16.10.25 # Метод потенциалов Синицын Е.А.

Способы нахождения опорного плана:

Метод С-З угла	Метод min стоимости

Проверка на оптимальность и улучшение плана:

Метод потенциалов

Суть:

опорный план → оптимален?

оптимален? $\xrightarrow{\text{Нет}}$ улучшаем → опорный план

оптимален? $\xrightarrow{\text{Да}}$ конец

Теорема. (критерий оптимальности)

$a_i \backslash b_j$	b_1	$\dots$	b_n	u_i
a_1	x_{11}	.	x_{1n}	u_1
$\dots$	.	.	.	u_2
a_m	x_{m1}	.	x_{mn}	u_3
v_j	v_1	v_2	v_3	

План оптимален $\Leftrightarrow \exists\, u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_n$, такие, что

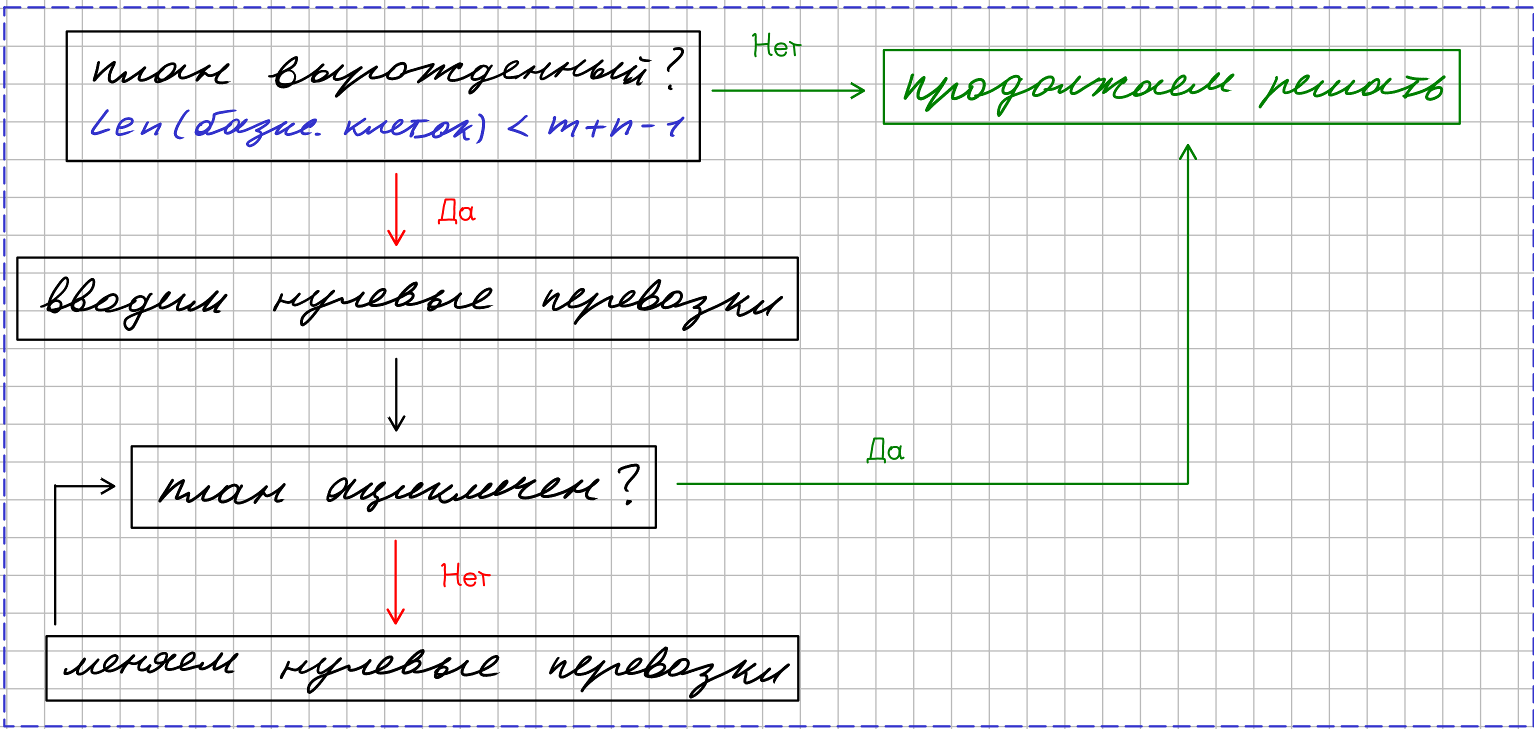
$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij}, & x_{ij} > 0 \quad (\text{занятые}) \\ u_i + v_j \le c_{ij}, & x_{ij} = 0 \quad (\text{свободные}) \end{cases}$$

u_i, v_j — потенциалы

c_{ij} — стоимости перевозок

Алгоритм метода

1) Построение системы потенциалов



$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60
160	4 / 100	8	10	5 / 60
30	4	6	2 / 30	3
90	4	4 / 40	6 / 50	5

число базис. клеток = 5

$m+n-1 = 6 \neq 5$

Введём 1 нулевую перевозку:

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60
160	4 / 100	8	10	5 / 60
30	4	6 / 0	2 / 30	3
90	4	4 / 40	6 / 50	5

Есть цикл.

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60
160	4 / 100	8	10	5 / 60
30	4	6	2 / 30	3 / 0
90	4	4 / 40	6 / 50	5

Ацикличен

Считаем потенциалы

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60	u_i
160	4 / 100	8	10	5 / 60	0
30	4	6	2 / 30	3 / 0	−2
90	4	4 / 40	6 / 50	5	2
v_j	4	2	4	5	

Пусть $u_1 = 0$

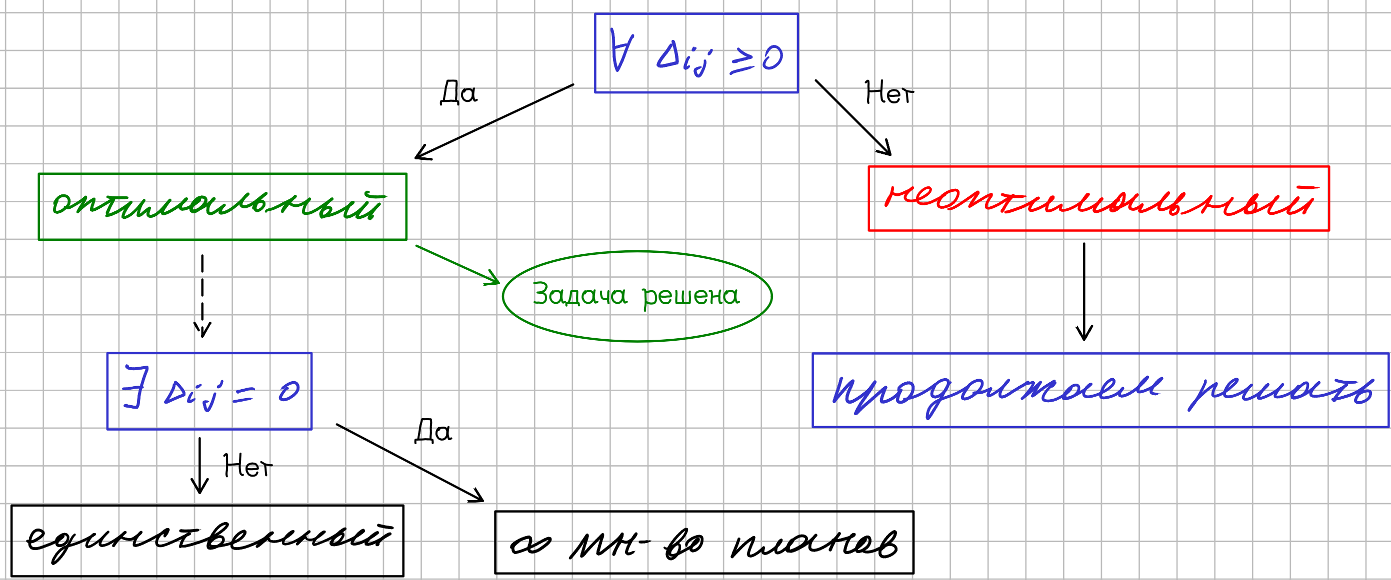
$u_i + v_j = c_{ij}$, $x_{ij} > 0$ (занятые)

2) Проверка на оптимальность

$\Delta_{ij} = C_{ij} - (u_i + V_j) \geq 0$, $x_{ij} = 0$ (свободные)

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60	u_i
160	4 / 100	8 / (6)	10 / (6)	5 / 60	0
30	4 / (2)	6 / (6)	2 / 30	3 / 0	−2
90	4 / × (−2)	4 / 40	6 / 50	5 / × (−2)	2
V_j	4	2	4	5	

$\Delta_{31} = -2$; $\Delta_{34} = -2$ < 0



---

3) Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку.

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60	u_i
160	4 / 100	8 / (6)	10 / (6)	5 / 60	0
30	4 / (2)	6 / (6)	2 / 30	3 / 0	−2
90	4 / × (−2)	4 / 40	6 / 50	5 / × (−2)	2
V_j	4	2	4	5	

$x_{ij} = \min(\Delta_{ij} < 0)$

Т.к. у нас $\Delta_{31} = \Delta_{34} = -2$, то берём любую.

Пусть x_{31}

---

4) Построение цикла и перераспр. груза

4.1) В цикле чередуем „−" и „+", начиная с „+" в свободной клетке

4.2) Выбираем $\Delta\bar{x} = \min\{x_{ij}\}$

далее отнимаем $\Delta\bar{x}$ из клеток с „−"

и прибавляем $\Delta\bar{x}$ к клеткам с „+"

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60	u_i
160	4 / 100	8 / (6	10 / (6	5 / 60	0
30	4 / (2	6 / (6	2 / 30	3 / 0	−2
90	4 / × (−2	4 / 40	6 / 50	5 / × (−2	2
v_j	4	2	4	5	

построим цикл

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60	u_i
160	4 / 100 −	8 / (6	10 / (6	5 / 60 +	0
30	4 / (2	6 / (6	2 / 30 +	3 / 0 −	−2
90	4 / + (−2	4 / 40	6 / 50 −	5 / (−2	2
v_j	4	2	4	5	

расставим знаки

$\Delta \bar{x} = \min\{100, 0, 50\} = 0$

$a_i \backslash b_j$	100	40	80	60
160	4 / 100	8	10	5 / 60
30	4	6	2 / 30	3
90	4 / 0	4 / 40	6 / 50	5

получим новый план

---

5) Повторяем шаги (1) − (4) до получения оптимального плана.

Симплекс - метод

Симплекс - метод является универсальным и позволяет решить ∀ ЗЛП. (предложен Р. Данцигом в 1947г)

Основные понятия:

- Если система из m уравнений и n неизвестных ЛНЗ ⇒ мн-во переменных m является единственным решением системы.
- Мн-во переменных m – базисные;
$(n-m)$ – небазисные
- Если ∀ перем. ≥ 0 ⇒ решение допустимое, иначе – недопустимое
- В допустимом решении ненулевых компонент может быть не более m.

Этапы:

1) нахождение опорного решения системы огр.
2) нахождение оптимального решения

Пример. $F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Введём $x_{3,\dots,6} \geq 0$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$x_{1,\dots,6} \geq 0$

Пусть $x_{3,\dots,6}$ – базисные, тогда x_1, x_2 – свободные

Выразим базисные через свободные

$x_3 = -2 - (x_1 - 2x_2)$ $\quad x_5 = 2 - (x_1 - x_2)$

$x_4 = -4 - (-x_1 - x_2)$ $\quad x_6 = 6 - (x_2)$

$F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$

Основные шаги: на примере

1) Составление симплекс-таблицы

Таблица № 1				
Базис. неизв.	Свобод. члены	Свободные неизвестные		Вспом. коэфф.
		X1	X2	
X3	−2	1	−2	
X4	−4	−1	−1	
X5	2	1	−1	
X6	6	0	1	
F	0	−1	−2	

← индексная строка

---

2) Поиск ведущих строки и столбца

$F \to max$	$F \to min$

Выбор ведущего столбца

$F \to max$: Выбираем $min\{x_1, \dots, x_{n-m}\}$

	C	$x_1 \cdots$	$x_k \cdots$	x_{n-m}
F	~~C~~	−1	**−2**	0

$F \to min$: Выбираем $max\{x_1, \dots, x_{n-m}\}$

	C	$x_1 \cdots$	$x_k \cdots$	x_{n-m}
F	~~C~~	3	−2	**5**

Выбор ведущей строки

Таблица № 1				
Базис. неизв.	Свобод. члены	Свободные неизвестные		Вспом. коэфф.
		X1	X2	
X3	−2	1	**−2**	
X4	−4	−1	−1	
X5	2	1	−1	
X6	6	0	1	
F	0	−1	−2	

$min\{$свобод. чл. / ведущ. столбец$\}$

Примечание: $\frac{a>0}{b<0} = +\infty$

$-2/-2 = 1$

$-4/-1 = 4$

$2/-1 = \infty$ $\Rightarrow 1 \Rightarrow$ $\boxed{x_3 \text{ – ведущ. строка.}}$

$6/1 = 6$

$\boxed{\text{Тогда } (-2) \text{ – ведущ. элемент.}}$

3) Пересчёт таблицы

	Таблица № 1					
	Базис. неизв.	Свобод. члены	Свободные неизвестные		Вспом. коэфф.	
			x_1	x_2		
ВС	x_3	-2	1	-2 ВЭ		
	x_4	-4	-1	-1		
	x_5	2	1	-1		
	x_6	6	0	1		
	F	0	-1	-2		
				ВК		

→

Таблица № 2				
Базис. неизв.	Свобод. члены	Свободные неизвестные		Вспом. коэфф.
		x_1	x_3	
x_2	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
x_4	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_5	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_6	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
F	2	-2	-1	2

Новая ВС = ВС / ВЭ , но если ВЭ $\in$ ВК $\Rightarrow$ ВЭ$^{-1}$

Столбец вспомог. коэфф. = (− ВК) , за искл. ВЭ

Новая строка = старая строка + вс. коэф. · Новая ВС

---

4) Проверка на оптимальность

– Критерий оптимальности: индексная строка не содержит отриц. коэф. $\Rightarrow$ решение оптимально. Иначе повторяем пункты (2) – (4)

– Критерий неразрешимости: если индексная строка содержит $\Delta_j < 0$ и $\forall\, a_{ij} < 0$ $\forall i = \overline{1,m}$ $\Rightarrow$ ЗЛП не имеет решений.