinta cantidad de ramas, en cascada con el canal, para disminuir estos ecos, lo cual, se logró no de la manera deseada (reducción mínima del ruido), pero si se obtuvieron resultados que como equipo, consideramos aceptables.