

07.10.25

1. Какие из отображений групп $C^* \rightarrow R^*$ являются гомоморфизмами?

а) $f(z) = |z|$, б) $f(z) = \frac{1}{|z|}$, в) $f(z) = 1 + |z|$.

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) \quad \alpha, \beta \in C^*$$

а) $f(z) = |z|$

$$f(\alpha\beta) = |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| = f(\alpha) \cdot f(\beta) \quad \checkmark$$

б) $f(z) = \frac{1}{|z|}$

$$f(\alpha\beta) = \frac{1}{|\alpha\beta|} = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \frac{1}{|\beta|} = f(\alpha) \cdot f(\beta) \quad \checkmark$$

в) $f(z) = 1 + |z|$

$$f(\alpha\beta) = 1 + |\alpha\beta| \quad \text{---} \quad \text{X}$$

$$f(\alpha)f(\beta) = (1 + |\alpha|)(1 + |\beta|) \quad \text{---} \quad \text{X}$$

2. Найти гомоморфизмы групп: а) $Z_6 \rightarrow Z_6$, б) $Z_6 \rightarrow Z_{18}$, в) $Z_{18} \rightarrow Z_6$, г) $Z_{12} \rightarrow Z_{15}$.

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

а) $Z_6 \rightarrow Z_6$

| ϑ_1 | ϑ_2 | ϑ_3 | ϑ_4 | ϑ_5 | ϑ_6 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ |
| $1 \rightarrow 0$ | $1 \rightarrow 1$ | $1 \rightarrow 2$ | $1 \rightarrow 3$ | $1 \rightarrow 4$ | $1 \rightarrow 5$ |
| $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 2$ | $2 \rightarrow 4$ | $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 2$ | $2 \rightarrow 4$ |
| $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 3$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 3$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 3$ |
| $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 4$ | $4 \rightarrow 2$ | $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 4$ | $4 \rightarrow 2$ |
| $5 \rightarrow 0$ | $5 \rightarrow 5$ | $5 \rightarrow 4$ | $5 \rightarrow 3$ | $5 \rightarrow 2$ | $5 \rightarrow 1$ |

б) $Z_6 \rightarrow Z_{18}$

| ϑ_1 | ϑ_2 | ϑ_3 | ϑ_4 | ϑ_5 | ϑ_6 |
|-------------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ |
| $1 \rightarrow 0$ | $1 \rightarrow 3$ | $1 \rightarrow 6$ | $1 \rightarrow 9$ | $1 \rightarrow 12$ | $1 \rightarrow 15$ |
| $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 6$ | $2 \rightarrow 12$ | $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 6$ | $2 \rightarrow 12$ |
| $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 9$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 9$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 9$ |
| $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 12$ | $4 \rightarrow 6$ | $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 12$ | $4 \rightarrow 6$ |
| $5 \rightarrow 0$ | $5 \rightarrow 15$ | $5 \rightarrow 12$ | $5 \rightarrow 9$ | $5 \rightarrow 6$ | $5 \rightarrow 3$ |

6) $\mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$

| g_1 | g_2 | g_3 | g_4 | g_5 | g_6 |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ |
| $1 \rightarrow 0$ | $1 \rightarrow 1$ | $1 \rightarrow 2$ | $1 \rightarrow 3$ | $1 \rightarrow 4$ | $1 \rightarrow 5$ |
| $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 2$ | $2 \rightarrow 4$ | $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 2$ | $2 \rightarrow 4$ |
| $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 3$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 3$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 3$ |
| $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 4$ | $4 \rightarrow 2$ | $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 4$ | $4 \rightarrow 2$ |
| $5 \rightarrow 0$ | $5 \rightarrow 5$ | $5 \rightarrow 4$ | $5 \rightarrow 3$ | $5 \rightarrow 2$ | $5 \rightarrow 1$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| $14 \rightarrow 0$ | $14 \rightarrow 5$ | $14 \rightarrow 4$ | $14 \rightarrow 3$ | $14 \rightarrow 2$ | $14 \rightarrow 1$ |

2) $\mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$

| g_1 | g_2 | g_3 |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ |
| $1 \rightarrow 0$ | $1 \rightarrow 5$ | $1 \rightarrow 10$ |
| $2 \rightarrow 0$ | $2 \rightarrow 10$ | $2 \rightarrow 5$ |
| $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 0$ | $3 \rightarrow 0$ |
| $4 \rightarrow 0$ | $4 \rightarrow 5$ | $4 \rightarrow 10$ |
| $5 \rightarrow 0$ | $5 \rightarrow 10$ | $5 \rightarrow 5$ |
| $6 \rightarrow 0$ | $6 \rightarrow 0$ | $6 \rightarrow 0$ |
| $7 \rightarrow 0$ | $7 \rightarrow 5$ | $7 \rightarrow 10$ |
| $8 \rightarrow 0$ | $8 \rightarrow 10$ | $8 \rightarrow 5$ |
| $9 \rightarrow 0$ | $9 \rightarrow 0$ | $9 \rightarrow 0$ |
| $10 \rightarrow 0$ | $10 \rightarrow 5$ | $10 \rightarrow 10$ |
| $11 \rightarrow 0$ | $11 \rightarrow 10$ | $11 \rightarrow 5$ |

3. Найти все нормальные подгруппы группы: а) \mathbb{Z}_{12} ; б) \mathbb{Z}_{11}^* ; в) S_3 ; г) V_4 ; д) A_4 ; е) D_3 ; ж) D_4 ; з) Q_8 .

$gH = Hg \Rightarrow H - \text{норм. подгруппа}$

а) \mathbb{Z}_{12} - абелева \Rightarrow все H - нормальные

б) \mathbb{Z}_{11}^* - абелева \Rightarrow все H - нормальные

в) $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$H = \{e\}, S_3, \{e, (12)\}, \{e, (13)\}, \{e, (23)\}, \{e, (123), (132)\}$

г) $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ - абелева, \Rightarrow все H - нормальные

$$g) A_4 = \{e, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$H = \left[\begin{array}{l} \{e\}, \{e, (12)(34)\}, \{e, (13)(24)\}, \{e, (14)(23)\}, \\ \{e, (123), (132)\}, \{e, (124), (142)\}, \{e, (134), (143)\}, \\ \{e, (234), (243)\}, A_4, V_4. \end{array} \right.$$