整除分块

模板

给定一个正整数 n，其中 $n \le 10^9$，考虑求

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

我们可以直接模拟，时间复杂度 $\mathrm{O}(n)$。

但这样显然无法通过这个问题。

思想

我们把 $n = 10$ 的情况列出来：

$$\boxed{\left\lfloor \frac{10}{1} \right\rfloor = 10}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor = 2},$$

$$\boxed{\left\lfloor \frac{10}{6} \right\rfloor = 1}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{8} \right\rfloor = 1}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor = 1}, \boxed{\left\lfloor \frac{10}{10} \right\rfloor = 1}$$

容易发现，对于一些不同的 i，有相同的 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$，我们可不可以把这些相同的部分一并计算来降低时间复杂度呢？

显然是可以的。

我们把这些有相同 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 值的区间称为一个块，那么问题在于我们如何找到块长，或者说块的左右端点。

假设我们已知某个块的左端点 l，求解块的右端点 r。

记有整数 $k = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor (i \in [l, r])$，表示这个块的数值。

显然有

$$k = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$$

即 $i \times k \le n$，那么我们可以发现，当 $i = r$ 时，$r \times k$ 的值最大且 $r \times k \le n$。

那么有：

$$r = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

又因为有：

$$k = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$$

代入得：

$$r = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor} \right\rfloor$$

Code

```
long long H(int n) {
    long long res = 0;
    if(n == 0)
        return 0;
    int l = 1,r;
    while(l <= n) {
        r = n / (n / l);
        res += 1ll * (r - l + 1) * (n / l);
        l = r + 1;
    }
    return res;
}
```

性质

> $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 最多只有 $2\sqrt{n}$ 种取值。

证明：对于 $i \le \sqrt{n}$，最多有 $\sqrt{n}$ 种取值；而对于 $i > \sqrt{n}$，有 $\frac{n}{i} < \sqrt{n}$，所以也最多只有 $\sqrt{n}$ 种取值，所以最多也只有 $2\sqrt{n}$ 种取值。

练习

UVA11526 H(n)（模板题）

[CQOI2007] 余数求和

END