16.09.25

Св-ва групп

1. e — единич. эл. $(\exists!)$

▲ Пусть $e_1 \neq e_2$

$e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$! против. ▲

2. $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

▲ Пусть $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$

$a_1^{-1} = a_1^{-1} e = a_1^{-1} \cdot (a \cdot a_2^{-1}) = e \cdot a_2^{-1} = a_2^{-1} \Rightarrow a_1^{-1} = a_2^{-1}$! против. ▲

3. $ax = ay \Rightarrow x = y$

$xa = ya \Rightarrow x = y$

▲ $a^{-1} a x = a^{-1} a y \quad (a^{-1} a) x = (a^{-1} a) y \quad e x = e y \Rightarrow x = y$ ▲

4. $ax = b \to xa = b$

$x = a^{-1} b \to x = b a^{-1}$

5. $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \forall a \in G$

$(a^m)^n = a^{mn} \quad m, n \in \mathbb{Z}$

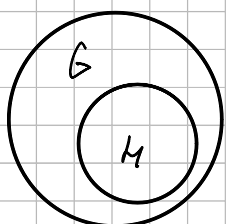
6. $G, \quad a \in G$

$a g_1, a g_2, \ldots, \Rightarrow aG \quad g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq \ldots$

Подгруппа (ПГ)

$(G, \circ)$ — группа

$(H, \circ)$ — группа



$H \subseteq G$

H — подгруппа группы G

$G \subseteq G \quad \{e\} \subseteq G$

Подгруппа $\neq G \neq \{e\} \longrightarrow$ собственная подгруппа

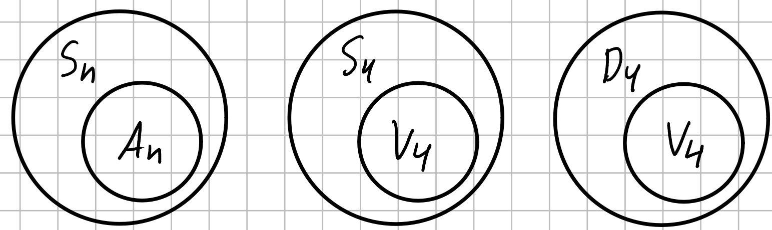
Теорема H — подгруппа G

$\forall a, b \in H \quad a \circ b \in H$

Пример $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$, $H \subseteq \mathbb{Z}_4$

$$H = \left[\begin{array}{l} 1.\ \mathbb{Z}_4 \\ 2.\ \{0\} \\ 3.\ \{0,2\} \Rightarrow 2+2=0,\ \begin{matrix}2+0\\0+2\end{matrix}=2,\ 0+0=0 \end{array}\right]$$

Интересные факты



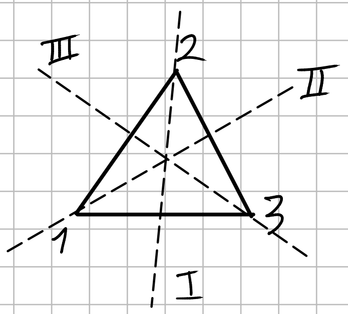
$A_n \subseteq S_n$ $\qquad$ $V_4 \subseteq S_4$ $\qquad$ $V_4 \subseteq D_4$

Изоморфизм групп

$$\boxed{(H, *) \cong (G, \circ) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists\, f: H \to G: \\ 1)\ \forall a, b \in H \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b) \\ 2)\ f \text{ – биекция} \end{cases}}$$

Пример.

$D_3 \cong S_3$



$\mathrm{I} \longleftrightarrow (1\ 3)$ $\qquad$ 0° e

$\mathrm{II} \longleftrightarrow (2\ 3)$ $\qquad$ $\downarrow 120^\circ$ $(1\ 2\ 3)$

$\mathrm{III} \longleftrightarrow (1\ 2)$ $\qquad$ $\downarrow 240^\circ$ $(1\ 3\ 2)$

Св-ва изоморфизма

1. $\mathrm{Card}\, H = \mathrm{Card}\, G$ $\qquad$ Пример. $\mathbb{Z}_8 \not\cong \mathbb{Z}_{11}^*$ $\qquad 8 \neq 10$
2. $f: H \to G \Rightarrow f(e_H) = e_G$

$\blacktriangle$ $f(a) = f(e_H * a) = f(e_H) \circ f(a)$

$f(a) = f(e_H) \circ f(a) \Rightarrow f(e_H) = e_G$ $\blacktriangle$

3. $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

$\blacktriangle$ $f(e_H) = f(a * a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1})$

$e_G = f(a) \circ f(a)^{-1} \Rightarrow f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ $\blacktriangle$

4. $\text{Card } a = k \Rightarrow \text{Card } f(a) = k$

$\blacktriangle$ $a^k = e_H \quad \min k \in N$

$f(a^k) = f(\underbrace{a * \ldots * a}_{k}) = \underbrace{f(a) \circ \ldots \circ f(a)}_{k} = (f(a))^k = f(e_H) = e_G$

Пусть $(f(a))^m = e_G \quad m < k \quad a^m = e_H$! против. $\blacktriangle$

Пример $Z_6 \cong S_3$

$Z_6 \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5 \qquad \text{Card } Z_6 = 6$

Card $\quad 1, 6, 3, 2, 3, 6$

$1^6 = 1+1+\ldots+1 = \frac{6}{(\text{Card } Z_6)} = \frac{6}{6} = 1\frac{0}{6} = 0 = e$

Теорема Кэли

$\forall$ конеч. группа $\cong$ некот. подгруппе S_n,

где $n = |G| < 3$

$G = \{a_1 = e, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \qquad |G| = n \qquad |S_n| = n!$

$a_i\ G$

$e\,G = G \qquad a_1 G = e\,G \to$ тожд. перестановка

$a_2 G = G \qquad a_2 G \to$ перестановка

$a_3 G = G \qquad a_3 G \to$ перестановка

Циклическая группа

Циклическая группа – это группа, образующаяся степенями одного элемента

$\downarrow$

образующий эл.

$a \Rightarrow a^1, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots \to$ бесконечная

$a \Rightarrow a^1, a^2, a^3, a^4, \dots, a^k \longrightarrow$ конечная

Пример.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ $|\mathbb{Z}| = \infty$ $e = 0$ $|\mathbb{Z}_6| = 6$

$1^{-1} = -1,\ 1^0 = 0,\ 1^1,\ 1^2 = 2,\ 1^3 = 3, \dots$

2. Циклич. абелева гр.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

3. Образующий элемент

$\mathbb{Z}_6$ – цикл. гр. $(\mathbb{Z}_6, +)$ $e = 0$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

обр. эл-ты

$1^1 = 1,\ 1^2 = 2,\ 1^3 = 3,\ 1^4 = 4,\ 1^5 = 5,\ 1^6 = 0$

$5^1 = 5,\ 5^2 = 4,\ 5^3 = 3,\ 5^4 = 2,\ 5^5 = 1,\ 5^6 = 0$

e

Итого $\{1, 5\}$ – обр. эл-ты

4. G – цикл. группа $|G| = n$

$a^1, a^2, a^3, \dots, a^n = e$

$$\boxed{\mathrm{Card}\ a = |G|}$$

Теорема $\forall$ циклич. группа изоморфна

1. $|G| = n$ $G \cong \mathbb{Z}_n$
2. $|G| = \infty$ $G \cong \mathbb{Z}$

$\blacktriangle$ 1) $\{a^1, a^2, a^3, \dots, a^n = e\}$

$$\begin{array}{ccccc} a^1 & a^2 & a^3 & a^{n-1} & a^n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & n-1 & 0 \end{array} = \mathbb{Z}_n$$

2) $\{a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots\}$

$$\begin{array}{cccccccc} a^{-1} & a^0 & a^1 & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & n-1 & 0 \end{array} = \mathbb{Z}\ \blacktriangle$$