4.4. példa. A rekurziókat a legtöbb programozási nyelv támogatja. Egy algoritmust akkor hívunk rekurzívnak, ha a feladatot ugyanannak a feladatnak egymást követően egyre kisebb méretű bemenetet használó példányait alkalmazva oldja meg. Az egyik legszemléletesebb példa a faktoriális számító függvény, melynek C nyelvű implementációja az alábbi:

```
int faktorialis(int n)
{
    if(n <= 1)
        return 1;
    return n * faktorialis(n-1);
}
```

A függvény tehát egy egész értékkel tér vissza, ami a bemeneti egész számtól függ, mégpedig úgy, hogy a függvény számítás közben meghívja saját magát, de egyel kisebb bemeneti paraméterrel, mígnem n el nem éri az 1-et, és a számítás véget ér. Minden rekurzió ciklussá alakítható (hívási verem – angolul *call stack* – segítségével) és minden ciklus megadható rekurzív módon. Egy algoritmus implementálásának a stílusát érthetőségi és hatékonysági szempontok alapján szokták megválasztani. Vannak olyan programozási nyelvek (funkcionális nyelvek), ahol a rekurzió megvalósítása a nyelv alapvető építőköve.

4.1.2. Műveletek természetes számokkal

Az összeadás és szorzás számolási műveleteit nem vontuk be az axiómarendszerbe, ezeket induktív módon definiáljuk.

Összeadás

A rekurziótétel alapján minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan $s_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre $s_m(0) = m$, és minden $n \in \mathbb{N}$-re $s_m(n') = (s_m(n))'$. Az $s_m(n)$ számot $m + n$-nel fogjuk jelölni, és az m és n természetes számok ***összegének*** nevezzük. Megjegyezzük, hogy az összeadásból visszakapjuk a rákövetkezést, hiszen $m' = (s_m(0))' = s_m(0') = s_m(1) = m + 1$. A továbbiakban az összeadás műveletének tulajdonságait vizsgáljuk.

4.1.5. tétel. *Ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor*
(1) $(k + m) + n = k + (m + n)$ *(asszociativitás);*
(2) $0 + n = n + 0 = n$*;*
(3) $m + n = n + m$ *(kommutativitás).*

Bizonyítás. Az asszociativitást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Felhasználjuk, hogy $k = s_k(0) = k + 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Az $n = 0$ esetben

$$(k + m) + 0 = s_k(m) + 0 = s_k(m) = s_k(m + 0) = k + (m + 0).$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Belátjuk, hogy ekkor $n' \in \mathbb{N}$-re is igaz.

$$\begin{aligned}
(k + m) + n' &= s_k(m) + n' = (s_k(m) + n)' \quad (\text{mert } s_{k+m}(n') = s_{k+m}(n)') \\
&= ((k + m) + n)' = (k + (m + n))' \quad (\text{az indukciós feltevés miatt}) \\
&= (k + s_m(n))' = (k + s_m(n)') = (k + s_m(n')) \\
&= k + (m + n').
\end{aligned}$$

(2) bizonyítása n szerinti indukcióval történik. $0 + n = n + 0 = n$ az $n = 0$ esetben nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor $0 + n' = (0 + n)' = n'$, így az állítás minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül. Az $n + 0 = n$ egyenlőség az összeadás definíciójából következik. (3) A kommutativitást két darab indukcióval bizonyítjuk. Először belátjuk, hogy rögzített $m \in \mathbb{N}$ esetén $m' + n = (m + n)'$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. n szerinti indukcióval dolgozunk. Az $n = 0$ eset $m' + 0 = m' = (m + 0)'$ miatt teljesül. Tegyük fel, hogy $m' + n = (m + n)'$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor

$$m' + n' = (m' + n)' = \left((m + n)'\right)' = (m + n')',$$

vagyis az állítás minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz. Most megmutatjuk, hogy $m+n = n+m$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Az $n = 0$ eset nyilvánvaló. Indukcióval bizonyítva tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor

$$m + n' = (m + n)' = (n + m)' = n' + m,$$

vagyis $m + n = n + m$ minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül. ■

Szorzás

A rekurziótétel alapján minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre $p_m(0) = 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$-re $p_m(n') = p_m(n) + m$. A $p_m(n)$ számot $m \cdot n$-nel, vagy gyakran a rövidebb mn-nel jelöljük, és az m és n számok ***szorzatának*** nevezzük.

4.5. példa. A szorzat definíciója miatt $1 \cdot 1 = p_1(1) = p_1(0') = p_1(0) + 1 = 1$, továbbá $5 \cdot 3 = p_5(3) = p_5(2') = p_5(2)+5 = p_5(1')+5 = p_5(1)+5+5 = p_5(0')+10 = p_5(0)+5+10 = 0+15 = 15$.

4.1.6. tétel. *Ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor*
(1) $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ (bal oldali disztributivitás)
(2) $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$
(3) $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$
(4) $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ (asszociativitás)
(5) $m \cdot n = n \cdot m$ (kommutativitás).

Bizonyítás. Először a disztributivitást bizonyítjuk, amihez n szerinti indukciót használunk. $n = 0$-ra

$$k \cdot (m + 0) = p_k(m + 0) = p_k(m) = k \cdot m = k \cdot m + 0 = k \cdot m + k \cdot 0.$$

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned} k \cdot (m + n') &= k \cdot (m + n)' = p_k((m + n)') = p_k(m + n) + k = k \cdot (m + n) + k \\ &= (k \cdot m + k \cdot n) + k = k \cdot m + (k \cdot n + k) = k \cdot m + (p_k(n) + k) \\ &= k \cdot m + p_k(n') = k \cdot m + k \cdot n'. \end{aligned}$$

(2) bizonyítása n szerinti indukcióval történik. A szorzás definíciójából következik, hogy $n \cdot 0 = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így $n = 0$ esetén $0 \cdot n = 0$ is teljesül. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$-re $0 \cdot n = 0$. Ekkor

$$0 \cdot n' = p_0(n') = p_0(n) + 0 = 0 \cdot n + 0 = 0.$$

(3) bizonyításához először megmutatjuk az alábbi állítás teljesülését:

$$m' \cdot n = m \cdot n + n \tag{4.1}$$

minden $n \in \mathbb{N}$-re. Indukcióval bizonyítva az $n = 0$ eset $m' \cdot 0 = 0 = m \cdot 0 + 0$ miatt nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned} m' \cdot n' &= m' \cdot n + m' = (m \cdot n + n) + m' \\ &= ((m \cdot n + n) + m)' = ((m \cdot n + m) + n)' \\ &= (m \cdot n' + n)' = m \cdot n' + n'. \end{aligned}$$

(3) bizonyítása n szerinti indukcióval történik. Az $n = 0$ eset (2) miatt teljesül. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re $1 \cdot n = n$. Ekkor

$$1 \cdot n' = p_1(n') = p_1(n) + 1 = 1 \cdot n + 1 = n + 1 = n'.$$

Hasonlóan, tegyük fel, hogy $n \cdot 1 = n$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor (4.1) miatt

$$n' \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 = n + 1 = n'.$$

Az asszociativitást n szerinti indukcióval bizonyítjuk. $n = 0$-ra $(k \cdot m) \cdot 0 = 0 = k \cdot 0 = k \cdot (m \cdot 0)$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned} (k \cdot m) \cdot n' &= p_k(m) \cdot (n + 1) = p_k(m) \cdot n + p_k(m) \\ &= (k \cdot m) \cdot n + k \cdot m = k \cdot (m \cdot n) + k \cdot m = k \cdot (m \cdot n + m) \\ &= k \cdot p_m(n') = k \cdot (m \cdot n'). \end{aligned}$$

(5) Az $m \cdot n = n \cdot m$ kommutativitás bizonyítása n szerinti indukcióval történik. Az $n = 0$ eset (2) miatt teljesül. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor (4.1)-et felhasználva

$$m \cdot n' = m \cdot n + m = n \cdot m + m = n' \cdot m.$$

A jobb oldali disztributivitás a kommutativitásból adódik. ■

Az előző két tétel következménye az alábbi

4.1.7. tétel. $(\mathbb{N}; +)$ *kommutatív félcsoport a* 0 *nullelemmel.* $(\mathbb{N}; \cdot)$ *kommutatív félcsoport az* 1 *egységelemmel.*

A természetes számok rendezési struktúrája

4.1.8. definíció. $n \leq m \ := \ \exists\, k \in \mathbb{N} \ : \ n + k = m.$

Belátható, hogy $(\mathbb{N}; \leq)$ teljes rendezés, sőt, jólrendezés. Mi, Peano-val ellentétben 1 helyett a 0-t választottuk legkisebb számnak. $(\mathbb{N}; \leq)$ jólrendezése miatt $0 < 1$, $n < n'$, és használhatjuk azokat a kifejezésmódokat, hogy „ az $n + 1$ szám 1-gyel nagyobb n-nél," „az $n + k$ szám k-val nagyobb n-nél", továbbá, mivel $\mathbb{N}$-nek nincs felső korlátja, „bármilyen nagy természetes szám van", vagyis „akármeddig el lehet számolni."

A rendezési struktúra az összeadással és a szorzással adott algebrai struktúrával összefér abban az értelemben, hogy érvényesek a

4.1.9. tétel (monotonia tételei). *Minden* $m, n, k \in \mathbb{N}$*-re*

$$n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad n + k \leq m + k,$$
$$n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot k \leq m \cdot k \quad (k \neq 0).$$

Bizonyítás. Ha $n \leq m$, akkor létezik olyan $s \in \mathbb{N}$, hogy $n+s = m$, így $n+s+k = m+k$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, vagyis a 4.1.8. definíció miatt $n + k \leq m + k$. Megfordítva, ha $n + k \leq m + k$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, akkor nyilván $k = 0$-ra is igaz, vagyis $n \leq m$. A szorzásra vonatkozó ekvivalencia bizonyítását az Olvasóra hagyjuk. ■

A tétel egyenlőségre vonatkozó állításai az alábbi

4.1.10. tétel (egyszerűsítési szabályok).

$$n + k = m + k \quad \Rightarrow \quad n = m,$$
$$n \cdot k = m \cdot k \text{ és } k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad n = m.$$

Észrevehetjük, hogy ha egy halmaz tartalmaz egy k természetes számot, és minden természetes számmal együtt a rákövetkezőjét is, akkor a teljes indukció miatt tartalmaz minden $n \geq k$ természetes számot.

A 4.1.8. definícióból az $n+x = m$ egyenlet megoldhatósága is következik, feltéve, hogy $n \leq m$ érvényes. Ezt az egyértelműen meghatározott megoldást m és n ***különbségének*** nevezzük, és úgy írjuk, hogy $x = m - n$.

Sorozatok, összegek, szorzatok

4.1.11. definíció. *Legyen H egy nem-üres halmaz. A természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán értelmezett H-ba képező függvényeket* ***H-beli sorozatoknak*** *nevezzük. Az $n \in \mathbb{N}$ számhoz rendelt elemet a sorozat n-edik tagjának hívjuk.*

A sorozat tehát egy olyan indexelt rendszer, ahol az indexhalmaz a természetes számok halmaza. Ha $\mathbb{N}^+$-szal jelöljük az $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ halmazt, sorozatokat $\mathbb{N}^+$-on is értelmezhetünk. Ilyenkor a sorozatnak nincs nulladik tagja, csak első, második, stb.

4.1.12. definíció. *Egy n hosszúságú (véges) sorozaton olyan f függvényt értünk, amelynek az értelmezési tartománya a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmaz.*

Ezeket a sorozatokat gyakran értékeik felsorolásával jelöljük:

$$\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle .$$

Megjegyzés. Véges sorozatok $\{1, \ldots, n\}$-en is értelmezhetők.

4.6. példa. A véges sorozat fogalma nagyon lényeges a számítástudományban, ahol listaként vagy lineáris tömbként értelmezzük őket. Például egy V lineáris tömb (vagy vektor) pozíciók (tárhelyek) sorozatának is tekinthető, ahol az n-edik pozícióban lévő elemet (általában) $V[n]$ jelöli.

4.7. példa. Legyen A egy tetszőleges, legalább kételemű halmaz, amit ábécének fogunk nevezni. Az összes, A elemeiből képezhető véges sorozatok (amelyeket szavaknak nevezünk) egységelemes félcsoportot alkotnak a konkatenáció (egymás után írás) műveletére nézve, ahol az üres