스톰멜 풍성 순환 문제의 수치적 해법과 행렬 연산

최장근 (janggeun.choi@unh.edu)

뉴햄프셔 대학교

2025년 10월

스톰멜 풍성 순환 문제(Stommel's wind-driven circulation)의 지배식은 일종의 포아송 방정식(Poisson equation)이다. 포아송 방정식 형태의 미분 방정식의 수치적 해법에 대해 논하며, 이가 행렬 방정식을 푸는 것임을 확인하는 것을 목표로 한다.

1 지배 방정식

1.1 스톰멜 풍성 순환 문제

스톰멜 풍성 순환 문제의 지배식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + b\frac{\partial\psi}{\partial x} = f(x,y) \tag{1a}$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L_x} = \psi|_{y=0} = \psi|_{y=L_y} = 0 \tag{1b}$$

위와 같은 미분 방정식을 포아송 방정식(Poisson equation)[1]이라 부른다. 편의를 위해, x방향 변동성에 집중하여 $\partial/\partial y = 0$, $f = -1$, $b = 0$을 가정하자. 이 경우, (1a)를

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -1 \tag{2a}$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L_x} = 0 \tag{2b}$$

로 간략화할 수 있다. 이 간략화한 문제의 해는

$$\psi = -\frac{1}{2}x(x - L_x) \tag{3}$$

임은 쉽게 알 수 있다.

[1] 엄밀히는 $b = 0$인 경우가 흔히 생각하는 정확한 포아송 방정식이다. 즉, (1a)는 조금은 변형한 포아송 방정식이라 볼 수 있다. $F = 0$인 경우를 라플라스 방정식(Laplace equation)이라 부른다.

2 1차원 포아송 방정식의 수치적 해법 예시

2.1 2차 미분에 대한 유한 차분법

이번에는 유한 차분법(finite difference method; FDM)을 사용해 (2)의 수치해를 구해보자. 일차 미분의 경우, 차분 방정식은

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} \approx \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} \equiv \frac{\psi_{n+1}-\psi_n}{\Delta x} \tag{4}$$

의 형태이다. $\psi(x) \equiv \psi_n$와 $\psi(x+\Delta x) \equiv \psi_{n+1}$로 정의했음에 유의하라. 이는 n번째 격자에서 ψ값과 그 다음 번째 격자$(n+1)$에서 ψ값을 의미한다. 같은 방식으로 2차 미분의 경우는

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi'(x+\Delta x)-\psi'(x)}{\Delta x} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\psi'(x+\Delta x)-\psi'(x)\right)\\ &\approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\psi(x+2\Delta x)-\psi(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}\right)\\ &= \frac{\psi(x+2\Delta x)-2\psi(x+\Delta x)+\psi(x)}{\Delta x^2}\\ &\equiv \frac{\psi_{n+1}-2\psi_n+\psi_{n-1}}{\Delta x^2}\end{aligned} \tag{5}$$

과 같이 차분화 할 수 있다. 위에서는 가운데 위치한 $\psi(x+\Delta x) = \psi_n$으로 정의했음에 유의하라.

2.2 적용 예시

위의 식을 바탕으로 (2)의 차분식은 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\psi_{n+1}-2\psi_n+\psi_{n-1}}{\Delta x^2} = -1 \tag{6a}$$

$$\psi_1 = \psi_n = 0 \tag{6b}$$

격자가 5개인 경우를 생각해 보자. 즉 구해야할 미지수는 각 격자점에 대한 ψ값 $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_5)$ 총 5개이다. 첫 번째$(n=1)$와 마지막$(n=5)$은 경계 조건을 통해 직접적으로 주어진다($\psi_1 = 0$와 $\psi_5 = 0$). 차분화한 지배식 (6a)으로 부터,

내부 3개 격자점에 대한 3개의 식($n = 1$인 경우, $n = 2$인 경우, $n = 3$인 경우)을 얻을 수 있다.

$$\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1 = -\Delta x^2 \tag{7a}$$

$$\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2 = -\Delta x^2 \tag{7b}$$

$$\psi_5 - 2\psi_4 + \psi_3 = -\Delta x^2 \tag{7c}$$

즉, 양 끝단의 경계 조건으로 부터 2개의 식이, 각 격자점에서의 지배식으로 부터 3개의 식이 주어져, 총 5개 미지수에 대한 5개 식이 주어진 간단한 연립 방정식 문제가 된다. 주어진 모든 식을 행렬을 사용해 나타내면

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\vec{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}}_{\vec{\psi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta x^2 \\ -\Delta x^2 \\ -\Delta x^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{F}} \tag{8}$$

가 된다. 위의 식에서 $\vec{M}$의 역행렬을 양변 좌측에 곱함으로 써, 각 격자점에서의 ψ값인 $\vec{\psi}$을 구할 수 있다.

예시 코드 1: 1차원 포아송 방정식 수치 해석 예시 코드

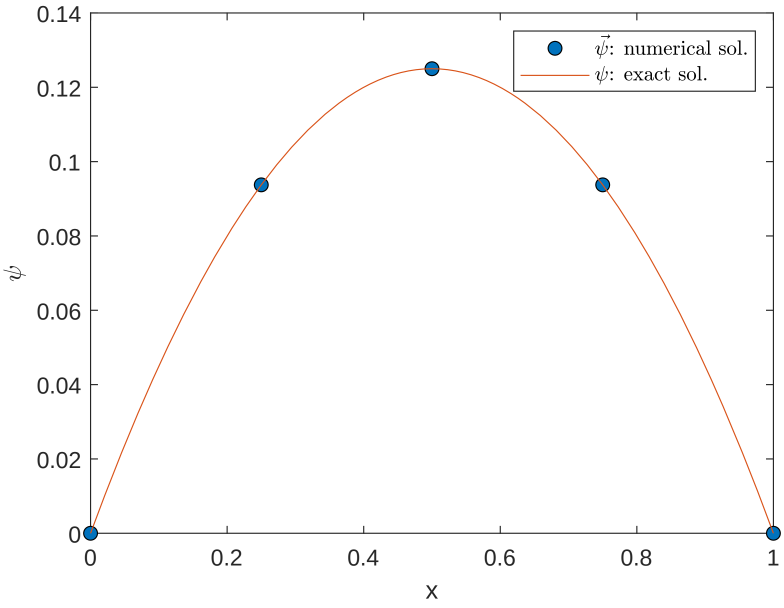
```
x=0:4;
dx=x(2)-x(1);
Lx=x(end)-x(1);

M=[1  0  0  0  0
   1 -2  1  0  0
   0  1 -2  1  0
   0  0  1 -2  1
```

```
     0   0   0   0   1];
dx2=dx^2;
F=-[0;dx2;dx2;dx2;0];

psi=M\F;
```

그림 1: 1차원 포아송 방정식의 수치해와 정해 비교.



문제 1. 다른 경계 조건 적용과 해의 존재성 위의 문제 (2)에서 지배식은 (2a)를 그대로 사용하고 경계 조건을 노이만(Neumann) 경계 조건

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=L_x} = 0 \tag{9}$$

으로 바꾸어 보자. 참고로 이 경계 조건을 차분화하면

$$\frac{\psi_2-\psi_1}{\Delta x} = 0, \qquad \frac{\psi_N-\psi_{N-1}}{\Delta x} = 0 \tag{10}$$

가 된다. N은 고려할 격자의 수($N = 5$)이다. 위의 경계 조건을 사용하는 수치해 연산 코드를 작성하라. 합리적인 수치해를 얻을 수 있는가? 그렇지 않다면, 해가 없음을 어떻게 수학적으로 확인할 수 있는가?

2.2.1 행성 β항의 고려

이번에는 행성 β항을 고려하고 문제를 더 일반화해

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b\frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x) \tag{11}$$

의 수치해를 구해보자. 식 (4)와 (6a)를 사용해 위의 식을 차분화하고 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{\Delta x^2} + b\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\Delta x} &= f_n \\ \therefore \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}_{e_1} \psi_{n-1} - \underbrace{\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{b}{\Delta x}\right)}_{e_2} \psi_n + \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{b}{\Delta x}\right)}_{e_3} \psi_{n+1} &= f_n \end{aligned} \tag{12}$$

이 된다. 이전 장에서 논의한 것과 같은 방식으로, 행렬 연산을 통해 수치해를 구할 수 있다. 아래는 5개 격자인 경우에 대한 구체적 행렬 연산 예시이다.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\vec{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}}_{\vec{\psi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{F}} \tag{13}$$

예시 코드 2: 1차원 스톰멜 풍성 순환 문제 수치 해석 예시 코드

```
N=51;
Lx=1;
b=10;
```

```
x=linspace(0,Lx,N);
dx=x(2)-x(1);

e1= ones(N,1)*(1/dx^2);
e2=-ones(N,1)*(2/dx^2+b/dx);
e3= ones(N,1)*(1/dx^2+b/dx);

M=spdiags([e1 e2 e3], -1:1, N, N);
M(1,1:2)=[1 0];
M(end,end-1:end)=[0 1];

F=[0;-ones(N-2,1);0];

psi=M\F;
```

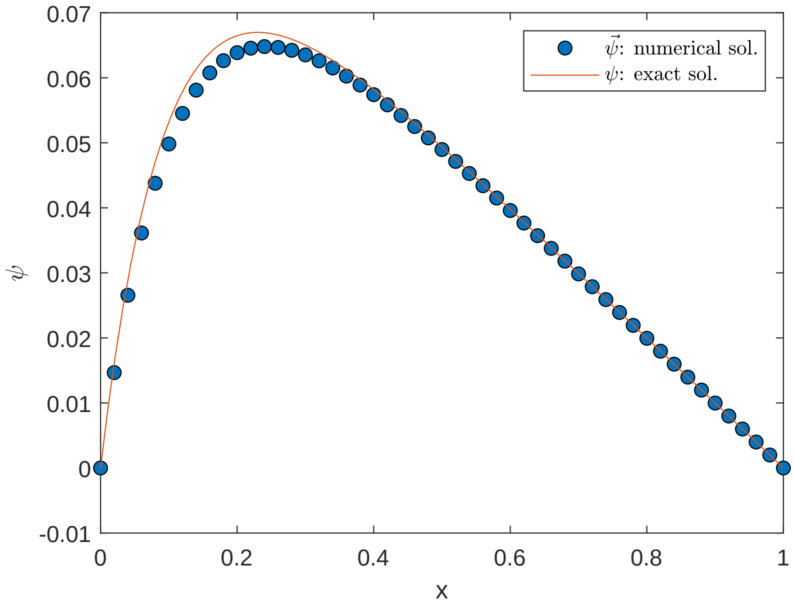
문제 2. 수치 기법의 선택 1차 미분항인 $\partial\psi/\partial x$은 아래와 같이 차분화할 수도 있다.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{\Delta x} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_{n+1} - \psi_{n-1}}{2\Delta x} \tag{15}$$

이는 각각 후방 차분 기법(backward scheme)과 중앙 차분 기법(centered scheme)이라 부른다. 2차 미분항의 차분화는 식 (5)를 그대로 사용하고, 1차 미분항의 차분화를 식 (4) 대신 식 (14)를 사용해 지배식을 차분화하고 이를 연산하는 코드를 작성하라. 같은 방식으로 (15)를 사용한 코드를 만들고, 각 경우가 정해와 얼마나 다른지 평가하라. 격자 수를 늘려 Δx가 충분히 작은 경우, 모두 일관된 결과를 보이는가?

그림 2: 1차원 스톰멜 풍성 순환 문제의 수치해와 정해 비교.



위의 예시 코드에서 $\vec{M}$을 매트랩으로 만들기 위해 내장 함수(spdiags)를 사용했다[2].

2.2.2 차원의 확장

이번에는 차원을 확장하여 y방향 변화항을 같이 고려해 식 (1a)의 수치해를 바로 구해보자. x와 y 두 방향을 고려한 경우, 차분화는 다음과 같이 이루어진다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \tag{16a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{16b}$$

[2] 예시 코드는 매트랩 2023a 버전으로 작성했다. 2024a버전 이후로 spdiags함수 사용 문법이 변경되었음에 유의하라(https://www.mathworks.com/help/matlab/release-notes.html?rntext=spdiags&startrelease=R2021a&endrelease=R2024a&groupby=release&sortby=descending&searchHighlight=spdiags).

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{16c}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{16d}$$

여기서 $\psi_{i,j}$는 x방향 i번째, y방향 j번째 격자 칸의 ψ값을 나타낸다. 1차 미분의 차분화에 중앙 차분 기법을 사용했으나, 다른 기법을 사용해도 상관없다[3]. 위의 근사를 사용하면 식 (1a)는

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + b\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} = f_{i,j} \tag{17}$$

으로 차분화할 수 있다. 격자가 4×4로 주어진 경우를 생각해 보자. 경계 조건으로 부터, 경계($i = 1$, $i = 4$, $j = 1$, 또는 $j = 4$)에 위치한 12개 격자에 대한 ψ값(12개의 식)이 주어지고, 내부에 위치한 4개 격자점에 대한 식은 차분화한 지배식에서 얻을 수 있다. 1차원 문제와 같이, 16개 미지수에 대한 16개의 식이 아래와 같이 연립 방정식으로 주어졌고 이는 행렬 연산을 통해 풀 수 있다. 구체적 예시로, 표 1과 2를 참조하라.

문제 3. 원격 바람 외력 아래 문제에 대한 수치해를 구하는 코드를 작성하라.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b\frac{\partial\psi}{\partial x} = -f_0 - f_1 e^{(x-L_x)/L_f} \tag{18a}$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L_x} = 0 \tag{18b}$$

여기서 f_0, f_1, L_f는 모두 주어진 양수 상수이다. 우변의 두 번째 항은 동안($x \approx L_x$)에서 추가적인 외력이 작용함을 의미한다. 유선 함수에 따라, y 방향 유속은 $\bar{v} = \partial\psi/\partial x$이다. $\bar{v}$를 수치적으로 산출하라. f_1에 대한 민감도 실험을 시행하라. 동안에서 외력 변화가 서안 강화 해류의 변화를 일으킴(원격 바람 외력; remote wind forcing)을 확인하라.

[3] 참고로, 여기서 사용한 2차 미분의 차분화(1차원 문제의 식 (5) 포함)는 중앙 차분 기법에 상응하며, 이 역시 다른 기법이 존재한다.

표 1: 4×4 격자 2차원 문제에서 주어진 구체적인 식

격자 좌표	미지수	비고	주어진 식
(1,1)	$\psi_{1,1}$	경계	$\psi_{1,1} = 0$
(2,1)	$\psi_{2,1}$	경계	$\psi_{2,1} = 0$
(3,1)	$\psi_{3,1}$	경계	$\psi_{3,1} = 0$
(4,1)	$\psi_{4,1}$	경계	$\psi_{4,1} = 0$
(1,2)	$\psi_{1,2}$	경계	$\psi_{1,2} = 0$
(2,2)	$\psi_{2,2}$	내부	$A\psi_{2,1} + B\psi_{1,2} + C\psi_{2,2} + D\psi_{3,2} + E\psi_{2,3} = f_{2,2}$
(3,2)	$\psi_{3,2}$	내부	$A\psi_{3,1} + B\psi_{2,2} + C\psi_{3,2} + D\psi_{4,2} + E\psi_{3,3} = f_{3,2}$
(4,2)	$\psi_{4,2}$	경계	$\psi_{4,2} = 0$
(1,3)	$\psi_{1,3}$	경계	$\psi_{1,3} = 0$
(2,3)	$\psi_{2,3}$	내부	$A\psi_{2,2} + B\psi_{1,3} + C\psi_{2,3} + D\psi_{3,3} + E\psi_{2,4} = f_{2,3}$
(3,3)	$\psi_{3,3}$	내부	$A\psi_{3,2} + B\psi_{2,3} + C\psi_{3,3} + D\psi_{4,3} + E\psi_{3,4} = f_{3,3}$
(4,3)	$\psi_{4,3}$	경계	$\psi_{4,3} = 0$
(1,4)	$\psi_{1,4}$	경계	$\psi_{1,4} = 0$
(2,4)	$\psi_{2,4}$	경계	$\psi_{2,4} = 0$
(3,4)	$\psi_{3,4}$	경계	$\psi_{3,4} = 0$
(4,4)	$\psi_{4,4}$	경계	$\psi_{4,4} = 0$

표 2: 표 1에 나타난 연립 방정식의 행렬 표현

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A & 0 & 0 & B & C & D & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A & 0 & 0 & B & C & D & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & B & C & D & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & B & C & D & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \psi_{3,1} \\ \psi_{4,1} \\ \psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ \psi_{3,2} \\ \psi_{4,2} \\ \psi_{1,3} \\ \psi_{2,3} \\ \psi_{3,3} \\ \psi_{4,3} \\ \psi_{1,4} \\ \psi_{2,4} \\ \psi_{3,4} \\ \psi_{4,4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ f_{4,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ f_{4,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \\ f_{4,3} \\ f_{1,4} \\ f_{2,4} \\ f_{3,4} \\ f_{4,4}
\end{bmatrix}
$$