23.09.25

Автоморфизм групп

$\varphi : G \to G$

операция композиции

Опр. $\operatorname{Aut} G = \{ \varphi : G \to G$ — изоморф., $\circ \}$

Теор. $\operatorname{Aut} G$ — группа

$\operatorname{Aut} Z_5$

$Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $+$

$\operatorname{Card} 0 = 1$

$\operatorname{Card} 1 = 5$ $\qquad \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

$\operatorname{Card} 2 = 5$ $\qquad \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2$

$\operatorname{Card} 3 = 5$ $\qquad \varphi(1+1) = \underset{2}{\underset{\parallel}{\varphi(1)}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{\varphi(1)}} = 4$

$\operatorname{Card} 4 = 5$

g_1	g_2	g_3	g_4
$0 \to 0$	$0 \to 0$	$0 \to 0$	$0 \to 0$
$1 \to 1$	$1 \to 2$	$1 \to 3$	$1 \to 4$
$2 \to 2$	$2 \to 4$	$2 \to 1$	$2 \to 3$
$3 \to 3$	$3 \to 1$	$3 \to 4$	$3 \to 2$
$4 \to 4$	$4 \to 3$	$4 \to 2$	$4 \to 1$

$\operatorname{Aut} Z_5 = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$g_2 \circ g_2 = g_4 \qquad g_2 \circ g_2 \circ g_2 = g_3 \qquad g_2^4 = g_1 = e$

$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Card} g_2 = 4 \\ \operatorname{Card} \operatorname{Aut} Z_5 = 4 \end{array}}$

$\operatorname{Aut} Z_5$ — циклическая

$\operatorname{Aut} Z_5$ — абелева

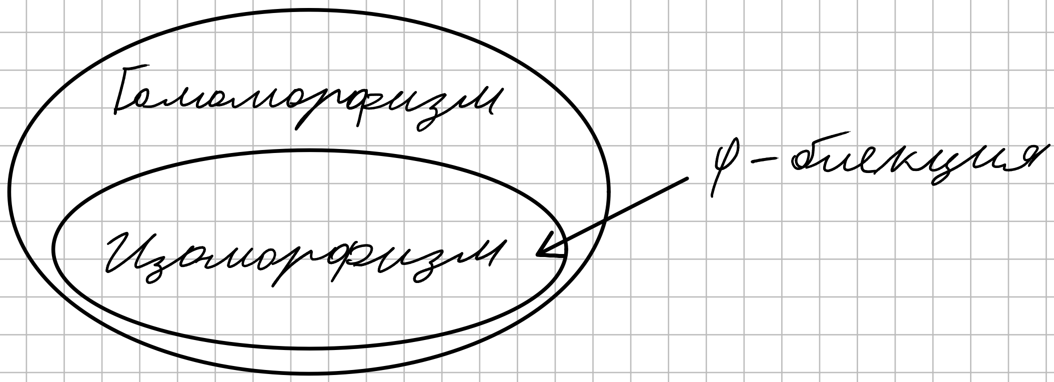
$\operatorname{Aut} Z_5 \cong Z_4$

Гомоморфизм групп

Опр. $\varphi : (G, *) \to (H, \circ) \qquad \forall a, b \in G \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Свойства

1)



2) $\varphi: e_G \to e_H$

$$\varphi(a * e_G) = \varphi(a) \circ \varphi(e_G)$$

$$\underset{\varphi(a)}{\shortparallel} = \varphi(a) \circ \varphi(e_G)$$

$$\varphi(e_G) = e_H$$

$$\boxed{\ker \varphi = \{a \in G : \varphi(a) = e_H\}}$$

Теорема $\ker \varphi$ – подгрупа G

$a, b \in \ker \varphi \qquad \varphi(a) = e_H \qquad \varphi(b) = e_H$

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) = e_H \circ e_H = e_H \Rightarrow a * b \in \ker \varphi$$

Теорема φ – изоморфизм $\Leftrightarrow$ $\ker \varphi = \{e_G\}$

$\varphi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$

изоморфизм	гомоморфизм
$0 \to 0$	$0 \to 0$
$1 \to 1$	$1 \to 2$
$2 \to 2$	$2 \to 0$
$3 \to 3$	$3 \to 2$
$\ker \varphi = \{0\}$	$\ker \varphi = \{0; 2\}$

Св-ва:

1) $\operatorname{Card} a = \operatorname{Card} \varphi(a)$; где $(a \in G, \varphi(a) \in H)$ Изом.

$\operatorname{Card} a \neq \operatorname{Card} \varphi(a)$; где $(a \in G, \varphi(a) \in H)$ Гомомор.

$\operatorname{Ker}\varphi = W$ — подгруппа

gWg^{-1} $\quad g, g^{-1} \in G$

$$\varphi(g * a * g^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(a) \circ \varphi(g^{-1}) = \\ = \varphi(g) \circ e_H \circ \varphi(g^{-1}) = \\ = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = e_H$$

$\longrightarrow$ $\boxed{gWg^{-1} = W}$

Опр. $H \subseteq G \Rightarrow gHg^{-1} = H$ $\quad H \triangleleft G$ — обозн.

H — нормальная подгруппа

$a\operatorname{Ker}\varphi = \{ab,\ a \in G,\ b \in \operatorname{Ker}\varphi\}$

Св-ва:

1) $\varphi(a\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)e_H = \varphi(a)$

2) $\varphi(a) = \varphi(x) \Rightarrow x \in a\operatorname{Ker}\varphi$

Смежные классы

G — группа $\quad$ H — подгруппа G

$aH = \{ah,\ a \in G,\ h \in H\}$ левый

$Ha = \{ha,\ a \in G,\ h \in H\}$ правый

$(G\backslash H)_L,\ (G\backslash H)_r,\ G\backslash H$

$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$H = \{e, (12)\}$

$aH = \{e, (12)\}, \{(13), (132)\}, \{(23), (123)\}$

$eH = H = \{e, (12)\}$ $\quad$ $(13)H = \{(13), (132)\}$

$(12)H = \{(12), e\}$ $\quad$ $(23)H = \{(23), (123)\}$

$Ha = \{e, (12)\}, \{(13), (123)\}, \{(23), (132)\}$

$He = H = \{e, (12)\}$ $\quad$ $H(13) = \{(13), (123)\}$

$H(12) =$ $\quad$ $H(23) = \{(23), (123)\}$

1) В каждом смежном классе одинак. кол-во элем. $= \text{Card } H$

2) $aH \neq Ha$

3) G – абелева $aH = Ha$

4) $H \triangleleft G \iff gHg^{-1} = H \iff gH = Hg$

5) $a \sim b \iff a^{-1}b \in H$ отношение эквив-ти

6) Каждый элемент попадёт в смеж. класс.
$x \in G \Rightarrow x \in (xH \mid Hx)$

7) левые (правые) не пересек. или совпадают.
$a_1H \cap a_2H \neq \varnothing$

$$a_1h_1 = a_2h_2 \Rightarrow a_1 = a_2h_2h_1^{-1} \Rightarrow a_1b = a_2h_2h_1^{-1}b$$
$h_1, h_2 \in H$, $b \in H$

$$\left.\begin{aligned} a_1H \subseteq a_2H \\ a_2H \subseteq a_1H \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1H = a_2H$$

Опр. Кол-во смеж. классов – индекс группы G по подгруппе H $(G:H)$

Теорема Лагранжа

H – подгруппа G $(aH)_L$

$G = a_1H \cup a_2H \cup a_3H \cup \ldots$

$\text{Card } G = (G:H) \cdot \text{Card } H$

Теорема (Следствие)

$\text{Card } G \,\vdots\, \text{Card } g$

▲ $\forall g \in G \quad H = \{g, g^2, \ldots, g^k = e\}$
$\text{Card } H = \text{Card } g \Rightarrow \text{Card } G \,\vdots\, \text{Card } g$ ▲

Теорема

Card $G = p$ - простое число $\Rightarrow G$ - циклическая

Card $G = p \Rightarrow$ Card $g = 1$ или p

Card $e = 1$

Card $g = p \quad g \neq e$