Uebungsblatt 5
„Mustererkennung“

J. Cavojska, N. Lehmann, R. Toudic

01.06.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Schnitte von zwei Gaußkurven

$$f_1(x, \mu_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$
$$f_2(x, \mu_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i > 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

- f_i ist achsensymmeterisch um μ_i
- f_i hat zwei Wendepunkte: $\mu_i - \sigma_i$ und $\mu_i + \sigma_i$
- f_i hat genau ein Maximum bei μ_i
- f_i ist stetig / für jede reelle Zahl definiert
- $f_i(x, \mu_i, \sigma_i) > 0$

Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

- f_i ist nicht definiert
- philosophische Betrachtung: f_i ist eine Konstante!?

Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i < 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

- f_i ist nicht definiert in $\mathbb{R}$ (, aber in $\mathbb{C}$)

<u>Schnittpunkte von f_1 und f_2 bestimmen durch Gleichsetzung:</u>

$$\begin{aligned}
f_1(x,\mu_1,\sigma_1) &= f_2(x,\mu_2,\sigma_2) && \Leftrightarrow\\
\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} && \Leftrightarrow\\
\frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} && \Leftrightarrow\\
\frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} && \Leftrightarrow\\
\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} && \Leftrightarrow\\
ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} && \Leftrightarrow\\
2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -(x-\mu_2)^2+\frac{2\sigma_2^2(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} && \Leftrightarrow\\
2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -(x-\mu_2)^2+\frac{\sigma_2^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2(x-\mu_2)^2+\sigma_2^2(x-\mu_1)^2 && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2(x^2-2x\mu_2+\mu_2^2)+\sigma_2^2(x-\mu_1)^2 && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2(x^2-2x\mu_2+\mu_2^2)+\sigma_2^2(x^2-2x\mu_1+\mu_1^2) && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2x^2+2x\mu_2\sigma_1^2-\mu_2^2\sigma_1^2+\sigma_2^2(x^2-2x\mu_1+\mu_1^2) && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2x^2+2x\mu_2\sigma_1^2-\mu_2^2\sigma_1^2+\sigma_2^2x^2-2x\mu_1\sigma_2^2+\mu_1^2\sigma_2^2 && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right)+\mu_2^2\sigma_1^2 &= -\sigma_1^2x^2+2x\mu_2\sigma_1^2+\sigma_2^2x^2-2x\mu_1\sigma_2^2+\mu_1^2\sigma_2^2 && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right)+\mu_2^2\sigma_1^2-\mu_1^2\sigma_2^2 &= \underset{3}{-}\sigma_1^2x^2+2x\mu_2\sigma_1^2+\sigma_2^2x^2-2x\mu_1\sigma_2^2 && \Leftrightarrow\\
2\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right)+\mu_2^2\sigma_1^2-\mu_1^2\sigma_2^2 &= x^2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)+2x\mu_2\sigma_1^2-2x\mu_1\sigma_2^2 && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 = x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + 2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = x^2 + \frac{2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

Ab hier gibt es zwei Möglichkeiten, die Gleichung zu lösen...

1. quadratische Ergänzung mit dem Term $\left(\frac{2(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2$ und umformen nach x
2. Term umformen und die P-Q-Formel verwenden

Wir haben uns für die 2. Option entschieden:

$$x^2 + \frac{2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} - \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x \cdot \underbrace{\frac{2\mu_2\sigma_1^2 - 2\mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}_{P} - \underbrace{\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}_{Q}$$

Nun können wir die quadratische Gleichung mit der P-Q-Formel lösen.
Zur Erinnerung: Die P-Q-Formel lautet: $x_{1/2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}$.

$$x_1 = 4 \cdot \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{2\mu_2\sigma_1^2 - 2\mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

$$x_2 = 4 \cdot \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} - \sqrt{\left(\frac{2\mu_2\sigma_1^2 - 2\mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

Sonderfall: Sei $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, dann gilt $f_1(x, \sigma, \mu_1) = f_2(x, \sigma, \mu_2) = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$.

2 Klassifikation mit Fisher-Diskriminante