

# 라그랑지안 관점과 오일러 관점의 이류 모형

최장근 (janggeun.choi@unh.edu)

뉴햄프셔 대학교

2025년 5월

물질의 이류(advection)를 기술하는 방정식을 논한다. 대상을 관측하는 관점에 따라, 물질의 이류는 라그랑지안(Lagrangian) 관점과 오일러(Eulerian) 관점으로 나타낼 수 있다. 라그랑지안 관점에서 이류를 서술하는 방정식과 오일러 관점에서 이류를 서술하는 방정식을 소개하며, 각 관점의 방정식이 다르지 않음을 간단한 수치 실험을 통해 이해하는 것을 목표로 한다.

## 1 지배 방정식

### 1.1 입자 추적 실험과 라그랑지안 관점의 이류

라그랑지안 관점이란 추적 대상의 위치를 따라가며 이루어지는 관측을 의미한다. 해양의 표층 부표(drifter) 관측이 대표적인 라그랑지안 관점의 예시라 할 수 있다. 관측 대상의 정보( $C$ )와 더불어 대상의 현재 위치(2차원 문제를 고려해  $X$ 와  $Y$ )가 핵심 변수가 되며, 각 변수의 지배식은

$$\frac{dC}{dt} = S_o(t) - S_i(t) \quad (1a)$$

$$\frac{dX}{dt} = u \quad (1b)$$

$$\frac{dY}{dt} = v \quad (1c)$$

가 된다. 여기서  $S_o$ 는 대상의 양을 늘리는 기작(source)을 의미하고  $S_i$ 는 대상의 양을 줄이는 기작(sink)을 나타낸다. 이런 기작이 없는( $S_o = 0$ 이며 동시에  $S_i = 0$ ) 대상을 수동 추적자(pассивный траектор)라 부른다. 즉, 라그랑지안 관점에서 수동 추적자의 지배식에서 식 (1a)는

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad (2a)$$

로 간략화 할 수 있다. 이는 적분해 매우 쉽게 풀 수 있으며, 그 해는  $C = C_0$  가 된다. 여기서  $C_0$ 은 초기 조건으로 주어진 대상의 양을 나타내, 이 초기값이 시간이 지나도 바뀌지 않음을 의미한다.

## 1.2 오일러 관점의 이류

오일러 관점은 고정된 위치에서 고정된 위치의 값을 관측하는 것을 나타낸다. 특정 고정 점  $(x, y)$ 에서, 식 (1a)의 좌변을 연쇄 법칙(chain rule)을 사용해 전개하면

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial C}{\partial X}}_{\equiv u} \underbrace{\frac{\partial X}{\partial t}}_{\equiv u} + \underbrace{\frac{\partial C}{\partial Y}}_{\equiv v} \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial t}}_{\equiv v} \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 식 (1a)는

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = S_o - S_i \quad (4)$$

로 나타낼 수 있다. 라그랑지안 관점에서는 지배식이 3개의 연립 상미분 방정식 형태로 나타났지만, 오일러 관점에서는 하나의 편미분 방정식으로 나타난다. 이는 식 (1.1)을 다른 시점에서 다르게 표현했을 뿐 다른 식이 아님에 유의하라. 즉, 이 편미분 방정식 (4)는 라그랑지안 관점에서  $C$ 라는 값이 시간에 따라 변하지 않고 바뀌지 않음을 나타낸다.

## 2 수치 실험

### 2.1 라그랑지안 관점의 추적자 실험

아래와 같은 유동장(velocity field)을 생각하자.

$$\eta = \eta_0 e^{-(x^2+y^2)/L^2} \quad (5a)$$

$$u = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2g\eta_0}{f_0 L^2} y e^{-(x^2+y^2)/L^2} \quad (5b)$$

$$v = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2g\eta_0}{f_0 L^2} x e^{-(x^2+y^2)/L^2} \quad (5c)$$

이는 해면 고도( $\eta$ ; sea surface height)가 2차원 가우스 분포 형태로 볼록하게 원점을 중심으로 쌓여 있고, 흐름( $u, v$ )이 지형류로 주어진 경우를 나타낸다.

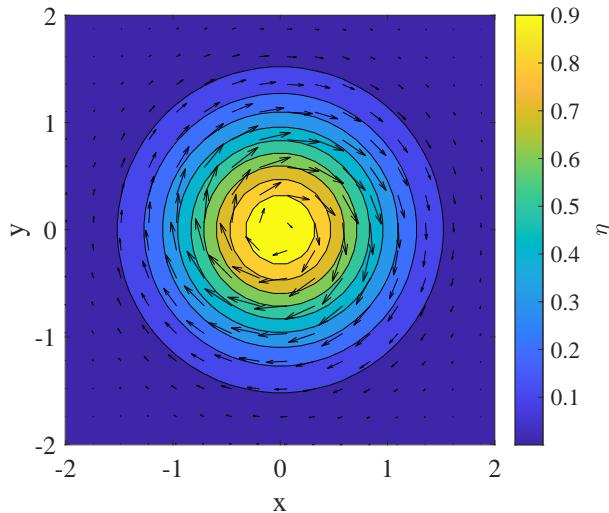


Figure 1: 식 (5)로 주어진 해면 고도와 지형류 유속장

```

4 % setup velocity field and grids
5 syms x y
6 eta=exp(-(x.^2+y.^2)); % eta0/L^1
7 u=-diff(eta,y); % g/f^1
8 v=diff(eta,x); % g/f^1
9
10 etaf=matlabFunction(eta);
11
12 global uf vf
13 uf=matlabFunction(u);
14 vf=matlabFunction(v);

```

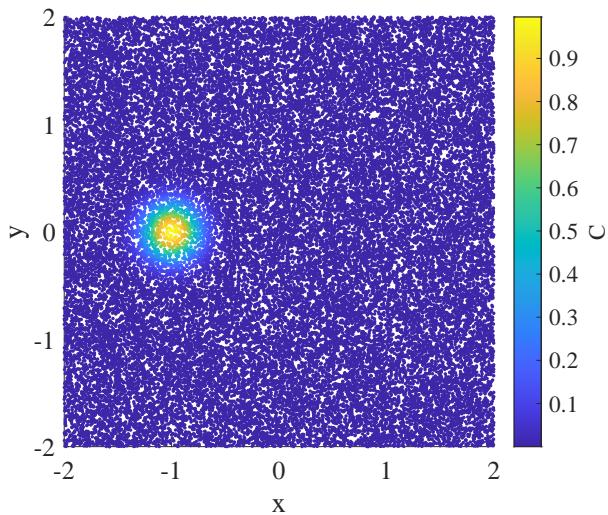


Figure 2: 첨부 코드에서 할당한 초기 조건. 초기 위치( $X, Y$ )는 영역 내 무작위로, 초기  $C$ 값은 특정 위치 주변의 입자들이 주변에 비해 높은 값을 가지도록 설정했다.

각 라그랑지안 관점의 수동 추적자(물 입자)에 대한 지배식으로 식 (1b), (1c), (2a)을 생각하자. 첨부 코드(geo\_advection\_lagrangian.m) 내  $N$ 은 총 입자의 수를 나타낸다. 지배식을 풀기 위해 각 입자에 대한 초기 조건이 필요하다 ( $X(t=0) = X_0, Y(t=0) = Y_0, C(t=0) = C_0$ ). 초기 위치는 영역 내에 무작위로 할당하고, 초기  $C$ 값은 작은 가우스 분포 형태로, 특정 위치의 입자들의  $C$  값이 높도록 할당하자.

```

36 %% setup initial conditions
37
38 % number of particles
39 N=4e4;
40
41 % initial position (random distribution)
42 X0=(rand(1,N)*4)-2;           % initial x-position

```

```

43 Y0=(rand(1,N)*4)-2;           % initial y-position
44
45 % initial value (e.g., concentration)
46 c=exp(-((x+1).^2+y.^2)/(1/4)^2);
47 Cf=matlabFunction(c);
48 C0=Cf(X0,Y0);               % initial c-value

```

이 문제에 대한 수치해는 매트랩 내 여러 내장 함수(ODE solver; <sup>1</sup>)를 사용해 구할 수 있으며, 첨부 코드에서는 Runge-Kutta 기법 기반의 “ode45”함수를 사용했다. 코드 내, 빠른 연산을 위한 벡터화(vectorization) 기법<sup>2</sup>을 사용했음에 유의하라.

```

63 %% solving equations
64 t=0:0.025:5;
65 tic
66 [~,xyc]=ode45(@(t,y)uvc_vectorize(t,y,N) ...
67     ,t,[X0;Y0;C0]);
68 xyc = reshape(xyc,[],N);
69
70 nt=length(t);
71 X=xyc(0*nt+1:1*nt,:);
72 Y=xyc(1*nt+1:2*nt,:);
73 C=xyc(2*nt+1:3*nt,:);
74 t1=toc;

```

---

<sup>1</sup><https://www.mathworks.com/help/matlab/ordinary-differential-equations.html>

<sup>2</sup><https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-system-of-odes-with-multiple-initial-conditions.html>

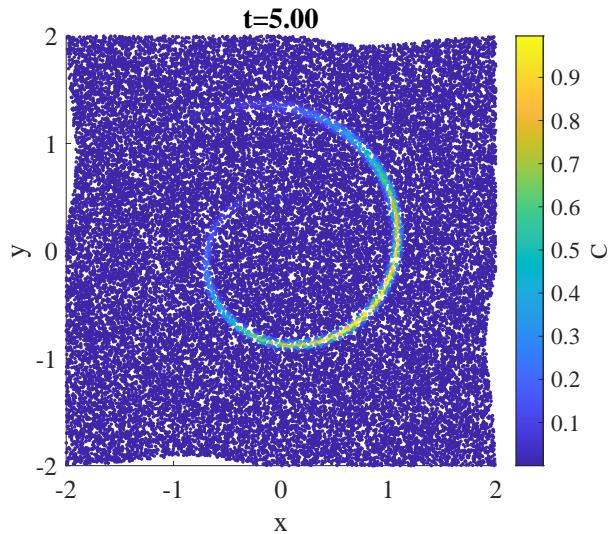


Figure 3: 라그랑지안 관점 추적자 실험 결과. 연립 상미분 방정식 (1b), (1c), (2a)의 수치해이다.

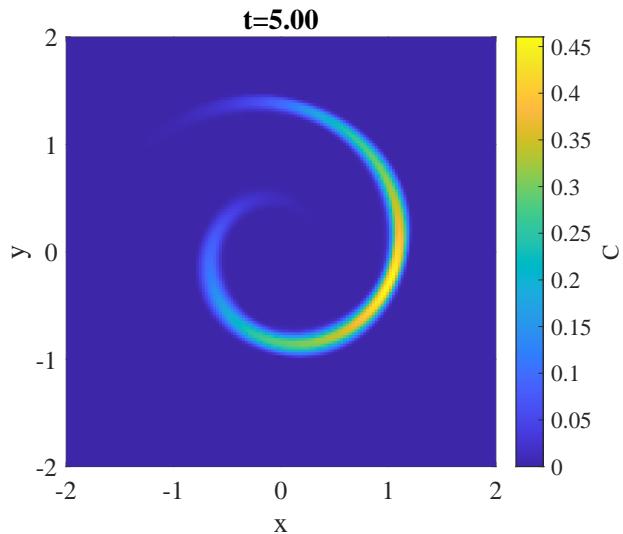


Figure 4: 오일러 관점 추적자 실험 결과. 편미분 방정식 (6)의 수치해이다.

벡터화 기법을 사용하지 않은 예시(L75-87)도 함께 동봉했는데, 연산 시간을

나타내는 변수  $t1$ 와  $t2$ 를 비교해 보길 권한다.

## 2.2 오일러 관점의 추적자 실험

오일러 관점 수동 추적자 지배식

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

의 수치해 연산 코드(geo\_advection\_eulerian.m)는 Kämpf (2009)의 코드를 기반으로 한다. 유한 차분법을 기반으로 Superbee 기법을 사용했다. 코드 내 라 그랑지안 추적자 실험 내 초기 조건과 상응하는 같은 초기 조건을 사용했음에 유의하라. 그림 4가 실험 결과를 보여준다.

**문제 1.** 유동장의 지배식 (5)가

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

을 항상 만족함을 보여라. 이는  $C$ 값 뿐만 아니라  $\eta$ 값도 라그랑지안 관점에서 변하지 않음을 나타내고, 결국 지형류 흐름이  $\eta$ 의 등치선(등고선)을 따라 나타남을 의미한다.

**문제 2.** 유동장 (5)와 이에 따른 라그랑지안 관점 이류 문제((1b)와 (1c))가 해밀토니안 시스템(Hamiltonian system)임을 확인하라.

## 참고 문헌

Kämpf, J. (2009). *Ocean modelling for beginners: using open-source software*. Springer Science & Business Media.