09.09.25

Множества

Мн-во – совокупность опр. и разл. между собой объектов, которые воспр. как единое целое. (M)

$M \times K = \{(a, b),\ a \in M,\ b \in K\}$

aRb („a" и „b" связаны отношением R)

$R \subseteq M \times K$

↖ отношение

Виды отношений:

1. Рефлексивное	aRa
2. Антирефлексивное	$\neg(aRa)$
3. Симметричное	$aRb \Rightarrow bRa$
4. Антисимметричное	$(aRb) \wedge (bRa) \Rightarrow a = b$
5. Транзитивное	$(aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow aRc$
6. Антитранзитивное	$(aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow \neg(aRc)$

Отношение эквивалентности = [1, 3, 5]

Отношение частичного порядка = [1, 4, 5]

Отношение полного порядка = [2, 4, 5]

Алгебраические структуры

Бинарная операция (БО)
или
Операция замкнута на M

$\varphi : M \times M \to M$

Виды БО:

1. Коммутативная $\forall a, b \in M \quad \varphi(a, b) = \varphi(b, a)$

2. Ассоциативная $\forall a, b, c \in M \quad \varphi(\varphi(a, b), c) = \varphi(a, \varphi(b, c))$

Опр. (M, φ) – алгебраическая структура (АС)

M + коммут. БО = коммут. АС

M + ассоц. БО = ассоц. АС = **полугруппа**

Нейтральный (единичный) элемент

$\varphi(a, e) = \varphi(e, a) = a \quad \forall a \in M \qquad e$ – единичный

Моноид = Полугруппа + единич. элемент

Опр. $a \in M$, $a^{-1} \in M$
обратный к „a"

$\varphi(a, a^{-1}) = \varphi(a^{-1}, a) = e \qquad a$ – обратимый элемент

Группа

Опр. Моноид, у которого все эл-ты обратимы наз-ся группой

Опр. $(G, \circ)$ БО

1. $\forall a, b, c \in G \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. $\exists e \in G: \forall a \in G \quad a \circ e = e \circ a = a$
3. $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \Rightarrow a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

4. $\forall a, b \in G \quad a \circ b = b \circ a$ абелева группа

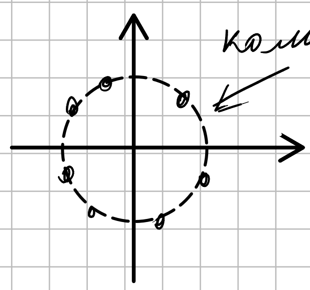
Итого

Полугруппа: M + ассоц. БО → Моноид: $+ \exists e$ → Группа: $+ \exists a^{-1}\ \forall a$ → Абелева группа: + коммут. БО

1. $(\mathbb{N}, +)$ — полугруппа
2. $(\mathbb{Z}, +)$ — абелева группа
3. $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ — абелева группа
4. $(\mathbb{N}, \cdot)$ — моноид
5. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ — моноид
6. $(\mathbb{R}, \cdot)$ — моноид $(\mathbb{C}, \circ), (\mathbb{Q}, \circ)$
7. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ — абелева группа $(\mathbb{R}^*, \circ), (\mathbb{C}^*, \circ)$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

8. $\{\pm 1, \circ\}$ — абелева группа
9. $\{\sqrt[n]{1}, \circ\}$ — абелева группа



компл. корни.

10. $\{a^n\} = \left\{\begin{matrix} a, a^2, a^3, \dots, \\ a^0, a^{-2}, a^{-3}, \dots, \end{matrix}\right\}$

$(\{a^n\}, \circ)$ — абелева группа

11. M, мн-во всех подмн-в $= 2^M$

$(2^M, \Delta)$ — абелева группа

симметр. разн.

12. $(M_{n \times m}, +)$ — абелева группа
13. $(M^*_{n \times n}, \circ)$ — не абелева группа

$[M_{n \times n} : |M_{n \times n}| \neq 0]$

14. $S_n = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix}$ — группа перестановок

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

не абелева группа при $n\geq 3$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}3&1&4&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$$

цикл

$$(2\ 1\ 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$2\to 1\to 3$

циклы

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3)(2\ 4)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=e \qquad S_3=\{e,(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$$

$$(1\ 4\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 4\ 3)=(1\ 3\ 4\ 2)$$

$1 \quad 4\to 4 \quad 3$

15. A_n – группа чётных перестановок (кол-во инверсий)

$$A_3=\{e,(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$$

16. $V_4=\{e,(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 3),(1\ 4)(1\ 3)\}$ – группа Клейна

17. $(\mathbb{Z}_n,+)$ – группа вычетов по $|n|$

$\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ – остатки от деления на 6

$3+5=8/6=1\frac{2}{6}=2$

$2^{-1}=4 \qquad 2+4=6/6=0$

18. $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ – моноид (нет обр. у нуля)

19. $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ – абелева группа

p – простое

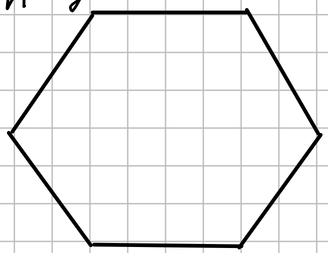
$\mathbb{Z}_7^*=(1,2,3,4,5,6)$

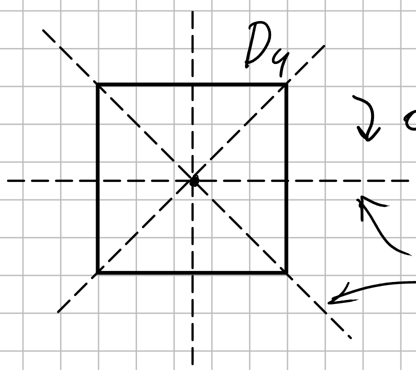
$3\cdot 4=12/7=1\frac{5}{7}=5$

$4^{-1}=|4\cdot ?=1|=2$

20. D_n — группа Диэдра

n-угольник





$0°$ $90°$ $180°$ $270°$

оси симметрии

n - поворотов

n - симметрий

21. $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ — группа кватернионов

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$\boxed{\begin{array}{llll} i \to j \to k & ij = k & jk = i & ki = j \\ & ji = -k & ik = -j & kj = -i \end{array}}$$

Порядок группы

$|G| = \mathrm{Card}\, G$ — кол-во элементов в группе

$|D_5| = 10$ $|S_4| = 4! = 24$

Порядок элементов группы

$\mathrm{Card}\, a = \{\min n \in \mathbb{N} : a^n = e\}$