

Uebungsblatt 5

„Mustererkennung“

J. Cavojska, N. Lehmann, R. Toudic

01.06.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Schnitte von zwei Gaußkurven	2
2	Klassifikation mit Fisher-Diskriminante	7
2.1	Mehr als 2 Klassen klassifizieren mit Binärbaum	9

1 Schnitte von zwei Gaußkurven

$$f_1(x, \mu_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$
$$f_2(x, \mu_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i > 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

- f_i ist achsensymmetrisch um μ_i
- f_i hat zwei Wendepunkte: $\mu_i - \sigma_i$ und $\mu_i + \sigma_i$
- f_i hat genau ein Maximum bei μ_i
- f_i ist stetig / für jede reelle Zahl definiert
- $f_i(x, \mu_i, \sigma_i) > 0$

Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

- f_i ist nicht definiert
- philosophische Betrachtung: f_i ist eine Konstante!?

Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i < 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

- f_i ist nicht definiert in \mathbb{R} (, aber in \mathbb{C})

Schnittpunkte von f_1 und f_2 bestimmen durch Gleichsetzung:

Fall 1: $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$

$$\begin{aligned}
 f_1(x, \mu_1, \sigma) &= f_2(x, \mu_2, \sigma) && \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}} && \Leftrightarrow \\
 e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}} && \Leftrightarrow \\
 \log\left(e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\right) &= \log\left(e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}\right) && \Leftrightarrow \\
 -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2} \cdot \log(e) &= -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2} \cdot \log(e) && \Leftrightarrow \\
 -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2} && \Leftrightarrow \\
 (x-\mu_1)^2 &= (x-\mu_2)^2 && \Leftrightarrow \\
 x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2 &= x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2 && \Leftrightarrow \\
 2x\mu_1 - 2x\mu_2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 &= 0 && \Leftrightarrow \\
 x(2\mu_1 - 2\mu_2) + \mu_2^2 - \mu_1^2 &= 0 && \Leftrightarrow \\
 x(2\mu_1 - 2\mu_2) &= \mu_1^2 - \mu_2^2 && \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{2\mu_1 - 2\mu_2} && \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{(\mu_1 + \mu_2) \cdot (\mu_1 - \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2)} && \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2}
 \end{aligned}$$

Fall 2: $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$\begin{aligned}
f_1(x, \mu_1, \sigma_1) &= f_2(x, \mu_2, \sigma_2) && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} && \Leftrightarrow \\
\frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} && \Leftrightarrow \\
\frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} && \Leftrightarrow \\
\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} && \Leftrightarrow \\
\ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} && \Leftrightarrow \\
2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -(x-\mu_2)^2 + \frac{2\sigma_2^2(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} && \Leftrightarrow \\
2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -(x-\mu_2)^2 + \frac{\sigma_2^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2(x-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(x-\mu_1)^2 && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2(x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2) + \sigma_2^2(x-\mu_1)^2 && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2(x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2) + \sigma_2^2(x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2) && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 - \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2(x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2) && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) &= -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 - \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2x^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 &= -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 + \sigma_2^2x^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 &= \frac{1}{4}\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 + \sigma_2^2x^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 && \Leftrightarrow \\
2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 &= x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + 2x\mu_2\sigma_1^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 = x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + 2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = x^2 + \frac{2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

Ab hier gibt es zwei Möglichkeiten, die Gleichung zu lösen...

1. quadratische Ergänzung mit dem Term $\left(\frac{2(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2$ und umformen nach x
2. Term umformen und die P-Q-Formel verwenden

Wir haben uns für die 2. Option entschieden:

$$x^2 + \frac{2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} - \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x \cdot \underbrace{\frac{2\mu_2\sigma_1^2 - 2\mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}_P - \underbrace{\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}_Q = 0$$

Nun können wir die quadratische Gleichung mit der P-Q-Formel lösen.

Zur Erinnerung: Die P-Q-Formel lautet: $x_{1/2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}$.

$$x_1 = \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

$$x_2 = \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

Sonderfall: Sei $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, dann gilt $f_1(x, \sigma, \mu_1) = f_2(x, \sigma, \mu_2) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$.

2 Klassifikation mit Fisher-Diskriminante

```
1 % Clean up
2 clear all
3 close all
4 clc
5
6 % Datenaufbreitung
7 Data = load('fisher.txt');
8 Data0 = Data((Data(:,3)==0),:);
9 Data1 = Data((Data(:,3)==1),:);
10 Koordinaten = Data(:,1:2);
11 Koordinaten0 = Data((Data(:,3)==0),1:2);
12 Koordinaten1 = Data((Data(:,3)==1),1:2);
13 Klassen = Data(:,3);
14
15 % Aufgabe 2
16
17 % Grafik erstellen
18 figure('NumberTitle','off','Name','Aufgabe 2 - Bildpunkte');
19
20 X = Koordinaten(:,1);
21 Y = Koordinaten(:,2);
22 min_x = -250;
23 max_x = 250;
24 li = min_x:max_x;
25
26 % Punkte plotten
27 gscatter(X,Y,Klassen,'krb','+x',[],'off');
28 hold on
29
30 % Diskriminante erzeugen
31 FDK = fitcdiscr(Koordinaten,Klassen);
32 Konst = FDK.Coeffs(1,2).Const;
33 Linear = FDK.Coeffs(1,2).Linear;
34 fd = @(x1,x2) Linear(1)*x1 + Linear(2)*x2 + Konst;
35
36 % Fisher-Diskriminante plotten
37 Diskriminante = ezplot(fd, [min_x,max_x]);
38 Diskriminante.Color = 'b';
39
40 % Scatter within berechnen
41 mean1 = mean(Koordinaten0);
42 mean2 = mean(Koordinaten1);
43 S1 = 0;
44 for i = 1:size(Koordinaten0, 1)
45     S1 = S1 + (Koordinaten0(i,:) - mean1)' * (Koordinaten0(i,:) - mean1);
46 end
47 S2 = 0;
48 for i = 1:size(Koordinaten1, 1)
49     S2 = S2 + (Koordinaten1(i,:) - mean2)' * (Koordinaten1(i,:) - mean2);
50 end
51 S_w = S1 + S2;
52
```

```

53 % Vektor w berechnen:
54 w = inv(S_w) * (mean1 - mean2)';
55 w_norm = w / norm(w)
56
57 % Gerade durch den Vektor w legen und plotten
58 w_gerade_x = w_norm(1) * li;
59 w_gerade_y = w_norm(2) * li;
60 plot(w_gerade_y, w_gerade_x, 'g');
61
62 % Daten auf Vektor w_norm projizieren
63 Koordinaten0_p = [];
64 for i = 1:size(Koordinaten0, 1)
65     Koordinaten0_p = vertcat(Koordinaten0_p, Koordinaten0(i, :) * w_norm);
66 end
67 Koordinaten1_p = [];
68 for i = 1:size(Koordinaten1, 1)
69     Koordinaten1_p = vertcat(Koordinaten1_p, Koordinaten1(i, :) * w_norm);
70 end
71 Koordinaten_p = vertcat(Koordinaten0_p, Koordinaten1_p);
72
73 % pdf der projizierten Daten aus Klasse 1 erzeugen
74 mean1_p = mean(Koordinaten0_p);
75 std1_p = std(Koordinaten0_p);
76 pdf1_p = pdf('Normal',li,mean1_p, std1_p);
77
78 % pdf der projizierten Daten aus Klasse 2 erzeugen
79 mean2_p = mean(Koordinaten1_p);
80 std2_p = std(Koordinaten1_p);
81 pdf2_p = pdf('Normal',li,mean2_p, std2_p);
82
83 % Schnittpunkt berechnen
84 [ispt_x,ispt_y] = intersections(li, pdf1_p, li, pdf2_p, 1);
85
86 % w0 berechnen und plotten
87 w0 = ispt_x * (w_norm')
88 plot(w0(1),w0(2),'m.','markersize',20);
89
90 % Titel, Bezeichner und Legende der Grafik
91 title('Aufgabe 2 - Plot');
92 xlabel('X-Koordinaten');
93 ylabel('Y-Koordinaten');
94 axis([-50 300 -50 300])
95 legend('1. Klasse','2. Klasse','Diskriminante','Gerade durch Vektor w', '↔
    Punkt w_0')

```

2.1 Mehr als 2 Klassen klassifizieren mit Binärbaum

Idee:

Mit Hilfe der Fisher-Diskriminanten bauen wir einen binären Entscheidungsbaum auf. In den Blättern stehen die Klassen. Von der Wurzel bis zu den Blättern werden in den Knoten die jeweiligen Diskriminanten gespeichert.

Algorithmus:

1. wähle zufällige Fisher-Diskriminante und speichere sie in der Wurzel
2. prüfe, ob eine weitere Diskriminante die aktuelle Diskriminante schneidet
 - **nein:**
 - Klasse -1 liegt im linken Blatt
 - Klasse +1 liegt im rechten Blatt
 - GOTO: *Punkt 3*
 - **ja:**
 - speichere die neue Diskriminante mit dem Vermerk -1 der aktuellen Diskriminante im linken Kinderknoten und mit dem Vermerk +1 der aktuellen Diskriminante im rechten Kinderknoten
 - markiere aktuelle Diskriminante als bearbeitet
 - wähle wie bei der Breitensuche den nächsten Kinderknoten aus
 - GOTO: *Punkt 2*
3. Algorithmus terminiert

Klappt der Algorithmus?