스톰멜 풍성 순환 문제의 수치적 해법과 행렬 연산

최장근 (janggeun.choi@unh.edu)

뉴햄프셔 대학교

2025년 10월

스톰멜 풍성 순환 문제(Stommel's wind-driven circulation)의 지배식은 일종의 포아송 방정식(Poisson equation)이다. 포아송 방정식 형태의 미분 방정식의 수치적 해법에 대해 논하며, 이가 행렬 방정식을 푸는 것임을 확인하는 것을 목표로 한다.

1 지배 방정식

1.1 스톰멜 풍성 순환 문제

스톰멜 풍성 순환 문제의 지배식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + b\frac{\partial\psi}{\partial x} = f(x,y) \tag{1a}$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L_x} = \psi|_{y=0} = \psi|_{y=L_y} = 0 \tag{1b}$$

위와 같은 미분 방정식을 포아송 방정식(Poisson equation)[1]이라 부른다. 편의를 위해, x방향 변동성에 집중하여 $\partial/\partial y = 0$, $f = -1$, $b = 0$을 가정하자. 이 경우, (1a)는

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -1 \tag{2a}$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L_x} = 0 \tag{2b}$$

위의 문제의 해는

$$\psi = -\frac{1}{2}x(x - L_x) \tag{3}$$

임은 쉽게 알 수 있다.

[1] 엄밀히는 $b = 0$인 경우가 흔히 생각하는 정확한 포아송 방정식이다. 즉, (1a)는 조금은 변형한 포아송 방정식이라 볼 수 있다. $F = 0$인 경우를 라플라스 방정식(Laplace equation)이라 부른다.

2 1차원 포아송 방정식의 수치적 해법 예시

2.1 2차 미분에 대한 유한 차분법

이번에는 유한 차분법(finite difference method; FDM)을 사용해 (2)의 수치해를 구해보자. 일차 미분의 경우, 차분 방정식은

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \approx \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \equiv \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\Delta x} \tag{4}$$

의 형태이다. $\psi(x) \equiv \psi_n$와 $\psi(x+\Delta x) \equiv \psi_{n+1}$로 정의했음에 유의하라. 이는 n번째 격자에서 ψ값과 그 다음 번째 격자($n+1$)에서 ψ값을 의미한다. 같은 방식으로 2차 미분의 경우는

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\psi'(x+\Delta x) - \psi'(x)}{\Delta x} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\psi'(x+\Delta x) - \psi'(x)\right) \\
&\approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\psi(x+2\Delta x) - \psi(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \frac{\psi(x+2\Delta x) - 2\psi(x+\Delta x) + \psi(x)}{\Delta x^2} \\
&\equiv \frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{\Delta x^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

과 같이 차분화 할 수 있다. 위에서는 가운데 위치한 $\psi(x+\Delta x) = \psi_n$으로 정의했음에 유의하라.

2.2 적용 예시

위의 식을 바탕으로 (2)의 차분식은 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{\Delta x^2} = -1 \tag{6a}$$

$$\psi_1 = \psi_n = 0 \tag{6b}$$

격자가 5개인 경우를 생각해 보자. 즉 구해야할 미지수는 각 격자점에 대한 ψ값 ($\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_5$) 총 5개이다. 첫 번째($n=1$)와 마지막($n=5$)은 경계 조건을 통해 직접적으로 주어진다($\psi_1 = 0$와 $\psi_5 = 0$). 차분화한 지배식 (6a)으로 부터,

내부 3개 격자점에 대한 3개의 식 식($n = 1$인 경우, $n = 2$인 경우, $n = 3$인 경우)을 얻을 수 있다.

$$\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1 = -\Delta x^2 \tag{7a}$$

$$\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2 = -\Delta x^2 \tag{7b}$$

$$\psi_5 - 2\psi_4 + \psi_3 = -\Delta x^2 \tag{7c}$$

즉, 양 끝단의 경계 조건으로 부터 2개의 식이, 각 격자점에서의 지배식으로 부터 3개의 식이 주어져, 총 5개 미지수에 대한 5개 식이 주어진 간단한 연립 방정식 문제가 된다. 주어진 모든 식을 행렬을 사용해 나타내면

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\vec{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}}_{\vec{\psi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta x^2 \\ -\Delta x^2 \\ -\Delta x^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{F}} \tag{8}$$

가 된다. 위의 식에서 $\vec{M}$의 역행렬을 양변 좌측에 곱함으로 써, 각 격자점에서의 ψ값($\vec{\psi}$)을 구할 수 있다.

```
x=0:4;
dx=x(2)-x(1);
Lx=x(end)-x(1);

M=[1   0   0   0   0
   1  -2   1   0   0
   0   1  -2   1   0
   0   0   1  -2   1
   0   0   0   0   1];
```

```
dx2=dx^2;
F=-[0;dx2;dx2;dx2;0];

psi=M\F;
```

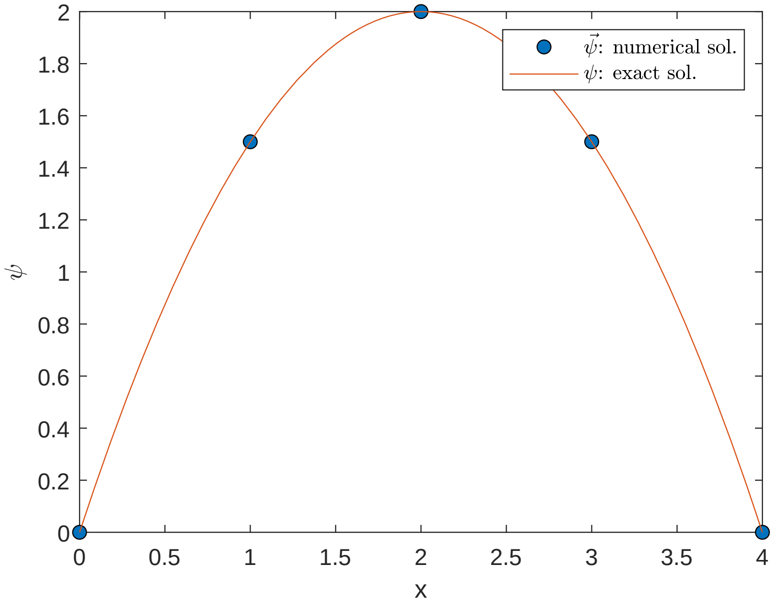

Figure 1: 1차원 포아송 방정식의 수치해와 정해 비교.