

1. Найти все изоморфизмы между группами Z_4 и Z_5^* .

$$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\} (+) \quad Z_5^* = \{1, 2, 3, 4\} (\cdot)$$

$$\begin{aligned} \text{Card } 0 &= 1 \\ \text{Card } 1 &= 4 \\ \text{Card } 2 &= 2 \\ \text{Card } 3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Card } 1 &= 1 \\ \text{Card } 2 &= 4 \\ \text{Card } 3 &= 4 \\ \text{Card } 4 &= 2 \end{aligned}$$

G_1	G_2
$0 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 1$
$1 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 3$
$2 \rightarrow 4$	$2 \rightarrow 4$
$3 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 2$

$$\varphi(1+1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1) = 4$$

2. Найти $\text{Aut } Z_6$.

$$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} (+)$$

$$\begin{aligned} \text{Card } 0 &= 1 \\ \text{Card } 1 &= 6 \\ \text{Card } 2 &= 3 \\ \text{Card } 3 &= 2 \\ \text{Card } 4 &= 3 \\ \text{Card } 5 &= 6 \end{aligned}$$

g_1	g_2
$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 5$
$2 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 4$
$3 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 3$
$4 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 2$
$5 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 1$

$$|\text{Aut } Z_6| = 2$$

$$\text{Aut } Z_6 = \{g_1, g_2\}$$

3. Найти $\text{Aut } Z_8$. Является ли группа $\text{Aut } Z_8$ циклической, абелевой?

$$\text{Aut } Z_8 = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$$

$$Z_8 = \{0, \dots, 7\}$$

$$\begin{aligned} \text{Card } 0 &= 1 & \text{Card } 4 &= 2 \\ \text{Card } 1 &= 8 & \text{Card } 5 &= 8 \\ \text{Card } 2 &= 4 & \text{Card } 6 &= 4 \\ \text{Card } 3 &= 8 & \text{Card } 7 &= 8 \end{aligned}$$

g_1	g_2	g_3	g_4
$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 5$	$1 \rightarrow 7$
$2 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 6$	$2 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 6$
$3 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 1$	$3 \rightarrow 7$	$3 \rightarrow 5$
$4 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 4$
$5 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 7$	$5 \rightarrow 1$	$5 \rightarrow 3$
$6 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 2$	$6 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 2$
$7 \rightarrow 7$	$7 \rightarrow 5$	$7 \rightarrow 3$	$7 \rightarrow 1$

$$|g_1| = |g_2| = |g_3| = 2 \Rightarrow \text{Aut } Z_8 \cong V_4$$

4. Найти $\text{Aut } Z_9$. Является ли группа $\text{Aut } Z_9$ циклической, абелевой?

$$\mathbb{Z}_9 = \{0, \dots, 8\}$$

$$\text{Card } 0 = 1 \quad \text{Card } 4 = 9 \quad \text{Card } 6 = 3$$

$$\text{Card } 1 = 9 \quad \text{Card } 5 = 9 \quad \text{Card } 7 = 9$$

$$\text{Card } 2 = 9 \quad \text{Card } 3 = 3 \quad \text{Card } 8 = 9$$

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 5$	$1 \rightarrow 7$	$1 \rightarrow 8$
$2 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 4$	$2 \rightarrow 8$	$2 \rightarrow 1$	$2 \rightarrow 5$	$2 \rightarrow 7$
$3 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 6$	$3 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 6$	$3 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 6$
$4 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 8$	$4 \rightarrow 7$	$4 \rightarrow 2$	$4 \rightarrow 1$	$4 \rightarrow 5$
$5 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 1$	$5 \rightarrow 2$	$5 \rightarrow 7$	$5 \rightarrow 8$	$5 \rightarrow 4$
$6 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 3$	$6 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 3$	$6 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 3$
$7 \rightarrow 7$	$7 \rightarrow 5$	$7 \rightarrow 1$	$7 \rightarrow 8$	$7 \rightarrow 4$	$7 \rightarrow 2$
$8 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 7$	$8 \rightarrow 5$	$8 \rightarrow 4$	$8 \rightarrow 2$	$8 \rightarrow 1$

$$g_2 \cdot g_2 = g_3 \quad g_2^3 = g_6 \quad g_2^4 = g_5 \quad g_2^5 = g_4 \quad g_2^6 = g_1$$

$\text{Aut } Z_9$ — цикл. (g_2 — обр.; $g_1 = e$)

5. Найти $|\text{Aut Aut } Z_9|$, $|\text{Aut Aut Aut } Z_9|$.

$$|\text{Aut Aut } Z_9| = |\text{Aut } Z_6| = |Z_2| = 2$$

$$|\text{Aut Aut Aut } Z_9| = |\text{Aut Aut } Z_6| = |\text{Aut } Z_2| = 1$$

6. Дана группа $GL_2(Z_2)$ (группа невырожденных матриц 2×2 с элементами из Z_2).

а) найти порядок группы;

б) найти порядок каждого элемента группы;

в) какой группе изоморфна заданная группа?

$$GL_2(Z_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Z_2 = \{0, 1\} \quad |GL_2(Z_2)| = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$