

Транспортная задача

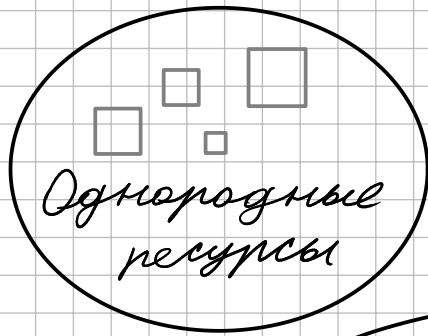
(метод северо-западного угла / миним. стоимости)

Транспортная задача - это задача определения оптимального плана перевозок груза из данных пунктов отправления в заданные пункты назначения.

Типы транспортных задач:

- 1) по критерию стоимости (минимум затрат) 📊
- 2) по критерию времени (минимум времени) ⌚

Особенности:



Только =
уравнения

Однотактовые
Е. и.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40$$

Коэфф. при "к"
равны 1

Каждый "к" встречается
только в 2х ур-ях сс. оп.

Постановка задачи

Транспортная таблица

↑
объёмы

| | | | | | |
|---------------|-------------|----------------|-----|-----|----------------------------|
| | | n потребителей | | | |
| | $a_i b_j$ | 100 | 180 | 200 | ← объёмы |
| m поставщиков | 120 | 3 | 3 | 4 | } ← Стоимости перевозки |
| | 80 | 4 | 2 | 1 | |
| | 150 | 2 | 4 | 2 | |
| | 210 | 4 | 1 | 3 | |
| | ↑ объёмы | | | | |

Выбирается 1 из 2х
критериев оптимальности

📊 или ⌚

Необходимо:

1) макс. удовлет. потребнос.

2) 📊 или ⌚ → min

Транспортная задача

Закрытая

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j$$

Открытая (с неправильным балансом)

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \neq \sum_{j=1}^n \beta_j$$

Решаем

Приводим к закрытой

Дефицит $\sum_{i=1}^m \alpha_i < \sum_{j=1}^n \beta_j$

Вводим фиктивного поставщика

| $a_i \backslash b_j$ | 100 | 180 | 200 |
|----------------------|-----|-----|-----|
| 120 | 3 | 3 | 4 |
| 80 | 4 | 2 | 1 |
| 150 | 2 | 4 | 2 |
| 210 | 4 | 1 | 3 |
| A'_{m+1} | 0 | 0 | 0 |

Избыток $\sum_{i=1}^m \alpha_i > \sum_{j=1}^n \beta_j$

Вводим фиктивного потребителя

| $a_i \backslash b_j$ | 100 | 180 | 200 | B'_{n+1} |
|----------------------|-----|-----|-----|------------|
| 120 | 3 | 3 | 4 | 0 |
| 80 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 150 | 2 | 4 | 2 | 0 |
| 210 | 4 | 1 | 3 | 0 |

Математическая модель транспортной задачи

матрица перевозок

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \leftarrow \text{Суммарные затраты на перевозку}$$

Система ограничений

Полный вывоз m запасов

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}$$

+

Полное удовл. n потребителей

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \beta_j, \quad j = \overline{1, n}$$

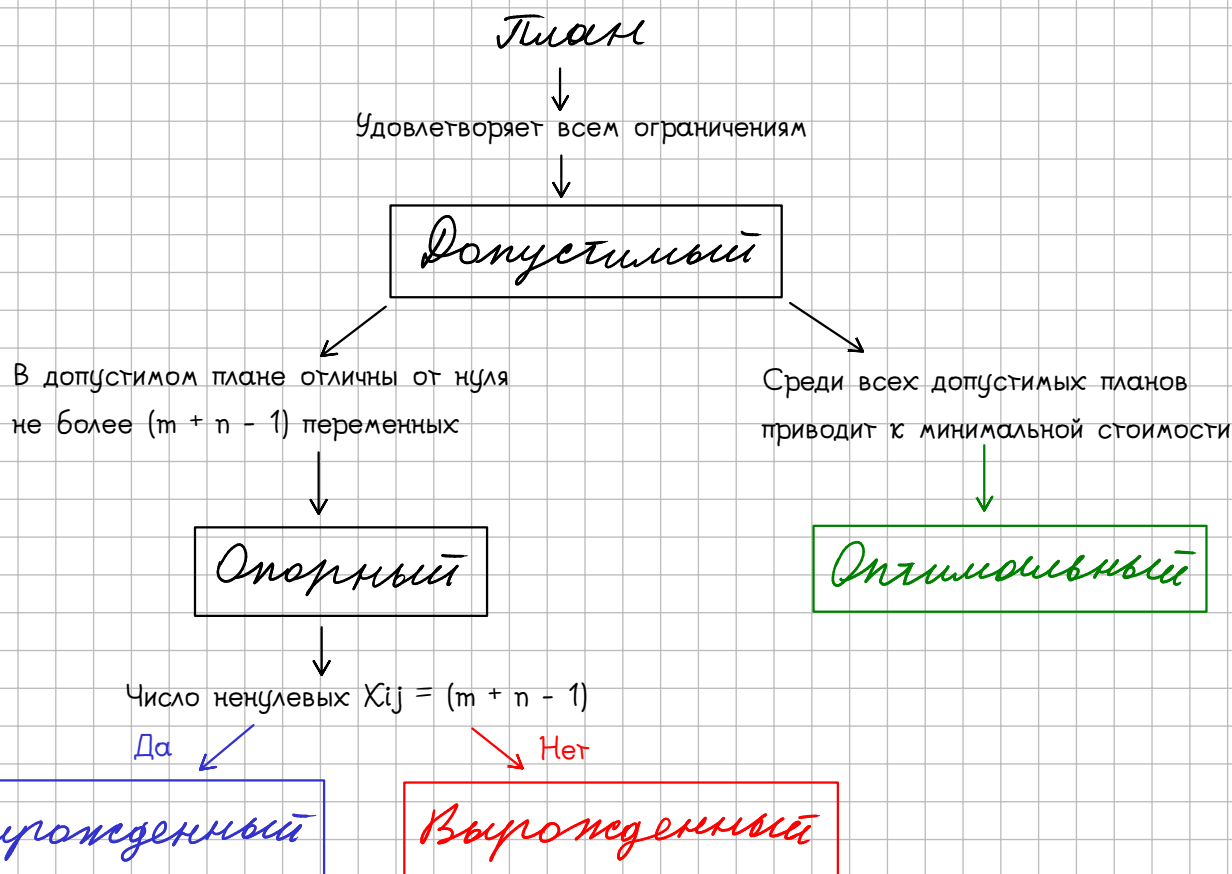
Итого мат. модель:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = \alpha_i, & \sum_{i=1}^m x_{ij} = \beta_j \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Особенности ТЗ:

- 1) Коэфф. при „ x_{ij} “ равны 1
- 2) $\forall x_{ij}$ встречается только в 2х уравнениях.
- 3) Система оцр. содержит $m+n$ уравнений с перемен.
- 4) \forall опорное решение должно содержать $(m+n-1)$ базисных переменных и $(m-1)(n-1)$ свободных переменных, равных 0.
- 5) Если все a_i и b_j - целые, то значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые.



Теорема 1. Для \forall ТЗ существует план.

▲ $a_i > 0, i = \overline{1, m}, b_j > 0, j = \overline{1, n}$

Т.к. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A$, то возьмем план $x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{A}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

Тогда $\sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^n b_j = a_i \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^m a_i = b_j \Rightarrow$

\Rightarrow Система оцр. выполняется $\Rightarrow x_{ij}$ составляют план ▲

Теорема 2. ТЗ всегда имеет оптимальный план.

Допустимая область (ДО) не пуста, т.к. $c_{ij} \geq 0$, то для \forall плана перевозок $F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0$
 Т.к. $F(x)$ опр. снизу \Rightarrow ТЗ всегда имеет решение

Пример.

Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 30 | 40 |
|----------------------|----|----|----|
| 40 | 3 | 5 | 7 |
| 50 | 4 | 6 | 10 |

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

матрица перевозок

матрица стоимостей

$$F(x) = 3x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Алгоритм решения ТЗ:

- 1) составление первоначального (опорного) плана
- 2) улучшение плана до оптимального

Методы поиска опорного плана:

1) северо-западного угла

Начинается с Л.В. угла матрицы и назначает максимум объёма.

Движение: вниз или вправо

| $a_i \backslash b_j$ | 100 | 180 | 200 |
|----------------------|-----|-----|-----|
| 120 | 3 | 3 | 4 |
| 80 | 4 | 2 | 1 |
| 150 | 2 | 4 | 2 |
| 210 | 4 | 1 | 3 |

2) минимального элемента (наим. стоимости)

Выбор клетки с наим. стоимостью и назначенная макс. объёма.

| $a_i \backslash b_j$ | 100 | 180 | 200 |
|----------------------|-----|-----|-----|
| 120 | 3 | 3 | 4 |
| 80 | 4 | 2 | 1 |
| 150 | 2 | 4 | 2 |
| 210 | 4 | 1 | 3 |

Arrows indicating selection process:
- Arrow from $\sqrt{3}$ points to cell (120, 180)
- Arrow from $\sqrt{1}$ points to cell (80, 200)
- Arrow from $\sqrt{2}$ points to cell (210, 180)
- Text "и т.д." is next to the table.

3) двойного предпочтения

Отмечаем клетки с мин. стоимостью по строкам и столбцам.

Приоритет распределения;

1) Дважды отмечены

2) Отмечены 1 раз

3) Повторяем алгоритм для неотмеченных

4) Метод аттракционности Рогеля

| $a_i \backslash b_j$ | 100 | 180 | 200 |
|----------------------|-----|-----|-----|
| 120 | 3 | 3 | 4 |
| 80 | 4 | 2 | 1 |
| 150 | 2 | 4 | 2 |
| 210 | 4 | 1 | 3 |

Green diagonal lines indicating double selection in cells (120, 180), (80, 200), (150, 100), and (210, 180).

Пример. Метод C-3 уша

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 | 25 | 20 |
|----------------------|----|----|----|----|
| 30 | 4 | 5 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 | 4 | 2 |

1) Проверка задачи на закрытость: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

$45 \neq 80 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j \Rightarrow$
 \Rightarrow вводим фикт. поставщика.

2) Заполняем таблицу, начиная с ячейки (1, 1)

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 | 25 | 20 |
|----------------------|----|----|----|----|
| 30 | 4 | 5 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 | 25 | 20 |
|----------------------|---------------|----|----|----|
| 30 10 | 4 20 | 5 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 5 | 25 | 20 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------|--------------|
| 30 20 | 4 20 | 5 10 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 5 | 25 | 20 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------|--------------|
| 30 20 | 4 20 | 5 10 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 5 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 5 | 25 5 | 20 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------------|--------------|
| 30 20 | 4 20 | 5 10 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 5 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 5 | 25 5 | 20 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------------|--------------|
| 30 20 | 4 20 | 5 10 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 5 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 20 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 5 | 25 5 | 20 5 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 30 20 | 4 20 | 5 10 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 5 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 5 | 0 |

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 15 5 | 25 5 | 20 5 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 30 20 | 4 20 | 5 10 | 3 | 6 |
| 25 | 7 | 2 | 1 | 5 |
| 20 | 6 | 1 5 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 5 | 0 |

Итого: $4 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 15 + 0 \cdot 5 = 100 + 110 = 210$

Пример. Метод наим. стоимости

| $a_i \backslash b_j$ | 15 | 20 | 25 |
|----------------------|----|----|----|
| 10 | 5 | 3 | 1 |
| 20 | 3 | 2 | 4 |
| 30 | 4 | 1 | 2 |

1) Проверка задачи на закрытость: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

$$60 = 60 \quad \checkmark$$

2) Заполняем таблицу начиная с ячейки с наим. стоимостью.

| $a_i \backslash b_j$ | 15 | 20 | 25 15 |
|----------------------|--------------|--------------|---------------------|
| 10 | 5 | 3 | 1 10 |
| 20 | 3 | 2 | 4 |
| 30 | 4 | 1 | 2 |

| $a_i \backslash b_j$ | 15 | 20 | 25 15 |
|----------------------|--------------|---------------|---------------------|
| 10 | 5 | 3 | 1 10 |
| 20 | 3 | 2 | 4 |
| 30 10 | 4 | 1 20 | 2 |

| $a_i \backslash b_j$ | 15 | 20 | 25 5 |
|----------------------|--------------|---------------|--------------------|
| 10 | 5 | 3 | 1 10 |
| 20 | 3 | 2 | 4 |
| 30 | 4 | 1 20 | 2 10 |

| $a_i \backslash b_j$ | 15 | 20 | 25 5 |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------------|
| 10 | 5 | 3 | 1 10 |
| 20 | 3 5 | 2 15 | 4 |
| 30 | 4 | 1 20 | 2 10 |

| $a_i \backslash b_j$ | 15 | 20 | 25 |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|
| 10 | 5 | 3 | 1 10 |
| 20 | 3 15 | 2 | 4 5 |
| 30 | 4 | 1 20 | 2 10 |

Итого:

$$10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 20 + 2 \cdot 10 = 115$$