30.09.25

Факторгруппа

$H = \{e, (12)\} \subseteq S_3$

$eH = \{e, (12)\}$

$(13)H = \{(13), (132)\}$ — Смежные классы

$(23)H = \{(23), (123)\}$

$eH \cdot (13)H = \{(13), (132), (123), (23)\}$?

Опр. $H \trianglelefteq G$ — нормальная подгруппа

$aH = Ha \qquad gHg^{-1} = H$

Опр. Факторгруппа группы G по нормальной подгруппе H — мн-во смеж. классов aH с операцией $aH \circ Hb = (ab)H$

Обозн. G/H

Пример.

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \qquad H = \{\pm 1\}$

$eH = H$

$iH = \{\pm i\}$

$jH = \{\pm j\}$

$kH = \{\pm k\}$

$\mathrm{Card}\; Q_8/\{\pm 1\} = 4$

$iH \cdot jH = \{k, -k, -k, k\} = kH$

$e = H = eH$

$\mathrm{Card}\,(iH) = 2$

$(iH)\cdot(iH) = \{\pm i\}\cdot\{\pm i\} = \{\pm 1\} = H$

$(iH)\cdot(iH) = (i\cdot i)H = -H = H$

$Q_8/\{\pm 1\} \cong V_4$

Пример. $\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z} = \{0, \pm 5, \pm 10, \dots\}$ $+$

$0 + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$

$1 + 5\mathbb{Z} = \{1, 6, -4, 11, -9, \dots\}$

$2 + 5\mathbb{Z} = \{2, 7, -3, \dots\}$

$3 + 5\mathbb{Z} = \{3, 8, -2, \dots\}$

$4 + 5\mathbb{Z} = \{4, 9, -1, \dots\}$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$

$$\boxed{\operatorname{Card} G/H = \frac{\operatorname{Card} G}{\operatorname{Card} H} \sim |G/H| = \frac{|G|}{|H|}}$$

Теорема о гомоморфизме

$\varphi: G \to H$ – гомоморфизм

$\operatorname{Im} \varphi \cong G/\ker \varphi$

образ гомоморфизма

Кольцо

$(K, +, \times)$ $K \neq \varnothing$

2 операции

1. $(K, +)$ – абелева группа
2. $(K, \times)$ – полугруппа
3. $\forall x, y, z \in K$

   $(x+y) \times z = x \times z + y \times z$

   $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$

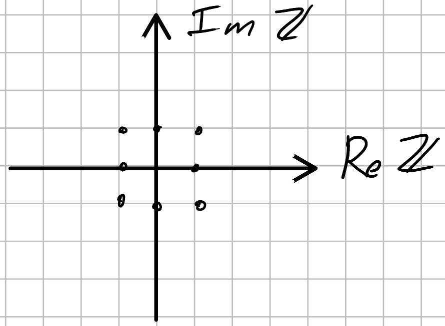
e_+

$e_\times$

Если $(K, \times)$ – моноид, то $(K, +, \times)$ – кольцо с единицей

Пример.

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – кольцо с единицей
2. $(n\mathbb{Z}, +, \circ)$ – кольцо
   $n \neq 1$
3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
5. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
6. $\{a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}, +, \circ\}$ – кольцо гауссовых чисел.
   кольцо с единицей



7. $\{x + y\sqrt{2},\ x, y \in \mathbb{Q}, +, \circ\}$ – кольцо
8. $\{x + y\sqrt[3]{2},\ x, y \in \mathbb{Q}, +, \circ\}$ – НЕ кольцо
9. $\{x + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}z,\ x, y, z \in \mathbb{Q}, +, \cdot\}$ – кольцо
10. $(C[a, b], +, \cdot)$
11. $\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), +, \cdot\right)$ кольцо с единицей
12. $(M_{n \times m}, +, \cdot)$
13. $(2^X, \Delta, \cap)$
14. $(\mathbb{Z}_n, +, \circ)$ – кольцо классов вычетов по $|n|$
15. $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ – кольцо многочленов по ? мн-ву

Гомоморфизм колец

Опр. $(K_1, +, \times)$ $(K_2, \square, *)$

$\varphi: K_1 \to K_2$

$\forall x, y \in K_1$ $\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) \square \varphi(y) \\ \varphi(x \times y) = \varphi(x) * \varphi(y) \end{cases}$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in K_1 : \varphi(x) = e_\square \in K_2\}$ ← инъекция

Опр. $\operatorname{Ker} \varphi = \{e_+ \in K_1\} \to \varphi$ – мономорфизм

Опр. $\operatorname{Im} \varphi = K_2$ – эпиморфизм ← сюръекция

мономорфизм + эпиморфизм = изоморфизм
$\downarrow\uparrow$
инъекция + сюръекция = биекция

Подкольцо

Опр. $(K, +, \times)$

$(K_1, +, \times)$ – подкольцо кольца $(K, +, \times)$

$\forall x, y \in K_1$ $x - y \in K_1$, $x \times y \in K_1$

Пример. $n\mathbb{Z}$ – подкольцо $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ – подкольцо $\mathbb{Q}$

Идеал

Опр. $(K, +, \times)$

$(L, +, \times)$ – подкольцо кольца $(K, +, \times)$

$LK \subseteq L$ AND $KL \subseteq L$

$(L, +, \times)$ – двусторонний идеал кольца $(K, +, \times)$

$LK \subseteq L$ OR $KL \subseteq L$

$(L, +, \times)$ – односторонний идеал кольца $(K, +, \times)$

Опр. $a \in K$

$aK, Ka \longrightarrow aK \times Ka \longrightarrow L$ – главный идеал элемента „a"

Пример

$\mathbb{Z}_6 = \{0, \ldots, 5\}$

$a = 2 \qquad 2\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6 \cdot 2$

$L = \{0, 2, 4\}$