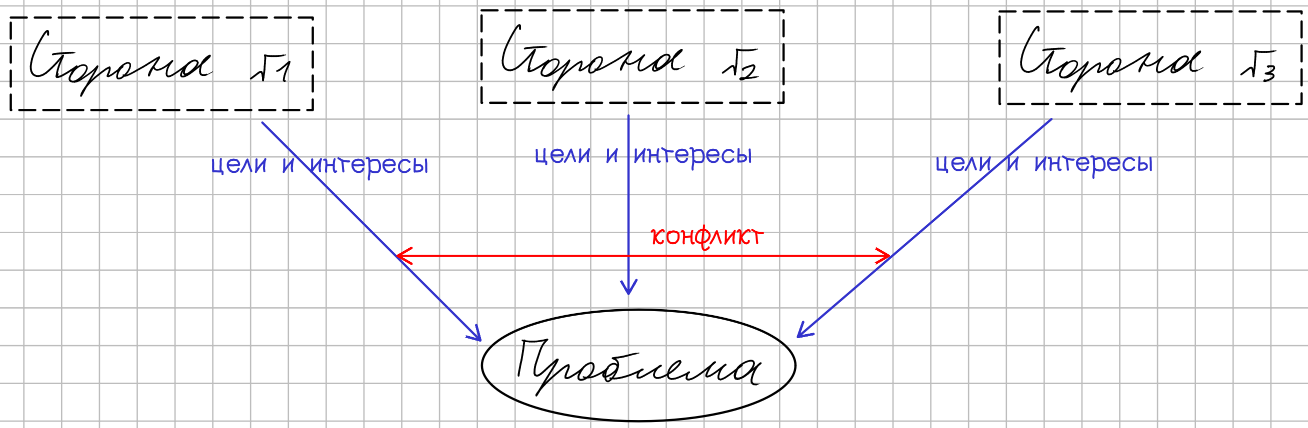
13.11.25 # Элементы теории игр. Синицын Е.А.



Теория игр – мат. методы анализа конфликтов

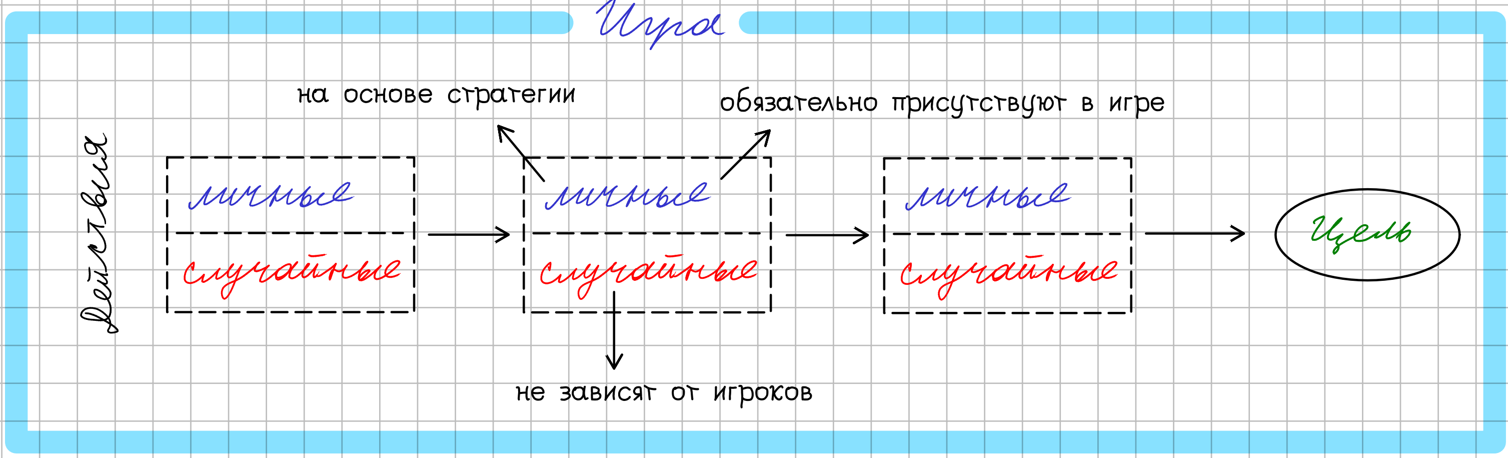
Игра – конфликт

Игроки – стороны, участвующие в конфликте

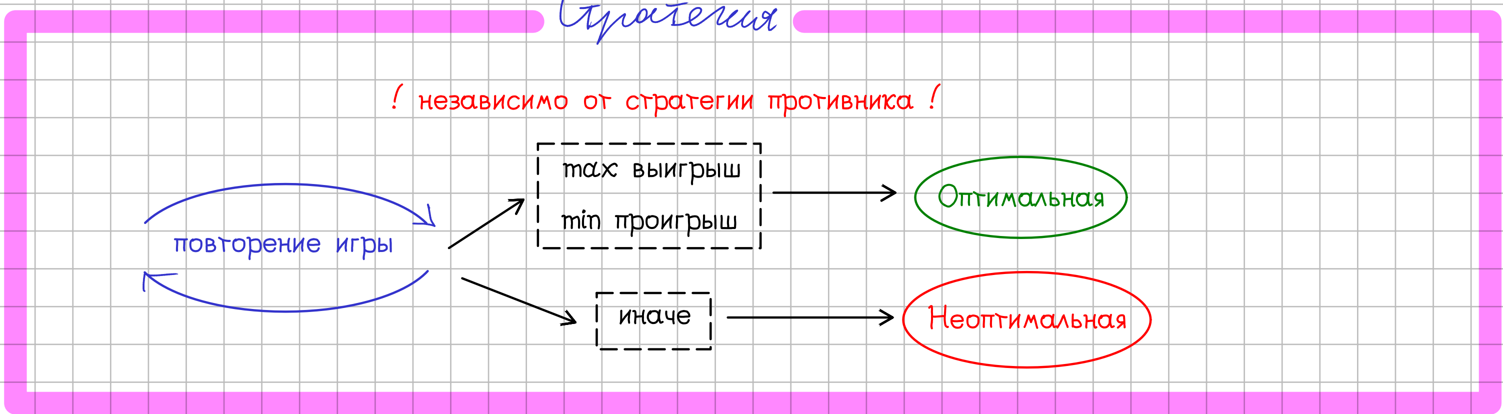
Игра описывает:

1) мн-во игроков
2) мн-во действий игроков
3) интересы игроков (выигрыши и проигрыши)

Игра



Стратегия



Классификация видов игр:

По числу игроков	парная	2 игрока
	множественная	3+ игрока
По числу стратегий	Конечные игры	Пример: "Орёл"-"Решка"
	бесконечные игры	Пример: "Продавец - Покупатель"
По характеру взаимодействия	бескоалиционные	Нельзя вступать в коалиции
	коалиционные	Можно вступать в коалиции
По характеру выигрышей	с нулевой суммой	Перераспределение общего капитала
	с не нулевой суммой	Суммарный ожидаемый выигрыш = 0
По виду ходов	азартные	Только случайные ходы
	стратегические	Присутствуют личные ходы
По количеству информации	полные	Пример: Шашки, Шахматы
	неполные	Пример: Покер, "КМК"
По виду описания игры	позиционные	Задаются в виде дерева
	в нормальной форме	Каждый ход независимый

Парная игра с нулевой суммой

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

← Стратегии 2го игрока

a_{ij}: Выигрыши 1го игрока

$-a_{ij}$: Выигрыши 2го игрока

↑ Стратегии 2го игрока

Решение матричной игры в чистых стратегиях

Стратегия называется чистой, если выбор игрока неизменен от партии к партии.

седловая точка

$$a_{ij_0} \le \underset{\downarrow}{a_{i_0j_0}} \le a_{i_0j}$$

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ максимин

$\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ минимакс

$\alpha \le V \le \beta$

цена игры

$\alpha = V = \beta \Rightarrow V$ – седловая и игра решается в чистых стратегиях

Решение матричной игры в смешанных стратегиях

$\alpha \le V \le \beta$

цена игры

$\alpha \ne \beta \Rightarrow$ игра решается в смешанных стратегиях

Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются активными.

Теорема об активных стратегиях

Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку max $\overline{\text{выигрыш}}$ (min $\overline{\text{проигрыш}}$) = цене игры V, независимо от действий другого игрока, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, p_i\, q_j$$ — Платёжная функция

$$\alpha = \max_{p} \min_{q} M(A, \bar{p}, \bar{q})$$ — нижняя цена игры

$$\beta = \min_{q} \max_{p} M(A, \bar{p}, \bar{q})$$ — верхняя цена игры

Решить игру — найти цену игры и оптимальные стратегии.

Теорема Фон-Неймана

В $\forall$ матричной игре $\exists$ пара смеш. стратегий (p^*, q^*):

1) $M(p, q^*) \le M(p^*, q^*) \le M(p^*, q)$ для $\forall\ p \in P_m,\ q \in P_n$

2) $\alpha = \beta = M(p^*, q^*)$

$V = M(p^*, q^*)$ — цена игры в смешанных стратегиях

Нахождение смешанных стратегий в играх 2×2

Аналитический метод

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Графический метод

Смешанные стратегии

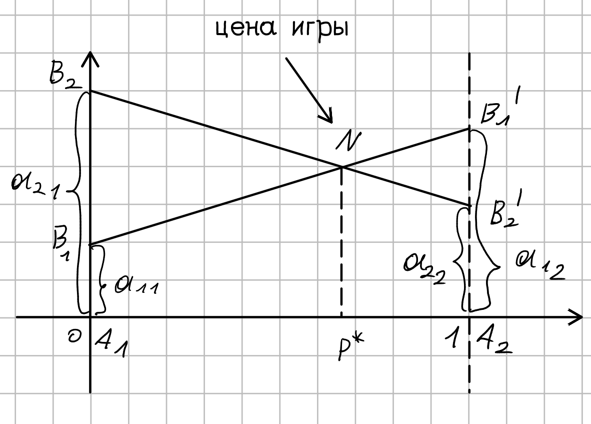
$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}; \quad S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

Требуется найти оптимальные стратегии:

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*), \quad p_1^* + p_2^* = 1$$

$$S_B^* = (q_1^*, q_2^*), \quad q_1^* + q_2^* = 1$$

И найти выигрыш v



Упрощение матричной игры.

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	—	—	...	—
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

$P_i = P_j$, $i \neq j$ — Дублирующие стратегии

i_1 доминирует i_2: $\forall j=\overline{1,m}$ $a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}$

и $\exists j_0$: $a_{i_1 j_0} > a_{i_1 j_0}$

j_1 доминирует j_2: $\forall i=\overline{1,n}$ $a_{i j_1} \leq a_{i j_2}$

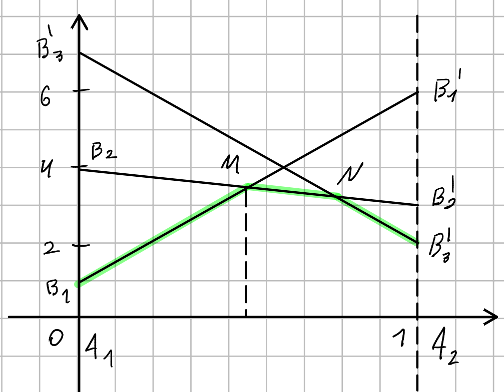
и $\exists i_0$: $a_{i_0 j_1} < a_{i_0 j_1}$

Можно исключать →

Решение игр вида $2 \times m$ и $n \times 2$ графоаналитическим способом.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	4	7	1
A_2	6	3	2	2
	6	4	7	

$\alpha = 2$; $\beta = 4$ $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ смеш. стратегии



1) Строим график
2) Ищем максимин или минимакс
2.1) If $A \in OX$: максимин
2.2) If $B \in OX$: минимакс
3) Определяем $B_i B_i'$ и $B_j B_j'$, пересек. в $M = v$
4) Исключаем остальные стратегии
5) Делаем аналитически. 2×2

$$\begin{cases} p_1 + 6p_2 = v \\ 4p_1 + 3p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

После вычислений получаем:

$p_1 = p_2 = 0,5$; $v = 3,5$

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 = 3,5 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$q_1 = 0,17$; $q_2 = 0,83$

Ответ: $v = 3,5$; $S_A^* = (0,5; 0,5)$; $S_B^* (0,17; 0,83; 0)$