04.09.25

Методы оптимизации и исследование операций

Оптимизация - это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при опр. усл.

Задачи на отыскание оптим. реш. - задачи оптимизации.

Применяемые в процессе оптимизации методы получили название методов оптимизации.

Математическая модель - это матем. опис. исследуемого процесса или явления.

Постановка задачи оптимизации включает следующие этапы:

1) Установление границ подлежащей оптимизации системе.
2) Выбор количественного критерия (макс. 3-5).
3) Определение внутрисистемных переменных.
4) Построение модели.

Оптимизационная задача включает:

1) мн-во незав. перем.
2) модель, отражающую взаимосвязь переменных.

Математическая задача оптимизации.

$f(x) \to \min (\max)$; $x \in U$

где $f(x)$ - целевая ф-я

U - допустимое мн-во, заданное ограничениями на управляемые переменные.

Классификация методов оптимизации.

1) Методы безусловной оптимизации. (нет огр.)
2) Методы условной оптимизации. (есть огр.)

1.1) Одномерная оптимизация (1 парам.)
1.2) Многомерная оптимизация (2+ парам.)

Для решения задач типа (1) используются <u>численные методы</u>:

1) прямые ($f(x)$)
2) первого порядка ($f'(x)$) — част. произв.
3) второго порядка ($f''(x)$) — част. произв.

Ограничения на переменные

Да	Нет
+ переменные ≥ 0 (неотриц.)	+ $f(x)$ — непр. диф.

Что используем?

Методы мат. прог-ия.	Теория диф. исчисления

Методы:

1) Линейное
2) Динамическое
3) Целочисленное
4) Квадратичное
5) Дробно-линейное
6) Нелинейное
7) Параметрическое
8) Стохастическое

Программирование

Линейное программирование (ЛП)
Постановка задачи ЛП

ЛП – направление мат. прог-ия, изучающее методы решения экстремальных задач.

Признаки оптимизационной модели:
- целевая ф-ия $f(x)$ (признак оптимальности)
- система огранич.

Мат. модель ∀ ЗЛП включает в себя:
1) макс. или мин $f(x)$ (критерий оптимальности)
2) систему огр. в форме лин. ур-й и неравенств.
3) требование неотрицательности переменных.

Формы задачи ЛП

Общая — Стандартная — Каноническая

Общая

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \quad i = \overline{1,k} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i; \quad i = \overline{k+1,m} \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l};\ l \le n) \end{cases}$$

где i – номер ограничения;
m – количество ограничений;
j – номер переменной;
n – количество переменных;
x_j – размер переменной j;
a_{ij} – коэффициенты при переменных x_j;
b_i – объемы правых частей ограничений;
c_j – целевой функции F.

Решения

Допустимые	→	Оптимальные
Удовл. сист. огр. + Треб. неотриц.		Треб. минимизации (максимизации)

Стандартная (симметрическая)

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Векторный вид:

$$f(x) = (c, x) \to max \qquad f(x) = (c, x) \to min$$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{matrix}}$$

Каноническая (основная)

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \ / \ min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Векторный вид:

$$f(x) = (c, x) \to max / min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Градиент $\nabla f(x) = c$ – направление возраст. $f(x)$

Антиградиент $-\nabla f(x) = -c$ – направление убыв. $f(x)$

$$\boxed{\begin{matrix} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{matrix}}$$

Правило приведения ЗЛП к каноническому виду

1) Если огр. явл. нер-вом, то в левую часть добавляются неотр. перем.

Огр. с „≤" → добавляем со знаком „+"	Огр. с „≥" → добавляем со знаком „−"

Делается это для уравнивания.

2) Если $\exists\, x_i < 0$, то $x_i = x_{i_1} - x_{i_2}$, где $\begin{cases} x_{i_1} \geq 0 \\ x_{i_2} \geq 0 \end{cases}$

3) Если в огр. правая часть отрицательна, то следует умножить это огр. на (-1).

4) Если исх. задача — задача на min, а нам легче решить задачу на max, то $F_1 = -F$ → далее решаем задачу на max

Итого: $\forall$ ЗЛП можно привести к канонич. виду.

Пример. Привести к канонич. виду.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad F = x_1 + 2x_2 \to max$$

Введём $x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \qquad x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

Ответ

Пример

$$F = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge -2 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 \le 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Сведём задачу к максимизации. $G(x) = -F(x)$

$$G = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$$

Избавимся от неравенств. и отриц. прав. части.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 4 \\ x_1 \le 0, \quad x_{3-6} \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 4 \\ x_1 \le 0, \quad x_{3-6} \ge 0, \quad x_2 ? \end{cases}$$

Заменим x_1, x_2 на разность неотриц. перем.

$x_1 = x_7 - x_8$; $x_2 = x_9 - x_{10}$; $x_{7-10} \ge 0$

$$\begin{cases} 2x_7 - 2x_8 - x_3 + x_4 = 6 \\ -x_7 + x_8 - x_9 + x_{10} + x_3 + x_5 = 2 \\ x_7 - x_8 - x_9 + x_{10} + x_6 = 4 \\ x_{3-10} \ge 0 \end{cases}$$

$$G = 2x_7 - 2x_8 + 2x_9 - 2x_{10} - x_3 \to max$$

Ответ

Правило приведения ЗЛП к стандартному виду.

1) $F \longrightarrow \min \longrightarrow G = (-F) \longrightarrow \max$
2) Изменить знаки правых частей.
3) Перейти от огр-равенств к неравенствам
4) Избавиться от перем. не имеющих огр. на знак.

Пример Привести к стандартному виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_4 = 70 \\ x_2 + x_5 = 140 \\ x_3 + x_6 = 90 \end{cases} \qquad x_{1-6} \geq 0$$

$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_3 + 9x_5 + 7x_6 \to \min$$

Выразим через x_1, x_2 остальные перем.

$$\begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - x_3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = x_1 + x_2 - 30 \end{cases}$$

ЦФ после упрощения: $F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \to \min$

Т.к. $x_{3-6} \geq 0$, то:

$$\begin{cases} 120 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 70 - x_1 \geq 0 \\ 140 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 30 \geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 70 \\ x_2 \leq 140 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \end{cases} \qquad x_{1-2} \geq 0$$

Ответ

$$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \to \min$$

Примеры ЗЛП

1) планирование произ-ва или исп-е ресурсов.
2) Задача о диете (о рационе)
3) Транспортная задача
4) Задача об использовании сырья