1. K – конечное кольцо, не содержит делители нуля. Доказать что $1 \in K$ и все ненулевые элементы обратимы.

$K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0,\ ab = 0 \quad \times$

$a \neq 0,\ a \in K,\ aK = \{a \cdot a_1, a \cdot a_2, \ldots, a \cdot a_n\}$

$] \ a \cdot a_i = a \cdot a_j \Rightarrow a(a_i - a_j) = 0 \Rightarrow a_i = a_j$

$a \cdot a_i = a \Rightarrow a_i = 1$

$a \cdot a_i = 1 \Rightarrow a_i = a^{-1}$

2. L – идеал кольца K. L содержит обратимый элемент. Доказать $L = K$.

$a \in L : a^{-1} \in L$ $\quad$ Док-ть : $L = K$

$x \in L \quad k \in K \Rightarrow kx \in L,\ xk \in L$

$a \in L \quad a^{-1} \in K \ | \Rightarrow a \cdot a^{-1} = 1 \in L$

$1 \in L \quad k \in K \ | \Rightarrow 1 \cdot k = k \in L \Rightarrow K \subset L \Rightarrow K = L$

3. Образуют ли идеал необратимые элементы кольца: а) Z_{16}; б) Z_{24}.

а) $\mathbb{Z}_{16} = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}\ (+, \cdot)$

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ – идеал

← необратимые

б) $\mathbb{Z}_{24} = \{0, 1, 2, \ldots, 23\}\ (+, \cdot)$

$A = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16, 18, 20, 21, 22\}$ – не идеал

$2 + 3 = 5 \notin A$

4. Найти все идеалы кольца: а) Z_{18}; б) Z_{32}.

б) $\mathbb{Z}_{32}$

1) $\{0\}$

2) $\{0, 2, 4, \ldots, 30\}$

3) $\mathbb{Z}_{32}$

4) $\{0, 4, 8, \ldots, 28\}$

5) $\{0, 8, 16, 24\}$

6) $\{0, 16\}$