

Вариант 7

Напишите программу для численного вычисления определенного интеграла с помощью средств SciPy. Сравните результаты вычисления различными функциями интегрирования с точным решением.

$$\int_{-5}^5 x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$$

Аналитическое решение:

$$\begin{aligned} \int_{-5}^5 x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{Замена } t = \sqrt[3]{1+x^2} \\ x = \sqrt{t^3-1} \Rightarrow dx = \frac{3t^2 dt}{2\sqrt{t^3-1}} \\ x = -5 : t = \sqrt[3]{26}; x = 5 : t = \sqrt[3]{26} \end{array} \right| = \int_{\sqrt[3]{26}}^{\sqrt[3]{26}} \sqrt{(t^3-1)^3} \frac{3t^3 dt}{2\sqrt{t^3-1}} = \\ &= \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{26}}^{\sqrt[3]{26}} (t^3-1)t^3 dt = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{26}}^{\sqrt[3]{26}} (t^6-t^3) dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{26}}^{\sqrt[3]{26}} = 0 \end{aligned}$$

Программа:

```
from scipy import integrate

from math import pow

def f(x):

    return x**3*pow(x**2 + 1, 1/3)

integrate.quad(f, -5, 5)

(0.0, 8.695494922822938e-12)
```

Т.к. интеграл очевидно равен нулю, то я решила заменить границы интегрирования на -3 и 5:

Аналитическое решение:

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^5 x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{Замена } t = \sqrt[3]{1+x^2} \\ x = \sqrt{t^3-1} \Rightarrow dx = \frac{3t^2 dt}{2\sqrt{t^3-1}} \\ x = -3 : t = \sqrt[3]{10}; x = 5 : t = \sqrt[3]{26} \end{array} \right| = \int_{\sqrt[3]{10}}^{\sqrt[3]{26}} \sqrt{(t^3-1)^3} \frac{3t^3 dt}{2\sqrt{t^3-1}} = \\
 &= \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{10}}^{\sqrt[3]{26}} (t^3-1) t^3 dt = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{10}}^{\sqrt[3]{26}} (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{10}}^{\sqrt[3]{26}} = \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{676\sqrt[3]{26}}{7} - \frac{13\sqrt[3]{26}}{2} - \frac{100\sqrt[3]{10}}{7} + \frac{5\sqrt[3]{10}}{2} \right) = \\
 &= 362,167052
 \end{aligned}$$

Программа:

```
from scipy import integrate
```

```
from math import pow
```

```
def f(x):
```

```
    return x**3*pow(x**2 + 1, 1/3)
```

```
integrate.quad(f, -3, 5)
```

```
(362.16705197211274, 8.575020561639914e-07)
```