11.11.25

а) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

$f(x) = g(x) \cdot (x+3) + 7x^2 + 7$

$g(x) = (x^2+1)(x-2) + 0$

$НОД(f(x), g(x)) = x^2 + 1 = \frac{f(x) - g(x)(x+3)}{7}$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 & x+3 \\ \hline -(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) & \\ \hline 3x^3 + x^2 + 3x + 1 & \\ -(3x^3 - 6x^2 + 3x - 6) & \\ \hline 7x^2 + 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + x - 2 & x^2+1 \\ \hline -(x^3 + x) & x - 2 \\ \hline -2x^2 - 2 & \\ -(-2x^2 - 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

№2. Найти $НОД(P, Q)$, где $P = x^4 + 1$, $Q = x^3 + x + 1$

а) $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 1 & x^3 + x + 1 \\ \hline -(x^4 + x^2 + x) & x \\ \hline -x^2 - x + 1 & \end{array}$$

$P = Q \cdot x + (-x^2 - x + 1)$

$Q = (-x^2 - x + 1)(-x + 1) + 0$

$НОД(P, Q) = -x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x + 1 & -x^2 - x + 1 \\ \hline -(x^3 + x^2 - x) & -x + 1 \\ \hline -x^2 + 2x + 1 & \\ -(-x^2 - x + 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

б) $\mathbb{Z}_5$

$P = Q \cdot x + (-x^2 - x + 1)$

$Q = (-x^2 - x + 1)(-x + 1) + 3x$

$-x^2 - x + 1 = 3x \cdot (-2x - 2) + 1$

$3x = 1 \cdot 3x + 0$

$НОД(P, Q) = 1$

$$\begin{array}{r|l} -x^2 - x + 1 & 3x \\ \hline -(-x^2) & -2x - 2 \\ \hline -x + 1 & \\ -(-x) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x + 1 & -x^2 - x + 1 \\ \hline -(x^3 + x^2 - x) & -x + 1 \\ \hline -x^2 + 2x + 1 & \\ -(-x^2 - x + 1) & \\ \hline 3x & \end{array}$$

№4. Найти все неприводимые многочлены:

а) степени ≤ 4