02.10.25 # Транспортная задача Синицын Е.А.

(метод северо-западного угла / наим. стоимости)

Транспортная задача — это задача определения оптимального плана перевозок груза из данных пунктов отправления в заданные пункты потреб-ия.

Типы транспортных задач:

1) по критерию стоимости (минимум затрат)
2) по критерию времени (минимум времени)

Особенности:

- Однородные ресурсы
- Только = уравнения
- Одинаковые Е.И.
- $X11 + X12 + X13 = 40$
- Коэфф. при „x" равны 1
- Каждый „x" встречается только в 2х ур-ях сис. огр.

Постановка задачи

Транспортная таблица

n потребителей

$a_i \backslash b_j$	100	180	200
120	3	3	4
80	4	2	1
150	2	4	2
210	4	1	3

← объёмы

m поставщиков

объёмы

Стоимости перевозки

Выбирается 1 из 2х критериев оптимальности

или

Необходимо:

1) макс. удовлет. потребнос.
2) или → min

Транспортная задача

Закрытая

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Решаем

Открытая (с неправильным балансом)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Приводим к закрытой

Дефицит $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Вводим фиктивного поставщика

$a_i \backslash b_j$	100	180	200
120	3	3	4
80	4	2	1
150	2	4	2
210	4	1	3
A'_{m+1}	0	0	0

Избыток $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Вводим фиктивного потребителя

$a_i \backslash b_j$	100	180	200	B'_{n+1}
120	3	3	4	0
80	4	2	1	0
150	2	4	2	0
210	4	1	3	0

Математическая модель транспортной задачи

матрица перевозок

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \leftarrow$$ Суммарные затраты на перевозку

Система ограничений

Полный вывоз m запасов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$+$

Полное удовл. n потребителей

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}$$

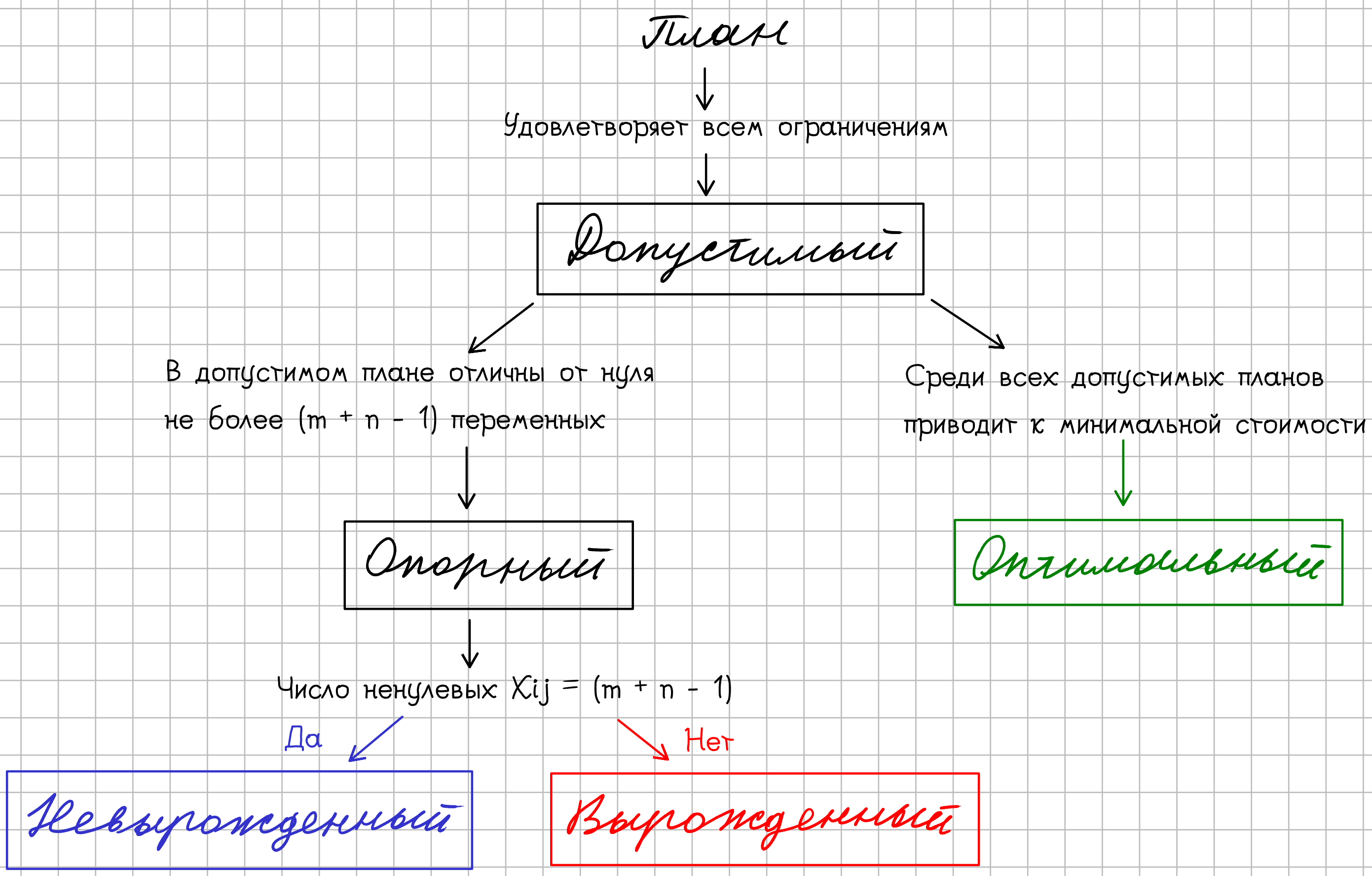
Итого мат. модель:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Особенности ТЗ:

1) коэфф. при „x_{ij}" равны 1
2) $\forall x_{ij}$ встречается только в 2х уравнениях.
3) Система огр. содержит $m+n$ уравнений с перемен.
4) $\forall$ опорное решение должно содержать $(m+n-1)$ базисных переменных и $(m-1)(n-1)$ свободных переменных, равных 0.
5) Если все a_i и b_j – целые, то значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые.



Теорема 1. Для $\forall$ ТЗ существует план.

▲ $a_i > 0,\ i=\overline{1,m},\ b_j > 0,\ j=\overline{1,n}$

Т.к. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$, то возьмём план $x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{A}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

Тогда $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i$ $\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Система огр. выполняется $\Rightarrow$ x_{ij} составляют план ▲

Теорема 2. ТЗ всегда имеет оптимальный план.

▲ Допустимая область (ДО) не пуста, т.к. $c_{ij} \geq 0$, то для $\forall$ плана перевозок $F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0$

Т.к. $F(x)$ огр. снизу $\Rightarrow$ ТЗ всегда имеет решение ▲

Пример.

Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице

$a_i \backslash b_j$	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{33} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

матрица перевозок матрица стоимостей

$$F(x) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{33} \to min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{33} = 50 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

Алгоритм решения ТЗ:

1) составление первоначального (опорного) плана

2) улучшение плана до оптимального

Методы поиска опорного плана:

1) северо-западного угла

Начинается с Л.В. угла матрицы и назначает максимум объёма.

Движение: вниз или вправо

$a_i \backslash b_j$	100	180	200
120	3	3	4
80	4	2	1
150	2	4	2
210	4	1	3

2) минимального элемента (наим. стоимости)

Выбор клетки с наим. стоимостью и назначения макс. объёма.

$a_i \backslash b_j$	100	180	200
120	3	3	4
80	4	2	1
150	2	4	2
210	4	1	3

№3

№1

и т.д.

№2

3) двойного предпочтения

Отмечаем клетки с мин. стоимостью по строкам и столбцам.

Приоритет распределения:

1) Дважды отмечены
2) Отмечены 1 раз
3) Повторяем алгоритм для неотмеченных

$a_i \backslash b_j$	100	180	200
120	3	3	4
80	4	2	1
150	2	4	2
210	4	1	3

4) Метод аппроксимации Фогеля

Пример. Метод С-З угла

b_j / a_i	20	15	25	20
30	4	5	3	6
25	7	2	1	5
20	6	1	4	2

1) Проверка задачи на закрытость: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$75 \neq 80 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вводим фикт. поставщика.

2) Заполняем таблицу, начиная с ячейки (1, 1)

b_j / a_i	20	15	25	20
30	4	5	3	6
25	7	2	1	5
20	6	1	4	2
5	0	0	0	0

→

b_j / a_i	~~20~~	15	25	20
~~30~~ 10	4; 20	5	3	6
25	~~7~~	2	1	5
20	~~6~~	1	4	2
5	~~0~~	0	0	0

→

b_j / a_i	~~20~~	~~15~~ 5	25	20
~~30~~	4; 20	5; 10	~~3~~	~~6~~
25	~~7~~	2	1	5
20	~~6~~	1	4	2
5	~~0~~	0	0	0

→

b_j / a_i	~~20~~	~~15~~	25	20
~~30~~	4; 20	5; 10	~~3~~	~~6~~
~~25~~ 20	~~7~~	2; 5	1	5
20	~~6~~	~~1~~	4	2
5	~~0~~	~~0~~	0	0

→

b_j / a_i	~~20~~	~~15~~	~~25~~ 5	20
~~30~~	4; 20	5; 10	~~3~~	~~6~~
~~25~~	~~7~~	2; 5	1; 20	~~5~~
20	~~6~~	~~1~~	4	2
5	~~0~~	~~0~~	0	0

→

b_j / a_i	~~20~~	~~15~~	~~25~~	20
~~30~~	4; 20	5; 10	~~3~~	~~6~~
~~25~~	~~7~~	2; 5	1; 20	~~5~~
~~20~~ 15	~~6~~	~~1~~	4; 5	2
5	~~0~~	~~0~~	~~0~~	0

→

b_j / a_i	~~20~~	~~15~~	~~25~~	~~20~~ 5
~~30~~	4; 20	5; 10	~~3~~	~~6~~
~~25~~	~~7~~	2; 5	1; 20	~~5~~
~~20~~	~~6~~	~~1~~	4; 5	2; 15
5	~~0~~	~~0~~	~~0~~	0

→

b_j / a_i	~~20~~	~~15~~	~~25~~	~~20~~
~~30~~	4; 20	5; 10	~~3~~	~~6~~
~~25~~	~~7~~	2; 5	1; 20	~~5~~
~~20~~	~~6~~	~~1~~	4; 5	2; 15
~~5~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	0; 5

Итого: $4\cdot 20 + 5\cdot 10 + 2\cdot 5 + 1\cdot 20 + 4\cdot 5 + 2\cdot 15 + 0\cdot 5 = 100 + 110 = 210$

Пример. Метод наим. стоимости

$a_i \backslash b_j$	15	20	25
10	5	3	1
20	3	2	4
30	4	1	2

1) Проверка задачи на закрытость: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

60 = 60 √

2) Заполняем таблицу начиная с ячейки с наим. стоимостью.

$a_i \backslash b_j$	15	20	~~25~~ 15
~~10~~	~~5~~	~~3~~	1 / 10
20	3	2	4
30	4	1	2

$a_i \backslash b_j$	15	~~20~~	~~25~~ 15
~~10~~	~~5~~	~~3~~	1 / 10
20	3	~~2~~	4
~~30~~ 10	4	1 / 20	2

$a_i \backslash b_j$	15	~~20~~	~~25~~ 5
~~10~~	~~5~~	~~3~~	1 / 10
20	3	~~2~~	4
~~30~~	~~4~~	1 / 20	2 / 10

$a_i \backslash b_j$	~~15~~	~~20~~	~~25~~ 5
~~10~~	~~5~~	~~3~~	1 / 10
~~20~~ 5	3 / 15	~~2~~	4
~~30~~	~~4~~	1 / 20	2 / 10

$a_i \backslash b_j$	~~15~~	~~20~~	~~25~~
~~10~~	~~5~~	~~3~~	1 / 10
~~20~~	3 / 15	~~2~~	4 / 5
~~30~~	~~4~~	1 / 20	2 / 10

Итого:

$10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 20 +$

$+ 2 \cdot 10 = 115$