Напишите программу для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения с заданным начальным условием с помощью средств **SciPy**. Сравните результат вычисления с точным решением. Нарисуйте графики точного и численного решений, а также относительной ошибки численного решения.

7. $\ddot{y}+y=1-\dfrac{1}{\sin x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ \dot{y}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

Точное решение:

$$k^2+1=0$$

$$k_{1,2}=\pm i$$

$$y_0=C_1\sin x+C_2\cos x$$

$$\begin{cases} C_1'\sin x+C_2'\cos x=0 \\ C_1'\cos x-C_2'\sin x=1-\dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$C_2'=-C_1'\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1'\cos x+C_1'\frac{\sin^2 x}{\cos x}=1-\frac{1}{\sin x}$$

$$C_1'=1-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$$

$$C_1=\int\left(1-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)dx=\left|\begin{array}{l} \text{Замена } t=tg\dfrac{x}{2} \\ x=2arctgt\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\left(1-\frac{1+t^2}{2t}-\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{t^3-2t^2-2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt \cong$$

$$\frac{t^3-2t^2-2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$t^3-2t^2-2=A\left(t^3+t^2+t+1\right)+B\left(-t^3+t^2-t+1\right)+C\left(t-t^3\right)+D\left(1-t^2\right)$$

$$\begin{array}{r} t^3: \\ t^2: \\ t: \\ 1 \end{array}\begin{cases} A-B-C=1 \\ A+B-D=-2 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{3}{4} \\ B=-\dfrac{5}{4} \\ C=-\dfrac{1}{2} \\ D=0 \end{cases}$$

$$\breve{=} -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{1-t}-\frac{5}{4}\int\frac{dt}{1+t}-\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{1+t^2}=\frac{3}{4}\ln|1-t|-\frac{5}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{C_1\left(1-tg\,x/2\right)^3\cos^2 x/2}{\left(1+tg\,x/2\right)^5}\right|$$

$$C_2{}'=-C_1{}'\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x-\sin x\cos x+\cos x}{\cos^2 x}$$

$$C_2=\int\frac{\sin x-\sin x\cos x+\cos x}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{l} \text{Замена } t=tg\dfrac{x}{2} \\ x=2arctgt\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2\left(-t^4+4t^3+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2\left(1+t^2\right)}dt\ \breve{=}$$

$$\frac{-2t^4+8t^3+2}{\left(1-t^2\right)^2\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{\left(1-t\right)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{\left(1+t\right)^2}+\frac{Et+F}{1+t^2}$$

$$-2t^4+8t^3+2=A\left(-t^5-t^4+t+1\right)+B\left(t^4+2t^3+2t^2+2t+1\right)+C\left(t^5-t^4-t+1\right)+$$
$$+D\left(t^4-2t^3+2t^2-2t+1\right)+E\left(t^5-2t^3+t\right)+F\left(t^4-2t^2+1\right)$$

$$
\begin{array}{l} t^5: \\ t^4: \\ t^3: \\ t^2: \\ t: \\ 1: \end{array}
\begin{cases} -A+C+E=0 \\ -A+B-C+D+F=-2 \\ 2B-2D-2E=8 \\ 2B+2D-2F=0 \\ A+2B-C-2D+E=0 \\ A+B+C+D+F=2 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=2 \\ D=-1 \\ E=-2 \\ F=0 \end{cases}
$$

$$
\cong \int \frac{dt}{(1-t)^2} + 2\int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{(1+t)^2} - 2\int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{1-t} + 2\ln|1+t| + \frac{1}{1+t} - \ln\left|1+t^2\right| + C_2 =
$$

$$
= \frac{2}{1-tg^2 x/2} + \ln\left|\frac{\left(1+tg^2 x/2\right)^2}{1+tg^2 x/2}\right| + C_2 = \frac{2}{1-tg^2 x/2} + \ln\left|\left(1+tg^2 x/2\right)^2 \cos^2 x/2\right| + C_2
$$

$$
y = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{C_1 \cos^3 x \cos^2 x/2}{\left(1+tg\, x/2\right)^2}\right| \sin x + \left(\frac{2}{1-tg^2 x/2} + \ln\left|\left(1+tg^2 x/2\right)^2 \cos^2 x/2\right| + C_2\right)\cos x
$$

$$
y' = C_1 \cos x + C_1' \sin x - C_2 \sin x + C_2' \cos x =
$$

$$
= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{C_1 \cos^3 x \cos^2 x/2}{\left(1+tg\, x/2\right)^2}\right| \cos x - \left(\frac{2}{1-tg^2 x/2} + \ln\left|\left(1+tg^2 x/2\right)^2 \cos^2 x/2\right| + C_2\right)\sin x
$$

При $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1:$

$$
0 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{1-tg^2 x/2} + \ln|2| + C_2\right)\cdot \cos x
$$

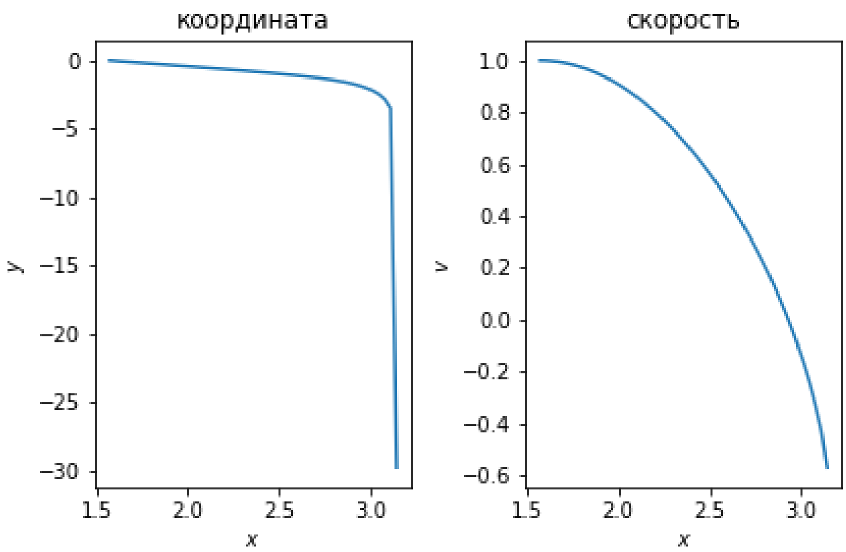
$$
1 = -\left(\frac{2}{1-tg^2 x/2} + \ln\left|\left(1+tg^2 x/2\right)^2 \cos^2 x/2\right| + C_2\right)
$$

В общем, до конца у меня так и не хватило терпен решить это уравнении. Так что программа только для численного решения.

Программа

```
#подключение библиотек
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import integrate
```

```python
from scipy.interpolate import interp1d
# вектор-функция правых частей уравнений:
# f = [f0, f1], где f0 = 1-1/sin(x)-y, f1 = v.
# полагается, что f зависит от (u, x), причём u - это
# список из двух чисел:
# u = [v, y]
def f(u, x):
    v = u[0]
    y = u[1]
    f0 = 1- 1/np.sin(x) - y
    f1 = v
    return [f0, f1]
# массив точек интегрирования
xi = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 50)
# начальная координата
y0 = 0.0
# начальная скорость
v0 = 1.0
# список начальных условий
u0 = [y0, v0]
# решение ОДУ
sol = integrate.odeint(f, u0, xi)
# рисунок для построения графиков функций y(x) и v(x)
fig = plt.figure()
#панель для рисования графика координаты
ax1 = fig.add_subplot(121)
# панель для рисования графика скорости
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_xlabel(r'$x$')
ax1.set_ylabel(r'$y$')
ax1.set_title('координата')
# график y(x) - зависимость нулевого столбца вектора
# решения sol от xi
ax1.plot(xi, sol[:, 0])
ax2.set_xlabel(r'$x$')
ax2.set_ylabel(r'$v$')
ax2.set_title('скорость')
# график v(x) - зависимость первого столбца вектора
# решения sol от xi
ax2.plot(xi, sol[:, 1])
# настройка оптимального расположения панелей
plt.tight_layout()
fig.savefig("ode7.png")
```



13. $2\dot{y}+y=e^{2x}$ при $y(0)=1.$

Точное решение:

$$y=uv\Rightarrow\dot{y}=u'v+uv'$$

$$2u'v+2uv'+uv=e^{2x}$$

$$v(2u'+u)+2uv'=e^{2x}$$

$$2u'+u=0\Rightarrow 2\frac{du}{dx}=-u$$

$$\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int dx\Rightarrow\ln|u|=-\frac{x}{2}\Rightarrow u=e^{-x/2}$$

$$v'=\frac{1}{2}e^{5x/2}\Rightarrow v=\frac{1}{2}\int e^{5x/2}dx=\frac{1}{5}e^{5x/2}+C$$

$$y=uv=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-x/2}$$

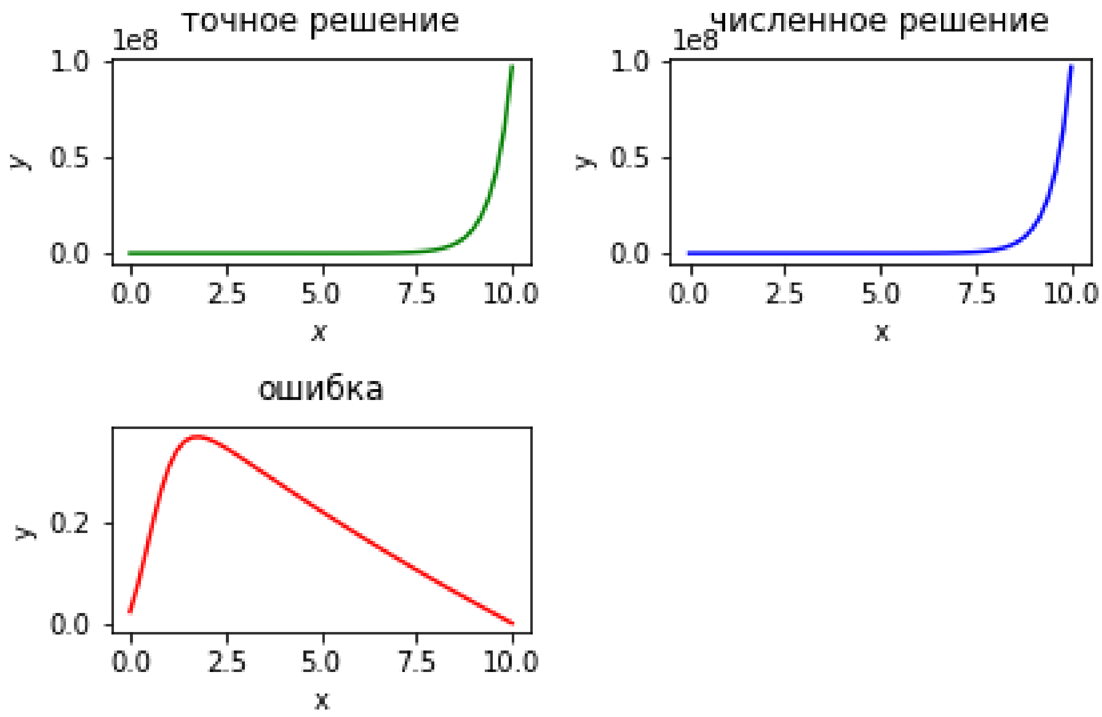
$$y(0)=1:\frac{1}{5}+C=1\Rightarrow C=\frac{4}{5}$$

$$y=\frac{1}{5}\left(e^{2x}+4e^{-x/2}\right)$$

Программа

```
#подключение библиотек
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import integrate
from scipy.interpolate import interp1d
#численное решение диф ур-ния
def f(y, x):
    return 0.5*(np.exp(2*x) - y)
```

```
#точное решение диф ур-ния
def f_exact(x):
    return 0.2*(np.exp(2*x)+4*np.exp(-x/2))
#ошибка
def error(f,sol,x):
    e=[]
    h=min(x)
    for i in range(len(x)):
        h +=max(x)/len(x)
        e.append(np.abs(sol[i][0]-f(h))/sol[i][0])
    return e
# массив точек интегрирования
xi = np.linspace(0, 10, 50)
# начальная координата
y0 = 1.0
# решение ОДУ
sol = integrate.odeint(f, y0, xi)
# рисунок для построения графиков функций y(x)
fig = plt.figure()
ax1 = fig.add_subplot(221)
ax2 = fig.add_subplot(222)
ax3 = fig.add_subplot(223)
#график точного решения ДУ
ax1.plot(xi, f_exact(xi), '-', color='green', )
ax1.set_xlabel(r'$x$')
ax1.set_ylabel(r'$y$')
ax1.set_title('точное решение', pad = 10, fontsize = 12)
#график численного решения ДУ
ax2.plot(xi, sol, '-', color='blue')
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('y')
ax2.set_title('численное решение', pad = 10, fontsize = 12)
#график относительной ошибки
ax3.plot(xi, error(f_exact,sol,xi), '-', color='red')
ax3.set_xlabel('x')
ax3.set_ylabel('y')
ax3.set_title('ошибка', pad = 10, fontsize = 12)
plt.tight_layout()
fig.savefig("ode13.png")
plt.show()
```


точное решение
численное решение
ошибка
1e8
y
x
0.0
0.5
1.0
0.2
2.5
5.0
7.5
10.0