회전 좌표계의 전향력과 원심력

최장근 (janggeun.choi@unh.edu)

뉴햄프셔 대학교

2025년 3월

지구의 자전과 같은 좌표계의 회전이 만드는 추가적인 가속도항(전향력과 원심력)을 유도하고 논한다. 특히 회전판 실험(rotating table experiment)에서의 유체 거동 지배식 이해를 목표로 한다.

1 고정 좌표계와 회전 좌표계: 좌표 및 벡터의 전환

그림 1과 같은 좌표계를 생각하자. 여기서 흑색 화살표는 고정된 좌표계의 x축과 y축을, 적색 화살표는 회전하는 좌표계의 x축과 y축을 나타낸다. 또한 회전 잔표계가 회전하는 속도(각속도)는 상수로 가정해 $\theta = \Omega t$인 경우를 생각하자. θ는 고정 좌표계와 회전 좌표계 사이의 각도, Ω는 좌표계의 상수 회전 속도를 나타낸다. 이 좌표계 위에 존재하는 물덩이를 생각하자(그림1의 청색 원). 고정 좌표계로 나타낸 물덩이 위치 좌표를 (X, Y)라 하자. 이 좌표를 원점과의 거리 R와 x축과의 각도 θ_0을 사용해 나타내면

$$X = R\cos\theta_0 \tag{1a}$$

$$Y = R\sin\theta_0 \tag{1b}$$

가 된다. 회전 좌표계(그림1의 적색 축) 상 물덩이 좌표를 (x, y)로 두고, 같은 방식으로 나타내면

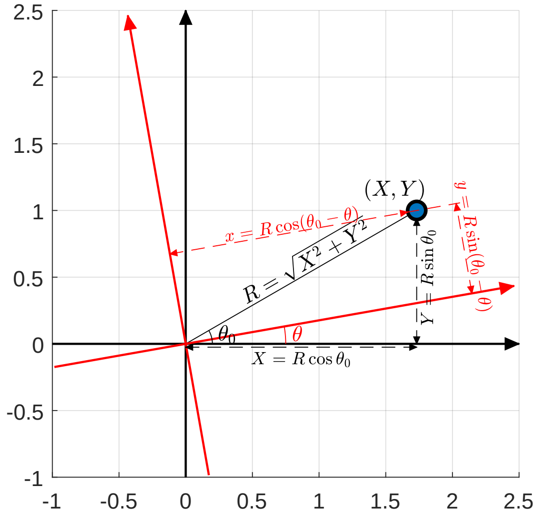
$$x = R\cos(\theta_0 - \theta) \tag{2a}$$

$$y = R\sin(\theta_0 - \theta) \tag{2b}$$

가 된다. 이제 위의 식에서 삼각 함수 부분을 합 공식을 사용해 전개하면

$$x = \underbrace{R\cos\theta_0}_{X}\cos\theta + \underbrace{R\sin\theta_0}_{Y}\sin\theta \tag{3a}$$

Figure 1: 고정 좌표계와 회전 좌표계로 나타낸 한 점의 좌표 예시



$$y = \underbrace{R\sin\theta_0}_{Y}\cos\theta - \underbrace{R\cos\theta_0}_{X}\sin\theta \tag{3b}$$

을 얻을 수 있다. 식 (1)을 이용했음에 유의하라. 정리하면

$$x = X\cos\theta + Y\sin\theta \tag{4a}$$

$$y = -X\sin\theta + Y\cos\theta \tag{4b}$$

로 고정 좌표계 상의 좌표 (X, Y)를 회전 좌표계 상의 좌표 (x, y)로 변환하는 공식이 된다. 참고로 이를 행렬 연산으로 나타내면

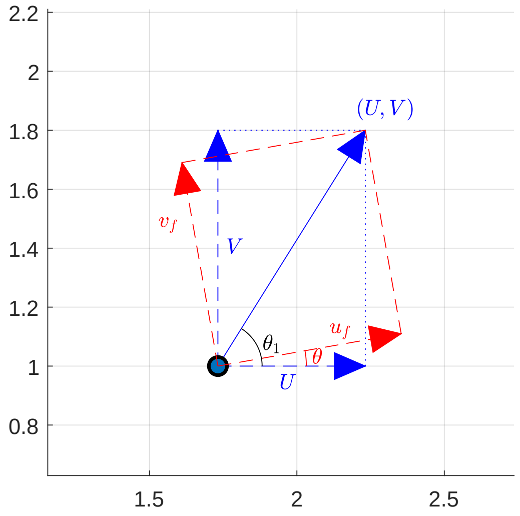
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{J(-\theta)} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{5}$$

로 나타낼 수 있다. 같은 방식으로 물덩이가 지니는 임의의 벡터(속도와 가속도) 역시

$$u_f = U\cos\theta + V\sin\theta \tag{6a}$$

$$v_f = -U\sin\theta + V\cos\theta \tag{6b}$$

Figure 2: 고정 좌표계와 회전 좌표계로 나타낸 벡터 예시



$$a_f^x = A^x \cos\theta + A^y \sin\theta \tag{7a}$$

$$a_f^y = -A^x \sin\theta + A^y \cos\theta \tag{7b}$$

로 나타낼 수 있고, 여기서 (U, V)와 (A^x, A^y)는 고정 좌표계 상 각 방향(x,y) 절대적인 속도와 가속도를, (u_f, v_f)와 (a_f^x, a_f^y)는 회전 좌표계로 전환한 절대적인 속도와 가속도를 의미한다.

2 회전 좌표계 내의 상대 속도와 가속도 유도

이제 식 (4)를 시간 t로 미분하자. θ가 t에 대한 함수($\theta = \Omega t$)임에 유의하라.

$$\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} = \underbrace{\frac{dX}{dt}}_{U} \cos\theta - \Omega X \sin\theta + \underbrace{\frac{dY}{dt}}_{V} \sin\theta + \Omega Y \cos\theta \tag{8a}$$

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} = -\underbrace{\frac{dX}{dt}}_{U} \sin\theta - \Omega X \cos\theta + \underbrace{\frac{dY}{dt}}_{V} \cos\theta - \Omega Y \sin\theta \tag{8b}$$

따라서

$$u = \underbrace{U\cos\theta + V\sin\theta}_{u_f} + \Omega(\underbrace{-X\sin\theta + Y\cos\theta}_{y}) \tag{9a}$$

$$v = \underbrace{-U\sin\theta + V\cos\theta}_{v_f} - \Omega(\underbrace{X\cos\theta + Y\sin\theta}_{x}) \tag{9b}$$

$$\therefore u = u_f + \Omega y \tag{9c}$$

$$v = v_f - \Omega x \tag{9d}$$

이다. 식 (4)와 (6)을 사용했음에 유의하라. 여기서 (u, v)가 회전 좌표계 위의 상대적인 속도이다. 식 (9a)와 (9b)를 한번 더 t로 미분해 가속도에 대한 식을 구하자.

$$\underbrace{\frac{du}{dt}}_{a^x} = \underbrace{\frac{dU}{dt}}_{A^x}\cos\theta - \Omega U\sin\theta + \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{A^y}\sin\theta + \Omega V\cos\theta + \Omega\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} \tag{10a}$$

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a^y} = -\underbrace{\frac{dU}{dt}}_{A^x}\sin\theta - \Omega U\cos\theta + \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{A^y}\cos\theta - \Omega V\sin\theta - \Omega\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} \tag{10b}$$

따라서

$$a^x = \underbrace{A^x\cos\theta + A^y\sin\theta}_{a_f^x} + \Omega(\underbrace{-U\sin\theta + V\cos\theta}_{v_f}) + \Omega(v_f - \Omega x) \tag{11a}$$

$$a^y = \underbrace{-A^x\sin\theta + A^y\cos\theta}_{a_f^y} - \Omega(\underbrace{U\cos\theta + V\sin\theta}_{u_f}) - \Omega(u_f + \Omega y) \tag{11b}$$

$$\therefore a^x = a_f^x + 2\Omega v_f - \Omega^2 x \tag{11c}$$

$$a^y = a_f^y - 2\Omega u_f - \Omega^2 y \tag{11d}$$

가 된다. 식 (6), (7), (9c), (9d)를 사용했다. 마지막으로 (9c), (9d)를 한번 더 사용해 u_f와 v_f를 u와 v로 바꾸면

$$a_f^x = a^x - 2\Omega v - \Omega^2 x \tag{12a}$$

$$a_f^y = a^y + 2\Omega u - \Omega^2 y \tag{12b}$$

을 얻을 수 있다. 우변의 두 번째항이 전향력항을 세 번째 항이 원심력을 나타낸다. 결과적으로 회전 좌표계에서 바라본 절대적인 가속도 (a_f^x, a_f^y)는 회전 좌표계 내의 상대적인 가속도 (a^x, a^y)에 전향력 $(-2\Omega v, 2\Omega u)$과 원심력 $(-\Omega^2 x, -\Omega^2 y)$을 더한 것으로 나타나며, 이처럼 좌표계의 변환에서 나타나는 추가적인 가속도항을 상투적으로 가짜 힘이라 부른다.

3 지구 물리 유체 역학에서의 전통적인 간략화

전향력이 유속에 대한 함수인 반면 원심력은 공간 좌표에 대한 함수로 나타난다. 따라서 특정 좌표점에서 원심력은 상수 외력이며, 실제 지구 환경에서는 중력에 비해 원심력의 크기가 매우 작아, 중력의 방향을 아주 약간 바꾸는 역할만 할 뿐이다. 따라서, 대부분의 경우 별도의 언급 없이 원심력항을 무시한다. 또한 실제 지구는 2차원의 판이 아닌 3차원의 구체이다. 회전하는 구면 좌표계에 대해 위와 같은 방식의 연산을 시행하고 원심력항을 무시하면

$$a_f^x = a^x + (2\Omega \cos\phi) w - (2\Omega \sin\phi) v \tag{13a}$$

$$a_f^y = a^y + (2\Omega \sin\phi) u \tag{13b}$$

$$a_f^z = a^z - (2\Omega \cos\phi) u \tag{13c}$$

을 얻을 수 있다. 여기서 a_f^z와 a^z는 고정 좌표계에서의 연직 방향 절대 가속도와 회전 구면 좌표계에서의 상대 가속도이다. ϕ는 위도를, Ω는 지구의 회전 각속도가 된다($\Omega = 2\pi/(1day) \approx 7.3 \times 10^{-5}\, s^{-1}$). 실제 지구 환경에서 w는 u에 비해 매우 작음을 이용해 식 (13a)의 $(2\Omega \cos\phi)w$를 무시하며, 식 (13c)의 전향력은 연직 방향 운동 방정식의 중력에 비해 매우 작음을 바탕으로 주로 무시한다(Price, 2010). 이 역시 많은 연구에서 별도의 언급과 논의없이 이루어지는 가정 중 하나이다.

결론적으로, 거의 대부분의 지구 물리 유체 역학 연구가

$$a_f^x = a^x - fv \tag{14a}$$

$$a_f^y = a^y + fu \tag{14b}$$

$$a_f^z = a^z \tag{14c}$$

을 가정하고 출발한다. 여기서 $f = 2\Omega\sin\phi$를 전향력 계수(Coriolis parameter) 혹은 행성 주파수(planetary frequency)로 부른다. 다만, 식 (14)에서 사용한 전향력항의 간략화가 비정수압 문제에서도 합당한가? 이에 대해서는 생각해 볼 여지가 남아 있는 것으로 보인다(Liang & Chan, 2005; Stewart & Dellar, 2011; Hayashi & Itoh, 2012; Igel & Biello, 2020; Ashkenazy & Tziperman, 2021).

문제 1. 원심력을 고려한 선형 비점성 천해 방정식의 지배식은

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v - \Omega^2 x = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{15a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u - \Omega^2 y = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{15b}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \tag{15c}$$

가 된다. 이는 회전판 실험에서의 간략화한 유체 거동 지배식으로 생각할 수 있다. 어떠한 조건에서 실제 해양 환경과 유사하게 원심력이 전향력에 비해 작아지는가?

문제 2. 회전판의 회전 각속도 Ω를 매우 크게 키운다면, 정상 상태를 가정한 위의 운동 방정식에서, 지배적인 항은 원심력과 압력 경사항이 된다. 이 경우, 해면의 고도 η에 대한 이론해를 구하라. 실험이 가능하다면 이론해가 합당한지 검증하라.

참고 문헌

Ashkenazy, Y., & Tziperman, E. (2021). Dynamic europa ocean shows transient taylor columns and convection driven by ice melting and salinity. *Nature communications*, *12*(1), 6376.

Cushman-Roisin, B., & Beckers, J.-M. (2011). *Introduction to geophysical fluid dynamics: physical and numerical aspects* (Vol. 101). Academic press.

Hayashi, M., & Itoh, H. (2012). The importance of the nontraditional coriolis terms in large-scale motions in the tropics forced by prescribed cumulus heating. *Journal of the atmospheric sciences*, *69*(9), 2699–2716.

Igel, M. R., & Biello, J. A. (2020). The nontraditional coriolis terms and tropical convective clouds. *Journal of the Atmospheric Sciences*, *77*(12), 3985–3998.

Liang, X., & Chan, J. C. (2005). The effects of the full coriolis force on the structure and motion of a tropical cyclone. part i: Effects due to vertical motion. *Journal of the atmospheric sciences*, *62*(10), 3825–3830.

Marshall, J., & Plumb, R. A. (2008). *Atmosphere, ocean and climate dynamics: an introductory text* (Vol. 93). Academic Press.

Price, J. F. (2010). *A coriolis tutorial, part 1: the coriolis force, inertial and geostrophic motion.* MIT OpenCourseWare.

Stewart, A., & Dellar, P. (2011). The rôle of the complete coriolis force in cross-equatorial flow of abyssal ocean currents. *Ocean Modelling*, *38*(3-4), 187–202.