9.09.25

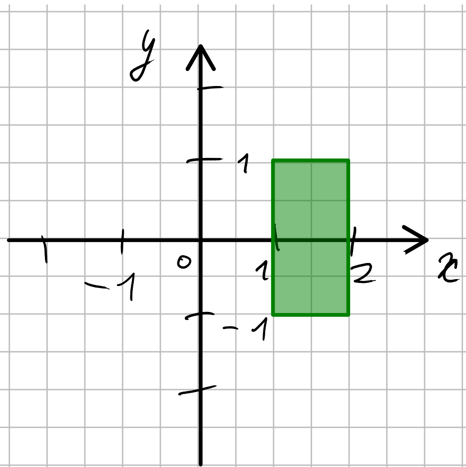
Элементы теории множеств. Декартовы произведения множеств.

Отношения на множестве и их свойства. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.

1. Найти $A\times B$, если $A=\{1;2\}$, $B=\{1;2;3\}$.

$$\boxed{A\times B=\{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3)\}}$$

2. Изобразить на плоскости $A\times B$, если $A=[1;2]$, $B=[-1;1]$.



$x_i \in A$

$y_i \in B$

3. На множестве ненулевых вещественных чисел $R\setminus\{0\}$ задано бинарное отношение $xy>0$. Является ли оно рефлексивным, симметричным, транзитивным?

1) Рефлексивность aRa

2) Симметричность $aRb \Rightarrow bRa$

3) Транзитивность $(aRb)\cap(bRc) \Rightarrow aRc$

Проверка:

1) $x\cdot x>0$ $+$ 2) $xy>0 \Rightarrow yx>0$ $+$

3) $\begin{cases} xy>0 \\ yz>0 \end{cases} \Rightarrow xz>0$ $+$ $\boxed{\blacktriangle\ (xz)y^2>0 \Rightarrow y^2>0 \Rightarrow xz>0\ \blacktriangle}$

4. На множестве ненулевых вещественных чисел $R\setminus\{0\}$ задано бинарное отношение $x-y\in Z$. Является ли оно рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Проверка:

1) $x-x\in \mathbb{Z} \Rightarrow 0\in\mathbb{Z}$ $+$

2) $x-y\in\mathbb{Z} \Rightarrow y-x\in\mathbb{Z}$ $+$

3) $\begin{cases} x-y\in\mathbb{Z} \\ y-z\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x-z\in\mathbb{Z}$ $+$ $\boxed{\blacktriangle\ (x-\cancel{y})+(\cancel{y}-z)\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-z\in\mathbb{Z}\ \blacktriangle}$

5. На множестве ненулевых вещественных чисел $R \setminus \{0\}$ задано бинарное отношение $x / y \in Z$. Является ли оно рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Проверка:

1) $x / x \in \mathbb{Z}$ +

2) $x / y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y / x \in \mathbb{Z}$ ×

3) $\begin{cases} x / y \in \mathbb{Z} \\ y / z \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x / z \in \mathbb{Z}$ + $\boxed{\blacktriangle \ \frac{x \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot z} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{z} \in \mathbb{Z} \ \blacktriangle}$

6. На множестве вещественных чисел R задано бинарное отношение $a \varphi b \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Докажите, что φ – отношение эквивалентности. Сколько элементов в классе эквивалентности?

Проверка:

1) $a^2 + a = a^2 + a$ +

2) $(a^2 + a = b^2 + b) \Rightarrow (b^2 + b = a^2 + a)$ +

3) $\begin{cases} a^2 + a = b^2 + b \\ b^2 + b = c^2 + c \end{cases} \Rightarrow a^2 + a = c^2 + c$ +

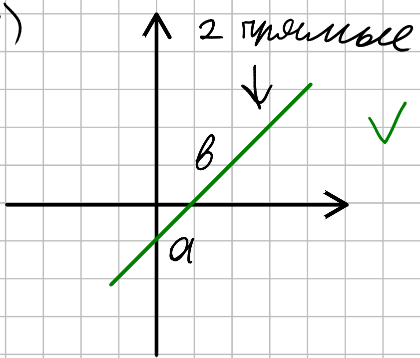
Кол-во элементов:

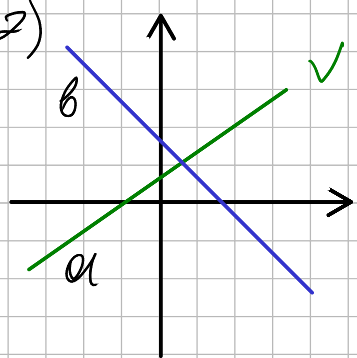
$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow a \in \{0; -1\}$ $\quad |a| = 2$

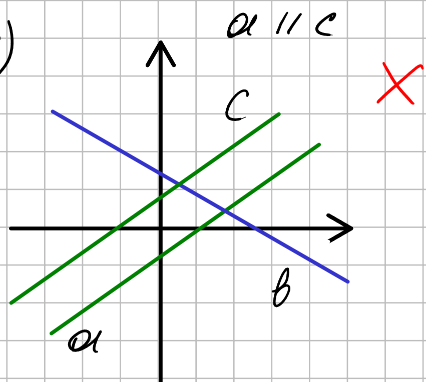
$a^2 + a = 1 \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 1 = 5 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\quad |a| = 2$

Итого: 2 элемента

7. На множестве прямых задано бинарное отношение $a \varphi b \Leftrightarrow$ прямая a пересекает прямую b. Является ли оно рефлексивным, симметричным, транзитивным?

1) 

2) 

3) 

8. На множестве натуральных чисел N задано бинарное отношение $a\varphi b \Leftrightarrow$ число a делится на число b без остатка. Является ли оно рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Является ли оно отношением порядка?

Проверка:

1) $a / a \in \mathbb{Z}$ ✓

2) $a / b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b / a \in \mathbb{Z}$ ✗

3) $\begin{cases} a / b \in \mathbb{Z} \\ b / c \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a / c \in \mathbb{Z}$ ✓

Отношение частичного порядка?

4) Антисимметричность $(aRb) \wedge (bRa) \Rightarrow a = b$

$(a / b \in \mathbb{Z}) \wedge (b / a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = b$ ✓

Итого: Да

Определение операции. Свойства операций: замкнутость, ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, дистрибутивность

1. Какая операция является алгебраической на множестве целых чисел

$a \circ b = a \cdot e^b$

$a \circ b = a^b$

$a \circ b = a + \ln|b|$

Условия: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

1) $a \cdot e^b \notin \mathbb{Z}$ ✗

2) $a^b \notin \mathbb{Z}$ ✗

3) $a + \ln|b| \notin \mathbb{Z}$ ✗ — вообще не БО, т.к. $\ln|0| = -\infty$

2. Ассоциативная ли операция на заданном множестве:

$a \circ b = a^b$, $M = N$

$a \circ b = НОД(a,b)$, $M = N$

$a \circ b = a - b$, $M = Z$

$a \circ b = a^2 + b^2$, $M = Z$

$$\boxed{(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)}$$

1) $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ ✗

2) $НОД(НОД(a,b),c) = $
$= НОД(a, НОД(b,c))$ ✗

3) $(a-b)-c = a-(b-c)$ ✗

4) $a^2 + (b^2+c^2)^2 = (a^2+b^2)^2 + c^2$ ✗

3. Является ли операция $a \circ b = ab - ba$ бинарной алгебраической операцией на множествах: N, Z, Q, 2Z, 2Z+1, R, $R \setminus \{0\}$. Если является, то есть ли нейтральный элемент?

$\mathbb{N}$: $ab - ba = 0 \notin \mathbb{N}$ ✗

$\mathbb{Z}$: $ab - ba = 0 \in \mathbb{Z}$ ✓

$\mathbb{Q}$: ✓

$2\mathbb{Z}$: ✓

$2\mathbb{Z}+1$: $0 \notin 2\mathbb{Z}+1$ ✗

$\mathbb{R}$: ✓ $\quad R \setminus \{0\}$: ✗

4. Какими свойствами (замкнутость, коммутативность, ассоциативность, идемпотентность) обладает операция на заданном множестве:

$a \circ b = a^2 \cdot b^2$, $M = Z$.

$a \circ b = a \cap b$, M – множество всех конечных множеств.

1) Замкнутость: $M \times M \to M$

2) Коммутативность: $a \circ b = b \circ a$

3) Ассоциативность: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

4) Идемпотентность: $a \circ a = a$

1) $a \circ b = a^2 \cdot b^2$, $M = \mathbb{Z}$

1.1) $a^2 \cdot b^2 \in M$ ✓

1.2) $a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot a^2$ ✓

1.3) $(a^2 \cdot b^2) \cdot c^2 = a^2 \cdot (b^2 \cdot c^2)$ ✓

1.4) $a^2 \cdot a^2 \neq a$ ✗

2) $a \circ b = a \cap b$ $\quad M$ – мн-во всех конеч. мн-в

2.1) $a \cap b \in M$ ✓

2.2) $a \cap b = b \cap a$ ✓

2.3) $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$ ✓

2.4) $a \cap a = a$ ✓